Revue d'histoire des mathématiques,
3 (1997), p. 49–97.

L'ÉLABORATION PAR RIEMANN D'UNE DÉFINITION DE LA DÉRIVATION D'ORDRE NON ENTIER

Stéphane Dugowson (*)

Résumé. — Cet article étudie le contenu et la réception du mémoire peu connu *Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation* (Essai d'une conception générale de l'intégration et de la dérivation) que Riemann a consacré dans sa jeunesse à la dérivation d'ordre non entier. En revendiquant l'héritage de Lagrange et en utilisant des séries divergentes, il s'y oppose directement à Cauchy. Un siècle plus tard, Hardy montre qu'une partie des considérations développées par Riemann peut être interprétée à la lumière de la théorie des séries divergentes de Borel. La question reste toutefois en partie ouverte de savoir si cela est possible pour l'ensemble des calculs de Riemann et notamment ceux concernant les fonctions complémentaires. On trouvera en appendice le texte de Riemann traduit pour la première fois en français.

Abstract. — Riemann's work on defining the concept of a fractional calculus. This paper examines the content, and subsequent reception, of Riemann's early, and little-noted, memoir *Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation* (An attempt at a general conception of integration and differentiation), in which he propounded his concept of a fractional calculus. Taking his cue from Lagrange's contribution to the treatement of the calculus, and bringing in divergent series, he adopted a stance directly at odds with Cauchy's. A century further on, Hardy showed that, in some respects, Riemann's arguments may be reinterpreted on the lines of Borel's theory of divergent series. It is still an open question, however, whether this calculus is altogether amenable to such a reading – most notably regarding the matter of complementary functions. Appended to this reappraisal is the first-ever translation into French of Riemann's paper.

> «*Les séries divergentes sont, en général, quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration. On peut démontrer tout ce qu'on veut en les employant, et ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et qui ont enfanté tant de paradoxes.*»
>
> Abel [1826]

(*) Texte reçu le 17 avril 1996, révisé le 25 mars 1997.
Stéphane Dugowson, ISMCM–CESTI, 3 rue Fernand Hainaut,
93407 Saint Ouen Cedex (France). Courrier électronique : sdugo@hol.fr.

INTRODUCTION

La tenue de plusieurs colloques internationaux[1], la parution de plusieurs livres[2] et même la création, en 1992, d'une revue entièrement consacrée au sujet, *Journal of fractional calculus*, témoignent de la vitalité actuelle de la recherche sur la dérivation d'ordre non entier. Deux raisons principales semblent expliquer cet intérêt grandissant : d'une part, l'utilisation de la dérivation d'ordre non entier dans le cadre d'applications variées (automatique, analyse d'image, viscoélasticité, diffusion fractale, etc.[3]) permet d'améliorer les modèles classiquement utilisés et de créer de nouveaux outils d'ingénierie ; d'autre part, d'un point de vue strictement mathématique, les nombreuses propriétés de la dérivation d'ordre généralisé en font un outil d'analyse intéressant [Srivastava et Owa 1989].

Ces recherches s'appuient, en général, sur une définition de la dérivation d'ordre non entier construite à partir de l'*intégrale de Riemann-Liouville*

$$ {}_{x_0}I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t. $$

Lorsque α est un entier strictement positif, on vérifie que cette formule fournit une primitive d'ordre α de la fonction f. Il peut sembler naturel, lorsque α est positif non entier, de définir par cette même formule la primitive d'ordre α et d'origine x_0 de la fonction f ; on obtient ainsi une fonction définie pour $x > x_0$. Cette définition est légitimée par le fait que, lorsque α_1 et α_2 sont des réels strictement positifs, la *loi des indices* est vérifiée

$$ {}_{x_0}I^{\alpha_1} \circ {}_{x_0}I^{\alpha_2} = {}_{x_0}I^{\alpha_1+\alpha_2}. $$

Pour définir les dérivées d'ordre positif non entier, on ne peut utiliser directement l'intégrale de Riemann-Liouville, généralement divergente lorsque $\alpha < 0$. Pour s'affranchir de cet obstacle, le plus simple consiste à prendre les dérivées d'ordre entier des primitives d'ordre non entier de

[1] New Haven en juin 1974 [Ross 1975a], Strathclyde en août 1984 [McBride et Roach 1985], Koriyama en mai 1988 [Srivastava et Owa 1989], Tokyo en mai 1989 (voir Nishimoto [1992]), Bordeaux en juillet 1994 [Le Méhauté et Oustaloup 1994].

[2] Oldham et Spanier [1974] ; Nishimoto [1984–1991] ; Samko, Kilbas et Marichev [1993] ; Oustaloup [1995].

[3] Voir Le Méhauté [1990, p. 67–79], Oustaloup [1995].

la fonction considérée. Ce procédé équivaut à effectuer un prolongement analytique par rapport à l'ordre α, ou encore à prendre la partie finie au sens de Hadamard de l'intégrale divergente donnée par la formule de Riemann-Liouville.

Ceci suggère que les distributions constituent un cadre adéquat pour cette définition. Laurent Schwartz [1966, p. 174] a consacré quelques pages à cette question, dans le cas de distributions à support dans $\mathbb{R}_+$: la dérivée d'ordre α et d'origine 0 d'une distribution est le produit de convolution de celle-ci par la «*puissance de convolution*» d'ordre $-\alpha$ de la fonction de Heaviside. Une formulation équivalente peut être donnée dans le corps de convolution de Mikusiński [Erdélyi 1971]. Grâce à l'utilisation de fonctions généralisées, la loi des indices continue d'être vérifiée à tous les ordres, ce qui n'est pas le cas des définitions fondées sur la seule utilisation des fonctions classiques [Oldham et Spanier 1974].

L'appellation « intégrale de Riemann-Liouville », utilisée par Marcel Riesz [1949], pourrait laisser penser que le mémoire de Riemann *Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation*, objet du présent article, marque la naissance de la dérivation d'ordre non entier. Nous verrons que Riemann lui-même devait sans doute le croire. En fait, depuis que Bertram Ross, à qui l'on doit plusieurs articles consacrés à l'histoire de la dérivation d'ordre non entier [Ross 1975b, 1977], a établi une chronologie du sujet [Ross 1974], on ne peut plus ignorer que cette généralisation est née cent cinquante ans avant que Riemann n'écrive son mémoire. Il appartient, en effet, à Leibniz [1695] d'avoir, le premier, conçu ces *différences métaphysiques*[4]. Euler [1730] donne la première expression non triviale d'une dérivée d'ordre non entier ; l'article d'Euler où apparaît cette expression est, par ailleurs, assez célèbre, car il contient également la première formule intégrale pour l'interpolation de la factorielle[5] (« intégrale eulérienne »). Dans la *Théorie analytique de la chaleur*, Fourier donne, dans le cadre de son analyse, une définition de la dérivée d'une fonction à un ordre quelconque[6] [1822, p. 507]. L'année suivante, Abel[7] [1823] exprime sa solution du problème de la tautochrone

[4] Voir Parmentier [1989, p. 410–413], Dugowson [1994, p. 33–54].

[5] Voir Dugowson [1994, p. 55].

[6] *Ibid.*, p. 56–58.

[7] Voir Lützen [1990, p. 314–315], Dugowson [1994, p. 58–60].

sous la forme d'une primitive d'ordre $\frac{1}{2}$. Au début des années 1830, Liouville [1832a,b,c] commence la publication d'une série de mémoires constituant la première véritable théorie de la dérivation d'ordre non entier[8].

On le voit, ni l'ordre alphabétique, ni l'ordre chronologique n'explique la première place attribuée à Riemann dans l'expression « formule de Riemann-Liouville ». Cette expression n'est pourtant pas injuste dans la mesure où, si l'étonnante théorie développée par Liouville contient des expressions équivalentes à cette formule dans les cas particuliers où $x_0 = \pm\infty$, Riemann reste néanmoins le premier à l'avoir écrite en toute généralité.

Pour des raisons sur lesquelles nous reviendrons, Riemann, encore étudiant lorsqu'il le rédigea en 1847, n'a pas souhaité faire connaître son essai ; celui-ci ne sera publié qu'après la mort du mathématicien allemand, dans les *Œuvres* éditées en 1876 par Heinrich Weber avec l'assistance de Richard Dedekind.

Dans la première partie du présent article, nous tâchons de dégager les enjeux de ce mémoire de Riemann. La seconde partie est essentiellement une introduction à la lecture du mémoire, dont une traduction française est proposée en appendice ; nous y mettons en évidence les étapes de la démarche suivie par Riemann et analysons certains passages importants ou délicats. La troisième partie concerne la réception du mémoire de Riemann. Enfin, dans une dernière partie, nous revenons sur le problème des « fonctions complémentaires », c'est-à-dire de la multivocité des opérateurs de dérivation d'ordre non entier.

1. LES ENJEUX DU MÉMOIRE DE RIEMANN

L'objectif de Riemann est clairement annoncé au début de son article : il s'agit de généraliser la dérivation aux ordres non entiers. Contrairement à Liouville, chez qui une telle généralisation répondait au besoin de disposer d'un outil adapté à la résolution d'équations issues de la physique[9],

[8] On trouvera une étude approfondie de la théorie de Liouville dans l'ouvrage que J. Lützen a consacré au mathématicien français [1990, p. 303–349]. Voir aussi Dugowson [1994, p. 65–111].

[9] Voir Lützen [1990, p. 307–312].

Riemann considère ce problème pour lui-même : aucune application, même purement mathématique, n'est évoquée.

Par ailleurs, à l'époque où il rédige son article, Riemann ignore que d'autres mathématiciens se sont penchés sur la question. L'absence de référence aux théories antérieures à la sienne ne laisse, en effet, guère de doute à cet égard, dans la mesure où, à la fois profonde et originale, la théorie du jeune mathématicien aurait pu tirer avantage d'une confrontation à ces théories. En effet, aussi bien les formules écrites par Euler et Abel que la formule utilisée par Liouville comme fondement de sa propre théorie apparaissent comme des cas particuliers dans la théorie de Riemann[10], alors même que ces formules semblaient incompatibles, comme l'avait noté Liouville [1834, p. 15]. De plus, Riemann ne mentionne la «*limite d'un quotient de grandeurs évanouissantes*»[11] que pour écarter l'idée qu'une telle limite puisse servir à fonder la généralisation visée : cela confirme qu'il ignorait la théorie de Liouville, celui-ci ayant montré que ses «*différentielles à indices quelconques*» pouvaient être exprimées par de telles limites [Liouville 1832b, p. 111–112]. Que Riemann ait ignoré la théorie de Liouville n'a d'ailleurs rien d'étonnant, vu le peu d'écho rencontré, en France même, par les centaines de pages parfois déroutantes dans lesquelles Liouville a exposé sa théorie. Quant aux contributions d'Abel, de Fourier, d'Euler ou de Leibniz, elles étaient trop succinctes pour qu'on puisse s'étonner qu'un étudiant, fût-il Riemann, ne les connaisse pas, alors qu'il ignorait le texte de Liouville [1832a, p. 2] où elles sont, pour la plupart, mentionnées.

Malgré cette absence d'application et de référence aux travaux antérieurs sur le même thème, le travail de Riemann n'est pas coupé des préoccupations mathématiques de son temps[12]. Au contraire, en choisis-

[10] Les formules d'Euler et d'Abel correspondent à une origine nulle dans l'intégrale par laquelle Riemann définit la dérivation d'ordre quelconque ; l'égalité entre l'exponentielle et sa dérivée à un ordre quelconque, sur laquelle est fondée la théorie de Liouville, constitue l'avant-dernière formule du mémoire de Riemann. Précisons toutefois que, si les calculs d'Euler et d'Abel peuvent être entièrement repris dans le cadre de la théorie de Riemann, il n'en va pas de même pour ceux de Liouville : en particulier, les « fonctions complémentaires » de Liouville et celles de Riemann sont tout à fait distinctes.

[11] « *die Grenze des Quotienten verschwindender Grössen* » [Riemann 1847/1892, p. 354].

[12] Le récent ouvrage de D. Laugwitz [1996] aborde la question de la place de ce mémoire dans l'analyse mathématique de l'époque. Pour Laugwitz, ce travail de jeunesse se

sant de faire référence à Lagrange, Riemann prend d'emblée position dans un débat fondamental de cette époque : doit-on s'interdire d'attribuer une somme aux séries divergentes ?

Au siècle précédent, Lagrange [1772 ; 1797, chap. I et II] avait défini les *fonctions dérivées* d'une fonction donnée, appelée *primitive*, par leur apparition dans le développement en série de cette fonction selon les puissances positives entières d'un accroissement donné à la variable, et il pratiquait une sorte de calcul symbolique fondée sur l'analogie des puissances et des différentielles découverte par Leibniz, manipulant des expressions telles que $\Delta^\lambda u$ (différences finies) et $\mathrm{d}^\lambda u$, «*différentielle d'un ordre quelconque de la fonction u*» [Lagrange 1772, p. 458].

Riemann se propose d'étendre la définition de Lagrange au cas non entier en considérant des séries de la forme $z_{(x+h)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} k_\nu \partial_x^\nu z\, h^\nu$, dans lesquelles les exposants ν diffèrent entre eux par des valeurs entières, k_ν prolongeant la fonction factorielle à toutes les valeurs de ν. Conformément à Lagrange, il emploie le mot « dérivée » (*Ableitung*), par opposition à « quotient différentiel » (*Differentialquotient*), ainsi que la notation $\partial_x^\nu z$ plutôt que $\mathrm{d}^\nu z/\mathrm{d}x^\nu$.

Or, il faut se rappeler que la méthode de Lagrange avait été sévèrement condamnée, notamment par Cauchy :

«*Je n'ignore pas que l'illustre auteur de la* Mécanique Analytique *a pris la formule dont il s'agit* [de Taylor] *pour base de sa théorie des* fonctions dérivées*. Mais, malgré tout le respect que commande une si grande autorité, la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaître l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi des séries divergentes*» [Cauchy 1823, Avertissement].

En suivant Lagrange, Riemann s'oppose ainsi directement à la «*plupart des géomètres*». Allant même plus loin que Lagrange[13], Riemann revendique explicitement l'utilisation des séries divergentes. Il se trouve, en effet,

---

rattache au courant de l'analyse algébrique dont Riemann avait appris les modes de pensée et les méthodes en suivant le cours d'analyse de M.A. Stern à Göttingen.

[13] La considération formelle des séries ne signifie pas que Lagrange ignorait les questions de convergence ; s'agissant de calculs numériques, il signale d'ailleurs « *la nécessité d'avoir égard à la convergence de la série* [. . .] *et donne même à ce propos une définition correcte de la notion de convergence, grâce à un encadrement du reste*» [Ovaert 1976, p. 175–176]. Les critères de convergence qu'il énonce sont toutefois très insuffisants [*Ibid.*, p. 180].

que contrairement aux séries de Taylor, les séries sur lesquelles Riemann entend fonder la dérivation d'ordre non entier sont, sauf cas trivial, nécessairement divergentes, au moins lorsqu'il s'agit de développer des fonctions analytiques (de fait, seules les fonctions analytiques de la variable réelle sont considérées par lui). Le mémoire de Riemann ne contient pas d'argument en ce sens, la divergence des séries en question y étant implicitement considérée comme acquise, mais on vérifie aisément qu'il en va bien ainsi[14].

Pour justifier l'utilisation des séries divergentes, Riemann écrit :

«*Il a bien été affirmé par certains qu'en général on ne peut fonder aucune conclusion certaine sur les séries, sauf à respecter la condition voulant qu'on attribue aux grandeurs qui y figurent des valeurs telles que la série converge, c'est-à-dire que sa valeur puisse être obtenue (au moins de façon approchée) par une véritable addition. Or, nous pouvons, à la condition, toujours vérifiée ici, que les coefficients obéissent à une loi déterminée, indiquer exactement chacune des parties de la série ; elle est, par conséquent, une grandeur dont chaque partie est bornée et donc déterminée ; et je ne vois aucune raison dans le fait que le mécanisme de l'addition des nombres ne suffit pas à trouver sa valeur bien déterminée, pour ne pas lui appliquer les règles qui sont prouvées pour les grandeurs numériques, et pour ne pas considérer les résultats ainsi obtenus comme justes*»[15].

---

[14] En effet, $f(x+h)$ étant supposée analytique et non identiquement nulle dans un voisinage complexe V de $h = 0$, si une série de la forme considérée par Riemann convergeait vers $f(x+h)$, au moins pour les valeurs de l'accroissement h contenues dans un intervalle ouvert I inclus dans $\mathbb{R}_+^* \cap V$, on pourrait exprimer la détermination principale d'une puissance non entière de h sous forme du quotient par $f(x+h)$ d'une série de Laurent convergente sur une couronne de centre 0 contenant I, de sorte que cette puissance de h pourrait être analytiquement prolongée en une fonction méromorphe sur la couronne en question, ce qui est absurde.

[15] «*Man hat wohl die Behauptung aufgestellt, man könne auf die Reihen im Allgemeinen gar keine sicheren Schlüsse gründen, sondern nur unter der Bedingung, dass man den darin vorkommenden Grössen solche Zahlenwerthe beilege, dass die Reihe convergire, d. h. dass sich ihr (wenigstens genäherter) Werth durch eine wirkliche Ziffernaddition finden lasse. Nun können wir aber, wenn, wie hier immer vorausgesetzt wird, die Coefficienten einem bestimmten Gesetze gehorchen, jeden einzelnen Theil derselben genau angeben ; sie ist folglich eine in allen ihren Theilen genau begrenzte, also bestimmte Grösse ; und ich sehe darin, dass der Mechanismus der Ziffernaddition nicht ausreicht, diesen ihren bestimmten Werth zu finden, keinen Grund, warum wir nicht die Gesetze, die für die Zahlengrössen als solche erwiesen sind, auf sie anwen-*

Comme on voit, il s'agit ici davantage de l'intime conviction de Riemann que d'une argumentation mathématique solide. Il est d'ailleurs intéressant de noter que Riemann y emploie le pronom *ich*, contrairement au reste du texte où il utilise le *wir* de majesté. Notons également l'expression « véritable addition » (*wirkliche Ziffernaddition*) qui suggère, par opposition, l'idée que Riemann se fait de la somme d'une série divergente.

Afin notamment d'étayer son point de vue par un exemple, Riemann consacre ensuite plusieurs pages à établir la formule suivante, généralisation de la formule du binôme,

$$\frac{x^\mu}{\Pi(\mu)} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} \frac{b^{\mu-\alpha}}{\Pi(\mu-\alpha)} \frac{(x-b)^\alpha}{\Pi(\alpha)},$$

où $\Pi(x)$ désigne la quantité que nous notons aujourd'hui $\Gamma(x+1)$. Dans un passage ultérieur[16], Riemann remarque que cette formule ne fournit pas le seul développement possible du premier membre. De fait, l'une des principales difficultés à laquelle Riemann se trouve confronté dans son mémoire est l'absence d'unicité du développement d'une fonction donnée en série de la forme considérée. Cette absence d'unicité est directement liée à la divergence des séries considérées, comme on le vérifie facilement sur l'exemple suivant[17] : considérons la série $\sum\limits_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} x^\alpha$, dans laquelle α décrit un ensemble de la forme $\alpha_0 + \mathbb{Z} = \{\alpha_0 + n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, avec α_0 réel. Si une somme peut être attribuée à cette série, cette somme ne peut être que 0, puisque la série est inchangée lorsqu'on la multiplie par x. Ainsi, tout développement en série peut être combiné avec celle-là pour en obtenir d'autres de même somme.

Ainsi, dans ce mémoire, Riemann cherche non seulement à étendre la dérivation aux ordres non entiers, objectif qu'il pensait être le premier à se donner, mais entend aussi contribuer, par cette généralisation, à montrer l'utilité des séries divergentes. À cet égard, la possibilité de contrôler l'indétermination affectant les développements fondés sur de telles séries apparaît comme un enjeu essentiel.

den und die Resultate, die wir dadurch erhalten, als richtig ansehen sollten» [Riemann 1847/1892, p. 355]

[16] Il s'agit d'une remarque concernant la formule numérotée (β) par Riemann.

[17] Nous reviendrons plus précisément sur cet exemple à la fin de l'article, après avoir rappelé les principes de la théorie borélienne des séries divergentes.

2. ANALYSE DU MÉMOIRE

Outre les considérations sur les séries divergentes, nous pouvons distinguer deux parties dans le mémoire de Riemann[18] :
— l'élaboration d'une définition de la dérivée d'ordre quelconque ;
— l'exposé systématique de la théorie fondée sur cette définition.

2.1. Élaboration d'une définition de la dérivée d'ordre quelconque

La recherche d'une définition de la dérivation d'ordre non entier commence par la « définition » suivante (inspirée comme on l'a vu de la définition de Lagrange) que Riemann donne dès le début de l'article : $\partial_x^\nu z$ est «*le coefficient de h^ν dans un développement en série infinie dans les deux sens de $z_{(x+h)}$ selon des puissances de h dont les exposants diffèrent entre eux par des valeurs entières*»[19], multiplié par un facteur k_ν devant être égal à $\dfrac{1}{\nu!}$ lorsque ν est un entier strictement positif. Autrement dit, $\partial_x^\nu z$ est défini par la formule

$$z_{(x+h)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} k_\nu \, \partial_x^\nu z \, h^\nu. \tag{2}$$

Entachée d'une forte indétermination, la formule (2) ne peut constituer à ce stade qu'une ébauche de définition, que la suite de l'article s'emploie à améliorer. On assiste ainsi à la construction progressive de la dérivation d'ordre non entier. Cette phase heuristique présente évidemment un grand intérêt pour l'historien puisque, même si cette partie de l'article est probablement elle-même le fruit d'une élaboration antérieure dont Riemann ne nous livre pas toutes les clés, elle donne un aperçu de la méthode de Riemann[20]. On peut repérer trois étapes dans cette construction.

---

[18] Nous suivrons ici la double numérotation des formules du mémoire de Riemann : un numéro entre parenthèses pour les formules de la partie « élaboration », un numéro suivi d'un point et sans parenthèses pour celles appartenant à l'exposé systématique.

[19] « *Wir verstehen unter* [...] *den Coefficienten von h^ν in einer nach Potenzen von h, deren Exponenten um eine ganze Zahl von einander abstehen, rückwärts und vorwärts ins Unendliche fortlaufenden Entwicklung von $z_{(x+h)}$* » [Riemann 1847/1892, p. 354].

[20] Qu'on nous permette de regretter en passant que le style d'exposition généralement employé aujourd'hui en mathématiques ne favorise pas souvent la compréhension de la genèse des idées...

a. Confinement de l'indétermination et seconde définition

Pour Riemann, l'indétermination qui affecte la formule (2) a deux sources. Il s'agit d'abord de la valeur du coefficient k_ν, puisque, en effet, il existe une infinité de façon d'interpoler la factorielle. Il s'agit ensuite du problème de l'unicité des développements en séries divergentes, dont nous avons souligné précédemment qu'il représentait l'un des enjeux importants de l'article. Dans les deux cas, le principe du confinement de l'indétermination que Riemann se propose de réaliser repose sur l'exigence du respect de propriétés apparaissant comme souhaitables pour la dérivation d'ordre généralisé : il s'agit essentiellement de déclinaisons de ce qu'on appelle traditionnellement *loi des indices*, c'est-à-dire du type $\partial^\alpha \partial^\beta = \partial^{\alpha+\beta}$.

Le traitement de la première source d'indétermination, celle liée au facteur k_ν, comporte deux étapes : une version faible de la loi des indices, $\partial_x^{\nu+1} z = \mathrm{d}\partial_x^\nu z/\,\mathrm{d}x$, est d'abord satisfaite en posant $k_\nu = (\nu+1)k_{\nu+1}$; dans un second temps, le désir que la loi des indices soit satisfaite de façon générale conduit Riemann à poser $k_\nu = 1/\Pi(\nu)$. S'agissant d'un résultat attendu, Riemann manifeste par cette démonstration une prudence qu'explique certainement le désir de produire un texte aussi inattaquable que possible. D'un autre coté, Riemann n'exprime aucun doute quant à la légitimité d'un calcul fondé sur l'application d'opérateurs différentiels multivoques, d'ordres non entiers, à des séries divergentes, opération *a priori* périlleuse du point de vue des canons anciens ou modernes de la « rigueur »... Il est vrai qu'en l'absence d'une théorie des séries divergentes, on ne voit pas comment Riemann aurait pu résoudre ce type de difficultés.

La seconde source d'indétermination n'ayant pas encore été traitée à ce stade, les développements précédents doivent être compris *modulo* cette indétermination. On ne devrait donc pas trop s'étonner que la loi des indices, même dans sa version faible, n'ait pas encore produit tous les effets que l'on peut en attendre. Riemann s'appuie donc à nouveau sur la relation $\partial_x^{\nu+1} z = \mathrm{d}\partial_x^\nu z/\,\mathrm{d}x$ pour réduire l'indétermination liée, cette fois, à la multiplicité des développements en séries divergentes, établissant ainsi une seconde définition de la dérivation d'ordre généralisé, que nous appellerons définition (S), plus restrictive que la première : «*le symbole $\partial_x^\nu z$ ne dénote plus le coefficient de $\dfrac{h^\nu}{\Pi(\nu)}$ dans tous les développements* *possibles de* $z_{(x+h)}$*, mais seulement dans ceux pour lesquels le coefficient de* $\dfrac{h^{\nu+1}}{\Pi(\nu+1)}$ *est la différentielle de celui de* $\dfrac{h^{\nu}}{\Pi(\nu)}$ »[21].

La relation $\partial_x^{\nu+1} z = \dfrac{\mathrm{d}\partial_x^{\nu} z}{\mathrm{d}x}$ prend ainsi un sens plus restrictif que dans son usage antérieur. En l'absence du langage des ensembles, la nuance s'avère un peu subtile, aussi Riemann éprouve-t-il le besoin de préciser, dans une note, que de la relation[22] $\partial_x^{\nu+1} z = \mathrm{d}\partial_x^{\nu} z/\mathrm{d}x$, prise dans le sens qu'elle avait avant que ne soit posée la définition (S), il découle que «*si* $\sum \dfrac{\partial_x^{\nu} z h^{\nu}}{\Pi(\nu)}$ *est un développement de* $z_{(x+h)}$, $\sum \dfrac{\partial_x^{\nu} z}{\mathrm{d}x} \dfrac{h^{\nu+1}}{\Pi(\nu+1)}$ *est également un développement de* $z_{(x+h)}$ », mais qu'il n'en découle pas que «*ces deux développements soient identiques*»[23].

b. Étude de l'indétermination résiduelle («*systèmes de valeurs*»)

L'indétermination résiduelle au confinement exposé ci-dessus conduit Riemann à s'intéresser au « système des valeurs » (*System von Werthen*) de $\partial_x^{\nu} z$. Il commence par montrer qu'une même valeur de $\partial_x^{\nu} z$ ne peut appartenir à plusieurs développements du type retenu, ce que nous pourrions exprimer en disant que l'ensemble $\{\partial_x^{\nu} z\}$ des valeurs de $\partial_x^{\nu} z$ est, sauf si ν est un entier négatif[24], en correspondance bijective avec l'ensemble $\{\Sigma\}$ des développements de $z_{(x+h)}$. Il détermine ensuite ce que nous appellerons les fonctions complémentaires[25] riemanniennes, à savoir les fonctions obtenues en faisant la différence entre deux déterminations quelconques de $\partial_x^{\nu} z$.

---

[21] «*wir wollen* [...] *dass das Zeichen* $\partial_x^{\nu} z$ *den Coefficienten von* $h^{\nu}/\Pi(\nu)$ *nicht in allen möglichen Entwicklungen von* $z_{(x+h)}$ *bezeichnen soll, sondern nur in solchen, in denen der Coefficient von* $h^{\nu+1}/\Pi(\nu+1)$ *das Differential des Coefficienten von* $h^{\nu}/\Pi(\nu)$ *ist*» [Riemann 1847/1892, p. 360–361].

[22] Plus précisément, Riemann considère ici la relation équivalente $\partial_x^{\nu+n} = \mathrm{d}^n \partial_x^{\nu} z/\mathrm{d}x^n$ (où n désigne un entier positif quelconque), numérotée (4).

[23] «*Aus* (4) *folgt zwar, dass wenn* $\sum \partial_x^{\nu} z h^{\nu}/\Pi(\nu)$ *eine Entwicklung von* $z_{(x+h)}$ *ist,* $\sum \partial_x^{\nu} z/\mathrm{d}x \cdot h^{\nu+1}/\Pi(\nu+1)$ *ebenfalls eine Entwicklung von* $z_{(x+h)}$ *ist, aber nicht dass diese beiden Entwicklungen identisch sind*» [Riemann 1847/1892, p. 361].

[24] Puisqu'au même développement (de Taylor) correspond dans ce cas les diverses primitives d'ordre $-\nu$ de z. Dans le cas où ν est un entier positif, $\{\partial_x^{\nu} z\}$ et $\{\Sigma\}$ sont tous deux des singletons.

[25] L'expression « fonctions complémentaires », qui n'est pas utilisée par Riemann, a été introduite dans le domaine de la dérivation d'ordre non entier par Liouville [1832b, p. 94].

Riemann commence par vérifier que la fonction $K\,\dfrac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}$, où n est un entier positif et K une constante finie, est une fonction complémentaire cohérente avec la définition (S), puis il pose la définition suivante :

«*Nous appellerons* système de valeurs *l'ensemble de toutes les valeurs de $\partial_x^\nu z$, qui peuvent se déduire les unes des autres par addition d'expressions de la forme $K\,\dfrac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}$. Toutes les valeurs de $\partial_x^\nu z$, qui appartiennent à un même système, sont ainsi contenues dans l'expression*

$$p_\nu + \sum_{n=\infty}^{1} K_n \frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)} \tag{6}$$

(*où K_n désignent des constantes finies*) »[26].

Remarquons l'ambiguïté de ce dernier extrait : les relatives introduites par le pronom « qui » (*die*) expriment-elles des *faits*, le premier d'entre eux n'étant alors pas démontré, ou bien des *conditions* supplémentaires desquelles l'expression des fonctions complémentaires découle automatiquement ? On peut penser que si Riemann avait eu une démonstration du fait que l'indétermination attachée à la définition (S) soit tout entière comprise dans ces fonctions complémentaires particulières, il l'aurait donnée, de même qu'il aurait donné des fonctions complémentaires d'un autre type s'il en avait découvertes[27].

c. Expression par une intégrale des dérivées d'ordre quelconque

La dernière phase de la « construction » de la dérivation d'ordre quelconque a pour objet l'obtention d'une formule explicite, en l'occurrence une intégrale. Dans ce but, Riemann commence par chercher une expression de $\partial_x^\mu z$ sous forme de série. Il y parvient en partant du développement

[26] « *Den Inbegriff aller Werthe von $\partial_x^\nu z$, die sich durch Addition von Ausdrücken von der Form $Kx^{-\nu-n}/\Pi(-\nu-n)$ aus einander ableiten lassen, wollen wir ein System von Werthen nennen; es sind also alle Werthe von $\partial_x^\nu z$, die demselben Systeme angehören, in dem Ausdruck*

$$p_\nu + \sum_{n=\infty}^{1} K_n \frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)} \tag{6}$$

enthalten (*wo K_n endliche Constanten bedeuten*) » [Riemann 1847/1892, p. 362].

[27] Ne serait-ce que pour les écarter par ce qui aurait alors été, sans ambiguïté, des conditions supplémentaires.

de Taylor d'origine k de la fonction z prise en $x + h$, et en remplaçant les puissances entières de l'accroissement $(x+h-k)$ par leurs développements selon la formule généralisée du binôme[28], la série cherchée apparaissant alors comme coefficient de h^μ dans l'expression obtenue. Dans le cas où $\mu < 0$, la dérivation de cette série par rapport à k permet alors facilement à Riemann d'exprimer $\partial_x^\mu z$ sous forme d'une intégrale « de Riemann-Liouville » d'origine k.

Riemann conclut cette construction en vérifiant la compatibilité de la formule obtenue avec les fonctions complémentaires qu'il a données auparavant, autrement dit que le changement d'origine k correspond bien à l'ajout d'une fonction complémentaire de cette forme.

2.2. Exposé systématique de la théorie fondée sur la définition retenue

Cet exposé comporte quatorze formules que nous pouvons regrouper ainsi :

1.	formule fondamentale,
2.	lien avec la définition (S),
3. à 5.	ordres entiers,
6.	loi des indices,
7. et 8.	linéarité,
9. et 10.	changements de variable,
11. à 14.	dérivées des fonctions usuelles.

Pour la commodité du lecteur, nous reproduisons ici les formules 1. à 6., auxquelles les commentaires qui suivent sont plus particulièrement consacrés :

1. $$\partial_x^\nu z = \frac{1}{\Pi(-\nu-1)} \int_k^x (x-t)^{-\nu-1} z_{(t)}\, \mathrm{d}t + \sum_{n=\infty}^{n=1} K_n \frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)},$$

[28] Voir *supra*, section 1.

2. $$z_{(x+h)} = \sum_{n=\infty}^{n=1} \frac{h^{\nu-n}}{\Pi(\nu-n)} \int^{(n)} \partial_x^\nu z \, \mathrm{d}x^n + \frac{h^\nu}{\Pi(n)} \partial_x^\nu z + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{h^{\nu+n}}{\Pi(\nu+n)} \frac{\mathrm{d}^n \partial_x^\nu z}{\mathrm{d}x^n},$$

3. $$\partial_x^{-m} z = \int_k^{(m)x} z_{(t)} \, \mathrm{d}t^m + \sum_{n=m}^{n=1} K_n \frac{x^{-n+m}}{\Pi(-n+m)},$$

4. $$\partial_x^0 z = z,$$

5. $$\partial_x^m z = \frac{\mathrm{d}^m z}{\mathrm{d}x^m},$$

6. $$\partial_x^\mu \partial_x^\nu z = \partial_x^{\nu+\mu} z + \varphi_\mu.$$

Dans la formule 1., ν est supposé négatif ; dans la formule 6., φ_μ désigne toute fonction complémentaire d'ordre μ.

La formule 1. constitue la troisième définition[29] des dérivées apparaissant dans le mémoire, celle que Riemann choisit en fin de compte de retenir, la définition que nous avons baptisée (S), et qui devient ici la formule 2., étant reléguée au rang de propriété nécessaire. Pour pouvoir affirmer que cette propriété est suffisante, il faudrait montrer que la formule 1. contient effectivement toutes les fonctions complémentaires. Nous avons interprété plus haut l'ambiguïté d'un passage consacré à cette question en disant que Riemann ne disposait probablement ni d'une telle démonstration, ni de la démonstration du contraire. Ici, dans une note relative à la formule 2., Riemann dit clairement qu'il n'a pu parvenir à aucun résultat à ce sujet. Le choix d'une définition fondée sur la formule 1. plutôt que sur la formule 2. ne s'explique donc pas uniquement par la plus grande maniabilité de la première, raison mise en avant par Riemann, mais aussi par la difficulté mentionnée.

Notons également que, contrairement à la formule 2., la formule intégrale fait apparaître le caractère *non local* de la dérivation d'ordre quelconque. Ce caractère non local est masqué dans la formule 2. par des hypothèses implicites d'analycité, hypothèses auxquelles la formule

[29] Plus précisément, la formule 1. permet de définir $\partial_x^\nu z$ lorsque ν est strictement négatif, et l'on accède ensuite aux dérivées d'ordres positifs par dérivation d'ordre entier.

intégrale n'est pas soumise, ce qui lui confère une plus grande généralité. Cet aspect des choses n'était sans doute pas perçu par le jeune Riemann puisque, pour lui, la « continuité » suffisait à justifier le développement en série de Taylor (voir dans son texte le passage après la formule (6)).

Les formules 3. à 5. jouent un rôle crucial dans la théorie puisqu'elles montrent que les dérivées d'ordre non entier constituent bien une généralisation des dérivées et primitives ordinaires. Remarquons d'abord que, contrairement à ce qu'on peut lire parfois[30], la formule 3. (ou plus précisément la formule qui en découle lorsqu'on la rapproche de la définition 1.) ne constitue en aucun cas le point de départ de la définition riemannienne de la dérivation d'ordre non entier. Par ailleurs, s'agissant d'une formule intéressante et non triviale du calcul intégral ordinaire, le fait qu'il ne l'accompagne d'aucun commentaire serait incompréhensible si Riemann ne la tenait pas pour acquise et bien connue. De fait, cette formule est étudiée dans la trente-cinquième des célèbres leçons sur le calcul infinitésimal données par Cauchy [1823] à l'École polytechnique et publiées trois ans avant la naissance de Riemann, dans l'ouvrage même qui contient l'Avertissement[31] déjà cité contre les séries divergentes et le point de vue de Lagrange. Or, le rôle de cette formule est central dans l'enseignement de Cauchy, sous la forme du reste intégral dans la formule de Taylor[32] (trente-sixième leçon). Cauchy insiste d'ailleurs sur ce point :

«*je me suis vu forcé de renvoyer au calcul intégral la formule de Taylor, cette formule ne pouvant être admise comme générale qu'autant que la série qu'elle renferme se trouve réduite à un nombre fini de termes, et complétée par une intégrale définie*» [Cauchy 1823, Avertissement].

C'est donc à partir de considérations fondées sur les séries divergentes que Riemann retrouve, comme cas particulier, l'intégrale que Cauchy a placé au cœur de son dispositif contre… les séries divergentes !

---

[30] Ainsi, pour Marcel Riesz, c'est l'intégrale donnant les primitives d'ordre entier « *qui chez plusieurs auteurs, notamment chez Riemann, fut le point de départ pour la définition d'une intégration généralisée d'ordre fractionnaire* » [1949, p. 581].

[31] On trouve le même contenu, y compris l'avertissement en question presque mot pour mot, dans les *Leçons sur le calcul différentiel* [Cauchy 1829].

[32] Dans un développement de Taylor à l'ordre $(n-1)$, le reste est, en effet, une primitive d'ordre n de la dérivée d'ordre n de la fonction étudiée (puisque la partie polynomiale a une dérivée du même ordre qui est nulle).

Examinons enfin la formule 6., $\partial_x^\mu \partial_x^\nu z = \partial_x^{\nu+\mu} z + \varphi_\mu$, version riemannienne de la loi des indices (φ_μ est la notation employée par Riemann pour désigner toute fonction complémentaire associée à la dérivation d'ordre μ). La présence de φ_μ suggère que cette formule exprime une égalité entre ensembles, plutôt qu'un résultat concernant l'existence de représentants particuliers de ces ensembles. La notation $\partial_x^\nu z$ utilisée par Riemann s'avère alors ambiguë, aussi réserverons-nous, dans le raisonnement suivant, $\partial_x^\nu z$ pour dénoter une détermination particulière, tandis que nous désignerons le système de valeurs correspondant par $\mathcal{D}_x^\nu z$, de sorte que $\partial_x^\nu z \in \mathcal{D}_x^\nu z$. De même noterons-nous Φ_ν l'ensemble des fonctions complémentaires d'indice ν, de sorte que $\varphi_\nu \in \Phi_\nu$. Enfin, si $\mathcal{Z}_1$ et $\mathcal{Z}_2$ désignent des ensembles de fonctions, nous noterons $\mathcal{D}_x^\nu(\mathcal{Z}_1)$ l'union des $\mathcal{D}_x^\nu z$ où z décrit $\mathcal{Z}$, et $\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2$ l'ensemble des $z_1 + z_2$, où z_i décrit $\mathcal{Z}_i$. Avec ces notations, la formule 6. pourrait donc s'écrire, si notre interprétation est correcte

$$\mathcal{D}_x^\mu(\mathcal{D}_x^\nu z) = \mathcal{D}_x^{\nu+\mu} z + \Phi_\mu.$$

Montrons que cette relation est bien cohérente avec la conception de Riemann. Celui-ci ayant montré que toute détermination de $\partial_x^{\nu+\mu} z$ est une détermination de $\partial_x^\mu \partial_x^\nu z$, il nous suffit de porter notre attention sur les fonctions complémentaires ; nous pouvons ainsi supposer que z est la fonction nulle. La formule précédente s'écrit alors

$$\mathcal{D}_x^\mu(\Phi_\nu) = \Phi_{\nu+\mu} + \Phi_\mu.$$

Or, $\varphi_\nu = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} K_n \frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}$; d'où, en dérivant à la manière de Riemann

$$\partial_x^\mu \varphi_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \frac{\partial_x^\mu(x^{-\nu-n})}{\Pi(-\nu-n)}.$$

Si ν n'est pas entier, $(-\nu-n)$ n'est jamais un entier négatif, de sorte que la formule donnée plus loin par Riemann pour la dérivation des fonctions puissances conduit alors à une détermination particulière de $\partial_x^\mu \varphi_\nu$

$$\partial_x^\mu \varphi_\nu = \sum_{n=1}^{\infty} G_n \frac{x^{-(\nu+\mu)-n}}{\Pi(-(\nu+\mu)-n)}, \quad \text{avec} \quad G_n = \Pi(-\nu-n) K_n.$$

On en déduit que, pour tout $\varphi_\nu \in \Phi_\nu$, on a $\mathcal{D}_x^\mu(\varphi_\nu) \cap \Phi_{\mu+\nu} \neq \emptyset$. Par définition de Φ_μ, il en découle que $\mathcal{D}_x^\mu(\varphi_\nu) \subset \Phi_{\mu+\nu} + \Phi_\mu$, d'où $\mathcal{D}_x^\mu(\Phi_\nu) \subset \Phi_{\mu+\nu} + \Phi_\mu$.

Réciproquement, toute détermination de $\partial_x^{\mu+\nu}0$ étant une détermination de $\partial_x^\mu \partial_x^\nu 0$, on a $\Phi_{\mu+\nu} \subset \mathcal{D}_x^\mu(\Phi_\nu)$. Donc $\Phi_{\mu+\nu} + \Phi_\mu \subset \mathcal{D}_x^\mu(\Phi_\nu) + \Phi_\mu = \mathcal{D}_x^\mu(\Phi_\nu)$, ce qui achève la vérification pour le cas où ν n'est pas entier.

Si ν est un entier strictement négatif, on fait le même raisonnement en remplaçant les séries par des sommes finies, Φ_ν étant dans ce cas l'ensemble des polynômes de degré strictement inférieur à $-\nu$.

Si ν est un entier positif, on a $\Phi_{\nu+\mu} \subset \Phi_\mu$, d'où $\Phi_{\nu+\mu} + \Phi_\mu = \Phi_\mu$, tandis que $\Phi_\nu = \{0\}$; le résultat est donc également vérifié dans ce cas.

Riemann accompagne la formule 6. de cette remarque : « *Chaque valeur de $\partial_x^{\nu+\mu} z$ est donc aussi une valeur de $\partial_x^\mu \partial_x^\nu z$. Mais la réciproque a lieu uniquement lorsque μ est un entier positif ou lorsque ν est un entier négatif. Les deux expressions sont alors identiques* »[33].

On vérifie, en effet, que sous les dernières hypothèses citées, on a bien $\mathcal{D}_x^\mu(\mathcal{D}_x^\nu z) = \mathcal{D}_x^{\mu+\nu} z$:

— si ν est un entier négatif on a $\Phi_\mu \subset \Phi_{\nu+\mu}$, et la relation $\mathcal{D}_x^\mu(\Phi_\nu) = \Phi_{\nu+\mu} + \Phi_\mu$ entraîne $\mathcal{D}_x^\mu(\Phi_\nu) = \Phi_{\nu+\mu}$, d'où l'égalité annoncée ;

— si μ est un entier positif, Φ_μ est réduit à $\{0\}$, et la même égalité se trouve trivialement vérifiée.

Le reste du mémoire de Riemann est consacré à l'établissement de formules utiles pour le calcul des dérivées d'ordre quelconque ; on y trouve notamment deux formules relatives au changement de variable (formules 9. et 10.), ainsi que les dérivées des fonctions puissances (formules 11. et 12.), exponentielle (formule 13.) et logarithme (formule 14.).

3. LA RÉCEPTION DU MÉMOIRE DE RIEMANN

Cayley

En 1880, quatre ans après la publication des *Œuvres* de Riemann où le mémoire paraît pour la première fois, Cayley publie une note[34] concernant

---

[33] « *Jeder Werth von $\partial_x^{\nu+\mu} z$ ist also auch ein Werth von $\partial_x^\mu \partial_x^\nu z$. Das Umgekehrte findet aber nur statt, wenn m eine ganze positive oder n eine ganze negative Zahl ist. In diesem Falle sind also beide Ausdrücke identisch* » [Riemann 1847/1892, p. 364].

[34] Dans la 2e édition des *Œuvres* de Riemann, en 1892, cette note de Cayley est

la similitude entre les séries divergentes qu'il avait étudiées dans un article antérieur [1851] et les séries divergentes considérées par Riemann dans son mémoire posthume. Dans l'article de 1851, Cayley avait notamment considéré l'expression

$$\Gamma(x)\,\mathrm{e}^x = \sum\nolimits_r [n-1]^r x^{n-1-r},$$

autrement dit, avec les notations actuelles

$$\Gamma(x)\,\mathrm{e}^x = \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} (n-1)(n-2)\cdots(n-r)x^{n-1-r}.$$

Cayley remarque : « *The point of resemblance of course is that we have a doubly infinite expansion of* e^x *in a series of integer or fractional powers of x, corresponding to Riemanns like expansion of* z_{x+h} *in powers of* h » [Cayley 1880, p. 236].

Il y a en fait plus qu'une simple *ressemblance* entre la formule donnée par Cayley et celles considérées par Riemann : en posant $h = x$ et $\nu = n-1-r$, la formule de Cayley conduit en effet à $\mathrm{e}^h = \sum_{\nu=-\infty}^{v=\infty} \frac{h^\nu}{\Pi(\nu)}$ d'où, en multipliant les deux membres par e^x, x désignant un réel quelconque : $\mathrm{e}^{x+h} = \sum_{\nu=-\infty}^{v=\infty} \mathrm{e}^x \frac{h^\nu}{\Pi(\nu)}$ formule qui, dans la théorie de Riemann, équivaut à la formule 13. pour les dérivées de l'exponentielle : $\partial_x^\nu(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x$.

Hadamard, Lévy

En France, la contribution de Riemann ne semble pas avoir été remarquée avant 1892. C'est ainsi que, dans un article de 1884 proposant une définition des dérivées d'ordre non entier fondée sur une intégrale de contour[35], Henri Laurent attribuait encore la paternité de la formule intégrale au mathématicien russe Letnikov[36] :

mentionnée par les éditeurs, Weber et Dedekind, l'intérêt porté par Cayley au mémoire posthume de Riemann les ayant conforté dans la décision qu'ils avaient prise de le publier.

[35] Procédé équivalent à l'extraction de la partie finie de l'intégrale de Riemann-Liouville lorsque celle-ci diverge.

[36] Notons que, vu les dates, Letnikov ne pouvait connaître le travail de Riemann sur la question.

«*La première idée du calcul des dérivées à indices quelconques remonte à Leibnitz ; mais c'est à Liouville que l'on doit d'avoir montré tout le parti que l'on pouvait tirer de cette généralisation du calcul différentiel, et on peut le regarder comme le véritable créateur de la nouvelle théorie* [...] *M. Letnikoff, en 1874, a proposé une nouvelle définition des dérivées à indices fractionnaires, à laquelle il n'y a point de reproches à adresser. Pour lui, la dérivée d'ordre* $-p$*,* p *désignant un nombre positif, de la fonction* $f(x)$*, prise entre les limites* x_0 *et* x*, est la valeur de l'intégrale*

$$\frac{1}{\Gamma(p)}\int_{x_0}^{x} f(z)(x-z)^{p-1}\,\mathrm{d}z.$$

Lorsque cette intégrale n'a plus de sens, c'est-à-dire lorsque le nombre p *devient négatif, la dérivée de* $f(x)$ *est définie comme dérivée d'un ordre entier d'une dérivée d'ordre négatif. La définition de M. Letnikoff est plus générale que celle de Liouville, elle donne d'ailleurs les mêmes résultats toutes les fois que cette dernière donne des résultats précis*[37] » [Laurent 1884, p. 240–241].

En 1892, Hadamard fait référence à la définition de Riemann (sans les fonctions complémentaires) pour introduire, dans la troisième partie de sa thèse, la notion d'ordre d'une fonction sur son cercle de convergence. Il s'agit d'une mesure fine du degré d'irrégularité de la somme d'une série entière sur son cercle de convergence, définie par le degré de lissage qu'il est nécessaire d'appliquer à la fonction étudiée, grâce à un opérateur construit à partir des dérivées de Riemann, pour obtenir une fonction répondant à un critère de régularité appelé «*écart fini*» [Hadamard 1892, p. 157–170]. Nous savons aujourd'hui, grâce à un résultat de Tricot [1988], que l'ordre ainsi défini peut s'interpréter comme dimension fractale du graphe de la fonction étudiée [Dugowson 1994, p. 160]. Remarquons au passage que c'est une idée analogue qui, à l'aide d'opérateurs pseudo-différentiels, préside à la définition des espaces de Sobolev d'ordre non entier[38].

[37] Cette dernière remarque est discutable. S'il est vrai que, dans des cas particuliers, la définition de Liouville conduit à cette même intégrale avec une borne initiale égale à $+\infty$ ou $-\infty$, beaucoup de fonctions usuelles, à commencer par les polynômes (qui jouent un rôle central dans la théorie de Liouville), ont des dérivées au sens de Liouville qui ne sauraient être exprimées de cette manière (voir [Dugowson 1994]).

[38] Voir, par exemple, Alinhac et Gérard [1991, p. 41].

En 1923, dans un article intitulé « Sur la dérivation et l'intégration généralisées », Paul Lévy fait à son tour référence à la définition de Riemann :

«*Riemann a introduit en analyse une opération fonctionnelle qui généralise la dérivation, et qu'on peut appeler dérivation d'ordre non entier. La dérivée généralisée de Riemann semblant assez peu connue, malgré l'application qu'en a faite M. Hadamard à l'étude des fonctions définies par des séries de Taylor, nous commençons par en rappeler la définition et les principales propriétés, et en indiquer l'application à la fonction exponentielle et à la fonction caractéristique du calcul des probabilités*» [Lévy 1923, p. 307–308].

Dans ses mémoires, Paul Lévy corrigera cette attribution à Riemann de la paternité des dérivées d'ordre non entier en citant la théorie de Liouville, précisant aussitôt que «*la théorie de Liouville, utilisant une représentation particulière de la fonction étudiée, n'avait pas la portée de celle de Riemann*» [Lévy 1970, p. 95].

Hardy

En 1945, Hardy publie un article intitulé « Riemann's form of Taylor's series », où il se propose d'étudier, à la lumière de la théorie des séries divergentes de Borel [1901], la formule 2. utilisée par Riemann dans son article. Hardy la réécrit ainsi[39]

$$(\mathrm{H}_1) \qquad S = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{h^{m+r}}{\Gamma(m+r+1)} D^{m+r} f(x) = \sum_{-\infty}^{-1} + \sum_{0}^{\infty} = S_1 + S_2$$

où la sommation est faite sur m décrivant $\mathbb{Z}$, et où $r \in \,]0;1[$, $h > 0$ et $D^p f(x)$ est défini comme Riemann mais sans fonction complémentaire : lorsque p est un réel négatif on pose

$$D^p f(x) = I^q f(x) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^x (x-t)^{q-1} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad (q = -p > 0)$$

et l'on dérive cette expression à un ordre entier pour obtenir une dérivée d'ordre positif de f. La formule (H_1) contient en particulier les séries

$$(\mathrm{H}_2) \qquad \mathrm{e}^z = \sum \frac{z^{m+r}}{\Gamma(m+r+1)},$$

[39] Pour éviter les confusions, nous changeons la numérotation des formules écrites par Hardy.

et

$$(\mathrm{H}_3)\qquad (x+h)^n = \sum \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+r+1)\Gamma(n-m-r+1)} x^{n-m-r} h^{m+r},$$

au sujet desquelles Hardy précise :

«*Riemann writes down* (H_3), *but not* (H_2) *explicitly. Both series appear, much later, in the work of Heaviside*[40], *and* (H_2) *is usually referred to as "Heaviside's exponential series". Neither Riemann nor Heaviside attempts any discussion of the "validity" of the formulae* [...]

The "exponential" series (H_2) *has attracted some attention from mathematicians. Thus Ingham and Jeffreys have shown that it is valid asymptotically*[41], *i.e., that*

$$\sum_{-M}^{\infty} \frac{z^{m+r}}{\Gamma(m+r+1)} = \mathrm{e}^z + O(z^{r-M-1})$$

for large positive z, and I have shown[42] *that the series is summable to* e^z *by a method of the Borel type*» [Hardy 1945, p. 826–827].

Hardy étudie la série (H_1) dans deux cas particuliers :

(α) La fonction f est entière et vérifie $f(x) = O(\mathrm{e}^{c\,\Re x})$ pour un certain $c > 0$ et pour $\Re x < 0$. Dans ce cas, on prend $a = -\infty$ pour borne inférieure de l'intégrale de Riemann-Liouville. C'est notamment le cas de la fonction e^x, pour laquelle (H_1) conduit à la série exponentielle de Riemann-Cayley-Heaviside (H_2).

(β) La fonction f est régulière (analytique) pour $\Re x > 0$ et vérifie $f(x) = O(|x|^n)$, où $n > 0$, pour x petit et $\Re x > 0$. Dans ce cas, on prend $a = 0$ pour borne inférieure de l'intégrale de Riemann-Liouville. C'est notamment le cas de la fonction x^n pour laquelle (H_1) conduit à la série du binôme généralisé (H_3). Les dérivées d'une telle fonction f présentant généralement une singularité en $x+h = 0$, l'utilisation des développements de Taylor conduit Hardy à supposer de plus $|h| < x$, donc $0 < h < x$.

Dans les deux cas, la demi-série à droite S_2 converge vers $f(x+h) - \phi(x,h)$, où ϕ est une fonction qu'il ne nous est pas nécessaire d'écrire ici.

---

[40] Voir Heaviside [1899, chap. 8].

[41] Dans une note ajoutée ultérieurement, Hardy signale que ce résultat d'Ingham et Jeffreys de 1929 est un cas particulier d'un théorème de Barnes (1906).

[42] Voir Hardy [1935].

L'étude de la série S se ramène donc à celle de S_1

$$\text{(H}_4\text{)} \qquad S_1 = \sum_{-\infty}^{-1} \frac{h^{m+r}}{\Gamma(m+r+1)} D^{m+r} f = \sum_{1}^{\infty} \frac{h^{r-\mu}}{\Gamma(r+1-\mu)} I^{\mu-r} f,$$

qui est généralement divergente, et même, précise Hardy sans en expliquer la raison, rapidement divergente.

Généralisant le résultat d'Ingham et Jeffreys, Hardy montre que, dans le cas (α), S_1 constitue un développement asymptotique de $\phi(x,h)$ pour h grand, de sorte que la série de Riemann est une série asymptotique pour $f(x+h)$. Ce résultat ne peut toutefois pas être étendu au cas (β), puisque h y est astreint à rester inférieur à x. De plus, Hardy fait la remarque suivante : «*In any case we are not concerned particularly with* large h *; and it is probably more interesting, even in case* (α)*, to prove the series summable than to prove it asymptotic*» [*Ibid.*, p. 830].

Remarquons d'ailleurs que le propre point de vue de Riemann est beaucoup plus proche de la sommabilité que de l'asymptoticité. En effet, en se dispensant du « mécanisme de l'addition des nombres » (*der Mechanismus der Ziffernaddition*), Riemann sépare la notion de somme d'une série de l'idée d'approximation par les sommes partielles, et ne se situe donc pas dans une perspective de type « asymptotique » ; de plus, en insistant sur les «*règles qui sont prouvées pour les grandeurs numériques*»[43], il semble adopter un point de vue formel qui s'accorde assez bien avec l'idée (sinon avec les méthodes) de sommabilité.

Avant de donner le résultat obtenu par Hardy, rappelons brièvement la définition de Borel pour la sommabilité et la somme d'une série divergente [1901, p. 98–99] : une série[44] $\sum a_n$ est sommable de somme s si la fonction a définie par

$$a(w) = a_0 + \frac{a_1 w}{1} + \frac{a_2 w^2}{1 \times 2} + \frac{a_3 w^3}{1 \times 2 \times 3} + \cdots$$

est entière et telle que l'intégrale $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-w} a(w)\,\mathrm{d}w$ soit convergente de somme s. On vérifie facilement que, dans le cas où la série converge, la valeur obtenue coïncide avec la somme au sens habituel ; de même, si la

[43] «*die Gesetze, die für die Zahlengrössen als solche erwiesen sind*» [Riemann 1847/1892, p. 355].

[44] Afin de faciliter la lecture, nous remplaçons par celles de Hardy les notations utilisées par Borel.

série converge en moyenne, le procédé de Borel généralise, en fait, celui de Cesàro.

Hardy commence par étendre la définition de Borel :

«*If the series* $\sum_{0}^{\infty} a_\mu \frac{\omega^\mu}{\mu\,!}$ *is convergent for small* w*, the function* $a(w)$ *represented by it is regular for* $w > 0$*, and* $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-w} a(w)\,\mathrm{d}w = s$*, then we say that* $\sum a_\mu$ *is summable* (B^*) *to* s*. When* $a(w)$ *is an integral function, the method reduces to Borel's*» [Hardy 1945, p. 830].

En fait, Borel lui-même avait fait suivre sa définition d'une extension du même type, bien que plus contraignante : «*On peut étendre les définitions précédemment données au cas où* $a(w)$ *n'est pas une fonction entière, mais représente une fonction analytique susceptible d'un prolongement analytique tout le long de l'axe réel, et ne présentant sur cet axe aucun point singulier*» [Borel 1901, p. 99]. Surtout, il avait étudié [*Ibid.*, p. 117] un exemple entrant précisément dans la catégorie considérée par Hardy, à savoir l'étude de la célèbre série[45] $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n\,!$, pour laquelle on a : $a(w) = w - \log(1 + w)$.

Ceci étant, voici le théorème obtenu par Hardy : «*the series* (H_4) *is summable* (B^*) *to sum* $\phi(x, h)$*, so* [...] *Riemann's series is in this sense summable to* $f(x + h)$» [Hardy 1945, p. 830]. Le mathématicien anglais précise plus loin que, dans le cas (β), la fonction $a(w)$ associée à la série divergente S_1 étant entière, on peut remplacer la sommation (B^*) par la méthode de Borel (au sens où il l'entend), qu'il désigne par (B), tandis que, dans le cas (α), la série de la fonction $a(w)$ est (B) sommable pour $\Re w > 0$, de sorte que l'on peut remplacer (B^*) par (B^2), «*a repeated application of Borel's method*»[46].

Il aura ainsi fallu attendre un siècle pour disposer, grâce à cette étude de Hardy fondée sur la théorie de Borel, d'une interprétation rigoureuse de l'utilisation par Riemann de séries divergentes.

---

[45] Étudiée par Euler, Lacroix, Laguerre, Stieltjes, etc. [Borel 1901, p. 55 ; Ramis 1993, p. 11].

[46] Ce type d'opérations est envisagé par Borel (mais plutôt pour le cas où la série associée a un rayon de convergence nul, ce qui ne se produit pas ici) : «*On pourrait chercher à étendre la théorie au cas où cette série a un rayon de convergence nul, mais est sommable et définit une fonction analytique sur l'axe réel ; on aurait ainsi deux applications superposées de la méthode de sommation*» [Borel 1901, p. 99, note].

4. LES FONCTIONS COMPLÉMENTAIRES

Le résultat obtenu par Hardy nous incite à examiner de la même façon les fonctions complémentaires riemanniennes. Voyons ce qu'il en est pour celles que nous pourrions qualifier d'*élémentaires*, c'est-à-dire les fonctions de la forme $Kx^{-\nu-n}/\Pi(-\nu-n)$. En désignant par p_ν une détermination particulière de $\partial_x^\nu z$, il s'agit de vérifier la relation

$$\sum\left(p_\nu + K\,\frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}\right)\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)} = \sum p_\nu\,\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)}\,,$$

ou encore, de façon équivalente

$$\sum\frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}\,\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)} = 0.$$

En posant $\nu = m+\nu_0$, m décrivant $\mathbb{Z}$, on obtient une série de Laurent en h/x,

$$\sum\frac{(h/x)^m}{\Pi(-\nu-n)\Pi(\nu)} = 0,$$

qui, d'après l'unicité des développements en séries de Laurent convergentes, est nécessairement divergente.

Considérons le cas où $n=1$. D'après la formule des compléments, on a

$$\Pi(-\nu-1)\Pi(\nu) = -\frac{\pi}{\sin\nu\pi} = (-1)^{m+1}\,\frac{\pi}{\sin\nu_0\pi}\ ;$$

le développement considéré équivaut donc à

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} k^m = 0, \quad \text{avec} \quad k = -\frac{h}{x}\cdot$$

Posons $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} k^m = \sum_{m<0} k^m + \sum_{m\geq 0} k^m = S_1+S_2$. Sauf si $k=1$, l'une des deux demi-séries est convergente, l'autre étant sommable par prolongement analytique. On peut ainsi écrire

$$S_1 = \frac{1}{1-1/k} - 1 = \frac{1}{k-1} \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{1}{1-k}\,,$$

d'où le résultat attendu, au sens du prolongement analytique. Si maintenant l'on suppose, comme le faisait Hardy, que x et h sont strictement positifs, on vérifie facilement que celle des deux demi-séries qui est divergente est de plus sommable au sens de Borel.

Si $n > 1$, la série est hypergéométrique

$$\sum(-\nu_0 - m - 1)\cdots(-\nu_0 - m - n + 1)k^m.$$

On peut montrer la sommabilité borélienne en décomposant le coefficient de k^m, qui est un polynôme en m de degré $n-1$, dans la base 1, m, $m(m-1), \ldots, m(m-1)\cdots(m-n+2)$; la fonction $a(w)$ associée à la série étudiée s'écrit alors $P(kw)\,\mathrm{e}^{kw}$, où P est un polynôme de degré $n-1$, et la somme s'écrit $\int_0^\infty P(kw)\,\mathrm{e}^{(k-1)w}\,\mathrm{d}w$.

Il est ainsi possible d'inclure dans le théorème de Hardy les fonctions complémentaires élémentaires $K\dfrac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}$. La question reste ouverte de savoir sous quelles conditions peuvent être manipulées les fonctions complémentaires riemanniennes les plus générales $\displaystyle\sum_{n\geq 1} K\frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}$, le cas où une telle série serait elle-même divergente méritant certainement une attention particulière[47].

La possibilité d'interpréter dans le cadre de la sommabilité borélienne les fonctions complémentaires élémentaires (et donc, au minimum, les sommes finies de telles fonctions) contribue à nous faire accueillir avec circonspection les critiques qui ont été émises contre les fonctions complémentaires, notamment par B. Ross. En 1974, celui-ci écrivait :

«*Riemann in 1847 while a student wrote a paper published posthumously in which he gives a definition of a fractional operation. It is my guess that Riemann was influenced by one of Liouville's memoirs in which Liouville wrote, "The ordinary differential equation* $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = 0$ *has the complementary solution* $y_c = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$. *Thus* $\dfrac{\mathrm{d}^u}{\mathrm{d}x^u} f(x) = 0$ *should have a corresponding complementary solution." So, I am inclined to believe Riemann saw fit to add a complementary function to his definition of a fractional integration* [...] *Cayley remarked in 1880 that Riemann's complementary function is of indeterminate nature.*

[47] Il pourrait être également intéressant de revenir sur la question de la détermination des fonctions complémentaires associées à la définition (S), puisqu'on a vu que Riemann n'avait pas réussi à démontrer que ces fonctions-là étaient nécessairement de la forme finalement retenue.

The development of mathematical ideas is not without error [...] *Riemann became hopelessly entangled with an indeterminate complementary function*» [Ross 1975b, p. 4–5].

Dans un article ultérieur, Ross présente la chose ainsi[48] :

«RIEMANN'S CONTRIBUTION, ERRORS BY NOTED MATHEMATICIANS

G.F. Bernhard Riemann developed his theory of fractional integration in his student days, but he withheld publication. It was published posthumously in his Gesammelte Werke [...]. *He sought a generalization of a Taylor series and derived*

$$D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t)\,\mathrm{d}t + \Psi(x). \tag{R}$$

Because of the ambiguity in the lower limit of integration c, Riemann saw fit to add to his definition a complementary function $\Psi(x)$. *This complementary function is essentially an attempt to provide a measure of the deviation from the law of exponents. For example, this law, as mentioned later, is* ${}_cD_x^{-\mu}\,{}_cD_x^{-\nu} f(x) = {}_cD_x^{-\mu-\nu} f(x)$ *and is valid when the lower terminals c are equal. Riemann was concerned with a measure of deviation for the case* ${}_cD_x^{-\mu}\,{}_{c'}D_x^{-\nu} f(x)$.

A. Cayley [*1880*] *remarked, "The greatest difficulty in Riemann's theory, it appears to me, is the question of the meaning of a complementary function containing an infinity of arbitrary constants." Any satisfactory definition of a fractional operation will demand that this difficulty be removed. Indeed, the present-day definition of fractional integration is* (R) *without the complementary function. The question of the existence of a complementary function caused considerable confusion*» [Ross 1977, p. 81].

Notons que l'hypothèse, peu plausible comme on a vu, selon laquelle Liouville aurait inspiré Riemann a, heureusement, disparu dans le second article de Ross. Par ailleurs, Ross ne peut, à bon droit, invoquer la position de Cayley pour étayer son propre sentiment sur les fonctions complémentaires. Voici en effet le texte exact de Cayley :

«*Riemann deduces a theory of fractional differentiation : but without considering the question which has always appeared to me to be the great*

[48] Nous changeons la numérotation de la formule utilisée par Ross.

difficulty in such a theory : what is the real meaning of a complementary function containing an infinity of arbitrary constants ? or, in other words, what is the arbitrariness of the complementary function of this nature which presents itself in the theory ?» [Cayley 1880, p. 235]. Ainsi, pour Cayley, l'indétermination *se présente d'elle-même* dans la théorie de Riemann : les fonctions complémentaires ne sont pas ajoutées après coup à des opérateurs construits indépendamment d'elles.

Montrons, à partir de points précis, que l'interprétation de Ross, qui revient à faire jouer aux fonctions complémentaires un rôle plutôt superficiel dans la théorie, n'est effectivement pas soutenable, ces fonctions étant, au contraire, impliquées, comme le suggère Cayley, dans le tissu même de la théorie :

1°) Dans la détermination de la formule intégrale[49], Riemann dérive une série exprimant $z_{(x+h)}$ par rapport au paramètre k. Ainsi, l'indétermination associée à k non seulement précède la formule intégrale, mais, qui plus est, contribue à la construire.

2°) Dans l'établissement de la formule 11., $\partial_x^\nu(x^\mu) = \dfrac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu)}x^{\mu-\nu}$ avec μ négatif non entier, un genre de régularisation est réalisé par une coupure de l'intégrale en question suivie de l'addition d'une fonction complémentaire.

3°) Le calcul de $\partial_x^\nu(x^\mu)$ lorsque μ est entier négatif (formule 12.) utilise, lors d'un calcul plus complexe que le précédent, une régularisation du même type mettant fondamentalement en jeu les fonctions complémentaires.

Ajoutons, en ce qui concerne l'interprétation donnée par Ross dans le deuxième article, que s'il y a bien sûr une relation entre la borne inférieure de l'intégrale considérée et les fonctions complémentaires, il est par contre abusif d'expliquer l'introduction de celles-ci par l'indétermination de celle-là. En effet, l'indétermination associée aux fonctions complémentaires apparaît dans le texte bien avant la formule intégrale, et contient strictement celle dont cette borne inférieure est porteuse, comme le montre clairement l'exemple de la fonction nulle.

Enfin, s'il nous semble intéressant de considérer en général les fonctions complémentaires comme un essai de « mesure de la déviation » de la loi

[49] Voir *supra*, § 2.1.c

des indices, l'étude du texte rend difficile de soutenir que le désir de voir cette loi satisfaite puisse être à l'origine de l'introduction des fonctions complémentaires, dans la mesure où ce désir est le fil que suit Riemann pour, au contraire, *restreindre* l'indétermination à laquelle il est d'emblée confronté.

En fait, comme le montre leur réapparition dans la théorie récente de Nishimoto [1984, p. 179 ; Nishimoto et Tu 1993, p. 39–48], les fonctions complémentaires constituent un thème de réflexion toujours vivant. L'incompatibilité entre les systèmes de fonctions complémentaires proposés respectivement par Liouville, Riemann et Nishimoto montre d'ailleurs qu'il s'agit de questions ouvertes.

CONCLUSION

Grâce à la théorie des séries divergentes de Borel, nous disposons aujourd'hui des outils permettant d'apprécier à sa juste valeur le mémoire de Riemann. En l'absence d'une telle théorie, on voit mal comment ce mémoire aurait pu recevoir, s'il avait été publié en son temps, un accueil favorable de la part des mathématiciens continentaux, légitimement préoccupés par la nécessité d'asseoir l'analyse sur des bases incontestables. Dans ces conditions, il est naturel que Riemann ait conçu des doutes quant à l'opportunité de publier son mémoire. D'autant qu'en retrouvant, par le biais des séries divergentes, l'intégrale utilisée par Cauchy comme rempart contre de telles séries, ce qui constituait *a priori* un succès pour Riemann, le jeune mathématicien se plaçait dans une situation fort délicate : il aurait fallu que son mémoire soit absolument inattaquable pour en envisager la publication, ce qui n'était évidemment pas le cas... D'après Weber et Dedekind[50], Riemann ne pensait pas publier son mémoire, dont les considérations reposent sur une base qu'il n'aurait plus reconnue quelques années plus tard. Quoi qu'il en soit, il est heureux que ce mémoire n'ait pas été perdu, et que les éditeurs aient décidé de le publier dans les *Œuvres*. Grâce à cette publication, Hardy [1945, p. 833], inspiré par Riemann, a découvert une formule d'une extrême beauté

$$f(x+h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h^y}{\Gamma(y+1)} D^y f(x)\,\mathrm{d}y.$$

[50] Voir la note en bas de la première page du texte de Riemann.

Remerciements

Je tiens à remercier Brigitte Slonski et Jacques Schwarz pour leurs précieux éclairages au sujet des mystères de la langue allemande.

BIBLIOGRAPHIE

Abel (N.)

[1826] Lettre à Holmboë du 16 janvier 1826, dans *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel*, t. 2, Christiana, 1881 (réimp. New York : Johnson Reprint, 1965), p. 256–257.

Alinhac (S.) et Gerard (P.)

[1991] *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*, Paris-Meudon : InterÉditions et Éditions du CNRS, 1991.

Borel (E.)

[1901] *Leçons sur les séries divergentes*, Paris : Gauthier-Villars, 1901.

Cauchy (A.L.)

[*Œuvres*] *Œuvres complètes*, 27 vol. en deux séries, Paris : Gauthier-Villars, 1882–1974.

[1823] *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Paris, 1823 ; *Œuvres* (II) 4, p. 5–261.

[1829] *Leçons sur le calcul différentiel*, Paris, 1829 ; *Œuvres* (II) 4, p. 263–609.

Cayley (A.)

[*CMP*] *The collected mathematical papers of Arthur Cayley*, 13 vol. + Index, Cambridge : Cambridge University Press, 1889–1898.

[1851] On a doubly infinite series, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 6 (1851), p. 45–47 ; *CMP* 2, p. 8–10.

[1880] Note on Riemann's paper "Versuch einer allgemeinen Auffasung der Integration und Differentiation", *Mathematische Annalen*, 16 (1880), p. 81–82 ; *CMP* 11, p. 235–236.

Dugowson (S.)

[1994] *Les différentielles métaphysiques : histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation*, Thèse, Université Paris 13, 1994.

Erdélyi (A.)

[1962] *Operational calculus and generalized functions*, New York : Holt, Rinehard and Winston, 1962. Trad. fr., Paris : Dunod, 1971.

Euler (L.)

[1730] De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt, *Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, 5 (1738), p. 36–57 ; *Opera omnia* (I) 14, p. 1–24.

Fourier (J.)

[1822] *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822 ; *Œuvres de Fourier*, t. 1, Paris, 1888.

Hadamard (J.)

[1892] Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (IV) 8 (1892), p. 101–186.

HARDY (G.H.)

[*Papers*] *Collected papers of G.H. Hardy*, 7 vol., Oxford : Clarendon Press, 1966–1979.

[1935] Remarks on some points in the theory of divergent series, *Annals of Mathematics*, (II) 36 (1935), p. 167–181 ; *Papers* VI, p. 774–789.

[1945] Riemann's form of Taylor's series, *Journal of the London Mathematical Society*, 20 (1945), p. 48-57 ; *Papers* VI, p. 825–834.

HEAVISIDE (O.)

[1899] *Electromagnetic theory*, vol. II, London, 1899.

LAGRANGE (J.L.)

[*Œuvres*] *Œuvres de Lagrange*, 14 vol., Paris, 1867–1892.

[1772] Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la differentiation et à l'intégration des quantités variables, *Nouveaux mémoires de l'Académie des sciences et des belles-lettres de Berlin*, 1772 ; *Œuvres* 3, p. 441–476.

[1797] *Théorie des fonctions analytiques*, Paris, 1797 ; 2e éd., Paris, 1813 ; *Œuvres* 9.

LAUGWITZ (D.)

[1996] *Bernhard Riemann 1826–1866*, Basel : Birkhäuser, 1996.

LAURENT (H.)

[1884] Sur le calcul des dérivées à indices quelconques, *Nouvelles annales de mathématiques*, (III) 3 (1884), p. 240–252.

LEIBNIZ (G.)

[1695] Lettre à Jean Bernoulli datée du 28 février 1695 à Hanovre, *Leibnizens Mathematische Schriften*, III_1, Halle, 1855 (réimp. Hildesheim : Olms, 1962), p. 166–168.

LE MÉHAUTÉ (A.)

[1990] *Les géométries fractales : l'espace-temps brisé*, Paris : Hermès 1990.

LE MÉHAUTÉ (A.) et OUSTALOUP (A.) (éd.)

[1994] *Géométrie fractale et hyperbolique. Dérivation fractionnaire et fractale (applications dans les sciences de l'ingénieur et en économie)*, Le Mans : Institut supérieur des matériaux, prépublication, 1994.

LÉVY (P.)

[1923] Sur la dérivation et l'intégration généralisées, *Bulletin des sciences mathématiques*, (II) 47 (1923), p. 307–320 et p. 343–352.

[1970] *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*, Paris : Blanchard, 1970.

LIOUVILLE (J.)

[1832a] Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions, *Journal de l'École polytechnique*, t. XIII, 21e cahier (1832), p. 1–69.

[1832b] Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques, *Ibid.*, p. 71–162.

[1832c] Mémoire sur l'intégration de l'équation $(mx^2 + nx + p)\,\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 + (qx + r)\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x + sy = 0$ à l'aide des différentielles à indice quelconque, *Ibid.*, p. 163–186.

[1834] Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 11 (1834), p. 1-19.

LÜTZEN (J.)

[1990] *Joseph Liouville 1809-1882 : master of pure and applied mathematics*, New York : Springer, 1990.

MCBRIDE (A.C.) et ROACH (G.F.) (éd.)

[1985] *Fractional calculus*, Boston : Pitman, 1985.

NISHIMOTO (K.)
[1984–1991] *Fractional calculus : integrations and differentiations of arbitrary order*, 4 vol., Koriyama : Descartes Press, 1984, 1987, 1989, 1991.
[1992] Preface, *Journal of Fractional Calculus*, 1 (1992).
NISHIMOTO (K.) et TU (S.T.)
[1993] Complementary functions in Nishimoto's fractional calculus, *J. Frac. Calculus*, 3 (1993), p. 39–48.
OLDHAM (K.) et SPANIER (J.)
[1974] *The fractional calculus : theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, New York : Academic Press (Mathematics in science and engineering, 111), 1974.
OUSTALOUP (A.)
[1995] *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications*, Paris : Hermès, 1995.
OVAERT (J.L.)
[1976] La thèse de Lagrange et la transformation de l'analyse, dans Houzel (C.), Ovaert (J.L.), Raymond (P.) et Sansuc (J.J.), éd., *Philosophie et calcul de l'infini*, Paris : Maspero, 1976, p. 157–200.
PARMENTIER (M.)
[1989] *Leibniz. La naissance du calcul différentiel* (26 articles des Acta Eruditorum), Introduction, traduction et notes par M. Parmentier, Paris : Vrin, 1989.
RAMIS (J.-P.)
[1993] *Séries divergentes et théories asymptotiques*, collection "Panoramas et synthèses", Supplément au Bulletin de la Société Mathématique de France, 121 (1993).
RIEMANN (B.)
[1847] Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation (14 janvier 1847), dans *Gesammelte mathematische Werke* (H. Weber éd. avec le concours de R. Dedekind), Leipzig, 1876, p. 353–366 ; 2e éd. 1892 ; rééd. Berlin-Heidelberg : Springer, 1990, p. 385–398.
RIESZ (M.)
[1949] L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, *Acta mathematica*, 81 (1949), p. 1–223 ; *Collected papers*, Berlin-Heidelberg : Springer, 1988, p. 571–793.
ROSS (B.)
[1974] Chronological bibliography on fractional calculus, dans [Oldham et Spanier 1974, p. 3-15].
[1975a] (éd.) *Fractional calculus and its applications*, Berlin-Heidelberg : Springer (Lecture Notes in Mathematics, 457), 1975.
[1975b] A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus, dans [Ross 1975a, p. 1–37].
[1977] The development of fractional calculus (1695–1900), *Historia mathematica*, 4 (1977), p. 75–89.
ROUSSEL (G.)
[1985] *Intégration et dérivation d'ordre non entier*, Paris : Blanchard, 1985.
SAMKO (S.G), KILBAS (A.A.) et MARICHEV (O.I.)
[1993] *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*, New York : Gordon and Breach, 1993.

SCHWARTZ (L.)
[1966] *Théorie des distributions*, Paris : Hermann, 1966.
SRIVASTAVA (H.M.) et OWA (S.) (éd.)
[1989] *Univalent functions, fractional calculus and their applications*, Chichester : Ellis Horwood, 1989.
TRICOT (C.)
[1988] *Dérivation fractionnaire et dimension fractale*, Rapport technique 1532, CRM, Université de Montréal, 1988.

APPENDICE (*)

ESSAI D'UNE CONCEPTION GÉNÉRALE DE L'INTÉGRATION ET DE LA DÉRIVATION[1]

par Bernhard Riemann

Dans l'article qui suit, on essaie de définir un procédé permettant de déduire d'une fonction donnée une autre de même variable, dont la dépendance par rapport à la première s'exprime par un nombre et qui, dans le cas où ce nombre est un entier positif, négatif ou nul, coïncide [respectivement] avec le quotient différentiel, l'intégrale ou la fonction initiale. Les résultats du calcul différentiel et intégral sont, certes, supposés connus, mais pas d'une manière telle que ces résultats, qui sont valables pour les différentielles et intégrales d'ordre entier, puissent être étendus aussi aux ordres non entiers[2] ; bien au contraire, on ne s'en servira que comme fondement du procédé annoncé ci-dessus d'une part, et guide dans nos recherches d'autre part.

Dans ce dernier but, nous allons considérer attentivement la série des quotients différentiels. Il est clair qu'on ne peut ici partir de la définition habituelle, fondée sur la loi de formation par récurrence, puisqu'on ne

(*) Traduction de Stéphane Dugowson, revue par Jeanne Peiffer.

[1] Cet essai porte, sur le manuscrit, la date du 14 janvier 1847, et remonte ainsi au temps des études de Riemann. Celui-ci ne pensait pas le publier, aucun doute n'est permis là-dessus ; et de plus ces considérations reposent sur des fondements qu'il n'aurait plus reconnus quelques années plus tard. Mais le travail est caractéristique du développement de la pensée de Riemann, et les résultats sont assez remarquables pour en justifier la publication [...] Elle s'est trouvée justifiée, après coup, par l'intérêt que Cayley a porté à ce travail de Riemann (cf. la « Note on Riemann's paper "Versuch..." » [Cayley 1880], dans laquelle Cayley renvoie à sa propre étude : "On a doubly infinite series" [Cayley 1851]). [Note des éditeurs des *Œuvres* de Riemann, 1876/1892]

[2] Nous avons choisi de traduire par « non entier » l'adjectif *gebrochen* (« brisé », à rapprocher des nombres *rompus* des mathématiciens français) utilisé par Riemann pour qualifier l'ordre des dérivées. La partie du texte consacrée à la détermination de la quantité notée ℓ_ν montre clairement, en effet, que Riemann considère toutes les valeurs non entières et non les seules rationnelles : d'une part il y utilise l'adjectif *rational*, et non *gebrochen*, pour désigner effectivement les nombres rationnels, d'autre part il s'assure que la relation qui fait l'objet de cette partie du texte est valable non seulement pour les rationnels, mais « de façon générale » : « *Das Gesetz* $\ell_{\mu\nu} = \ell_\nu^\mu$ *ist also für alle rationalen Werthe von* μ*, und folglich (nach dem bekannten Gesetz der Interpolation) allgemein gültig.* » [N.D.T.]

peut aboutir ainsi à d'autres termes de la série que ceux d'ordres entiers ; on doit donc chercher une définition qui en soit indépendante. Un moyen nous est offert par le développement de la fonction, obtenu à partir de celle-ci en donnant à la variable un accroissement quelconque, selon les puissances positives entières de cet accroissement. Car, le développement connu

$$z_{(x+h)} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{1}{1.2\ldots p}\,\frac{\mathrm{d}^p z}{\mathrm{d}x^p}\,h^p \tag{1}$$

(où $z_{(x+h)}$ désigne ce que devient $z_{(x)}$ lorsqu'on remplace x par $x+h$) étant valable pour toute valeur de h, les coefficients de cette série ont une valeur entièrement déterminée. On peut donc utiliser ces coefficients pour la définition des différentielles. Nous posons ainsi la définition suivante : le n-ième quotient différentiel de la fonction $z_{(x)}$ est égal au coefficient de h^n dans le développement de $z_{(x+h)}$ selon les puissances entières positives de h, multiplié par un facteur dépendant uniquement de n et non de x, à savoir par $1.2\ldots n$. Cette manière de voir les quotients différentiels conduit facilement à la définition d'une opération générale, dont la différentiation et l'intégration sont des cas particuliers, et que (puisque la notation et la définition de cette opération comme limite d'un quotient de grandeurs évanouissantes n'a plus de sens dans cette approche) nous notons $\partial_x^\nu z$ et appelons dérivation, suivant en cela l'exemple de Lagrange nommant ses « fonctions dérivées »[3].

Nous entendons en effet par $\partial_x^\nu z$, ou par l'expression « ν-ième dérivée de $z_{(x)}$ par rapport à x », le coefficient de h^ν dans un développement en série infinie dans les deux sens de $z_{(x+h)}$ selon des puissances de h dont les exposants diffèrent entre eux par des valeurs entières, multiplié par un facteur dépendant uniquement de n et non de x, c'est-à-dire que nous définissons ∂_x^ν par l'égalité

$$z_{(x+h)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} k_\nu\,\partial_x^\nu z\,h^\nu. \tag{2}$$

Dans cette définition, le facteur k_ν, qui dépend uniquement de ν, doit naturellement être déterminé de sorte que, dans le cas où les exposants

[3] En français dans le texte. [N.D.T.]

de h sont des nombres entiers, la série (2) coïncide avec (1), puisque c'est à cette condition que les quotients différentiels constituent réellement des cas particuliers des dérivées ; si ceci n'était pas possible, notre définition ne nous permettrait pas d'atteindre notre but, qui est de construire une opération dont la différentiation soit un cas particulier, et nous devrions essayer d'atteindre ce but par un autre chemin.

Mais avant de chercher à déterminer ce facteur, nous voulons d'abord examiner les séries de la forme considérée, puisqu'elles constituent, comme l'on voit, les fondements de toute cette recherche d'une théorie des dérivées.

Il a bien été affirmé par certains qu'en général on ne peut fonder aucune conclusion certaine sur les séries, sauf à respecter la condition voulant qu'on attribue aux grandeurs qui y figurent des valeurs telles que la série converge, c'est-à-dire que sa valeur puisse être obtenue (au moins de façon approchée) par une véritable addition. Or, nous pouvons, à la condition, toujours vérifiée ici, que les coefficients obéissent à une loi déterminée, indiquer exactement chacune des parties de la série ; elle est, par conséquent, une grandeur dont chaque partie est bornée et donc déterminée ; et je ne vois aucune raison dans le fait que le mécanisme de l'addition des nombres ne suffit pas à trouver sa valeur bien déterminée, pour ne pas lui appliquer les règles qui sont prouvées pour les grandeurs numériques, et pour ne pas considérer les résultats ainsi obtenus comme justes.

Pour montrer grâce à un exemple que l'on peut effectivement trouver une valeur pour une série de la forme (2), nous allons, par un procédé qui sert à cela dans de nombreux cas, développer la fonction x^μ en une séries de puissances non entières de $(x-b)$, un développement dont nous aurons de toute façon besoin au cours de nos recherches.

Soit la série à laquelle x^μ doit être égal et que, pour la concision, nous notons z

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} c_\alpha (x-b)^\alpha.$$

Si $z = x^\mu$, on aura

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \mu x^{\mu-1},$$

donc

$$\mu z - x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0\,;$$

par conséquent, on doit également avoir

$$\sum\big[(\mu-\alpha)c_\alpha - b(\alpha+1)c_{\alpha+1}\big](x-b)^\alpha = 0.$$

Cette condition est manifestement remplie si

$$(\mu-\alpha)c_\alpha - b(\alpha+1)c_{\alpha+1} = 0.$$

Or, toutes les expressions vérifiant cette équation différentielle sont de la forme kx^μ et la série z, pour laquelle on a la relation

$$(\mu-\alpha)c_\alpha - b(\alpha+1)c_{\alpha+1} = 0,$$

doit nécessairement être égale à une des valeurs de kx^μ. Pour la trouver, nous faisons

$$\cdots c_{\alpha-1}(x-b)^{\alpha-1} + c_\alpha(x-b)^\alpha = p,$$
$$p' = c_{\alpha+1}(x-b)^{\alpha+1} + c_{\alpha+2}(x-b)^{\alpha+2}\cdots,$$

ainsi

$$p + p' = z = kx^\mu\,;$$

donc

$$\mu p - x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = (\mu-\alpha)c_\alpha(x-b)^\alpha = X, \quad \mu p' - x\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x} = -X.$$

Ces équations différentielles ont pour intégrales générales

$$\begin{aligned} -\int Xx^{-\mu-1}\,\mathrm{d}x + k_1 &= px^{-\mu} \\ &= c_\alpha(x-b)^\alpha x^{-\mu} + c_{\alpha-1}(x-b)^{\alpha-1}x^{-\mu}\cdots, \\ \int Xx^{-\mu-1}\,\mathrm{d}x + k_2 &= p'x^{-\mu} \\ &= c_{\alpha+1}(x-b)^{\alpha+1}x^{-\mu} + c_{\alpha+2}(x-b)^{\alpha+2}x^{-\mu}\cdots. \end{aligned}$$

On remplace alors X par sa valeur et on pose $x = b/y$, et l'on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
px^{-\mu} &= c_\alpha(\mu-\alpha)b^{\alpha-\mu}\int y^{\mu-\alpha-1}(1-y)^\alpha\,\mathrm{d}y + k_1\\
&= c_\alpha b^{\alpha-\mu}(1-y)^\alpha y^{\mu-\alpha}\\
&\qquad + c_{\alpha-1}b^{\alpha-1-\mu}(1-y)^{\alpha-1}y^{\mu-\alpha+1}+\cdots,\\
p'x^{-\mu} &= -c_\alpha(\mu-\alpha)b^{\alpha-\mu}\int y^{\mu-\alpha-1}(1-y)^\alpha\,\mathrm{d}y + k_2\\
&= c_{\alpha+1}b^{\alpha+1-\mu}(1-y)^{\alpha+1}y^{\mu-\alpha-1}\\
&\qquad + c_{\alpha+2}b^{\alpha+2-\mu}(1-y)^{\alpha+2}y^{\mu-\alpha-2}+\cdots.
\end{aligned}$$

Dans le cas où $\mu > \alpha > -1$, les expressions de droite s'annulent manifestement pour $y = 0$ et $y = 1$, et les deux intégrales leur seront donc exactement égales en prenant la première de 0 à y, et la seconde de 1 à y, à condition qu'elles soient continues entre ces bornes. Il pourrait sembler que cette condition n'est pas remplie dès que tous les termes d'une série, ou certains d'entre eux, croissent au-delà de toute limite dans les positifs ou les négatifs ; mais en fait, dans ce cas, la conclusion est simplement que, les termes en question se compensant, une valeur bien déterminée pour la série ne peut pas être obtenue par une véritable addition. Puisque nous n'admettons pas, comme nous l'avons dit plus haut, la conclusion selon laquelle la série n'aurait aucune valeur définie dans un cas semblable, nous ne pourrons connaître la continuité ou la discontinuité des séries [exprimant] $px^{-\mu}$ et $p'x^{-\mu}$ que par l'examen des intégrales qui leur sont égales[4]. Or, il est bien connu qu'une expression ne peut devenir discontinue que lorsque sa différentielle devient infinie ; l'expression $(1-y)^{\mu-\alpha-1}y^\alpha$ a, pour toutes les valeurs finies de y, une valeur finie lorsque les exposants $\mu-\alpha-1$ et α sont positifs ; les intégrales varient alors continûment et, par l'examen des intégrales singulières pour $y = 1$ et $y = 0$, on voit que ceci continue de se produire aussi longtemps que les deux exposants sont supérieurs à -1. On doit donc avoir, dans le cas

[4] Si l'on traite les intégrales avant la substitution de x par b/y, elles deviennent discontinues pour $x = 0$. Mais on reconnaît facilement sous cette forme également que les constantes d'intégration sont les mêmes que x soit positif ou négatif, puisque la valeur des intégrales varie continûment lorsque x passe de $+\infty$ à $-\infty$. [Note de Riemann]

où $\mu > \alpha > -1$, et y fini[5]

$$\begin{aligned} k &= zx^{-\mu} = px^{-\mu} + p'x^{-\mu} \\ &= (\mu-\alpha)c_\alpha b^{\alpha-\mu}\int_0^1 (1-y)^{\mu-\alpha-1}y^\alpha \,\mathrm{d}y \\ &= c_\alpha b^{\alpha-\mu}\frac{\Pi(\alpha)\Pi(\mu-\alpha)}{\Pi(\mu)} \end{aligned}$$

(où Π désigne l'intégrale définie connue[6]). Ce résultat n'est valable, comme on l'a noté, que lorsque $\mu > \alpha > -1$; mais il se laisse étendre à toutes les valeurs de μ et α, si on définit Π pour les nombres négatifs (comme on le fera systématiquement dans cette étude) par la loi $\Pi(n) = \dfrac{1}{n+1}\Pi(n+1)$ déduite [du cas] des nombres positifs. En effet, à cause de la relation existant entre les coefficients de la série, il suffit, pour que le résultat considéré soit valable pour toute valeur de α, qu'il soit valable pour $\alpha \lesssim^{\mu}_{-1}$. On a donc, pour μ positif

$$kx^\mu = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} k\frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\alpha)\Pi(\mu-\alpha)}b^{\mu-\alpha}(x-b)^\alpha$$

ou encore

$$\frac{x^\mu}{\Pi(\mu)} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} k\frac{b^{\mu-\alpha}}{\Pi(\mu-\alpha)}\,\frac{(x-b)^\alpha}{\Pi(\alpha)}\ ;$$

mais de là on obtient, grâce à une différentiation d'ordre n par rapport à x

$$\frac{x^{\mu-n}}{\Pi(\mu-n)} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} k\frac{b^{\mu-\alpha}}{\Pi(\mu-\alpha)}\,\frac{(x-b)^{\alpha-n}}{\Pi(\alpha-n)},$$

grâce à quoi la relation est également démontrée pour les valeurs négatives de μ.

On a ainsi, en toute généralité

$$\frac{x^\mu}{\Pi(\mu)} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} k\frac{b^{\mu-\alpha}}{\Pi(\mu-\alpha)}\,\frac{(x-b)^\alpha}{\Pi(\alpha)}. \tag{3}$$

[5] Dans le cas où $y = \pm\infty$, et donc $x = 0$, les deux intégrales valent ∞ ; donc $k = \infty - \infty$, i.e. indéterminé, ce qui apparaît simplement à l'examen. [Note de Riemann]

[6] Il s'agit de la notation de Gauss, où $\Pi(x)$ désigne notre $\Gamma(x+1)$. [N.D.T.]

Il est à noter qu'on ne peut par cette formule obtenir de série pour x^μ, lorsque μ est un entier négatif, puisque le membre de gauche s'annule dans ce cas, ce sur quoi nous reviendrons plus loin[7]. On voit également qu'il y a des séries de cette forme qui sont égales à zéro ou à une constante pour toute valeur de x.

Après cette protestation contre la condamnation sans appel que certains ont prononcée contre les séries divergentes, nous voulons, à présent, poursuivre dans la voie qui nous conduira vers la définition du concept de dérivation.

On voit que le but que nous nous sommes fixé, à savoir de considérer la différentiation comme un cas particulier de la dérivation, est réalisé dès que la fonction k_ν vaut $\dfrac{1}{1.2\ldots\nu}$ pour toutes les valeurs entières et positives de ν et s'annule pour toutes les valeurs entières et négatives ; car alors la série (2) coïncide avec la série (1) ; or cette condition peut évidemment être remplie par une infinité de fonctions de ν ; en outre, on ne peut absolument pas supposer qu'il n'y ait qu'un seul développement d'une même fonction selon les mêmes puissances de h, autrement dit qu'un seul système de coefficients donne à une série de forme déterminée une certaine valeur ; il faut plutôt supposer qu'il existe une infinité de systèmes différents possibles ; nous avons donc le choix, sans nuire au but que nous nous sommes fixé, aussi bien entre différentes fonctions possibles de ν pour k_ν qu'entre différents systèmes de coefficients possibles, et il est clairement le plus efficient de faire, si possible, le choix de telle façon que les dérivations obéissent à plusieurs lois qui, avec un autre choix, ne seraient valables que pour les dérivées à indices entiers.

C'est l'objet des considérations suivantes.

Puisque l'expression $\sum k_\nu \partial_x^\nu z h^\nu$ doit contenir tous les développements possibles sous cette forme de $z_{(x+h)}$,

$$\frac{\mathrm{d}\sum k_\nu \partial_x^\nu z h^\nu}{\mathrm{d}h} = \sum k_\nu \nu \partial_x^\nu z h^{\nu-1}$$

[7] En fait, Riemann n'y reviendra pas explicitement ; simplement, le cas où μ est un entier négatif apparaîtra comme un cas particulier lorsqu'il s'agira de déterminer, grâce à la formule intégrale établie plus loin, les dérivées de x^μ. [N.D.T.]

doit contenir tous les développements possibles sous cette forme de $\dfrac{\mathrm{d}z_{(x+h)}}{\mathrm{d}h}$, et de même

$$\frac{\mathrm{d}\sum k_\nu \partial_x^\nu z h^\nu}{\mathrm{d}x} = \sum k_\nu \frac{\mathrm{d}\partial_x^\nu z}{\mathrm{d}x} h^\nu$$

tous les développements de cette forme de $\dfrac{\mathrm{d}z_{(x+h)}}{\mathrm{d}x}$. Or, $\dfrac{\mathrm{d}z_{(x+h)}}{\mathrm{d}h}$ et $\dfrac{\mathrm{d}z_{(x+h)}}{\mathrm{d}x}$ sont connus pour être identiques ; ces deux expressions contiennent ainsi exactement les mêmes séries ; les deux expressions $k_{\nu+1}(\nu + 1)\partial_x^{\nu+1}z$ et $k_\nu \dfrac{\mathrm{d}\partial_x^\nu z}{\mathrm{d}x}$ doivent alors avoir exactement la même valeur, c'est-à-dire être égales ; or, si l'on pose $k_\nu = (\nu+1)k_{\nu+1}$, ce qui ne contredit manifestement pas la condition essentielle énoncée ci-dessus, car pour des valeurs entières de ν cette loi doit être grâce à elle vérifiée, on obtient que les dérivées d'ordres non entiers vérifient également

$$\partial_x^{\nu+1} z = \frac{\mathrm{d}\partial_x^\nu z}{\mathrm{d}x}$$

et donc de façon générale, lorsque n est un entier,

$$\partial_x^{\nu+n} z = \frac{\mathrm{d}^n \partial_x^\nu z}{\mathrm{d}x^n}\cdot \tag{4}$$

De la loi énoncée pour k_ν, il suit que

$$\Pi(\nu)k_\nu = \Pi(\nu+1)k_{\nu+1}$$

et la fonction $\Pi(\nu)k_\nu$, que nous notons ℓ_ν, garde constamment la même valeur pour toutes les valeurs de ν qui diffèrent entre elles par des nombres entiers. Nous ne pouvons donc pas déduire le meilleur choix pour la fonction ℓ_ν de considérations sur une même forme de développement, mais [il faut considérer] une combinaison de différentes formes ; ainsi, nous voulons essayer de choisir [la fonction ℓ_ν] de telle sorte que $\partial_x^\nu \partial_x^\mu z = \partial_x^{\nu+\mu} z$.

Si, à cette fin, on donne un nouvel accroissement à x dans la formule (2), et si l'on note k cet accroissement, on aura

$$z_{(x+h+k)} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \ell_\mu \ell_\nu \partial_x^\mu \partial_x^\nu z \frac{k^\mu}{\Pi(\mu)} \frac{h^\nu}{\Pi(\nu)} \tag{α}$$

et cette expression désigne tout développement possible de $z_{(x+h+k)}$ selon ces puissances-là de h et k. Mais on a aussi

$$(\beta) \qquad z_{(x+h+k)} = \sum_{\mu+\nu=-\infty}^{\mu+\nu=+\infty} \ell_{\mu+\nu} \partial_x^{\mu+\nu} z \frac{(h+k)^{\mu+\nu}}{\Pi(\mu+\nu)}$$
$$= \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \ell_{\mu+\nu} \partial_x^{\mu+\nu} z \frac{k^\mu k^\nu}{\Pi(\mu)\Pi(\nu)}$$

[en vertu de (3)].

Or, cette dernière expression (β) ne désigne certes pas tous les développements possibles de cette forme pour $z_{(x+h+k)}$, puisque l'égalité (3) donne seulement un développement de $\dfrac{(h+k)^{\mu+\nu}}{\Pi(\mu+\nu)}$, sans que celui-ci soit nécessairement le seul possible[8] ; mais tous les développements contenus dans (β) doivent l'être également dans (α) ; ainsi, si l'on pose pour la fonction ℓ la loi $\ell_{\mu+\nu} = \ell_\mu \ell_\nu$, toutes les valeurs de $\partial_x^{\mu+\nu} z$ seront également des valeurs de $\partial_x^\mu \partial_x^\nu z$, bien que cette dernière expression puisse avoir également d'autres valeurs.

On a ainsi

$$(5) \qquad \partial_x^\mu \partial_x^\nu z = \partial_x^{\mu+\nu} z,$$

dans les limites de la restriction énoncée.

Mais de $\ell_{(\mu+\nu)} = \ell_{(\mu)} \ell_{(\nu)}$, il découle que

$$\ell_{(\mu+\nu+\pi)} = \ell_{(\mu+\nu)} \ell_{(\pi)} = \ell_{(\mu)} \ell_{(\nu)} \ell_{(\pi)}$$

et, plus généralement, que le produit des [images par] ℓ de nombres différents est égal à [l'image par] ℓ de leur somme, ou encore, si l'on prend les différents facteurs égaux entre eux, $\ell_{(m\nu)} = \ell_{(\nu)}^m$, dès lors que m est un nombre entier ; si l'on désigne maintenant $\dfrac{m\nu}{n}$ par π, alors

$$\ell_{m\nu} = \ell_{n\pi} = \ell_\nu^m = \ell_\pi^n \quad \text{ou} \quad \ell_{(\frac{m}{n}\nu)} = \ell_\nu^{\frac{m}{n}}.$$

La loi $\ell_{\mu\nu} = \ell_\nu^\mu$ est ainsi valable pour toute valeur rationnelle de μ, et donc (selon la loi bien connue de l'interpolation) de façon générale. Or, puisque pour les valeurs entières de ν on doit avoir $\ell_\nu = 1$, on a $\ell_\nu = 1^\nu$.

[8] Remarquons toutefois que rien ne suggère, dans les calculs conduisant à la formule (3), la possibilité d'un autre développement de x^μ. [N.D.T.]

Si, par conséquent, les lois (4) et (5) doivent être valables pour les dérivées en général, et la différentiation être contenue dans la dérivation comme cas particulier, alors nous devrons choisir les dérivées parmi les fonctions de x qui vérifient l'égalité

$$z_{(x+h)} = \sum \frac{1^\nu h^\nu}{\Pi(\nu)} \partial_x^\nu z = \sum \frac{h^\nu}{\Pi(\nu)} \partial_x^\nu z.$$

Le plus efficace sera de choisir celles qui sont les plus commodes pour le calcul ; or, si l'on essaye de développer quelques fonctions de $x + h$ selon les puissances non entières de h , on verra que les développements les plus faciles et les plus simples sont ceux en séries telles que le coefficient de $\dfrac{h^{\nu+1}}{\Pi(\nu+1)}$ soit la différentielle du coefficient de $\dfrac{h^\nu}{\Pi(\nu)}$: nous voulons ainsi restreindre davantage la définition donnée ci-dessus des dérivées de sorte que le symbole $\partial_x^\nu z$ ne dénote plus le coefficient de $\dfrac{h^\nu}{\Pi(\nu)}$ dans tous les développements possibles de $z_{(x+h)}$, mais seulement dans ceux pour lesquels le coefficient de $\dfrac{h^{\nu+1}}{\Pi(\nu+1)}$ est la différentielle de celui[9] de $\dfrac{h^\nu}{\Pi(\nu)}$.

Il suit de ce qui précède qu'une valeur de $\partial_x^\nu z$ ne peut appartenir qu'à un seul développement ; car si nous supposons qu'une valeur p_ν de $\partial_x^\nu z$ appartient à deux développements, a et b, il faudrait que ces deux développements coïncident pour tous les termes suivant p_ν, puisque ceux-ci s'obtiennent par différentiation de p_ν. Notons à présent les termes de a précédant p_ν par $p_{\nu-1}, p_{\nu-2}, \ldots$, et ceux de b par $q_{\nu-1}, q_{\nu-2}, \ldots$, alors $p_{\nu-1}$ et $q_{\nu-1}$ doivent tous deux avoir p_ν pour différentielle ; ils ne peuvent donc différer que d'une constante, de sorte que

$$q_{\nu-1} = p_{\nu-1} + K_1,$$

et de même doit-on avoir

$$q_{\nu-2} = p_{\nu-2} + K_1 x + K_2, \quad q_{\nu-3} = p_{\nu-3} + K_1 \frac{x^2}{\Pi(2)} + K_2 x + K_3.$$

---

[9] Certes, de la relation (4) il découle que si $\sum \partial_x^\nu z \cdot \dfrac{h^\nu}{\Pi(\nu)}$ est un développement de $z_{(x+h)}$, $\sum \dfrac{\mathrm{d}\partial_x^\nu z}{\mathrm{d}x} \dfrac{h^{\nu+1}}{\Pi(\nu+1)}$ est également un développement de $z_{(x+h)}$, mais [il n'en découle] pas que ces deux développements soient identiques. Grâce à l'hypothèse faite, on parvient également à ce que les dérivées avec des indices entiers négatifs, qui jusqu'à présent n'avaient encore aucun sens, coïncident avec les intégrales, comme cela sera prouvé plus loin. [Note de Riemann]

Le développement b est ainsi

$$= a + \sum_{m=\infty}^{m=1} K_m \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{\Pi(n)} \frac{h^{\nu-n-m}}{\Pi(\nu-n-m)}$$

$$= a + \sum_{m=\infty}^{m=1} K_m \frac{(x+h)^{\nu-m}}{\Pi(\nu-m)}\ ;$$

or, pour toute valeur de $(x+h)$, on a $a = b$, ce qui, comme on sait, ne peut avoir lieu que lorsque toutes les constantes sont nulles[10] ; mais alors les deux développements sont identiques.

Soit p_ν une valeur de $\partial_x^\nu z$, alors $p_\nu + K\dfrac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}$ (où n est un entier positif et K une constante finie) en est une également ; car la série

$$\sum\Big(p_\nu + K\frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}\Big)\frac{h^\nu}{\Pi(\nu)} = \sum p_\nu \frac{h^\nu}{\Pi(\nu)} + K\frac{(x+h)^{-n}}{\Pi(-n)}$$

$$= \sum p_\nu \frac{h^\nu}{\Pi(\nu)} = z_{(x+h)},$$

et elle vérifie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(p_\nu + K\frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}\Big) = p_{\nu+1} + K\frac{x^{-\nu-n-1}}{\Pi(-\nu-n-1)}\cdot$$

Nous appellerons *système de valeurs* l'ensemble de toutes les valeurs de $\partial_x^\nu z$, qui peuvent se déduire les unes des autres par addition d'expressions de la forme $K\dfrac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)}$. Toutes les valeurs de $\partial_x^\nu z$, qui appartiennent à un même système, sont ainsi contenues dans l'expression

$$p_\nu + \sum_{n=\infty}^{1} K_n \frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)} \tag{6}$$

(où K_n désignent des constantes finies).

Cherchons maintenant à déterminer une valeur de $\partial_x^\nu z$. On a

$$z_{(x)} = z_{(k)} + \Big(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big)_{(k)}(x-k) + \Big(\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}\Big)_{(k)}\frac{(x-k)^2}{1.2} + \cdots,$$

[10] Sauf si ν est entier, auquel cas les développements sont de toute façon identiques. [N.D.T.]

si $z_{(x)}$ est continue entre les bornes x et k ; si l'on substitue $x+h$ à x et si l'on développe à l'aide de (3) les termes de la série selon les puissances de h, on aura

$$z_{(x+h)} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=\infty} \frac{h^\mu}{\Pi(\mu)} \Big(z_{(k)} \frac{(x-k)^{-\mu}}{\Pi(-\mu)} + \Big(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big)_{(k)} \frac{(x-k)^{-\mu+1}}{\Pi(-\mu+1)} + \Big(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\Big)_{(k)} \frac{(x-k)^{-\mu+2}}{\Pi(-\mu+2)} + \cdots \Big)$$

et, dans cette série, le coefficient de $\dfrac{h^\mu}{\Pi(\mu)}$ est la différentielle du coefficient de $\dfrac{h^{\mu-1}}{\Pi(\mu-1)}$; c'est donc une valeur de $\partial_x^\mu z$, que nous noterons p_μ. Si l'on différentie par rapport à k, on aura

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}k} = -z_{(k)} \frac{(x-k)^{-\mu-1}}{\Pi(-\mu-1)}, \quad \text{donc} \quad p_\mu = \int -z_{(k)} \frac{(x-k)^{-\mu-1}}{\Pi(-\mu-1)} \,\mathrm{d}k.$$

Or, tous les termes de la série ci-dessus s'évanouissent pour $k = x$; l'intégrale prise entre k et x sera ainsi $= p_\mu$, lorsqu'elle est continue entre ces bornes ; c'est évidemment le cas, étant donné que z doit être continue entre x et k et que $-\mu-1 > -1$, et par conséquent

$$(7) \qquad \int_x^k -z_{(k)} \frac{(x-k)^{-\mu-1}}{\Pi(-\mu-1)} \,\mathrm{d}k = \frac{1}{\Pi(-\mu-1)} \int_k^x (x-t)^{-\mu-1} z_{(t)} \,\mathrm{d}t$$

est une valeur de $\partial_x^\mu z$, si z est continue entre les bornes x et k et μ négatif. La valeur de $\partial_x^{\mu-n}$ appartenant au même développement est égal à

$$\frac{1}{\Pi(-\mu+n-1)} \int_k^x (x-t)^{-\mu+n-1} z_{(t)} \,\mathrm{d}t.$$

On voit facilement que selon les différentes valeurs que l'on donne à k, différents développements de $z_{(x+h)}$ s'en déduisent, mais tous ces développements appartiennent au même système [de valeurs]. Car de la valeur

$$\frac{1}{\Pi(-\mu-1)} \int_k^x (x-t)^{-\mu-1} z_{(t)} \,\mathrm{d}t$$

on déduit manifestement

$$\frac{1}{\Pi(-\mu-1)} \int_{k_1}^x (x-t)^{-\mu-1} z_{(t)} \,\mathrm{d}t$$

par addition de

$$\frac{1}{\Pi(-\mu-1)}\int_{k_1}^{k}(x-t)^{-\mu-1}z_{(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{x^{-\mu-1-n}}{\Pi(-\mu-1-n)}\int_{k_1}^{k}\frac{(-t)^n}{\Pi(n)}z_{(t)}\,\mathrm{d}t\,;$$

puisque z est continue entre x et k_1, et donc également entre k et k_1, toutes ces intégrales sont finies et ont manifestement des valeurs indépendantes de x. Par conséquent, en procédant ainsi, on obtiendra toujours le même système de valeurs ; si nous restreignons la notion de dérivée à ce système de valeurs, alors nous aurons ramené leur détermination à des valeurs connues et nous pourrons, grâce à cette définition, obtenir leurs propriétés et leurs valeurs pour des fonctions précises.

On a donc

1. $$\partial_x^\nu z = \frac{1}{\Pi(-\nu-1)}\int_k^x (x-t)^{-\nu-1}z_{(t)}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=\infty}^{n=1}K_n\frac{x^{-\nu-n}}{\Pi(-\nu-n)},$$

où les K_n sont des constantes finies arbitraires[11], ν est négatif et z est continue entre les bornes x et k ; mais pour une valeur de ν qui est > 0, $\partial_x^\nu z$ désigne la valeur[12] obtenue par m différentiations successives par rapport à x de $\partial_x^{\nu-m}z$ (où $m > \nu$), valeur qui doit, elle aussi, satisfaire constamment à l'égalité[13]

2. $$z_{(x+h)} = \sum_{n=\infty}^{n=1}\frac{h^{\nu-n}}{\Pi(\nu-n)}\int^{(n)}\partial_x^\nu z\,\mathrm{d}x^n + \frac{h^\nu}{\Pi(n)}\partial_x^\nu z + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{h^{\nu+n}}{\Pi(\nu+n)}\,\frac{\mathrm{d}^n\partial_x^\nu z}{\mathrm{d}x^n}.$$

[11] Nous noterons φ_ν toutes ces fonctions arbitraires ; et attirerons en même temps l'attention sur le fait que (lorsque n est un entier positif) toute fonction φ_ν est aussi une fonction $\varphi_{\nu-n}$. [Note de Riemann]

[12] La définition

$$\partial_x^\nu z = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^n z_{(x)}}{\mathrm{d}x^n}\right)_k\frac{(x-k)^{n-\nu}}{\Pi(n-\nu)} + \varphi_\nu,$$

qui est identique à celle donnée, serait certes valable pour toutes les valeurs de ν ; mais nous lui avons préférée l'autre à cause de sa plus grande maniabilité. [Note de Riemann]

[13] Que la formule 1. ci-dessus contienne [ou non] toutes les valeurs qui vérifient cette égalité dépend évidemment de ce que les fonctions φ_ν, substituées aux $\partial_x^\nu z$, soient ou non les seules à annuler la série 2. Or, on peut démontrer sans difficulté que ce n'est le cas d'aucune fonction algébrique de x qui ne soit déjà comprise dans [l'ensemble des] φ_ν ; mais quant à savoir si aucune fonction en général ne satisfait cette condition, je n'ai pu parvenir jusqu'à présent à aucun résultat. [Note de Riemann]

Il en découle

3. $$\partial_x^{-m} z = \int_k^{(m)x} z_{(t)}\,\mathrm{d}t^m + \sum_{n=m}^{n=1} K_n \frac{x^{-n+m}}{\Pi(-n+m)}$$

et

4. $$\partial_x^0 z = z$$

5. $$\partial_x^m z = \frac{\mathrm{d}^m z}{\mathrm{d}x^m},$$

et en outre

6. $$\partial_x^\mu \partial_x^\nu z = \partial_x^{\mu+\nu} z + \varphi_\mu.$$

Chaque valeur de $\partial_x^{\nu+\mu} z$ est donc aussi une valeur de $\partial_x^\mu \partial_x^\nu z$.

Mais la réciproque a lieu uniquement lorsque μ est un entier positif ou lorsque ν est un entier négatif. Les deux expressions sont alors identiques. De la définition, il découle encore (si c désigne une constante)

7. $$\partial_x^\nu (p+q) = \partial_x^\nu p + \partial_x^\nu q,$$

8. $$\partial_x^\nu (cp) = c\partial_x^\nu p,$$

9. $$\partial_{x+c}^\nu z = \partial_x^\nu z,$$

10. $$\partial_{cx}^\nu z = \partial_x^\nu z c^{-\nu}.$$

Deux valeurs $\partial_x^\nu z$ et $\partial_x^\mu z$, dans lesquelles les constantes k, K_1, etc.[14] sont toutes égales entre elles, seront nommées *valeurs correspondantes.* Toutes les valeurs appartenant à un même développement de $z_{(x+h)}$ sont des valeurs correspondantes.

Nous voulons à présent procéder à la détermination des dérivées de certaines fonctions de x. Ce qui importe ici, bien sûr, c'est uniquement de trouver une valeur de la dérivée, puisque à partir de celle-ci on trouve aussitôt sa valeur générale par addition de la fonction φ, et cette valeur sera plus simple que l'expression 1., si du moins la transformation de cette expression doit servir à quelque chose, et devra donc être une fonction

[14] Le texte comporte K au lieu, manifestement, de k pour la première de ces constantes. [N.D.T.]

explicite de x sous forme finie. Cette transformation consistera donc en général à faire sortir x du signe de l'intégrale.

Examinons d'abord la fonction x^μ.

Si μ est positif, alors x^μ est continu pour toutes les valeurs de x ; et[15]

$$\frac{1}{\Pi(-\nu-1)}\int_0^x (x-t)^{-\nu-1}t^\mu\,\mathrm{d}t$$

sera toujours une valeur de $\partial_x^\nu(x^\mu)$; mais cette intégrale est

$$= \frac{1}{\Pi(-\nu-1)}\int_0^1 x^{\mu-\nu}(1-y)^{-\nu-1}y^\mu\,\mathrm{d}y = \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu)}x^{\mu-\nu}.$$

Puisque, d'après (4), la m-ième différentielle en est $\dfrac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu-n)}x^{\mu-\nu-n}$ $= \partial_x^{\nu+m}(x^\mu)$, on aura pour toute valeur de ν

$$\partial_x^\nu(x^\mu) = \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu)}x^{\mu-\nu} + \varphi_\nu.$$

Si μ est négatif, alors x^μ est discontinue pour $x = 0$, mais continue pour toutes les autres valeurs ; dans l'expression 1., x et k doivent ainsi avoir constamment des signes égaux. Or, en intégrant m fois par parties, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Pi(-\nu-1)}\int_k^x (x-t)^{-\nu-1}t^\mu\,\mathrm{d}t\\ &\quad= \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(-\nu-1-m)\Pi(\mu+m)}\int_k^x (x-t)^{-\nu-1-m}t^{\mu+m}\,\mathrm{d}t + \varphi_\nu,\end{aligned}$$

tant que $-\nu-m > 0$, grâce à quoi, lorsque[16] $-\nu > -\mu$, les intégrales dans lesquelles $\mu < -1$ peuvent se réduire en d'autres dans lesquelles l'exposant de t est > -1 ; s'il est > -1,

$$\int_0^k (x-t)^{-\nu-1-m}t^{\mu+m}\,\mathrm{d}t$$

est une fonction φ_ν, et

$$\frac{\Pi(\mu)}{\Pi(-\nu-1-m)\Pi(\mu+m)}\int_0^x (x-t)^{-\nu-1-m}t^{\mu+m}\,\mathrm{d}t = \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu)}x^{\mu-\nu}$$

[15] Pour les quatre lignes suivantes, Riemann suppose implicitement $\nu < 0$. [N.D.T.]

[16] Pour les huit lignes suivantes, Riemann suppose implicitement que μ est non entier. [N.D.T.]

est une valeur de $\partial_x^\nu(x^\mu)$, lorsque $-\nu > -\mu$, résultat qui, d'après la loi $\partial_x^{\nu+1}z = \dfrac{\mathrm{d}\partial_x^\nu z}{\mathrm{d}x}$, doit valoir pour tout ν.

Mais si $\mu + m = -1$, on aura[17]

$$\begin{aligned}
&\int_k^x (x-t)^{-\nu-1-m} t^{\mu+m}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad = \log x\, x^{\mu-\nu} - \log k\, x^{\mu-\nu} + \int_k^x \frac{(x-t)^{\mu-\nu} - x^{\mu-\nu}}{t}\,\mathrm{d}t \\
&\qquad = \log x\, x^{\mu-\nu} + \int_0^x \frac{(x-t)^{\mu-\nu} - x^{\mu-\nu}}{t}\,\mathrm{d}t + \varphi_\nu \\
&\qquad = \log x\, x^{\mu-\nu} + x^{\mu-\nu}\int_0^1 \frac{y^{\mu-\nu} - y}{1-y}\,\mathrm{d}t\ ^{(18)} \\
&\qquad = \log x\, x^{\mu-\nu} - \big(\Psi(\mu-\nu) - \Psi(0)\big)x^{\mu-\nu\ (19)}.
\end{aligned}$$

Si, de même, l'on généralise le résultat ainsi obtenu au moyen de la différentiation, on aura comme valeurs de $\partial_x^\nu(x^\mu)$,

11. $$\partial_x^\nu(x^\mu) = \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\mu-\nu)}x^{\mu-\nu},$$

lorsque μ n'est pas un entier négatif;

12. $$\partial_x^\nu(x^\mu) = \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(-1)}\,\frac{1}{\Pi(\mu-\nu)}\Big[\log x\, x^{\mu-\nu} - \big(\Psi(\mu-\nu) - \Psi(0)\big)x^{\mu-\nu}\Big],$$

lorsque μ est un entier négatif.

Il est à noter que la formule 11. découle de la formule 12., lorsqu'on soumet les constantes, qui deviennent dans ce cas $\dfrac{\infty}{\infty}$, à un traitement approprié, ce qui doit également avoir lieu dans le cas où $(\mu-\nu)$ et μ sont tous deux des entiers négatifs. On oublie facilement que les valeurs données par ces formules pour différentes valeurs de ν sont des valeurs

[17] μ est maintenant supposé entier; jusqu'à la généralisation mentionnée après les quatre lignes de calculs qui suivent, Riemann suppose de plus implicitement $\nu < \mu$. [N.D.T.]

[18] Cette expression doit être corrigée; il faut lire : $\log x\, x^{\mu-\nu} + x^{\mu-\nu}\displaystyle\int_0^1 \frac{y^{\mu-\nu}-1}{1-y}\,\mathrm{d}y$. [N.D.T.]

[19] Dans la notation de Gauss ici utilisée par Riemann, le symbole Ψ désigne la fonction définie par $\Psi' = \Pi'/\Pi$; elle est donc reliée à notre $\psi = \Gamma'/\Gamma$ par $\Psi(x) = \psi(x+1)$. [N.D.T.]

correspondantes. C'est également la raison pour laquelle, dans 12., nous n'avons pas inclus dans la fonction φ_ν, comme nous pourrions[20] le faire dans le cas où μ = un nombre entier négatif, la partie ne contenant que $x^{\mu-\nu}$.

Si l'on applique un procédé analogue à e^x, on obtiendra :

13. $$\begin{aligned}\partial_x^\nu(\mathrm{e}^x) &= \frac{1}{\Pi(-\nu-1)}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^t(x-t)^{-\nu-1}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\Pi(-\nu-1)}\,\mathrm{e}^x\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}y^{-\nu-1}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

Les dérivées de $\log x$ s'obtiennent par la même méthode, mais plus facilement encore et immédiatement pour toutes les valeurs de ν, à partir de 6. et 12.

14. $$\partial_x^\nu(\log x) = \partial_x^\nu\partial_x^{-1}x^{-1} = \frac{1}{\Pi(-\nu)}\Big(\log x\, x^{-\nu} - \big[\Psi(-\nu) - \Psi(0)\big]x^{-\nu}\Big).$$

De plus, en appliquant les règles 7. à 10., on déduit avec la plus grande facilité de 13. et 14. les dérivées de $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x)$.

Remarquons pour finir que la théorie mise en place peut aussi s'étendre et avec autant de certitude au cas où les grandeurs considérées seront imaginaires.

[20] La traduction proposée suppose qu'on lise « könnten » là où les *Œuvres* contiennent « konnten ». L'absence du *Umlaut* ne peut être, en effet, qu'une erreur typographique, dans la mesure où la phrase obtenue avec « konnten » serait incompatible avec le contexte. [N.D.T.]