Revue d'histoire des mathématiques,
3 (1997), p. 241–293.

LE STATUT DE LA GÉOMÉTRIE DANS QUELQUES TEXTES SUR L'HOMOLOGIE, DE POINCARÉ AUX ANNÉES 1930

Alain Herreman (*)

Résumé. — Le but de cet article est d'analyser le statut de la géométrie dans quelques textes consacrés aux relations d'homologie, depuis les mémoires de Poincaré sur l'*Analysis situs* jusqu'au début des années 1930. Pour cela, nous introduisons la notion de « contenu géométrique » et nous montrons que ce contenu est présent dans les textes de Poincaré, de Veblen et d'Alexander, sans l'être cependant dans ceux d'autres auteurs (Vietoris, Čech). Par ailleurs, l'analyse de certaines distinctions introduites par ces auteurs permet d'apprécier dans quelle mesure l'exigence d'une « signification géométrique » est pour eux contraignante. Cette analyse montre que leurs rapports à la signification géométrique sont variés et elle complète l'analyse du statut de la géométrie obtenue à partir de l'étude du contenu géométrique. Par-delà l'historicité des mathématiques à laquelle ces analyses donnent accès, c'est la diversité sémiotique des textes mathématiques qui est ainsi mise en évidence.

Abstract. — The status of geometry in various contributions on homology, from Poincaré to the 1930s. — This paper sets out to investigate the place and status assigned to geometry in various contributions on the topic of homology relationships, starting with the papers written by Poincaré on *Analysis situs*, and pursuing the issue up to the early 1930s. For that purpose, the concept of «*geometrical content*» is introduced, and is shown to be indeed present in writings by Poincaré, Veblen and Alexander, while it is absent, on the other hand, from the contributions of other authors (Vietoris, Čech). Further, the analysis of certain distinctions introduced by these writers allows an appreciation to be arrived at, of the extent to which their insistence on a «*geometric meaning*» acted as a compelling imperative and constraint in their work. The analysis in fact points to the variety of stances adopted by these mathematicians, with regard to geometric meaning, thus complementing the examination of the status assigned to geometry, on the basis of the analysis of geometrical content. Beyond the historicity of mathematics — as a historical process in the making — thus highlighted by these modes of analysis, the semiotic variance and diversity itself of mathematical writings is thus made manifest.

(*) Texte reçu le 22 mai 1997, révisé le 29 octobre 1997.
Alain Herreman, Équipe REHSEIS, Université Paris 7 (Boîte 7064), 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05 (France). Courrier électronique : herreman@paris7.jussieu.fr.

INTRODUCTION

C'est dans son premier mémoire consacré en 1895 à l'*Analysis situs* que Poincaré introduit l'écriture $v_1 + v_2 + \cdots + v_\lambda \sim 0$ pour exprimer l'existence, sur une variété donnée, d'une variété ayant pour bord les variétés $v_1, v_2, \ldots, v_\lambda$. Il appelle ces relations des *homologies* et affirme qu'elles «*peuvent se combiner comme des équations ordinaires*» [Poincaré 1895, p. 207]. Dès lors, et à l'instar des nombres ou des grandeurs, les variétés deviennent les termes d'un calcul. Ces variétés ne sont pourtant ni des nombres ni des grandeurs, l'*Analysis situs* ayant au contraire pour objet «*l'étude des relations de position des divers éléments d'une figure, abstraction faite de leurs grandeurs*» [Poincaré 1908, p. 39–40]. Ainsi, Poincaré transfère sur des figures géométriques tracées sur une variété des opérations couramment appliquées à des quantités. L'objet de cet article est de préciser le statut de la géométrie dans quelques textes qui, des mémoires de Poincaré jusqu'au début des années 30, ont été consacrés aux relations d'homologie.

Pour préciser le statut de la géométrie dans les mémoires de Poincaré, nous allons commencer par recenser complètement les relations dans lesquelles les variétés s'inscrivent ou les opérations qui leurs sont appliquées. Cela nous permettra de dégager progressivement une caractéristique par laquelle nous définirons le *contenu géométrique* des variétés[1]. La manière dont cette notion aura ainsi été définie à partir de l'analyse de l'ensemble des occurrences des variétés dans ces mémoires nous assurera que la caractéristique retenue est bien impliquée dans ceux-ci, dans les énoncés, les démonstrations et dans les remarques qu'ils contiennent. Ayant ainsi donné un sens précis à la notion de contenu géométrique, nous pourrons alors considérer d'autres textes qui recourent aussi aux relations d'homologie et déterminer dans quelle mesure ce contenu géométrique s'y retrouve.

La description du contenu d'une notion étant obtenue par l'analyse des relations qu'elle entretient avec les autres notions d'un texte, elle est

[1] Le mot « contenu » a un sens technique, adapté des travaux sémiologiques de Hjelmslev [1968, 1971, 1985]. Dans cet article, nous avons essayé de réduire au minimum le recours à un vocabulaire technique ; le lecteur trouvera des précisions sur cette notion dans Herreman [1996]. Pour des remarques sur l'analyse sémiotique des textes mathématiques, voir Herreman [1998b].

strictement déterminée par ce texte et uniquement rapportée à celui-ci (le texte peut être composé de plusieurs articles, comme c'est le cas des mémoires de Poincaré). L'auteur du texte, en particulier, est ainsi totalement ignoré, comme d'ailleurs bien d'autres aspects, notamment ceux concernant le rapport du texte à d'autres textes. Il est cependant possible, toujours sans introduire d'éléments subjectifs ou extérieurs au texte considéré, de trouver dans celui-ci quelques indications sur le rapport de l'auteur à la signification géométrique de certaines de ses notions. Ce rapport se manifeste par des distinctions ou remarques introduites par l'auteur et liées à la présence ou non d'une signification géométrique. Le concept de signification est ici plus vague que celui de contenu, sa description variant suivant les textes et reposant sur des manifestations souvent uniques. Néanmoins, considérer ces distinctions permet de compléter l'analyse du statut de la géométrie obtenue à partir de la seule étude du contenu géométrique.

Ces analyses nous obligent à accorder une attention particulière au vocabulaire des textes étudiés en raison des identifications et des distinctions qu'il suggère. Suivant l'usage nous utiliserons des guillemets pour indiquer qu'une expression est reprise d'un texte. Nous recourrons fréquemment à ces guillemets mais, quand il n'y aura pas de risque de confusion, nous prendrons la liberté de les omettre pour faciliter la lecture (par exemple, nous ne mettrons pas systématiquement *variété* entre guillemets).

Le corpus que nous avons retenu pour ces analyses comprend, outre les mémoires de Poincaré : le livre *Analysis situs* de Veblen [1922], deux articles d'Alexander [1922 et 1926], un article de Vietoris [1927] et un autre de Čech [1932]. Ces textes ont été choisis pour la diversité de l'intervention du contenu géométrique dont ils témoignent et, d'un point de vue historique, pour l'évolution qu'ils suggèrent. Leur importance mathématique pour l'histoire de la topologie algébrique est par ailleurs incontestable, mais ce n'est pas l'objet de cet article de la mettre en évidence, ni même de la prendre en considération.

1. LE CONTENU GÉOMÉTRIQUE DANS LES MÉMOIRES DE POINCARÉ CONSACRÉS À L'*ANALYSIS SITUS*

Les définitions des variétés et de l'homologie

Entre les années 1895 et 1902, Poincaré publie six mémoires consacrés à l'*Analysis situs*. C'est dans le premier qu'il introduit pour la première fois les relations d'homologie et le groupe fondamental. Les cinq mémoires suivants sont des « compléments » dans lesquels il revient sur certaines démonstrations et introduit de nouveaux résultats ou de nouveaux exemples[2]. Voici la définition qu'il donne en 1895 des relations d'homologie :

« *Considérons une variété V à p dimensions ; soit maintenant W une variété à q dimensions ($q \leq p$) faisant partie de V. Supposons que la frontière complète de W se compose de λ variétés continues à $q-1$ dimensions*

$$v_1, v_2, \dots, v_\lambda.$$

Nous exprimerons ce fait par la notation

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_\lambda \sim 0.$$

Plus généralement la notation

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 \sim k_3 v_3 + k_4 v_4,$$

où les k sont des entiers et les v des variétés à $q-1$ dimensions, signifiera qu'il existe une variété W à q dimensions faisant partie de V et dont la frontière complète se composera de k_1 variétés peu différentes de v_1, de k_2 variétés peu différentes de v_2, de k_3 variétés peu différentes de la variété opposée à v_3 et de k_4 variétés peu différentes de la variété opposée à v_4.

Les relations de cette forme pourront s'appeler des homologies.

Les homologies peuvent se combiner comme des équations ordinaires » [Poincaré 1895, p. 206–207].

C'est à partir de cette définition que les nombres de Betti d'une variété V sont introduits : pour un entier m inférieur à la dimension de V, le m-ième nombre de Betti de V est l'entier P_m tel qu'il existe $P_m - 1$ variétés de dimension m sur V qui ne soient liées par aucune relation d'homologie et tel qu'en revanche, toute famille composée de P_m variétés de dimension m soit liée par une telle relation.

[2] Pour une présentation et une analyse de ces exemples, voir Volkert [1994].

Les termes d'une homologie sont donc des variétés et Poincaré donne, dès le premier mémoire, deux définitions de celles-ci. La première est fondée sur une représentation implicite à partir d'un système d'équations et d'inéquations. La seconde introduit un paramétrage local de la variété et elle est, selon Poincaré, «*évidemment la façon la plus générale possible de définir une variété*» [Poincaré 1899, p. 333][3]. Poincaré affirme que les fonctions qui interviennent dans ces définitions peuvent être supposées analytiques puisque les variétés obtenues différeront alors des précédentes d'«*aussi peu que nous voudrons*» [Poincaré 1895, p. 200]. Avec cette hypothèse, il démontre que la deuxième définition est plus générale que la première. Mais Poincaré ne réduit pas les variétés à ces définitions ; il introduit de nouvelles représentations au fur et à mesure que progresse le mémoire et il recourt à l'une ou l'autre d'entre elles quand cela «*facilite singulièrement l'étude*»[4] [Poincaré 1895, p. 229]. C'est ainsi qu'une variété de dimension 3 peut être représentée par un polyèdre, dont certaines faces sont éventuellement identifiées entre elles (c'est la « représentation géométrique » proposée dans le paragraphe 10 du mémoire de 1895), ou encore par la donnée d'un groupe agissant proprement et de manière discontinue sur l'espace euclidien de dimension 3 (« représentation par un groupe discontinu » proposée dans le paragraphe 11 du même mémoire). La représentation par un polyèdre est la plus fréquente et elle intervient dans les trois premiers mémoires.

En fait, Poincaré rapporte rarement les variétés sur lesquelles il raisonne à des systèmes d'équations ou à des paramétrages, et leurs propriétés sont exceptionnellement déduites de ces représentations. Dès lors, pour savoir ce que sont vraiment les variétés dans ces mémoires, il importe de considérer leurs propriétés telles qu'elles ressortent des énoncés des théorèmes, des démonstrations, des remarques, etc., sans se restreindre aux définitions qui en sont données.

Les variétés considérées comme des frontières

Une des principales propriétés des variétés, dans ces mémoires, est de

[3] Pour une histoire du concept de variété, voir Scholz [1980].

[4] Il s'agit en l'occurrence de la représentation d'une variété à partir d'un polyèdre dont certaines des faces ont été « collées » les unes aux autres ; représentation que Poincaré avait considérée dans son étude des groupes fuchsiens en 1882 et qui est très souvent reprise dans ses mémoires.

pouvoir avoir une « frontière » ou encore d'être une « frontière ». Poincaré donne d'ailleurs une définition de la frontière, à partir de la définition analytique de la variété : la frontière s'obtient en remplaçant successivement par une égalité chacune des inégalités strictes qui interviennent dans la représentation analytique de la variété[5]. Suivant cette définition, la frontière ne fait pas partie de la variété. C'est bien ce qu'il ressort de certains raisonnements, mais pas de tous. Ainsi, une des principales propriétés de la frontière est de « séparer »; la frontière est dans ce cas « commune » à deux variétés et appartient à chacune d'elles, ce qui n'est pas conforme à la définition.

Une autre propriété des frontières est de pouvoir être « traversées » et, ce faisant, de permettre de « passer » d'une variété à une autre. Ce sont aussi des propriétés qui interviennent fréquemment dans ces mémoires. En voici un exemple[6] :

«*On ne peut en effet, sortir de $V(a_i^3)$ qu'**en sortant** de V **par sa frontière**, c'est-à-dire, **en traversant** une des b_1, ou qu'**en sortant** de a_i^3 **par sa frontière**, c'est-à-dire **en traversant** une face a_j^2, et, comme on reste sur V, **en traversant** une des lignes $V(a_j^2)$* » [Poincaré 1899, p. 310].

Enfin, on peut encore distinguer la frontière considérée comme bord (le terme « bord » n'est pas utilisé par Poincaré) et c'est à ce titre qu'elle intervient dans les relations d'homologie : $v_1 + v_2 + \cdots + v_\lambda \sim 0$ si les $v_1, v_2, \ldots, v_\lambda$ constituent la frontière (bord) d'une variété de V.

S'il est possible de distinguer ces diverses propriétés, la notion de frontière se prête à chacune d'entre elles : une frontière est bien à la fois une variété qui « sépare », qui peut être « traversée » et qui peut être le bord d'une autre variété. Ainsi, toutes ces relations s'appliquent aux frontières et bien qu'une définition en soit donnée, leur usage n'est pas rapporté à celle-ci et peut même être contradictoire avec elle (comme l'appartenance

[5] Si l'on considère par exemple le disque unité défini par $x^2 + y^2 < 1$, son bord est le cercle unité d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Le bord a été obtenu en remplaçant le signe « $<$ » par le signe « $=$ ». On trouve cette remarque, par exemple, chez Betti [1871], ou chez Picard et Simart : « *Avec la définition générale des variétés résultant du prolongement analytique d'une représentation paramétrique, une frontière est formée par l'ensemble des points correspondant à une des inégalités relatives aux paramètres, cette inégalité étant transformée en égalité* » [1897, p. 21].

[6] Les passages figurant en gras dans les citations sont soulignés par nous.

ou non de la frontière à la variété).

Les variétés subdivisées en polyèdres : ensembles de points et ensembles de variétés

Parmi les multiples représentations des variétés, la représentation par un polyèdre est particulièrement importante dans la mesure où elle intervient dans la démonstration de la plupart des théorèmes de ces mémoires. Un polyèdre[7] P est une variété V de dimension n subdivisée en variétés de dimensions $n, n-1, \dots, 0$; exactement comme un cube est « subdivisé » en un certain nombre de faces, d'arêtes et de sommets. Un polyèdre P' est dit *dérivé* de P quand il se déduit de celui-ci par subdivision. Les opérations de « subdivision » et d'« annexion » permettent de passer d'un polyèdre à un polyèdre dérivé, et inversement ; elles sont le ressort de nombreuses démonstrations. Leur examen permettra de préciser la relation entre une variété et ses polyèdres et complétera donc notre description du contenu géométrique des variétés.

L'annexion de deux variétés α et β de dimension p d'un polyèdre P' consiste à « supprimer » la variété frontière γ de dimension $p-1$ qu'elles ont en commun pour obtenir ainsi une variété de dimension p du polyèdre P dont P' dérive. Dans le premier mémoire, cette opération intervient notamment dans la démonstration du théorème d'Euler selon lequel le nombre $N = \alpha_p - \alpha_{p-1} + \alpha_{p-2} - \cdots \pm \alpha_0$ (où α_i est le nombre d'éléments de dimension i d'un polyèdre) est le même pour deux polyèdres issus de décompositions différentes de la variété V. L'annexion intervient

[7] « *Soit donc V une variété fermée à p dimensions. Subdivisons-la en un certain nombre de variétés v_p à p dimensions ; ces variétés v_p ne seront pas fermées et leurs frontières seront formées par un certain nombre de variétés v_{p-1} à $p-1$ dimensions ; les frontières des v_{p-1} seront formées à leur tour par un certain nombre de variétés v_{p-2} à $p-2$ dimensions, et ainsi de suite ; j'arriverai ensuite à un certain nombre de variétés v_1 à une dimension, qui auront pour frontières un certain nombre de points isolés ou de variétés à zéro dimension que j'appellerai v_0.*

La variété V peut avoir des nombres de Betti quelconques, mais je suppose expressément que les variétés $v_p, v_{p-1}, \dots, v_1$ sont simplement connexes.

J'appellerai $\alpha_p, \alpha_{p-1}, \dots, \alpha_1$ et α_0 le nombre des v_p, des v_{p-1},..., des v_1 et des v_0.

La figure ainsi formée par toutes ces variétés pourra s'appeler un polyèdre ; car l'analogie avec les polyèdres ordinaires est évidente. Un polyèdre ordinaire est, en effet, une variété fermée V à deux dimensions, qui est subdivisée en un certain nombre de variétés v_1 [sic]*, qui sont les faces. Les faces ont pour frontières un certain nombre de variétés v_1, qui sont les arêtes et qui admettent à leur tour pour frontières un certain nombre de variétés v_0 appelées* sommets » [Poincaré 1895, p. 270–271].

aussi dans le deuxième complément [1900], dans la démonstration de l'invariance des « coefficients de torsion », d'où Poincaré déduit la relation de dualité pour ces mêmes coefficients. Or, on remarquera que l'annexion des deux variétés α et β n'est pas une différence ensembliste. En effet, aucun point n'a été supprimé au cours de cette opération : les polyèdres P et P' sont constitués des mêmes points puisqu'ils sont l'un comme l'autre des subdivisions de la même variété. Mais l'annexion n'est pas non plus une union ensembliste puisque la frontière γ, « commune » aux deux variétés α et β, a été explicitement supprimée. Ainsi, l'annexion n'est ni tout à fait une différence ensembliste, ni tout à fait une union. On pourrait montrer de la même manière que ces opérations ensemblistes élémentaires ne rendent pas non plus compte de la subdivision d'une variété ou d'un polyèdre.

La comparaison de l'annexion ou de la subdivision à des opérations sur des ensembles met en évidence un certain jeu entre, d'une part, l'ensemble de points qui est commun à la variété V et à ses polyèdres P, et, d'autre part, les ensembles de variétés qui composent les polyèdres et qui les distinguent les uns des autres. Ainsi, en tant qu'ensembles de *points*, les polyèdres ne diffèrent pas de la variété et ne diffèrent pas entre eux. Mais ces polyèdres diffèrent entre eux et de la variété en tant qu'ensemble de *variétés*. Il apparaît ainsi qu'une variété est à la fois l'ensemble de ses points et les ensembles de variétés en lesquels elle peut être subdivisée[8]. Poincaré ne confond évidemment pas la variété V et ses polyèdres, mais le fait qu'une variété et ses polyèdres soient composés de points, et que ce soient les mêmes points, établit entre eux une relation qui intervient dans la plupart des raisonnements présentés dans ces mémoires.

Le polyèdre réciproque et le théorème de dualité pour les nombres de Betti

Donnons un exemple du jeu entre ces ensembles. Le théorème de dualité pour les nombres de Betti d'une variété fermée de dimension n affirme, tel qu'il est énoncé par Poincaré, que les nombres de Betti également distants des extrêmes sont égaux, soit : $P_k = P_{n-k}$. Poincaré donne une première démonstration de ce théorème dans le mémoire

[8] Quand il conviendra de marquer la distinction, nous appellerons « cellules » ces variétés qui subdivisent la variété principale. Il importe de remarquer que ce terme n'est pas utilisé par Poincaré qui emploie simplement, suivant la dimension, « sommet », « arête », « face », « case » ou simplement « variété ».

de 1895. À la suite d'une critique du mathématicien danois Paul Heegaard [1898] remettant en cause la validité de cette égalité, il en propose une nouvelle démonstration dans le mémoire suivant [Poincaré 1899]. En voici brièvement les étapes. Poincaré introduit les nombres de Betti *réduits* qu'il définit de manière analogue aux nombres de Betti mais en ne tenant compte que des homologies obtenues à partir des combinaisons des variétés dont le polyèdre est composé. Il démontre alors que les nombres de Betti sont égaux aux nombres de Betti réduits et il établit pour ces derniers la relation de dualité. Pour cela, il définit le polyèdre réciproque d'un polyèdre et montre que les nombres de Betti réduits de ces polyèdres sont égaux. Comme le k-ième nombre de Betti réduit du polyèdre réciproque est égal au $(n-k)$-ième nombre de Betti réduit du polyèdre, l'égalité entre les nombres de Betti réduits en résulte et le théorème est ainsi établi. L'introduction du polyèdre réciproque est évidemment cruciale pour cette démonstration. Sans entrer dans le détail de sa construction, il importe de préciser que le polyèdre et le polyèdre réciproque sont des subdivisions d'une seule et même variété et que s'ils diffèrent l'un de l'autre en tant qu'ensembles de variétés, ils sont identiques en tant qu'ensembles de points. Donnons un exemple où cela intervient.

Considérant un polyèdre P de dimension 3 et son polyèdre réciproque P', Poincaré démontre que «*les nombres de Betti relatifs aux arêtes de P et à celles de P' sont égaux, de même que les nombres de Betti relatifs aux faces de P et à celles de P'* » [Poincaré 1899, p. 325] (la démonstration est donnée p. 316–319). Il s'agit là de la relation de dualité en dimension 3 pour les nombres de Betti réduits. Pour cela il considère une « ligne brisée » fermée $\sum b_i^1$ composée d'arêtes b_i^1 du polyèdre P' et il construit ensuite d'autres lignes brisées A_k, formées d'arêtes de P telles que : «$\sum b_i^1 \sim \sum A_k$» [Poincaré 1899, p. 318]. Cette homologie établit une relation entre des lignes qui appartiennent à chacun des polyèdres : une ligne brisée composée de variétés de P' et une ligne brisée composée de variétés de P. Pour que cette homologie soit envisageable, il faut que les deux lignes brisées $\sum b_i^1$ et $\sum A_k$ constituent ensemble la frontière complète d'une variété W. Mais cette variété ne peut être obtenue à partir des seules variétés qui composent P et P' ; elle doit nécessairement être composée de variétés qui traversent aussi bien les variétés qui composent P que celles qui composent P'. Il faut pour cela considérer les deux polyèdres non seulement comme des ensembles de variétés, mais aussi comme des ensembles de points. Si, de plus, on regarde la construction de W, il apparaît effectivement qu'elle requiert que les deux polyèdres soient non seulement composés de points, mais encore qu'ils soient composés des mêmes points, ceux de W, qui sont aussi ceux de la variété V dont P et P' sont chacun des subdivisions. Dans cette démonstration, le polyèdre et le polyèdre réciproque interviennent non seulement en tant qu'ensembles de variétés, mais aussi en tant qu'ensembles de points, et des ensembles de points identiques.

Ce jeu entre l'ensemble de points de V et les ensembles de variétés obtenus par subdivision intervient dans la plupart des étapes de la démonstration de la dualité reliant les nombres de Betti. On le retrouve aussi dans le mémoire suivant, celui de 1900, dans lequel Poincaré étend à des polyèdres de dimension quelconque les raisonnements précédents présentés pour des polyèdres de dimension 3 (voir en particulier les démonstrations de la relation de dualité pour les coefficients de torsion). C'est par ce jeu que se fait la mise en relation de la variété et d'un polyèdre, d'un polyèdre et d'un polyèdre dérivé, et d'un polyèdre et de son polyèdre réciproque. Il apparaît ainsi que les variétés peuvent être à la fois un seul ensemble de points et donner lieu à des polyèdres différents composés de ces points.

Caractérisation du contenu géométrique

Ce qui précède nous conduit à convenir qu'une variété (ou encore un complexe, une chaîne, etc.), a un *contenu géométrique* si elle est, dans un même texte, considérée à la fois comme ensemble de points et comme ensemble de cellules ; ces deux ensembles étant ainsi identifiés et cette identification étant impliquée dans des démonstrations. Suivant cette définition, nous avons montré que les variétés ont un contenu géométrique dans les mémoires de Poincaré. Il n'est pas essentiel ici d'épiloguer longuement sur l'adjectif « géométrique ». On se contentera pour justifier son emploi d'évoquer les multiples représentations que l'on peut avoir d'un même objet dans l'espace et dans le temps ; cet objet, réel ou imaginé, assurant l'unité et la cohérence de ces représentations. La caractérisation que nous avons adoptée pour le contenu géométrique reprend l'idée d'une multiplicité de représentations, en se limitant à deux : la représentation par un ensemble de points et par un ensemble de cellules.

Cette caractérisation est évidemment très restrictive puisque l'on ne peut espérer trouver la conjonction de ces deux représentations dans tous les textes dans lesquels on s'accorderait pourtant à reconnaître des contenus que l'on pourrait qualifier de « géométriques ». Cela étant, elle a l'intérêt d'être effective : il est toujours possible de déterminer sans ambiguïté si un texte fait ou non intervenir des contenus géométriques. Ainsi, nous avons vu que cette caractéristique était impliquée dans de nombreux raisonnements tout au long des mémoires de Poincaré. Nous verrons qu'elle est aussi à l'œuvre dans d'autres textes, sans l'être pour autant dans tous. Il sera ainsi possible de comparer sous ce rapport des textes différents et nous verrons que cette caractérisation est, en définitive, assez générale. Elle présente aussi l'intérêt de faire ressortir le caractère non ensembliste de ce contenu puisqu'elle repose sur l'identification d'un ensemble de points avec un ensemble de parties de celui-ci. Ainsi, mettre en évidence cette caractéristique dans un texte, c'est déjà montrer que certains des raisonnements qu'il présente sont incompatibles avec des principes ensemblistes. Cela donne un accès à l'analyse des transformations, historiques et épistémologiques, qui peuvent être rapportées à l'introduction d'ensembles en mathématiques.

L'addition des variétés

S'il est nécessaire de prendre en considération les notions de variété et de frontière pour la description des homologies, c'est néanmoins l'introduction d'une addition sur les variétés ($v_1 + v_2 + \cdots + v_\lambda \sim 0$ et $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \sim 0$) qui marque incontestablement une des ruptures les plus évidentes entre ces mémoires et les travaux antérieurs de Riemann, Listing, Dyck, Betti, etc. Avec cette addition, Poincaré introduit un calcul dont les termes ne sont plus des nombres ou des grandeurs, mais des variétés. Elle ne fait cependant l'objet d'aucune définition ni d'aucune remarque particulière de sa part. Plus peut-être que l'addition des variétés, c'est d'ailleurs l'addition des *relations d'homologie* qui semble au cœur du propos de Poincaré [Herreman 1998a]. Cependant, l'addition n'intervient pas seulement dans les homologies ou entre homologies, mais aussi dans les « équivalences » qui servent à définir le groupe fondamental. Dans ce dernier cas, les variétés sont toujours des contours (variétés de dimension 1) fermés qui partent tous d'un même point. Quelles que soient les différences entre ces deux additions, ces mémoires comportent de nombreuses occurrences d'additions de variétés.

Quand les variétés additionnées sont contiguës, ce qui est souvent le cas, l'addition est alors une annexion. Voici un exemple où cette assimilation est explicite :

« *Si la région δ est régulière, nous pourrons la supprimer et annexer γ à γ'. La région $\gamma + \gamma'$ séparera alors α de β* » [Poincaré 1895, p. 273].
De plus, quand il s'agit de contours, comme c'est souvent le cas dans le premier mémoire, l'ordre des termes dans la somme correspond à l'ordre dans lequel se succèdent les arcs ou les arêtes du contour.

L'addition n'est cependant pas toujours appliquée à des variétés contiguës et il n'est donc en général pas possible de la réduire à une annexion. Quand les variétés ne sont pas contiguës, les additionner revient à les considérer « ensemble » . Il en est ainsi dans le rappel de la définition de l'homologie dans le quatrième complément publié en 1902 (on remarquera en même temps que la définition n'a guère changé depuis le premier mémoire) :

« *Je rappelle qu'étant donné une variété V fermée à p dimensions, je trace sur cette variété d'autres variétés, fermées ou non, d'un moins grand nombre de dimensions ; je désigne par W_q une variété à q dimensions tracées de la sorte sur V.*

Si $\sum W_q$ est ***un ensemble de variétés*** *à q dimensions et $\sum W_{q-1}$* ***un ensemble de variétés*** *à $q-1$ dimensions, la congruence*

$$\sum W_q \equiv \sum W_{q-1}$$

*signifie (par définition) que $\sum W_{q-1}$ forme la frontière complète de l'****ensemble de variétés*** *$\sum W_q$. J'exprime le même fait sans mettre en évidence $\sum W_q$ en écrivant la relation*

$$\sum W_{q-1} \sim 0$$

que j'appelle une homologie » [Poincaré 1902b, p. 397–398].

L'addition sert aussi à exprimer la relation entre une variété et les variétés en lesquelles elle a été subdivisée. En voici un exemple :

« $a^q_{j_0} = \sum B(q, q, j_0, k_0)$ » [Poincaré 1899, p. 308]
Ici, $B(q, q, j_0, k_0)$ est une des variétés de dimension q de la subdivision de la variété $a^q_{j_0}$ qui fait elle-même partie d'un polyèdre. Cette égalité entre $a^q_{j_0}$ et $\sum B(q, q, j_0, k_0)$ exprime l'identification d'une variété ($a^q_{j_0}$) à

une certaine subdivision de celle-ci ($\sum B(q, q, j_0, k_0)$). Elle est introduite sans explication comme si la relation et le symbolisme allaient de soi. Remarquons que cette identification repose entièrement sur la propriété caractéristique du contenu géométrique. Nous retrouverons dans d'autres textes ce recours à l'addition pour exprimer la subdivision.

Dans tous ces exemples, l'addition se rapporte au contenu géométrique des variétés. Mais il s'agit à chaque fois de combinaisons linéaires sans coefficients (ou, si l'on veut, à coefficients 1). Ce sont d'ailleurs les combinaisons qui interviennent le plus souvent. Cependant, il arrive aussi à Poincaré de considérer des combinaisons linéaires à coefficients entiers. Or, quand les variétés ne sont pas des contours, ces combinaisons à coefficients entiers ne sont plus rapportées à un contenu géométrique. Poincaré ne considère en effet jamais l'intersection de telles combinaisons avec une variété, il ne les déforme pas, ne les subdivise pas ; elles ne sont pas non plus « traversées » . En fait, ces combinaisons interviennent dans ces mémoires en tant qu'expressions, c'est-à-dire en tant que marques graphiques. Ainsi, l'addition de variétés n'est pas toujours rapportée à un contenu géométrique et, plus généralement, les expressions ne sont pas toujours rapportées à un tel contenu.

Les relations d'homologie

Par définition, l'homologie $v_1 + v_2 + \cdots + v_\lambda \sim 0$ signifie que $v_1 + v_2 + \cdots + v_\lambda$ est la frontière complète d'une variété de V. C'est bien aussi la signification qui est la plus fréquemment et la plus systématiquement à l'œuvre dans ces mémoires. Pour établir *a priori* l'existence d'une variété dont la frontière complète est $v_1 + v_2 + \cdots + v_\lambda$, Poincaré recourt souvent à la « simple connexité »[9] des variétés qu'il considère ; en voici un exemple typique :

«*Comme* a_i^3 *est* ***simplement connexe****, cette ligne fermée* $[d + \sum a_q^1 - d'$, *contenue dans* $a_i^3]$ *sera la frontière d'une variété à deux dimensions, intérieure à* a_i^3, *ce que j'exprimerais par l'homologie*

$$c \sim d + \sum a_q^1 - d'$$ » [Poincaré 1899, p. 316].

[9] Voici les définitions qu'il donne : «*Il paraîtra naturel de restreindre le sens du mot* ***simplement connexe*** *et de le réserver aux* ***variétés****, dont le groupe G* [groupe fondamental] *se réduit à la substitution identique*» [Poincaré 1895, p. 257].

«*Toutes ces* ***variétés*** *seront* ***simplement connexes****, c'est-à-dire homéomorphes à l'hypersphère*» [Poincaré 1900, p. 339].

La simple connexité intervient tout au long de ces mémoires, notamment dans la relation entre le groupe fondamental et l'homologie. Cette fréquence contraste avec la diversité des caractérisations qui sont données de cette propriété. L'équivalence de ces caractérisations est d'ailleurs l'enjeu de la question par laquelle se conclut le dernier complément[10] :

«*Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas* ***simplement connexe*** *?*»[Poincaré 1904, p. 498].

Le problème analogue pour l'homologie, savoir si l'hypersphère est caractérisée du point de vue de l'*Analysis situs* par ses nombres de Betti, était énoncé en conclusion du mémoire de 1900 :

«*Tout polyèdre qui a tous ses nombres de Betti égaux à* 1 *et tous ses tableaux T_q bilatères est simplement connexe, c'est-à-dire homéomorphe à l'hypersphère*» [Poincaré 1900, p. 370].

Poincaré a résolu ce problème par la négative dans le dernier mémoire. La simple connexité est donc au cœur de problèmes mathématiques reconnus par Poincaré. On retiendra pour notre propos qu'elle est un argument auquel il recourt fréquemment pour affirmer l'existence d'une homologie.

C'est encore le fait de former la frontière complète d'une variété qui intervient dans le rapport entre l'homologie et l'emploi des intégrales. En effet, juste après la définition des nombres de Betti, Poincaré consacre un paragraphe appelé «*Emploi des intégrales*» dans lequel il considère le lien entre les nombres de Betti et les périodes d'une intégrale multiple. Il établit plus précisément que le nombre de périodes d'une intégrale d'ordre m, $\int \sum X_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}\,\mathrm{d}x_{\alpha_1}\,\mathrm{d}x_{\alpha_2}\cdots\mathrm{d}x_{\alpha_m}$, étendue à une variété V, est égale à $P_m - 1$. Cette relation entre les périodes et les variétés repose sur le résultat suivant :

«*Supposons que la frontière complète de V' se compose des k variétés à m dimensions*

$$W_1, W_2, \ldots, W_k,$$

de sorte que $W_1 + W_2 + \cdots + W_k \sim 0$.

Alors si l'intégrale (11) $[\int \sum X_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}\,\mathrm{d}x_{\alpha_1}\,\mathrm{d}x_{\alpha_2}\cdots\mathrm{d}x_{\alpha_m}]$ *satisfait aux conditions* (12) [d'intégrabilité] *dans le domaine D, la somme*

[10] En ce qui concerne la « conjecture de Poincaré», voir Volkert [1996].

algébrique des intégrales (11) *étendue aux variétés* $W_1, W_2, \ldots, W_k$ *est nulle. Il faut, bien entendu, pour chacune d'elles, faire attention au sens de l'intégration* » [Poincaré 1895, p. 211].

Ainsi, l'existence d'une homologie implique l'annulation de l'intégrale calculée sur les variétés $W_1, W_2, \ldots, W_k$. Poincaré recourt à de telles intégrales pour montrer, en fait, qu'il n'existe pas d'homologie entre certaines variétés, c'est-à-dire pour montrer leur indépendance relative à cette relation [Poincaré 1895, p. 266, 268]. Comme pour les homologies établies par simple connexité, l'annulation d'une intégrale prise sur des variétés est due à l'existence d'une variété dont ces variétés forment la frontière et à l'invariance de cette intégrale par déformation à l'intérieur de cette variété. Il est à noter que cet emploi des intégrales est d'emblée introduit par Poincaré, mais qu'il n'intervient qu'exceptionnellement dans ses mémoires, et surtout, qu'il disparaîtra à peu près complètement des travaux relatifs à l'homologie qui suivront. Ce lien entre l'intégration et les nombres de Betti ne sera repris que dans quelques travaux de la fin des années 1920 : dans une note aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris* de É. Cartan [1928] et surtout dans le mémoire de G. de Rham publié en 1931 (précédé d'une note aux *CRAS* en 1929).

Les homologies sont donc rapportées à la notion de frontière et impliquent des contenus géométriques. Avant que Poincaré ne définisse les homologies dans le mémoire de 1895, les mathématiciens s'étaient bien sûr déjà intéressés aux variétés qui forment la frontière d'une autre variété. Poincaré cite Riemann, Betti, Dyck et Picard, et il n'est effectivement pas difficile de trouver dans leurs textes des définitions qui fassent intervenir ainsi des frontières. Mais les relations d'homologie introduites par Poincaré sont surtout remarquables par leur analogie avec les « équations ordinaires ». Or, comme nous l'avons montré pour l'addition des variétés, la possibilité de combiner des homologies n'est pas rapportée à leur contenu géométrique. Ainsi, des expressions, notamment celles des variétés ou de leurs combinaisons, peuvent dans certains arguments être rapportées à ce contenu, mais aussi être considérées, dans d'autres, comme des expressions sans contenu géométrique. Les variétés et les homologies ne se réduisent donc pas à ce contenu. Il faudrait, par exemple, ajouter encore les représentations arithmétiques des variétés et des homologies par des tableaux de nombres entiers qui leur confèrent un contenu que l'on peut qualifier d'arithmétique. Sans entrer dans la définition et l'analyse de ces différents contenus, et du passage des uns aux autres, il importe de souligner que le contenu géométrique coexiste avec d'autres et que cette coexistence intervient dans de nombreuses démonstrations (voir [Herreman 1996]).

2. LE RAPPORT DE POINCARÉ À LA SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE : HOMOLOGIES PAR DIVISION ET SANS DIVISION

Dans les pages qui précèdent, nous avons distingué une propriété pour caractériser le contenu géométrique. Tout en ayant souligné l'importance de ce contenu, nous avons vu que les raisonnements n'étaient pas cependant tous rapportés à celui-ci. Nous allons compléter cette étude en essayant de préciser maintenant le rapport de Poincaré à ce contenu. Il nous faut ici utiliser le concept plus général de « signification » (ou d'« interprétation »). Le contenu est une conception très restrictive de la signification. En effet, la description d'un contenu, par exemple celui d'une variété, se limite toujours à un texte, alors que sa signification, pour l'auteur ou les lecteurs, impliquera de nombreux autres textes, de natures variées pouvant inclure des correspondances ou des communications orales. La signification d'une notion peut changer avec les individus, ce qui n'est pas le cas du contenu qui est rapporté à un texte, et non à ses lecteurs ou à son auteur. Les restrictions retenues pour le concept de contenu sont justifiées par les difficultés que l'on rencontre dès que l'on veut donner une description rigoureuse de la signification rapportée à un individu (par exemple, ce qu'est une variété pour Poincaré). Sans quitter l'analyse des mémoires de Poincaré consacrés à l'*Analysis situs*, il est néanmoins possible, à partir de certaines distinctions introduites par leur auteur, d'apprécier dans quelle mesure l'exigence d'une signification géométrique est pour lui contraignante. Cela permet de réintroduire, dans une certaine mesure, l'auteur du texte qui, jusqu'à présent, avait été écarté. C'est ce que nous allons maintenant présenter à partir de l'analyse de plusieurs distinctions que Poincaré introduit à propos de la division des homologies.

Les critiques de Heegaard, auxquelles nous avons déjà fait allusion, conduisent Poincaré à distinguer dans son premier complément deux définitions des nombres de Betti. D'une part la sienne, selon laquelle des variétés $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendantes quand il n'existe entre elles aucune homologie à coefficients entiers $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \sim 0$, et d'autre part celle qu'il attribue à Betti, selon laquelle ces variétés sont indépendantes si elles ne satisfont pas à une homologie de la forme $v_1 + v_2 + \cdots + v_n \sim 0$. Dans la définition de Poincaré, l'indépendance linéaire est rapportée à toutes les combinaisons entières, c'est-à-dire qu'il est possible qu'« *une même variété v_1 se trouve plusieurs fois* » [Poincaré 1899, p. 291], alors que dans celle qu'il attribue à Betti, chaque variété ne peut figurer qu'une seule fois. Il y a donc deux manières de définir les nombres de Betti suivant la définition de l'indépendance choisie. Poincaré va montrer que ces deux définitions ne coïncident pas et que le théorème incriminé n'est effectivement pas valable avec la définition attribuée à Betti, mais qu'il l'est avec la sienne [Poincaré 1899, p. 292].

Dans le premier et le deuxième compléments, il compare ces définitions et détermine à quelles conditions elles coïncident. Cela le conduit à distinguer les variétés pour lesquelles il est possible de trouver une homologie de la forme $dv \sim 0$, où d est un nombre entier supérieur à 1, sans que l'homologie $v \sim 0$ soit valable (ce sont les variétés « avec torsion »). Pour ces variétés, les deux définitions ne peuvent pas coïncider puisque l'homologie $dv \sim 0$ est comptée dans la définition de Poincaré, mais pas dans celle attribuée à Betti. Dans ce cas, et bien que v ne soit pas elle-même la frontière complète d'une variété, Poincaré va néanmoins admettre qu'il y a une homologie $v \sim 0$, celle-ci étant obtenue « par division » de $dv \sim 0$. Il distingue ainsi deux sortes d'homologies : celles qui sont obtenues « par division » et celles qui sont obtenues « sans division ». Dans certains cas, toutes les homologies peuvent être obtenues sans division à partir des homologies fondamentales, il n'y donc pas lieu de faire de distinction entre les deux définitions. Dans les autres cas, celle-ci est nécessaire puisqu'il existe des homologies obtenues par division qui ne peuvent l'être autrement. Ce sont là, à peu près résumées, les considérations mathématiques liées à la division des homologies dans ces mémoires. Voyons maintenant d'autres distinctions qui les accompagnent.

Au début du complément dans lequel il introduit l'opposition homologie « par division » *versus* « sans division » , Poincaré précise sa définition des nombres de Betti et rappelle les opérations qu'il est possible d'effectuer sur les homologies : « *D'après cette définition, on peut additionner les* *homologies, les soustraire les unes des autres, les multiplier par un nombre entier*» [Poincaré 1899, p. 291]. La division ne figure pas parmi ces opérations, qui sont effectivement celles qu'il a définies et appliquées dans le premier mémoire. Elle est introduite dans une phrase distincte qui suit la citation précédente, avec un passage à la ligne :

«*Nous* ***conviendrons*** *également qu'il est permis de diviser une homologie par un nombre entier, quand tous les coefficients sont divisibles par cet entier. Par conséquent, s'il y a une variété à* $p+1$ *dimensions, dont la frontière complète sera constituée par quatre fois la variété* v_1*, nous* ***conviendrons*** *qu'on peut écrire non seulement l'homologie*

$$4v_1 \sim 0,$$

mais encore l'homologie

$$v_1 \sim 0\,;$$

de sorte que cette homologie signifie qu'il y a des variétés à $p+1$ *dimensions, qui admettent pour frontière complète la variété* v_1 *ou un certain nombre de fois cette variété.*

L'homologie

$$2v_1 + 3v_2 \sim 0$$

signifie qu'il y a des variétés à $p+1$ *dimensions, qui ont pour frontière complète deux fois* v_1 *et trois fois* v_2*, ou quatre fois* v_1 *et six fois* v_2*, ou six fois* v_1 *et neuf fois* v_2*, etc.*» [Poincaré 1899, p. 291].

Le retour à la ligne, l'insistance particulière sur le caractère conventionnel (les italiques dans «nous *conviendrons*» sont de Poincaré), les détails donnés pour expliquer la division d'une homologie indiquent bien que la division des homologies a un statut à part.

Cela se retrouve dans le mémoire suivant lors du « Rappel des principales définitions » : «*Nous combinerons les congruences* (1) *et les homologies* (2) *par addition, soustraction, multiplication,* ***et quelquefois par division***» [Poincaré 1900, p. 339]. La précision selon laquelle les homologies seront combinées « quelquefois par division » place cette opération à part des trois autres et annonce qu'elle sera utilisée avec parcimonie. Dans le cinquième et dernier complément on peut lire aussi :

«*Nous aurons donc quatre sortes de relations : les équivalences propres, où l'on n'a pas le droit d'intervertir l'ordre des termes ; les équivalences* *impropres, où l'on peut changer l'ordre des termes, mais à la condition d'en respecter l'*ordre circulaire *; les homologies sans division où l'on peut intervertir cet ordre d'une manière quelconque et qu'on peut additionner, soustraire et multiplier ;* ***enfin les homologies par division qu'on peut, en outre, diviser*** » [Poincaré 1904, p. 466].

Les homologies « par division » constituent ici explicitement une quatrième sorte de relation, bien distincte des homologies « sans division » . La division des homologies est donc dans tous ces mémoires distinguée des trois autres opérations. Elle s'apparente aux autres dans la mesure où les homologies sont considérées comme des « équations ordinaires », c'est-à-dire dans la mesure où les homologies sont rapportées à leurs expressions. Mais les homologies obtenues par division n'ont effectivement pas la même signification géométrique que les homologies sans division (ce n'est pas la variété, mais un de ses multiples, qui est la frontière complète d'une variété).

Cette distinction de deux types d'homologies est doublée d'une autre plus directement épistémologique. En effet, Poincaré divise rarement une homologie sans mettre en avant le caractère « conventionnel » de cette opération ; en voici deux exemples (qui s'ajoutent à celui déjà cité) :

«*Comme, d'après* ***notre convention****, on peut diviser ces homologies par* 4*, nous arrivons* [. . .] » [Poincaré 1899, p. 292].

«*Revenons aux homologies* (2 *bis*)*.* ***Si l'on admet*** *que l'on a le droit de diviser les homologies par un entier différent de zéro,* [. . .]*.* ***Si, au contraire, on n'admet pas*** *que l'on ait le droit de diviser les homologies* [. . .].

Envisageons maintenant les combinaisons linéaires des a_j^{q-1} *qui seraient homologues à zéro en vertu des homologies* (3)*, et demandons-nous quelles sont parmi ces combinaisons celles qui restent distinctes, si, abandonnant les homologies* (3)*, on se borne aux homologies* (4) ***sans admettre*** *le droit de diviser les homologies* » [Poincaré 1900, p. 349–350].

Ce statut « conventionnel » n'est pas propre à la division, il est néanmoins remarquable qu'il ne soit jamais évoqué à propos de l'addition des homologies, de leur soustraction ou de leur multiplication par un entier. Il semble donc que la division n'a pas, pour Poincaré, le même statut épistémologique que les autres opérations. Le retrait de la signification géométrique qui intervient avec les homologies par division donne ainsi lieu à la distinction explicite de deux sortes d'homologies (par division *versus* sans division), doublée d'une distinction épistémologique (conventionnel *versus* non conventionnel). Ainsi, une distinction épistémologique, introduite par Poincaré, est corrélée à une distinction qui concerne la signification géométrique des homologies.

On remarquera néanmoins que les homologies ne sont divisées que dans le cas où leurs coefficients ont un facteur commun. Même les homologies obtenues par division sont donc toujours à coefficients entiers. Il existe cependant un passage, unique, dans lequel Poincaré considère des variétés affectées de coefficients fractionnaires. Nous allons voir qu'il est l'occasion d'une nouvelle distinction. Les coefficients fractionnaires sont introduits à partir des transformations algébriques qui permettent la réduction des tableaux d'entiers associés à un polyèdre. Comme à chaque ligne de ces tableaux correspond une des variétés qui compose le polyèdre et que la réduction du tableau peut conduire à diviser ces lignes par des entiers, Poincaré est amené à faire correspondre aux lignes obtenues des variétés dont les coefficients sont fractionnaires. Voici le passage dans lequel ces variétés interviennent :

«*nous conviendrons de dire qu'à la nouvelle k-ième ligne correspond la variété $\frac{1}{m}a_k^2$ (**notation qui n'a qu'une valeur symbolique**, à moins que $\frac{1}{m}$ ne soit entier*). [...]

*Il importe de remarquer que les congruences et les homologies ainsi obtenues, pourront n'avoir qu'une **valeur symbolique**, parce que les coefficients pourront être fractionnaires.*

*Et, en effet, d'une part les éléments du tableau transformé peuvent ne plus être entiers ; d'autre part, la variété qui correspond à une ligne peut, comme je l'ai dit plus haut, n'avoir elle-même qu'une **valeur symbolique***» [Poincaré 1899, p. 323–324].

Poincaré attribue une « valeur symbolique » aux variétés à coefficients fractionnaires ainsi qu'aux homologies dans lesquelles elles interviennent. Il fait donc une distinction entre la « notation » $\frac{1}{m}a_k^2$ et les autres attachées aux variétés et aux homologies, qui ne sont, elles, jamais qualifiées de la sorte. Il apparaît donc qu'il y a lieu, pour Poincaré, de distinguer certaines expressions suivant qu'elles sont ou non « symboliques » et l'introduction de cet adjectif accompagne la considération d'expressions qui n'ont pas de signification géométrique.

En résumé, la division des homologies conduit à deux distinctions. D'une part celle entre les homologies à coefficients entiers obtenues par division et celles obtenues sans division. D'autre part celle entre les homologies à coefficients fractionnaires et à coefficients entiers. La première distinction intervient entre des homologies qui ont une interprétation géométrique et des homologies qui n'en ont pas, mais les variétés considérées ont, elles, toutes une signification géométrique. Dans la seconde, la distinction concerne toujours l'interprétation géométrique, mais cette fois des variétés, celles affectées d'un coefficient fractionnaire n'ayant pas d'interprétation géométrique. Ainsi, Poincaré fait une distinction entre, d'une part, les homologies, et d'autre part, les variétés, selon qu'elles ont ou non une interprétation géométrique. La présence ou non de cette interprétation apparaît donc être un trait pertinent pour lui.

Ces analyses ont permis d'introduire la caractérisation du contenu géométrique et d'en montrer certaines implications dans les mémoires de Poincaré. Nous avons montré que les variétés et les homologies avaient un contenu géométrique et indiqué que c'était à lui que ces notions étaient le plus souvent rapportées. Mais nous avons signalé que l'usage des variétés et des homologies n'était pas réductible à ce contenu. Elles ont aussi un contenu que l'on peut qualifier d'arithmétique, et surtout, elles interviennent parfois simplement en tant qu'expressions, cela notamment dans les combinaisons linéaires. Le contenu géométrique coexiste donc avec d'autres types de contenus au sein de ces notions et nous avons indiqué que le passage d'un contenu à l'autre intervenait au cours de démonstrations. Par ailleurs, nous avons montré que les distinctions introduites par Poincaré à propos de la division des homologies étaient toutes liées à la possibilité de donner ou non une signification géométrique aux variétés ou aux homologies considérées. D'une part, cela met en évidence l'attention que Poincaré porte au fait que ces notions aient ou non une signification géométrique. D'autre part, cela montre qu'il peut considérer à la fois des notions pourvus d'une telle signification et d'autres qui en sont dépourvues, les premières apparaissant néanmoins privilégiées.

La reconnaissance de ces distinctions nous semblent avoir quelques conséquences sur la relecture que l'on peut faire de ces mémoires. Il pourrait par exemple être tentant de retrouver dans la division des homologies et la considération de variétés à coefficients fractionnaires la notion d'homologie à coefficients rationnels. Or, faire cette identification, revient à négliger des distinctions qui apparaissent pertinente à Poincaré et qui manifestent une certaine exigence quant à la signification géométrique des expressions considérées. Il est certes possible de négliger ces distinctions, mais il convient de ne pas les ignorer car on risque de manquer certains changements dans le rapport des mathématiciens à la géométrie qui sont requis pour la considération d'homologies à coefficients rationnels.

Par ailleurs, la caractéristique du contenu géométrique que nous avons retenue et le rôle que celle-ci joue dans les mémoires de Poincaré conduit aussi à relativiser une rupture que les mathématiciens, et certains historiens, ont souvent cru y repérer. Pour certains elle remonte au premier complément, pour d'autres, au second, mais ils s'accordent pour y trouver la naissance de la « topologie algébrique » ou encore de la « topologie combinatoire »[11]. Bien qu'il soit difficile d'en donner une définition satisfaisante, la notion de topologie combinatoire nous apparaît liée à la revendication d'une conception ou de méthodes propres et elle s'oppose, dans une certaine mesure, à la théorie des ensembles en remplaçant les ensembles de points par des ensembles de cellules. La citation suivante de Hermann Weyl en est une illustration :

«*L'analysis situs étudie les propriétés dont jouissent les variétés continues indépendamment de toute considération de mesure. On y distingue actuellement deux manières de voir, l'une se rattache à la Théorie des ensembles (voir les travaux de Brouwer), l'autre à l'Analyse combinatoire (voir l'article de Dehn et Heegaard dans l'*Encyclopédie*)*» [Weyl 1917][12].

[11] On peut citer : Alexandroff [1932, p. 11, note 12], Seifert et Threlfall [1934, p. 317, note 14], Alexandroff et Hopf [1935, p. 8], Lefschetz [1970, p. 23], Bollinger [1972, p. 133], Dieudonné [1985, p. 347; 1989, p. 29].

[12] Les manifestations d'une semblable opposition sont nombreuses; on en trouvera par exemple chez : Kneser [1926] et van der Waerden [1930]. On peut citer aussi Alexander : « *In Combinatorial Analysis Situs, it is customary to think of a space not as an infinite aggregate of* points*, but rather as something determined by a partition composed of a finite number of inter-related entities, called* cells» [1930, p. 292]. Cela est clairement exprimé dans une introduction de Stillwell :

« *One may consider a geometric figure to be an arbitray point set, and in fact the homeomorphism problem was first stated in this form, by Hurwitz 1897. However, this degree of generality makes the problem completely intractable, for reasons which belong more to set theory than geometry, namely the impossibility of describing or enumerating all point sets. To discuss the problem sensibly we abandon the elusive*

Voir dans ces mémoires de Poincaré l'origine de la topologie combinatoire est bien sûr justifiée par l'introduction des polyèdres, des nombres de Betti réduits, des « tableaux » et la mise en rapport de leurs invariants avec ceux du polyèdre. Cependant, Poincaré ne fait lui-même aucune remarque relative à une telle rupture et il n'y a dans ces mémoires, ou même dans l'analyse de ses travaux scientifiques publiée de manière posthume [Poincaré 1921], aucun passage indiquant la distinction d'une discipline correspondant à la « combinatoire ». De nombreux indices montrent au contraire la continuité et l'unité de ses mémoires : d'abord leurs titres (*Complément à l'Analysis situs*, *Second complément à l'Analysis situs*, etc.), leurs introductions[13], les rappels des mémoires précédents au début des compléments, les nombreux renvois aux définitions d'un mémoire antérieur[14], la reprise des problèmes[15] abordés ou des exemples[16] traités. Mais surtout, l'importance et la permanence du rôle du contenu géométrique tout au long de ceux-ci ne s'accorde pas avec les distinctions et les oppositions sur lesquelles se constitue la topologie combinatoire : celle-ci tend au contraire à dissocier la relation entre ensembles de points et

"arbitrary point set" and deal only with finitely describable *figures, so that a solution to the homeomorphism problem can be regarded as an* algorithm *which operates on descriptions and produces an answer to each homeomorphism question in a finite number of steps*» [Stillwell 1980, p. 2].

13 « *Pour cette fois je me bornerai à certaines considérations qui sont de nature à simplifier, à éclairer et à compléter les résultats précédemment acquis* » [Poincaré 1900, p. 338].

14 Dans son introduction au mémoire de 1899, Poincaré rappelle la définition de l'homologie et conclut « *Telles sont les conventions que j'ai adoptées dans l'Analysis situs* » [Poincaré 1899, p. 291]. Concernant les polyèdres : « *j'envisage donc, dans la suite, une variété V fermée, mais pour calculer ses nombres de Betti, je la suppose divisée en variétés plus petites, de façon à former un polyèdre, au sens donné à ce mot à la page* 171 *de l'Analysis situs* » [Poincaré 1899, p. 294]. Et juste après encore : « *Considérons donc, comme à la page* 171 *de l'Analysis situs, un polyèdre à p dimensions* » [Poincaré 1899, p. 294]. De même, pour la définition d'un polyèdre dérivé : « *On aura ainsi un nouveau polyèdre V', qui sera dérivé du polyèdre V, au sens que j'ai attaché à ce mot à la page* 271 *de l'Analysis situs* » [Poincaré 1899, p. 303]. À propos de « l'annexion » définie par Poincaré [1895], on peut lire dans le mémoire de 1900 : « *Nous avons vu dans un des Mémoires antérieurs* (§ 16) *définir l'opération que nous avons appelée l'annexion* »[Poincaré 1900, p. 364].

15 « *Je voudrais revenir sur l'une des questions traitées dans un des mémoires antérieurs* » [Poincaré 1900, p. 357].

16 « *Désireux d'appliquer ce qui précède aux exemples signalés dans l'Analysis situs* » [Poincaré 1900, p. 351].

de cellules que nous avons justement pu prendre comme caractéristique du contenu géométrique. Là encore, il convient donc de nuancer l'affirmation selon laquelle le premier ou le second complément marquerait l'origine de la topologie combinatoire : cette affirmation revient à introduire au sein des mémoires de Poincaré des distinctions qui n'interviendront que plus tard et qui sont, en partie, liées à l'influence de la théorie des ensembles sur les mathématiques. Une telle affirmation peut aussi conduire à ne pas voir certains changements dans le rapport à la signification géométrique.

Cependant, l'interprétation selon laquelle l'un de ces deux compléments serait à l'origine de la topologie combinatoire est trop fréquente pour ne pas être significative. Mais son intérêt n'est peut-être pas tant dans ce qu'elle nous indiquerait sur les mémoires de Poincaré que sur ce qu'elle nous apprend sur ceux qui la proposent. C'est la *lecture* que ces mathématiciens et que ces historiens font de ces mémoires qui nous est ainsi livrée et elle manifeste la pertinence que peut avoir *pour eux* la distinction entre ces différentes approches de la topologie[17]. Ce sont leurs propres distinctions qui s'expriment, et la référence aux mémoires de Poincaré peut d'ailleurs, en retour, contribuer à les légitimer. La description que nous allons présenter du rôle des contenus géométriques dans d'autres textes peut d'ailleurs contribuer à étayer les distinctions et les changements que ces lectures suggèrent.

Avant cela, nous devons faire remarquer que, d'une part, l'analyse du contenu géométrique des variétés et des homologies et, d'autre part, celle des distinctions explicites introduites par Poincaré touchant la signification géométrique des variétés et des homologies ne coïncident pas tout à fait. En effet, rien n'indique que Poincaré considérerait les combinaisons linéaires entières de variétés comme étant dépourvues de signification géométrique alors qu'elles ne sont pas, suivant notre analyse et notre définition, rapportées à des contenus géométriques. Mais cela ne saurait rien infirmer ni confirmer car ces deux analyses sont indépendantes. Cela attire notre attention sur les combinaisons linéaires de variétés dont le rôle en tant qu'expression et leur rapport à un contenu géométrique demanderaient une analyse propre.

[17] Sur l'intérêt de la notion de « lecture » en histoire des mathématiques, voir Goldstein [1995].

3. L'AMBIVALENCE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE DANS L'*ANALYSIS SITUS* DE VEBLEN

Le livre de Veblen, publié en 1922, est le premier consacré à l'*Analysis situs*[18]. C'est incontestablement un ouvrage de référence jusqu'à la parution en 1930 de *Topology* de Lefschetz[19]. Sur les cinq chapitres que contient ce livre, quatre sont consacrés à la définition des homologies et aux théorèmes afférents, le dernier chapitre, traitant du groupe fondamental et de questions non résolues. Le livre suit dans sa progression la dimension des espaces étudiés, appelés « complexes » : le premier chapitre est consacré aux graphes linéaires, le deuxième aux surfaces, et les deux suivants aux complexes de dimension n non orientés et orientés. Pour chaque dimension, le cas où le complexe est non orienté est traité séparément du cas où il est orienté ; soit au sein d'un même chapitre (dimensions 1 et 2), soit en réservant un chapitre pour le cas non orienté et un autre pour le cas orienté (dimension n). Cette organisation des chapitres met déjà en évidence l'importance des complexes et des déterminations géométriques, en l'occurrence la dimension. En particulier, que la théorie soit d'abord exposée pour les dimensions 1 et 2, puis pour la dimension n met l'accent sur l'opposition entre les dimensions où une représentation est possible et la dimension n où elle ne l'est plus. Par ailleurs, la théorie en dimension n est systématiquement présentée comme une simple reprise[20] des définitions données pour les dimensions 1 et 2, ce qui accentue encore l'importance de ces dimensions.

Notre étude du statut de la géométrie dans cet ouvrage, et en particulier du contenu géométrique, va donc se concentrer sur les complexes. Ce

---

[18] De nombreux et importants articles concernant l'homologie ont bien sûr été publiés après les mémoires de Poincaré ; on peut citer : Dehn et Heegaard [1907], Tietze [1908] ou encore Steinitz [1908]. Pour une présentation et une analyse de ces articles voir Volkert [1994].

[19] Ainsi, avant cette date, Lefschetz renvoie le lecteur de ses articles au livre de Veblen pour les notations et la terminologie. Citons par exemple : « *In notation and terminology, we shall follow essentially Veblen's Colloquium Lectures on Analysis Situs. We shall assume the reader fairly familiar with this fundamental work* » [Lefschetz 1926, p. 1].

[20] On peut citer parmi de nombreux exemples possibles : « *The definition of a singular or non-singular generalized complex C_k on a complex C_n* ***is a direct generalization of that given in*** *§33, Chapter II* » (où la théorie est exposée pour les complexes de dimension 2) [Veblen 1922, p. 74].

terme désigne le complexe étudié mais aussi un complexe « sur » celui-ci (image sur le complexe étudié d'un complexe par une application continue), un sous-complexe (complexe composé des cellules qui composent le complexe étudié) et c'est aussi le terme des relations d'homologie. Ainsi, les complexes concentrent dans ce livre un ensemble de fonctions semblable à celui des variétés dans les mémoires de Poincaré. Il importe d'abord de remarquer que les complexes ont un contenu géométrique : ils sont composés de cellules et peuvent être aussi considérés comme des ensembles de points. Voyons quelques manifestations de ce contenu. Il est impliqué dans la notion de « transformation continue » , et donc dans celle d'« homéomorphisme » sur laquelle repose la définition de l'invariance au sens de l'*Analysis situs* :

«*A transformation F of a* ***set of points*** *$[X]$* ***of a complex*** *C_1 into a* ***set of points*** *$[X']$ of the same or another* ***complex*** *is said to be* continuous *if and only if it is continuous in the sense of* § 2 *on each complex composed of a* 1*-cell of C_1 and its ends*» [Veblen 1922, p. 3].

De même, la notion de complexe « sur » un autre complexe, essentielle pour l'invariance au sens de l'*Analysis situs*, nécessite que les complexes soient considérés non seulement comme des ensembles de cellules mais aussi comme des ensembles de points. L'identification d'une cellule et de la « somme » des cellules qui la subdivisent implique aussi, comme dans les mémoires de Poincaré, un contenu géométrique :

«*Each n-cell of* [...] *is the sum* (*mod* 2) *of all n-cells* [...] *of $\overline{C}_n$* [subdivision de C_n] *having P_i^n as a vertex*» [Veblen 1922, p. 86].

C'est bien la caractérisation du contenu géométrique qui intervient ici : il y a deux ensembles de cellules distincts (d'une part la cellule, d'autre part les cellules qui la subdivisent) mais un seul et même ensemble de points. Le contenu géométrique est donc cette fois encore impliqué dans le passage d'une subdivision à une autre. On retrouve aussi que chaque cellule d'un complexe est la « somme » des cellules en lesquelles elle a été subdivisée. En particulier, un complexe et son complexe dual sont, toujours comme dans les mémoires de Poincaré, composés des mêmes points et la relation entre ensembles de points et de cellules intervient effectivement dans la démonstration de la relation de dualité, dans les démonstrations de l'invariance par subdivision et de l'invariance par homéomorphisme des nombres de connexion[21].

Comme chez Poincaré, les relations d'homologie sont définies à partir de la relation de bord. Le *bord* d'un complexe C_k est ici, par définition, le complexe C_{k-1} composé des cellules de dimension $k-1$ de C_k, incidentes à un nombre impair de k-cellules de C_k. Reprenant la notation déjà utilisée par Poincaré, Veblen écrit cette relation : $C_k \equiv C_{k-1}$. Cette définition est surtout remarquable par sa manière de concilier des propriétés arithmétiques et géométriques. L'arithmétique s'introduit, en effet, par la distinction du pair et de l'impair et c'est cette distinction qui va permettre d'établir, quand l'addition des complexes sera définie, l'additivité des relations de bord et des homologies. Mais cette définition a aussi une signification géométrique : le bord par lequel deux cellules sont réunies ne fait pas partie du bord du complexe obtenu. On ne retrouve pas dans ce livre le foisonnement des relations qui étaient attachées aux frontières dans les mémoires de Poincaré. Jamais le bord d'une cellule ou d'un complexe ne « sépare » ou n'est « traversé »; de toutes les propriétés que les frontières concentraient, la relation de bord a été la seule retenue, et encore, comme nous venons de le voir, à travers une propriété spécifique. De plus, la relation d'« incidence » est employée uniquement et systématiquement pour les cellules alors que le terme « boundary » est réservé aux complexes, ce qui contraste avec la diversité des expressions utilisées par Poincaré : « contiguë » , « juxtaposé » , « limitrophe », etc.

Contrairement à Poincaré, Veblen définit explicitement l'addition de deux complexes. Pour cette définition, il associe à chaque complexe[22] C_k un α_k-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_k})$, appelé «*symbol*», qui indique par un 0 ou un 1 l'occurrence ou non dans ce complexe de chacune des α_k cellules de dimension k qui composent le complexe principal. L'addition de deux complexes est alors définie par l'addition modulo des « symboles ». Le résultat d'une addition admet ainsi toujours une interprétation géométrique : l'addition de deux « symboles » a pour résultat un « symbole » auquel est associé un ensemble de cellules. L'addition, en tant qu'opération, a elle aussi une interprétation géométrique : si l'on additionne deux k-complexes ayant une cellule commune, cette cellule ne fait pas partie du complexe

[21] Les « nombres de connexion » sont définis de manière analogue aux nombres de Betti de Poincaré, à la différence que les coefficients des homologies sont réduits modulo 2.

[22] Ce doit être un sous-complexe du complexe considéré.

obtenu. La définition des relations d'homologie $C_k \sim 0$ et la possibilité de les additionner découlent ensuite de ces définitions du bord et de l'addition. Veblen ne recourt ni à la simple connexité ni aux intégrales pour établir une relation d'homologie.

Mais ces définitions ne rendent pas compte de toutes les occurrences de bords ou d'additions de complexes dans ce livre. En particulier, ces définitions ne conviennent ni au bord d'un complexe « singulier »[23] ni à l'addition de deux complexes « sur » un même complexe. Voici pourtant un exemple montrant que la notion de bord est appliquée à des complexes singuliers :

«*Let us now take the problem : Given a k-circuit, C_k on a complex C_n, to determine whether or not there exists a $(k+1)$-dimensional complex,* ***singular or not, on*** *C_n which is* ***bounded*** *by C_k* » [Veblen 1922, p. 94].

Or, dans ces cas, il n'est pas possible de définir la relation d'incidence ni moins encore de compter le nombre de cellules auxquelles une cellule serait incidente. Il n'est dès lors pas possible, comme le requièrent les définitions, d'associer un « symbole » à ces complexes. Les complexes singuliers ont ainsi un bord qui ne saurait leur être attribué à partir de la définition arithmético-géométrique qui en a été donnée. Que la définition de l'addition ne puisse pas non plus être appliquée aux complexes « sur » un complexe rejaillit sur la possibilité d'additionner les relations d'homologie : l'addition de deux homologies nécessite en effet d'effectuer l'addition de ce type de complexes, alors que la définition de l'addition n'a été donnée que pour les complexes composés de cellules de C_n. Nous avons aussi vu que Veblen considérait qu'une cellule était la « somme » des cellules en laquelle elle est décomposée. Or, on ne peut rendre compte de cette somme à partir de la définition de l'addition de deux cellules puisque celle-ci fait intervenir les « symboles » $(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_k})$ et donc une décomposition fixée. Ainsi, cette somme qui implique, comme nous l'avons vu, des contenus géométriques ne peut être rapportée aux « symboles » et n'entre pas dans le cadre de la définition de l'addition.

En définitive, chaque complexe C_k a un *double* contenu : un contenu géométrique et un contenu arithmétique (le « symbole » $(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_k})$ composé uniquement de 0 et de 1). Ainsi, C_k peut être, suivant le contenu

[23] Dans ce cas le complexe est l'image d'un complexe par une application continue non injective.

considéré, l'objet d'une déformation qui implique son contenu géométrique ou le terme d'une addition purement arithmétique. C'est avec et par l'introduction de cette ambivalence que sont articulés dans ce livre les contenus géométrique et arithmétique. L'ambivalence est parfaite quand les complexes sont composés de cellules du complexe étudié. Mais ce n'est pas toujours le cas et le contenu géométrique des complexes peut intervenir sans avoir d'équivalent arithmétique. C'est ainsi que la propriété qui caractérise le contenu géométrique intervient à chaque fois qu'il faut passer d'une subdivision à une autre ou que des complexes « sur » un complexe sont considérés alors qu'il n'est pas possible de se rapporter aux « symboles ». Le contenu géométrique des complexes a donc une fonction propre qui n'a pas d'équivalent arithmétique et qui échappe aux définitions du bord et de l'addition.

Bien que l'on retrouve dans ce livre la propriété caractéristique du contenu géométrique, il faut préciser que Veblen ne confond pas plus deux ensembles de cellules ayant le même ensemble de points sous-jacent que Poincaré ne confondait deux polyèdres d'une même variété. Ainsi considère-t-il, par exemple, que l'homologie entre un complexe (en l'occurrence, un circuit, c'est-à-dire certains complexes sans bord) et une subdivision de celui-ci doit être démontrée, ce qui montre qu'il ne les confond pas : « *There is no difficulty in seeing that any i-circuit is homologous* (*mod* 2) *to any regular sub-division of itself* » [Veblen 1922, p. 96]. Dans la seconde édition de son livre, dix ans après la première, Veblen ajoutera même, pour étayer cette affirmation, l'argument suivant (déjà invoqué dans la première édition pour la dimension 1) :

« *This may be proved by means of a singular* $(i+1)$*-dimensional complex which contains, besides the cells of the given i-circuit and those of its subdivision, one* $(k+1)$*-cell incident with each k-cell of the i-circuit,* $k = 0, 1, \ldots, i$ » [Veblen 1922/1931, p. 99].

Cet argument est encore un exemple du recours au bord d'un complexe singulier et il implique un contenu géométrique.

Considérons maintenant le rapport de Veblen à la signification géométrique des complexes. Il importe de remarquer à cet égard que Veblen a élaboré des définitions *ad hoc* qui assurent une interprétation à la fois géométrique et arithmétique aux termes des homologies, à leur addition et à leur bord. Cette présence permanente d'une interprétation géométrique pour les termes des homologies est un des traits remarquables de ce livre. Elle apparaît comme une exigence de l'auteur, dans la mesure où elle intervient systématiquement dans ses définitions. Dans le cas des complexes non orientés, cela se manifeste avec l'ambivalence arithmético-géométrique instaurée par la réduction modulo 2. Cette ambivalence se retrouve aussi dans le cas des complexes orientés : Veblen considère des « symboles » $(x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha_k})$, où les x_i sont cette fois des entiers relatifs (et non plus seulement des 0 ou des 1), auxquels il donne une interprétation géométrique en introduisant des « surfaces de Riemann »[24] généralisées. Mais celles-ci n'interviennent dans aucun de ses raisonnements. Ainsi, fonder le calcul homologique semble vouloir dire, pour Veblen, garantir en permanence une signification géométrique aux termes et aux opérations. On se souvient que l'existence ou non d'une interprétation géométrique conduisait Poincaré à certaines distinctions, mais cette interprétation n'était pas aussi déterminante que chez Veblen dans les définitions qu'il introduisait. Le rapport à la signification géométrique n'est donc pas le même chez ces deux auteurs.

Cela n'empêche pas le contenu géométrique d'être présent dans les deux cas, avec des fonctions tout à fait semblables. Ainsi, ce contenu se retrouve-t-il dans des textes qui présentent par ailleurs d'importantes différences. De plus, nous avons vu que, dans le livre de Veblen, ce contenu intervenait en quelque sorte de manière subreptice dans des situations qui échappent au cadre des définitions et mettent en défaut l'ambivalence arithmético-géométrique qu'elles instaurent. Ce contenu conserve donc une fonction propre dont ne rendent pas toujours compte les définitions proposées. C'est notamment le cas lors du passage d'une subdivision à une autre, pour les complexes singuliers, et dans l'énoncé et la démonstration de l'« invariance », au sens de l'*Analysis situs*, des nombres de connexion et de Betti. Néanmoins, s'il n'y a pas d'ambivalence arithmético-géométrique stricte au niveau des contenus, l'exigence de pourvoir les notions d'une signification a été satisfaite dans la mesure où les complexes ont bien toujours un contenu : aucune opération n'implique d'expressions sans se rapporter à leur contenu, géométrique ou arithmétique. C'est là une

[24] Le nombre de feuillets « au-dessus » d'une cellule correspond à la valeur absolue de l'entier du n-uplet associé à cette cellule et l'orientation des feuillets est déterminée par le signe du nombre entier.

différence importante avec les mémoires de Poincaré et qui ne se retrouve d'ailleurs que dans peu de textes à cette époque[25].

4. LE RETRAIT DE LA GÉOMÉTRIE : DEUX ARTICLES D'ALEXANDER

L'article de 1922

Considérons l'article qu'Alexander publie en 1922, « A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem ». Dans ce texte, l'auteur introduit et démontre une relation d'une remarquable simplicité entre les nombres de connexion d'une « figure » et ceux de l'espace complémentaire :

«*Let C be any chain immersed in an n-sphere H^n. Then, between the invariants R^i of C and the invariants $\overline{R}^i$ of $H^n - C$ there exists the following duality relation :*

$$R^i = \overline{R}^{n-i-1} \quad (0 \leq i \leq n-1)$$ » [Alexander 1922, p. 343].

Comme précédemment, nous allons étudier le rôle du contenu géométrique dans cet article entièrement consacré à ce théorème et à quelques-unes de ses nombreuses conséquences. Commençons par préciser qu'Alexander remplace l'espace euclidien de dimension n par H^n, la sphère de dimension n. Celle-ci est subdivisée en cellules définies par les régions déterminées par l'intersection de la sphère avec des hyperplans passant par son centre.

L'homologie et les nombres de connexion sont d'abord définis pour des espaces composés de cellules de H^n. Ces ensembles de cellules sont appelés des « chaînes » et le bord et leur addition sont définis modulo 2, comme ils le sont dans le livre de Veblen[26], mais sans recourir à ses « symboles ». Si maintenant C est l'image sur H^n d'une chaîne par une application continue injective, ses nombres de connexion sont définis comme étant les nombres de connexion de la chaîne dont elle est l'image. Mais $H^n - C$, le complémentaire de C dans H^n, n'est en général ni une chaîne ni l'image d'une chaîne par un homéomorphisme. Ainsi, la définition précédente de l'homologie et des nombres de connexion ne s'applique pas à $H^n - C$.

Alexander va donc étendre ces définitions de manière à définir les nombres de connexion de $H^n - C$. Pour cela, il considère d'abord, pour

[25] Un autre exemple serait la thèse de Chuard [1922].

[26] Des notions semblables avaient déjà été développées dans un article commun de Veblen et d'Alexander [1913].

une subdivision donnée de H^n, les chaînes composées de toutes les cellules de H^n qui ne rencontrent pas C. Considérant ensuite toutes les subdivisions de H^n, il convient qu'une chaîne est homologue à toutes les chaînes qui dérivent d'elle par subdivision. Cela revient aussi à considérer que deux chaînes sont homologues s'il est possible de subdiviser la sphère de manière à ce que ces chaînes ainsi subdivisées coïncident. L'addition de deux de ces chaînes est définie par l'addition de deux de leurs représentants dont les cellules appartiennent à une même subdivision. Enfin, une chaîne sera homologue à zéro si pour une certaine subdivision elle est le bord d'une chaîne au sens de la première définition. Ce sont ces chaînes, ainsi identifiées, qui constituent les chaînes de $H^n - C$ et qui sont donc les termes des homologies. Ces définitions permettent de se ramener systématiquement à des chaînes composées de cellules issues d'une même décomposition :

«*Any chain of any subdivision of H^n will be called a chain of $H^n - C$ provided it is wholly contained in $H^n - C$. Among the chains of $H^n - C$ will be set up the following homologies :* (1) *Each closed i-chain will be said to be homologous to its derived chains ;* (2) *each closed i-chain which bounds an open* $(i+1)$*-chain of $H^n - C$ will be said to be homologous to zero*» [Alexander 1922, p. 339].

La relation entre ensembles de cellules et de points est donc centrale dans cet article puisque tous les ensembles de cellules qui définissent une même chaîne ont en fait exactement le même ensemble de points sous-jacent[27]. Elle intervient néanmoins d'une manière différente de ce que nous avons vu dans les mémoires de Poincaré et dans le livre de Veblen. D'abord, l'identification de ces ensembles de cellules est ici une convention :

«*Since we shall only be concerned with the relations between chains under homologies, it will be legitimate to do away with the distinction between a chain of $H^n - C$ and its derived chains.* ***We shall therefore regard*** *any two chains of $H^n - C$ with a common derived chain as equivalent chains, to be denoted by the same symbol K^i*» [Alexander 1922, p. 339].

[27] Il importe de remarquer qu'un ensemble de points de $H^n - C$ ne coïncide pas toujours avec l'ensemble de points sous-jacent d'une chaîne. En effet, l'ensemble de points sous-jacent d'une chaîne est toujours l'ensemble de points sous-jacent d'un ensemble de cellules de H^n, or tous les ensembles de H^n ne sont pas de cette forme.

De plus, Alexander ne tient pas ces ensembles de cellules pour identiques, mais seulement pour homologues. Ainsi, l'identification de deux ensembles de cellules correspondant à un même ensemble de points n'est plus ici une conséquence de l'identification des ensembles de cellules et de leur ensemble de points sous-jacent. Cette caractéristique du contenu géométrique laisse place ici à une convention ; les différents ensembles de cellules sont donc identifiés, mais la nature de cette identification a changé. (Veblen proposait, lui, une démonstration de cette relation d'homologie entre un complexe et ses complexes dérivés.) On remarquera aussi que l'ensemble de points sous-jacent n'est pas directement désigné, mais que seuls les ensembles de cellules le sont. D'après ces définitions le contenu des chaînes n'est plus géométrique puisque seuls des ensembles de cellules sont considérés, les ensembles de points n'étant même pas mentionnés.

Ces définitions montrent que la distinction entre ensembles de cellules et de points est faite dans ce texte de manière plus systématique qu'elle ne l'était dans les textes précédents. C'est là l'indice d'un mouvement plus général de retrait des contenus géométriques dans les textes consacrés à l'homologie, confirmé par l'analyse d'autres textes contemporains. Cette tendance nous semble incontestable, mais elle doit néanmoins être nuancée. Car si la définition des chaînes, de l'addition, du bord et de l'homologie ne font effectivement intervenir que des ensembles de cellules, de nombreux passages dans les démonstrations et certaines définitions impliquent la relation entre ensembles de cellules et ensembles de points qui caractérise le contenu géométrique. Encore une fois, il faut distinguer ce qui ressort de l'analyse des définitions de ce qui ressort de l'ensemble du texte.

Ainsi, Alexander invoque par exemple dans une démonstration la connexité d'une chaîne [Alexander 1922, p. 341] ; c'est une propriété qui implique l'ensemble de points de la chaîne, et non seulement l'un de ses ensembles de cellules. De même Alexander considère des intersections de chaînes qui ne se réduisent pas à des intersections entre ensembles de cellules et qui sont bien des intersections entre ensembles de points. Le raisonnement suivant en donne à lui seul plusieurs exemples :

«*For let* C^i *be broken up into two cellular parts,* A *and* B*,* [...]*, and let* P_A *and* P_B *be points of* A*, and* B*, respectively but not of the chain* C^{i-1} *common to* A *and* B*. Then* [...] *the* 0*-chain* $P_A + P_B$ *bounds a* 1*-chain* *in $H^n - C^{i-1}$ which must contain a broken line of geodesics connecting P_A with P_B. But this broken line meets A and B in mutually exclusive closed sets of points and must therefore contain points that belong to neither of these sets. Such points must be points of $H^n - C^i$* » [Alexander 1922, p. 341–342].

Plus généralement, l'inclusion de la chaîne C dans H^n requiert que la sphère et la chaîne ne soient pas seulement considérées comme des ensembles de cellules, mais aussi comme des ensembles de points. C'est aussi le cas dès que différentes subdivisions sont envisagées, qu'il s'agisse de la sphère ou d'une chaîne, car il faut alors disposer des ensembles de points sous-jacents. Ces exemples montrent que les chaînes ont en fait un contenu géométrique.

En résumé, les définitions de cet article sont systématiquement rapportées aux ensembles de cellules et l'identification d'une cellule ou d'une chaîne à leurs subdivisions est présentée comme une convention. En cela, cet article ne présente pas seulement des différences sémiotiques avec le livre de Veblen, il évite des incohérences que les définitions du bord et de la somme des complexes « sur » un complexe présentaient dans celui-ci. Mais l'article d'Alexander n'est cependant pas entièrement rapporté aux ensembles de cellules et les ensembles de points sous-jacents interviennent encore dans les démonstrations. Il y a néanmoins un changement dans la manière d'identifier ces différents ensembles : le caractère évident et spontané de ces identifications dans les textes de Poincaré ou de Veblen laisse place ici à des conventions et des définitions plus élaborées. Mais le contenu géométrique n'a pas pour autant complètement disparu ; il intervient dans certains arguments de manière subreptice. De plus, comme dans le livre de Veblen, mais à la différence des mémoires de Poincaré, les chaînes sont toujours rapportées à leur contenu géométrique et jamais seulement à leurs expressions. Plus généralement, il n'y a pas d'expressions qui ne soient pas rapportées à leur contenu géométrique. Nous allons voir que ce n'est pas le cas dans un autre article d'Alexander dans lequel les expressions peuvent être considérées pour elles-mêmes et avec un tout autre rapport au contenu géométrique.

L'article de 1926

Dans son article intitulé « Combinatorial Analysis situs » [Alexander

1926], il propose une caractérisation « combinatoire » de l'homéomorphie de deux complexes qui lui permet de donner une nouvelle démonstration de l'invariance topologique des nombres de connexion et des coefficients de torsion. L'article est composé de trois parties. Dans la première, « Combinatorial formulation », le théorème sur les homéomorphismes est énoncé et démontré. Dans la deuxième, « Connectivity », les notions d'homologie, de nombres de connexion, de coefficients de torsion et quelques autres sont introduites. La troisième et dernière partie, « Invariance of the topological constants », fait la synthèse des deux premières avec une démonstration de l'invariance topologique des nombres de connexion et des coefficients de torsion.

Alexander considère donc à nouveau des « complexes » (terme qui n'intervenait pas dans l'article de 1922). Ces complexes ont un contenu géométrique. En effet, ce contenu intervient avec la notion d'homéomorphisme qui requiert que les complexes soient considérés non seulement comme des ensembles de cellules mais aussi comme des ensembles de points :

« *Two complexes are said to be* homeomorphic *provided there exists a one-one continuous correspondence between* ***the points of one and the points of the other*** » [Alexander 1926, p. 303].

De même, la subdivision des complexes implique un contenu géométrique, car elle requiert non seulement un ensemble de cellules, mais aussi l'introduction de nouveaux sommets pris parmi les points du complexe (autres que les sommets des cellules), le complexe étant dès lors considéré comme un ensemble de points. Mais surtout, le contenu géométrique est impliqué dans la démonstration du théorème caractérisant les homéomorphismes entre deux complexes Φ et Ψ. Cette démonstration fait intervenir des transformations définies sur une suite infinie de complexes dérivés de chacun des complexes Φ et Ψ, afin d'obtenir une approximation de l'homéomorphisme. Or, pour que ces transformations, définies sur des complexes dérivés de Φ, puissent être comparées à l'homéomorphisme défini sur Φ, il faut qu'elles soient aussi considérées comme des applications définies sur l'ensemble de points de Φ, et que leurs ensembles images soient inclus dans le même ensemble de points, en l'occurrence celui de Ψ. Dans les deux cas, cela requiert qu'un complexe et ses dérivés coïncident en tant qu'ensembles de points et donc que les complexes aient un contenu géométrique.

Ces considérations sur les complexes et les cellules sont présentées dans la première partie de l'article et c'est dans la deuxième que sont introduites les homologies et les définitions afférentes. Les termes des relations d'homologie sont encore appelés des « chaînes », mais ces chaînes sont cette fois des combinaisons linéaires entières de « chaînes élémentaires », dont voici la définition :

«*An* elementary i-chain *of a complex* Φ *will be defined as any* ***symbolical expression*** *of the form*

$$\pm V_0 V_1 \cdots V_i \tag{8.1}$$

where the ***marks*** $V_0, V_1, \ldots, V_i$ *denote the vertices of an* i*-cell of* Φ » [Alexander 1926, p. 310].

D'après ces définitions, les chaînes et les chaînes élémentaires sont réduites à des expressions sans contenu géométrique : ce sont, suivant les termes de l'auteur, des « expressions symboliques » et les sommets des cellules des complexes, $V_0, V_1, \ldots, V_i$, ne sont que des « marques ». Précisons qu'Alexander distingue systématiquement une cellule, qu'il note $|V_0 V_1 \cdots V_i|$, et la chaîne élémentaire qui lui correspond, qu'il note $V_0 V_1 \cdots V_i$. Les chaînes ne renvoient donc pas à un objet géométrique mais à une expression dont les propriétés sont déterminées par la combinaison des lettres avec des conventions, dont certaines explicites, comme de changer le signe de l'expression quand deux lettres sont permutées. La définition du bord d'une chaîne élémentaire illustre bien cette situation. Le bord de la chaîne élémentaire $V_0 V_1 \cdots V_i$ est défini comme étant la chaîne $\sum_{s=1}^{i} (-1)^s V_0 \cdots V_{s-1} V_{s+1} \cdots V_i$, et le bord d'une chaîne est défini comme étant la combinaison linéaire des bords des chaînes élémentaires dont elle est la combinaison. Avec ces définitions, Alexander peut démontrer, sans faire intervenir aucun contenu géométrique, que le bord d'une chaîne n'a pas de bord. De même, la relation entre une chaîne élémentaire et les chaînes élémentaires en lesquelles elle peut être subdivisée est introduite comme une règle de réécriture sur les expressions. Ainsi, si une cellule $|V_0 V_1 \cdots V_i|$ du complexe Φ est subdivisée en cellules par l'introduction d'un nouveau sommet W, Alexander convient que la chaîne élémentaire $V_0 V_1 \cdots V_k$ qui lui correspond sera une combinaison linéaire des chaînes élémentaires $V_0 V_1 \cdots V_{t-1} W V_{t+1} \cdots V_i V_{i+1} \cdots V_k$:

«*let us agree to express each of the elementary chains of* Φ *corresponding to the cells* (14.2) $[|V_0 \cdots V_i V_{i+1} \cdots V_k|]$ *in terms of elementary chains of* Φ' *corresponding to the cells* (14.3) $[|V_0 V_1 \cdots V_{t-1} W V_{t+1} \cdots V_i V_{i+1} \cdots V_k|]$, *in accordance with the following formulas :*

$$\begin{aligned}(14.4) \qquad & V_0 \cdots V_i V_{i+1} \cdots V_k \\ &= \sum_{t=0}^{i} V_0 V_1 \cdots V_{t-1} W V_{t+1} \cdots V_i V_{i+1} \cdots V_k \\ &= \sum_{t=0}^{i} (-1)^t W V_0 V_1 \cdots V_{t-1} V_{t+1} \cdots V_i V_{i+1} \cdots V_k \text{ »}\end{aligned}$$

[Alexander 1926, p. 325].

Cette identification qui permet le passage d'une subdivision à une autre n'implique plus un contenu géométrique comme chez Poincaré ou Veblen, elle n'est plus non plus une relation d'homologie entre ensembles de cellules comme dans le précédent article d'Alexander : elle est une convention de réécriture entre des expressions. On notera qu'une relation qui impliquait un contenu géométrique est, une fois encore, remplacée par des conventions explicites. Enfin, les relations d'homologie se déduisent de la relation de bord et ne font donc, elles non plus, intervenir aucun contenu géométrique :

«*A closed chain* K *of a complex* Φ *will be said to be* bounding, *or* homologous to zero,

$$K \sim 0$$

if it is the boundary of some open chain L *of* Φ » [Alexander 1926, p. 314]. Ajoutons que cela n'est pas seulement vrai de la définition des homologies, mais aussi de l'usage qui en est fait tout au long de l'article.

Ainsi, alors que la première partie de l'article impliquait systématiquement le contenu géométrique des cellules et des complexes, la deuxième partie consacrée à l'homologie ne fait intervenir que des manipulations sur les expressions auxquelles les chaînes ont été réduites. Les notions qui ont un contenu géométrique (les cellules et les complexes) sont donc systématiquement séparées de celles qui n'en ont pas et qui sont considérées en tant qu'expressions (les chaînes élémentaires et les chaînes). Bien entendu, ces deux parties et ces deux types de notions ne sont pas indépendantes et la similarité entre la notation d'une cellule et celle d'une chaîne élémentaire, respectivement $|V_0V_1\cdots V_k|$ et $V_0V_1\cdots V_k$, le suggère suffisamment. Pour passer des unes aux autres, Alexander emploie exclusivement deux verbes, « to associate » et « to correspond » ; jamais les cellules et les chaînes élémentaires ne sont mises en relation autrement que par l'un de ces deux verbes (un exemple du recours à « to correspond » est donné dans la citation concernant la subdivision d'une chaîne élémentaire). Ainsi, les cellules et les chaînes élémentaires sont-elles non seulement systématiquement distinguées, mais le passage des unes aux autres est aussi traité de manière explicite et systématique : les chaînes élémentaires n'ont pas de contenu géométrique mais ont, selon les termes de l'auteur, une «*geometric interpretation*».

Le traitement de l'orientation dans ce texte illustre bien les ressources de cette dissociation entre chaînes élémentaires ($V_0V_1\cdots V_i$) et cellules ($|V_0V_1\cdots V_i|$). En effet, Alexander définit l'orientation en introduisant l'opposition entre les deux chaînes élémentaires $+V_0V_1\cdots V_i$ et $-V_0V_1\cdots V_i$, toutes les deux associées à la même cellule $|V_0V_1\cdots V_i|$, et grâce à la dissociation qu'introduit la notion d'interprétation, il peut considérer cette opposition sans s'inquiéter de sa signification géométrique. La citation suivante est à cet égard remarquable :

«*We prefer, however, to treat the expressions $\pm V_0V_1\cdots V_i$ as purely symbolical, so as not to go into the question of just what is meant by an oriented cell*» [Alexander 1926, p. 311].

Corrélativement à cette dissociation entre les notions pourvues d'une signification géométrique et celles considérées comme de pures expressions, Alexander est aussi conduit à distinguer deux types de démonstrations selon qu'elles se rapportent aux unes ou aux autres. Ainsi, certains théorèmes relatifs aux chaînes sont qualifiés de « géométriquement évidents » (*self-evident geometrically*) mais une démonstration « formelle » (*formal*) en est néanmoins donnée qui n'implique que les jeux de réécriture sur les expressions que nous avons signalés. Cette fois encore, cette séparation est suffisamment bien marquée pour être significative.

Cet article se distingue donc des autres textes que nous avons présentés par le fait que la partie consacrée aux relations d'homologie et aux nombres de connexion n'implique que des expressions qui ne sont rapportées à aucun contenu géométrique. Néanmoins, la séparation entre les notions réduites à de simples expressions et celles pourvues d'un contenu géométrique n'est pas aussi stricte... Nous allons voir, en particulier, que les chaînes élémentaires ne sont pas seulement des expressions mais qu'elles ont en fait aussi un contenu géométrique si l'on considère, comme il se doit, la troisième partie de l'article. Il suffit pour le soupçonner de rappeler que la première partie de l'article, consacrée à la démonstration du théorème de caractérisation des homéomorphismes, implique le contenu géométrique des complexes et que les deux autres parties qui font intervenir les chaînes et l'homologie ne sont pas indépendantes de la première. Au contraire, la démonstration de l'invariance topologique des nombres de connexion, présentée dans la troisième et dernière partie, repose sur la caractérisation combinatoire des homéomorphismes. Cette démonstration doit donc mêler chaînes élémentaires et cellules, et non plus seulement les inscrire dans des démonstrations parallèles, les unes « formelles » et les autres « géométriquement évidentes », qui se correspondraient par le biais d'une « interprétation ». En effet, nous allons voir plus précisément que les sommets (*vertices*) des cellules jouent ici un rôle crucial.

Les sommets sont avant tout des points : ce sont des éléments de l'ensemble de points qui composent le complexe. Mais ce sont aussi des cellules de dimension 0. La conversion du barycentre en sommet lors de la subdivision d'une cellule (voir ci-dessus l'introduction du point W) illustre bien ce double rôle. On retrouve ainsi, même dans ce cas particulier, le jeu entre ensembles de cellules et ensembles de points, caractéristique des contenus géométriques. Les sommets ont donc un contenu géométrique. Mais les sommets ne sont pas seulement rapportés à leur contenu géométrique, ils interviennent aussi souvent en tant que simples expressions. Nous l'avons vu avec la définition des chaînes élémentaires où ils sont considérés comme des « marques ». Toutes les expressions des chaînes sont en fait composées des lettres qui servent à dénoter des sommets et ainsi, toutes les notions considérées comme de pures expressions sont composées de lettres qui ont, par ailleurs, un contenu géométrique.

Il est remarquable que la distinction systématique entre cellules et chaînes élémentaires ne soit pas appliquée aux sommets : les sommets sont désignés et notés de la même façon, qu'ils soient rapportés à leur contenu géométrique ou qu'ils soient considérés comme de simples expressions. En particulier, un point n'est pas l'« interprétation géométrique » de la chaîne élémentaire V_i. Or, c'est précisément sur cette ambivalence des sommets que repose l'application du théorème de caractérisation des homéomorphismes à la démonstration de l'invariance topologique des nombres de connexion. Alexander considère en effet que les transformations, qui servent à approcher l'homéomorphisme et qui s'appliquent aux sommets des complexes dérivés de Φ et de Ψ, s'appliquent aussi aux chaînes. Ce faisant, il passe des sommets rapportés à leur contenu géométrique aux sommets tels qu'ils interviennent dans les chaînes, et qui sont alors de simples expressions. Il peut ainsi, au cours d'une même démonstration, passer du contenu géométrique des sommets à leurs expressions dans les chaînes et donc faire intervenir les notions relatives à l'homologie telles qu'elles ont été définies dans la seconde partie de l'article. Ce passage du contenu géométrique à l'expression impliqué dans la démonstration de l'invariance topologique des nombres de connexion contraste avec la distinction minutieuse entre cellules et chaînes élémentaires.

En résumé, dans cet article d'Alexander les complexes et les cellules ont un contenu géométrique mais les chaînes, leur bord et les relations d'homologie sont réduites à de simples expressions. Ces notions et ces relations sont débarrassées de tout contenu géométrique, celui-ci étant mis à distance par le biais d'une « interprétation » . En particulier, des démonstrations entières peuvent ne faire intervenir que des expressions et des relations entre elles, sans qu'aucun contenu géométrique ne soit considéré. Cela n'était le cas ni dans le livre de Veblen, ni dans les mémoires de Poincaré, même si l'on trouve dans ces derniers de brefs segments de démonstrations qui impliquent des expressions sans les rapporter à leur contenu géométrique ou arithmétique. Par ailleurs, il y a dans cet article d'Alexander une dissociation bien marquée relative à la signification géométrique des notions considérées. Cette dissociation se manifeste notamment par une distinction entre l'« évidence géométrique » de certaines assertions et leurs démonstrations « formelles » qui n'impliquent que des relations entre expressions. Elle se manifeste aussi par le caractère « conventionnel » attribué aux relations entre expressions auxquelles correspond une interprétation géométrique (voir la subdivision d'une chaîne élémentaire et la subdivision d'une cellule). Cette dissociation permet aussi à Alexander de considérer l'orientation sans la rapporter à une signification géométrique. Ces caractéristiques contrastent nettement avec celles qui ressortaient du livre de Veblen dans lequel l'exigence d'une signification géométrique (voir l'introduction des « surfaces de Riemann » généralisées), et non seulement d'une « interprétation » au sens de cet article d'Alexander, apparaissait très forte.

Mais nous avons vu qu'il y avait une exception à cette dissociation. Les sommets ont, en effet, la particularité d'avoir un contenu géométrique et d'être aussi considérés comme des expressions. Ils font ainsi le lien entre les cellules et les complexes, rapportés à leur contenu géométrique, et les chaînes, réduites à des expressions. Alors que la première partie de l'article n'implique essentiellement que des notions ayant un contenu géométrique, et que la deuxième n'implique, elle, essentiellement que des notions réduites à leur expression, les sommets permettent la synthèse de ces deux parties dans la troisième, c'est-à-dire dans la démonstration de l'invariance topologique des nombres de connexion.

On voit que le rôle du contenu géométrique ainsi que le rapport à la signification géométrique sont très différents dans les deux articles d'Alexander que nous avons présentés. Toutes les notions ont un contenu géométrique dans le premier, alors que dans le deuxième, l'auteur exploite la séparation entre les notions réduites à des expressions et celles ayant un contenu géométrique (les sommets faisant exception). Cependant, il convient de souligner que si Alexander expose dans ce dernier article une théorie de l'homologie dans laquelle il considère des notions réduites à des expressions[28] et s'il instaure effectivement une séparation nette entre les notions réduites à des expressions et celles ayant un contenu géométrique, ces deux types de notions coexistent néanmoins dans un même texte. (Des articles traitant de l'homologie et dans lesquels les notions sont pour la plupart réduites à des expressions seront présentés notamment par Mayer [1929] et Tucker [1933].) Le souci d'une signification géométrique n'est pas du tout le même dans l'article d'Alexander de 1926 que dans les mémoires de Poincaré ou le livre de Veblen. Cela ressort notamment de la déclaration d'Alexander selon laquelle il considère les chaînes élémentaires de manière « purement symbolique » afin d'éviter la question de la signification d'une cellule orientée. Mais à l'inverse, on notera que dans ses deux articles que nous avons présentés les notions ont toujours un contenu unique alors que

[28] C'est à notre connaissance un des premiers articles relatifs à l'homologie à le faire.

Poincaré et à sa suite Veblen, jouaient sur un double contenu, géométrique et arithmétique.

Au-delà de ces différences, un point commun demeure entre tous ces textes : le contenu géométrique y intervient et, d'ailleurs, souvent de manière subreptice. Pour compléter cette analyse de l'intervention du contenu géométrique dans les textes consacrés à l'homologie, nous allons maintenant présenter deux articles, un peu plus tardifs, dans lesquels ce contenu n'intervient plus.

5. L'INTRODUCTION DE CONTENUS ENSEMBLISTES : VIETORIS, ČECH

Il est possible de trouver dans les textes que nous venons de considérer des références, qui peuvent d'ailleurs être nombreuses, à des « ensembles » ou des « systèmes » de points ou de cellules, mais aucun ne recourt pour autant à un contenu ensembliste comme le fait l'article que Vietoris[29] publie en 1927 « Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen ». Vietoris définit dans cet article l'homologie d'un espace métrique compact. Comme dans l'article d'Alexander de 1922, il commence par donner une définition « combinatoire » de celle-ci, dans une première partie (intitulée « Kombinatorische Grundlage »). Un n-simplexe est ainsi un ensemble de $n+1$ points et ses côtés de dimension k sont les sous-ensembles de $k+1$ points. Un complexe (homogène) de dimension n est un ensemble fini de n-simplexes. L'addition de deux complexes est définie par l'union ensembliste de leurs simplexes, un même simplexe pouvant être compté plusieurs fois. Le bord d'un complexe de dimension n est le complexe composé des simplexes de dimension $n-1$ qui sont les côtés d'un nombre impair de n-simplexes. La définition des homologies découle de celle du bord ; les termes des homologies sont donc des complexes. Pour définir ensuite l'homologie et les nombres de connexion d'un *espace métrique compact*,

[29] Ce type de contenu intervient avant cet article de Vietoris. Il faut citer, pour l'*Analysis situs*, la série d'articles que Brouwer fit paraître autour de l'année 1910, mais Brouwer n'y recourt pas aux relations d'homologie, c'est pour cela que nous ne les avons pas considérés.

Vietoris considère des suites infinies particulières[30] $\{C_i\}$ de complexes définis par des simplexes composés de points de cet espace. Il applique les définitions précédentes aux éléments de ces suites : l'addition de deux suites se fait terme à terme, $\{C_i\} + \{D_i\} = \{C_i + D_i\}$, et le bord d'une suite est la suite des bords. Une suite $\{C_i\}$ est alors par définition homologue à zéro quand ses termes sont, à partir d'un certain rang, le bord de complexes dont les distances entre les sommets de leurs simplexes peuvent être arbitrairement petites[31]. Vietoris définit à partir de là les groupes puis les nombres de connexion.

Nous voulons surtout attirer l'attention sur le fait qu'un simplexe est ici un ensemble fini de points. Car, si les simplexes ou les cellules ont souvent été rapportés à leurs sommets (c'est le cas, par exemple, dans la notation d'Alexander, $|V_0V_1 \cdots V_i|$), cela ne concernait que leur notation, et les simplexes n'en désignaient pas moins des parties de l'espace possédant continuité et forme. Dans cet article de Vietoris, en revanche, le contenu même d'un simplexe est réduit à un ensemble fini de points. C'est là un changement par rapport aux textes précédents puisque l'espace étudié, les simplexes et les complexes n'ont plus un contenu géométrique, mais un contenu que l'on peut qualifier d'ensembliste, dans la mesure où les seules relations dans lesquelles ils interviennent sont l'intersection, l'union et l'inclusion[32]. La relation entre ensembles de cellules et ensembles de points que nous avons prise pour caractériser le contenu géométrique n'intervient plus ici. En particulier, tout ce qui concerne la subdivision de l'espace a disparu : l'espace est un ensemble de points (en l'occurrence infini) et aucune subdivision de celui-ci n'est envisagée. Les relations d'incidence ou de contiguïté ont aussi disparu et ont été remplacées par la seule relation d'inclusion, avec laquelle elles ne peuvent être confondues. Ce n'est bien sûr pas seulement le contenu géométrique qui disparaît, mais aussi la représentation que l'on a d'une cellule.

[30] Ces complexes doivent vérifier la condition suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, tous les complexes de la suite doivent, à partir d'un certain rang, être ε-homologues, c'est-à-dire qu'ils doivent être le bord d'un complexe dont les sommets sont distants d'au plus ε.

[31] Plus précisément, $\{C_i\} \sim 0$ signifie : pour tout ε, tous les complexes de la suite sont, à partir d'un certain rang, ε-homologues à zéro.

[32] À cette époque, l'appartenance est rarement distinguée de l'inclusion dans les textes de topologie.

Un autre exemple de texte dans lequel intervient des contenus ensemblistes est donné par l'article de Čech, « Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque », publié en 1932. Un espace topologique[33] R étant donné, ainsi qu'une famille finie U_i d'ensembles ouverts le recouvrant ($R = \bigcup U_i$), un simplexe de dimension n est cette fois une famille $(U_0, U_1, \ldots, U_n)$ de $n+1$ ouverts U_i, dont l'intersection est non vide. Comme dans l'article de Vietoris, un simplexe de dimension n de R est composé de $n+1$ éléments, mais ici les sommets $U_0, U_1, \ldots, U_n$ du simplexe $(U_0, U_1, \ldots, U_n)$ ne sont plus des *points* mais des *sous-ensembles* (ouverts) de R.

Cette définition des simplexes généralise celle donnée par Alexandroff [1929] fondée sur la relation entre les cellules d'un polyèdre et celles de son polyèdre réciproque, cette relation ayant elle-même été introduite par Poincaré [1899] avec la notion de subdivision barycentrique. Le principe de la définition d'Alexandroff est le suivant. D'une part, à chaque cellule de dimension n du polyèdre réciproque correspond un unique sommet du polyèdre, appelé le centre de la cellule. D'autre part, des cellules du polyèdre réciproque ont une intersection non vide si et seulement si leurs centres définissent une cellule du polyèdre. A chaque cellule du polyèdre correspond ainsi un unique ensemble de cellules du polyèdre réciproque ayant une intersection non vide, et réciproquement. La définition d'Alexandroff que Čech reprend ici, consiste à remplacer les sommets du polyèdre par les cellules du polyèdre réciproque qui leur correspondent et à utiliser la propriété qui caractérise, en terme d'intersection de cellules du polyèdre réciproque, les ensembles de sommets qui définissent une cellule du polyèdre[34].

Dans cet article de Čech, les sommets des simplexes sont donc des ensembles ouverts de points. Ainsi, le rapport entre le contenu ensembliste des simplexes et leur signification géométrique est encore moins immédiat qu'il ne l'était dans l'article de Vietoris. En revanche, la définition qui est donnée des simplexes est conforme au contenu ensembliste qui sera

---

[33] Čech commence par donner ses définitions pour un ensemble R qui n'est pas muni d'une topologie. C'est cependant aux espaces topologiques qu'il appliquera sa définition de l'homologie et c'est par souci de clarté que nous nous plaçons dans ce cadre.

[34] Le lecteur trouvera un exposé fort clair de cette définition chez Alexandroff [1932, n$^{\text{os}}$ 31 et 34].

le leur tout au long du texte. Nous avons vu qu'il n'en était pas ainsi dans les textes dans lesquels intervenaient des contenus géométriques. Ainsi, on peut constater dans les articles de Vietoris et de Čech présentés qu'un changement dans le statut des définitions accompagne l'abandon de contenus géométriques pour des contenus ensemblistes.

Mais contrairement à ce qui se passe dans l'article de Vietoris, les relations considérées dans le texte de Čech ne sont pas toutes rapportées à des contenus ensemblistes. C'est ainsi que les termes des homologies, appelés des « chaînes », sont des combinaisons linéaires[35] de simplexes et qu'ils peuvent être considérés comme de pures expressions. En particulier, l'addition n'est pas, comme elle l'était chez Vietoris [1927], l'union ensembliste de simplexes mais bien une combinaison linéaire, comme chez Alexander [1926] ou plus encore chez Lefschetz [1930] (voir Herreman [1996]). Les simplexes, $(U_0, U_1, \ldots, U_n)$, et les chaînes sont d'ailleurs appelés des « symboles ». Ces « symboles » permettent aussi de définir l'orientation d'un simplexe exactement comme le faisait Alexander en distinguant $|V_0V_1 \cdots V_n|$ et $\pm V_0V_1 \cdots V_n$, c'est-à-dire à partir de distinctions qui n'impliquent que les expressions et aucun contenu, qu'il soit géométrique ou ensembliste. Le bord d'une chaîne est défini comme il l'était chez Alexander [1926] et Lefschetz [1930], c'est-à-dire au niveau des expressions. Ces expressions et ces opérations permettent de définir pour un recouvrement donné un module de dimension finie[36]. Néanmoins, les chaînes ne sont pas seulement considérées comme des expressions, elles ont aussi un contenu ensembliste *via* les sommets des simplexes dont elles sont des combinaisons linéaires. Čech considère par exemple qu'une chaîne est *incluse* dans un sous-ensemble de R, quand l'intersection des sommets (qui sont des ouverts) de chacun de ses simplexes est incluse dans ce sous-ensemble. Les chaînes ont dans cette mesure un contenu ensembliste, mais leur rapport à celui-ci diffère par exemple de celui d'un ensemble ouvert à son contenu ensembliste.

Jusqu'à présent, un seul recouvrement $\mathfrak{U}$ a été considéré. Pour définir

[35] Comme déjà Lefschetz l'avait envisagé, les combinaisons linéaires sont ici à coefficients rationnels et non plus seulement entiers.

[36] Čech définit non seulement la relation $C^n \sim 0$, mais plus généralement $C^n \sim 0$ mod α dans A, A étant un sous-ensemble de R et α un sous-ensemble de A, reprenant ainsi les définitions de l'homologie relative introduite par Lefschetz à la fin des années 1920.

l'homologie indépendamment de celui-ci, Čech considère des suites de chaînes $\{C^n(\mathfrak{U})\}$ indexées par tous les recouvrements ouverts possibles[37]. On reconnaît le principe de la définition de Vietoris [1927], à ceci près que l'absence de métrique conduit à une notion de limite construite sur les recouvrements au lieu d'une indexation sur les entiers. Mais il nous importe ici surtout de remarquer que les éléments des suites $\{C_i\}$ étaient, dans Vietoris [1927], des complexes C_i, c'est-à-dire des *ensembles* de simplexes, ces derniers étant eux-mêmes des ensembles de points, alors que ces mêmes éléments sont ici des combinaisons linéaires de simplexes. Néanmoins, les raisonnements de Čech portent le plus souvent sur les sommets des simplexes, c'est-à-dire sur des ensembles ouverts et impliquent donc des contenus ensemblistes.

En résumé, des contenus ensemblistes se sont substitués à des contenus géométriques qui ont complètement disparu de cet article de Čech comme de celui de Vietoris. Mais à la différence de ce dernier, certaines expressions (les « symboles ») ont aussi chez Čech un rôle propre, irréductible à leur contenu ensembliste. Ainsi, les simplexes, et plus généralement les chaînes, sont rapportés parfois à leur expression et d'autres fois à leur contenu ensembliste. Leur intervention, en tant qu'expression, est bien plus fréquente que ne l'était celle des combinaisons linéaires de variétés dans les mémoires de Poincaré. Čech peut notamment introduire des modules et raisonner sur ceux-ci sans rapporter leurs éléments à leur contenu. Si cette autonomie des expressions s'apparente à celle des chaînes chez Alexander [1926], il y a néanmoins une différence majeure : Čech ne sépare pas les notions qui sont réduites à des expressions de celles qui ont un contenu. Au contraire, les simplexes et les chaînes sont, dans certains cas, considérés comme des expressions et sont, dans d'autres, rapportés à leur contenu ensembliste. Cette forme de coexistence correspond en fait à celle que l'on trouve chez Lefschetz [1930], à ceci près que ce sont des contenus géométriques qui interviennent chez celui-ci et non des contenus ensemblistes. On voit que les contenus ensemblistes et géométriques

[37] Comme Vietoris, Čech considère des suites particulières : il existe entre les chaînes d'une même suite des relations d'homologie dont il n'est pas nécessaire de donner ici le détail. Précisons tout de même que le passage d'un recouvrement à un autre se fait au niveau du contenu (ensembliste) des simplexes et s'étend aux chaînes par linéarité, c'est-à-dire au niveau de leur expression. Ce type d'extension intervenait déjà dans les mémoires de Poincaré et c'est un procédé systématique chez Lefschetz [1930].

peuvent avoir avec les expressions des formes de coexistence semblables.

Bien que notre caractérisation du contenu géométrique ait d'emblée été formulée en des termes ensemblistes contradictoires (un ensemble de points ne peut être confondu avec un ensemble de ses parties), il eut été possible que des notions ayant un contenu géométrique et des notions ayant un contenu ensembliste coexistent dans un même texte. Or, ce n'est pas le cas dans les textes que nous avons présentés. Cela est d'autant plus remarquable que le contenu géométrique intervenait dans de nombreux arguments (passage d'une subdivision à une autre, démonstration des dualités de Poincaré et d'Alexander, démonstration de l'invariance combinatoire et topologique). Inversement, les problèmes considérés, les relations et les démonstrations changent quand interviennent des contenus ensemblistes, comme c'est le cas dans les articles de Vietoris et de Čech. Il y a bien de ce point de vue une dichotomie entre ces textes. Mais il convient aussi de remarquer que les textes qui font intervenir des contenus ensemblistes peuvent cependant faire référence à des textes impliquant des contenus géométriques. Il n'y a d'ailleurs pas non plus de distinction faite explicitement par les auteurs qui rende compte de l'opposition entre contenus géométriques et ensemblistes. Nous espérons avoir montré que cette distinction pouvait néanmoins être pertinente.

CONCLUSION

Ces analyses sont trop partielles et le corpus considéré trop restreint pour que l'on puisse prétendre tirer des conclusions générales, même en les limitant au premier tiers du XX^{e} siècle, sur l'histoire du contenu géométrique et sur l'attention que portent les mathématiciens à la signification géométrique de leurs notions. Quelques orientations peuvent néanmoins être indiquées.

Le résultat le plus significatif est certainement la permanence sur une longue période de contenus géométriques dans des textes émanant de mathématiciens aussi différents que Poincaré, Veblen ou Alexander, et il est certain que bien d'autres noms pourraient être ajoutés à ceux-là. Nous avons aussi vu que cette intervention est néanmoins souvent subreptice alors que des définitions de plus en plus élaborées et des conventions explicites se substituent progressivement aux relations attachées à ce contenu. Ce décalage suggère un retrait progressif du contenu géométrique.

Un retrait semblable a, plus généralement et suivant d'autres voies, déjà été souvent signalé et il a été rapporté, notamment, aux courants d'arithmétisation, d'axiomatisation et au développement de la théorie des ensembles. Mais il importe d'être en mesure d'en apprécier véritablement la portée sur la production mathématique et non seulement de l'extrapoler à partir de textes programmatiques ou supposés paradigmatiques.

La permanence du contenu géométrique jusque dans les années 1930 est à cet égard remarquable et elle contribue à préciser la représentation que l'on peut avoir des mathématiques de cette époque. Elle permet notamment de nuancer, ou au moins de situer à un autre niveau, l'influence du développement de la théorie des ensembles sur cette partie des mathématiques, dans laquelle on aurait pu pourtant s'attendre à trouver les manifestations les plus évidentes. Le livre de Lefschetz, *Topology*, publié en 1930, et donc postérieur à l'article de Vietoris (et à ceux de Brouwer, d'Alexandroff, etc.) qu'il cite même, est intéressant puisque le contenu ensembliste y est totalement absent et que le rôle du contenu géométrique y est en revanche tout à fait semblable à celui qu'il a dans les mémoires de Poincaré (voir Herreman [1996, p. 349–350]). Ce livre apparaît, sous cet angle, appartenir à une autre époque. Plus généralement, ces analyses suggèrent une séparation assez nette entre les textes, selon qu'ils impliquent des contenus géométriques (Poincaré, Veblen, Alexander, etc.) ou ensemblistes (Vietoris, Čech, etc.), ces deux types de contenus ne coexistant pas. C'est un résultat qui doit être encore confirmé et précisé.

L'analyse du recours à des expressions qui ne sont rapportées à aucun contenu (notamment géométrique, puisqu'il s'agit en l'occurrence du contenu d'origine des termes des homologies) et les remarques par lesquelles elles sont souvent introduites, montrent que c'est avec précaution que de telles expressions sont considérées dans les textes faisant intervenir des contenus géométriques. Le recours à de telles expressions n'apparaît ainsi nullement correspondre au régime normal des notions mathématiques, même à cette époque. L'exemple du livre de Veblen est à cet égard intéressant : alors que son auteur est couramment présenté comme l'un des chantres de l'abstraction en mathématiques aux États-Unis à cette époque, ce livre se distingue par l'absence de telles expressions et l'assignation systématique d'une signification (et d'un contenu) géométrique aux termes et aux opérations qui y sont considérés. De ce point de vue, les mémoires de Poincaré peuvent être considérés comme plus abstraits ! Il est remarquable aussi que dans la plupart de ces textes des expressions considérées pour elles-mêmes coexistent avec d'autres qui sont pourvues d'un contenu géométrique. Cette coexistence peut se faire au sein d'une même notion, qui est dès lors, dans un même texte, considérée parfois comme une pure expression et qui est, d'autres fois, rapportée à son contenu géométrique, sans que les opérations appliquées à l'une puissent être appliquées à l'autre.

Il est aussi possible de considérer l'évolution du rôle du contenu géométrique chez un mathématicien particulier. Il est ainsi remarquable qu'il n'y ait aucun changement sur ce plan dans l'ensemble des mémoires de Poincaré consacrés à l'*Analysis situs*, dont la publication s'étend pourtant sur près de dix ans : des contenus géométriques y sont présents du premier au dernier avec un rôle qui ne change pas. À l'inverse, la fonction de ce contenu ainsi que le rapport d'Alexander à la signification géométrique sont très différents dans les deux articles que nous avons présentés. L'analyse d'autres articles de cet auteur confirme d'ailleurs cette diversité et cette inconstance. Lefschetz serait un auteur particulièrement intéressant à étudier sous cet angle, ce que nous n'avons pu faire ici faute de place. Il publie en effet entre 1923 et jusqu'après la seconde guerre mondiale plusieurs livres et de nombreux articles consacrés à la topologie à travers lesquels il est en particulier possible de suivre l'évolution du rôle des contenus géométriques et ensemblistes. Les résultats s'avèrent là aussi très variés.

Nos analyses ont porté sur quelques textes qui ont en commun de traiter de l'homologie. Pour d'autres corpus, d'autres caractérisations du contenu géométrique seraient nécessaires. Ce sont là des changements qui peuvent être ainsi étudiés précisément. En particulier, la considération d'expressions qui ne sont rapportées à aucun contenu n'est certainement pas propre aux textes et à l'époque que nous avons considérés. Cela admis, il est permis d'envisager des comparaisons synchroniques et diachroniques du recours à de telles expressions « symboliques » et du rapport des auteurs à celles-ci. Plus généralement, les types de contenu impliqués dans un texte, le rapport de ces différents contenus entre eux, la fonction du passage des uns aux autres, leur mode de coexistence et les commentaires qui les accompagnent, ont aussi une histoire. La reconnaissance de cette diversité exclut en particulier une conception normative des différents contenus et de leur mode de coexistence. Au-delà de l'historicité des mathématiques à laquelle ces analyses donnent accès, c'est la diversité sémiotique des textes mathématiques que nous avons voulu mettre en évidence.

Remerciements

Je remercie vivement les rapporteurs pour leurs remarques qui m'ont permis de clarifier plusieurs points de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

Alexander (J.W.)

[1922] A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem, *Transactions of the American Mathematical Society*, 23 (1922), p. 333–349.

[1926] Combinatorial Analysis situs, *Ibid.*, 28 (1926), p. 301–329.

[1930] The combinatorial theory of complexes, *Annals of Mathematics*, (II) 31 (1930), p. 292–320.

Alexandroff (P.)

[1929] Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension, *Ann. of Math.*, (II) 30 (1929), p. 101–187.

[1932] *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, Berlin : Springer, 1932. Trad. angl., *Elementary concepts of topology*, New York : Dover, 1961.

Alexandroff (P.) et Hopf (H.)

[1935] *Topologie I*, Berlin : Springer, 1935.

Betti (E.)

[1871] Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni, *Annali di matematica pura ed applicata*, (II) 4 (1871), p. 140–158.

Bollinger (M.)

[1972] Geschichtliche Entwicklung des Homologiebegriffs, *Archive for History of Exact Sciences*, 9 (1972), p. 94–170.

Cartan (E.)

[1928] Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos, *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des Sciences*, 187 (1928), p. 196–198.

Čech (E.)

[1932] Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque, *Fundamenta mathematicae*, 19 (1932), p. 149–183.

Chuard (J.)

[1922] Questions d'Analysis situs, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 46 (1922), p. 185–224.

Dehn (M.) et Heegaard (P.)

[1907] Analysis situs, dans *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, vol. III. 1. 1, Leipzig : Teubner, 1907–1910, article AB3, p. 153–220.

Dieudonné (J.)

[1985] Les débuts de la topologie algébrique, *Expositiones mathematicae*, 3 (1985), p. 347–357.

[1989] *A history of algebraic and differential topology 1900–1960*, Boston-Basel, Birkhäuser, 1989.

GOLDSTEIN (C.)

[1995] *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, Saint-Denis : Presses Universitaires de Vincennes, 1995.

HEEGAARD (P.)

[1898] Forstudier til en topoligisk teori for de algebraiske Fladers Sammenhang, Diss., Kjobenhavn, 1898. Trad. fr., Sur l'Analysis situs, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 44 (1916), p. 161–242.

HERREMAN (A.)

[1996] *Eléments d'histoire sémiotique de l'homologie*, thèse, Université Paris 7, 1996.

[1998a] L'analogie au fondement de l'homologie, dans Marie-José Durand-Richard, éd., *Le statut de l'analogie dans la démarche scientifique*, Paris : Blanchard, à paraître.

[1998b] Sur l'analyse sémiotique des textes mathématiques, *Semiotica*, (1998), à paraître.

HJELMSLEV (L.)

[1968] *Prolégomènes à une théorie du langage*. Suivi de *La structure fondamentale du langage*, Paris : Éditions de Minuit, 1968

[1971] *Essais linguistiques*, Paris : Éditions de Minuit, 1971.

[1985] *Nouveaux essais*, Paris : PUF, 1985.

KNESER (H.)

[1926] Die Topologie der Mannigfaltigkeiten, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 34 (1926), p. 1–14.

LEFSCHETZ (S.)

[*Papers*] *Selected Papers*, New York : Chelsea, 1971.

[1926] Intersections and transformations of complexes and manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 28 (1926), p. 1–49; *Papers*, p. 199–247.

[1930] *Topology*, New York : American Mathematical Society (Colloquium Publications, vol. 12), 1930.

[1933] On singular chains and cycles, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 39 (1933), p. 124–129; *Papers*, p. 479–484.

[1970] The early development of algebraic topology, *Boletim da Sociedade brasileira de matemática*, 1 (1970), p. 1–48.

MAYER (W.)

[1929] Über Abstrakte Topologie (I, II), *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 36 (1929), p. 1–42 et 219–258.

PICARD (E.) et SIMART (G.)

[1897–1906] *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, 2 vol., Paris, 1897, 1906.

POINCARÉ (H.)

[*Œuvres*] *Œuvres de Henri Poincaré*, 11 vol., Gauthier-Villars, 1916–1956.

[1895] Analysis situs, *Journal de l'École polytechnique*, (II) 1, p. 1–121; *Œuvres* VI, p. 193–288.

[1899] Complément à l'Analysis situs, *Rc. Circ. mat. Palermo*, 13 (1899), p. 285–343; *Œuvres* VI, p. 289–337.

[1900] Second complément à l'Analysis situs, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 32 (1900), p. 277–308; *Œuvres* VI, p. 338–370.

[1902a] Sur certaines surfaces algébriques; troisième complément à l'Analysis situs, *Bull. Soc. math. France*, 30 (1902), p. 49–70; *Œuvres* VI, p. 373–392.

[1902b] Sur les cycles des surfaces algébriques ; Quatrième complément à l'Analysis situs, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (V) 8 (1902), p. 169–214 ; *Œuvres* VI, p. 397–434.

[1904] Cinquième complément à l'Analysis situs, *Rc. Circ. mat. Palermo*, 18 (1904), p. 45–110 ; *Œuvres* VI, p. 435–498.

[1908] L'avenir des mathématiques, dans *Science et méthode*, Paris : Flammarion, 1908.

[1921] Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même, *Acta mathematica*, 38 (1921), p. 37–135 [rédigée en 1901].

Rham (G. de)

[1929] Intégrales multiples et Analysis situs, *C. R. Acad. sci. Paris*, 188 (1929), p. 1651–1653.

[1931] Sur l'Analysis situs des variétés à n dimensions, *J. math. pures appl.*, (IX) 10 (1931), p. 115–200.

Scholz (E.)

[1980] *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbergriffs von Riemann bis Poincaré*, Boston-Basel, Birkhäuser, 1980.

Seifert (H.) et Threlfall (W.)

[1934] *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig : Teubner, 1934.

Steinitz (E.)

[1908] Beiträge zur Analysis situs, *Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft*, 7 (1908), p. 29–49.

Stillwell (J.)

[1980] *Classical topology and combinatorial group theory*, New York : Springer, 1980 ; 2e éd. 1993.

Tietze (H.)

[1908] Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, *Mh. Math. Phys.*, 19 (1908), p. 1–118.

Tucker (A.W.)

[1933] An abstract approach to manifolds, *Ann. of Math.*, (II) 34 (1933), p. 191–243.

Veblen (O.)

[1922] *Analysis situs*, New York : American Mathematical Society (Colloquium Publications) ; 2e éd., 1931.

Veblen (O.) et Alexander (J.W.)

[1913] Manifolds of n dimensions, *Ann. of Math.*, (II) 14 (1913), p. 163–178.

Vietoris (L.)

[1927] Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen, *Mathematische Annalen*, 97 (1927), p. 454–472.

Volkert (K.)

[1994] *Das Homöomorphieproblem insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten in der Topologie 1892–1935*, Habilitationschrift vorgelegt der Mathematischen Fakultät der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 1994.

[1996] The early history of Poincaré's conjecture, dans J.-L. Greffe, G. Heinzmann, K. Lorenz, éd., *Henri Poincaré : Science et philosophie* (Congrès international, Nancy, France, 1994), Berlin : Akademie-Verlag et Paris : Blanchard, p. 241–250.

VAN DER WAERDEN (B.L.)
[1930] Kombinatorische Topologie, *Jber. d. Dt. Math.-Verein.*, 39 (1930), p. 121–139.
WEYL (H.)
[1917] Le problème de l'Analysis situs, *L'Enseignement mathématique*, 19 (1917), p. 95–96.