Revue d'histoire des mathématiques,
1 (1995), p. 39–81.

LA THÉORIE DES ENSEMBLES EN FRANCE AVANT LA CRISE DE 1905 : BAIRE, BOREL, LEBESGUE ... ET TOUS LES AUTRES

Hélène GISPERT (*)

RÉSUMÉ. — Cet article s'intéresse à la façon dont le milieu mathématique français s'est saisi, dans ses travaux, des nouveaux concepts et des nouvelles méthodes de la théorie des ensembles. Nous montrons que cette prise en compte s'inscrit dans un courant propre aux mathématiques françaises, la nouvelle théorie des fonctions, et que, loin d'être marginale, elle se situe dans l'activité classique du milieu. De ce fait, la théorie des ensembles mise en œuvre porte la marque de cette utilisation spécifique et se différencie sur des aspects importants de la version qu'en présente Cantor.

ABSTRACT. — SET THEORY IN FRANCE PRIOR TO THE CRISIS OF 1905: BAIRE, BOREL, LEBESGUE ... AND THE REST. This paper investigates the manner in which French mathematical circles took up, in their work, the novel concepts and methods of set theory. Such an appropriation, it is shown, was effected within the context of a current specific to French mathematics, the then-new theory of functions; and, far from being marginal, this process may be seen as integral to those circles' classic tradition. Hence, set theory as incorporated in practice bears the hallmarks of this particular purpose, and differs in important respects from the version presented by Cantor.

> *Du jour où la théorie des ensembles a cessé d'être métaphysique pour devenir pratique, les idées nouvelles introduites par cette théorie ont produit, en théorie des fonctions, une floraison magnifique de recherches et de résultats.*
> [Borel 1909, p. 324]

En 1883 paraît, en français, dans le deuxième tome des *Acta mathematica* une version revue et corrigée des mémoires que Cantor a publiés depuis le début de la décennie 1870[1]. Partant d'une question classique

[1] Je ne donne ici que la référence globale des articles de Cantor parus en français dans les *Acta mathematica* [Cantor 1883]. On trouve une bibliographie complète des articles de Cantor en allemand et en français dans l'ouvrage que Dauben a consacré à Cantor [Dauben 1979]. A propos de la diffusion en France de la théorie des ensembles de points, il faut également signaler la traduction du livre de 1882 de P. Du Bois-Reymond parue en 1887 sous le titre *Théorie générale des fonctions.*

(*) Texte reçu le 26 mai 1994, révisé le 12 décembre 1994.
Hélène GISPERT, Mathématiques, Centre universitaire, 91405 Orsay CEDEX, France.

d'analyse, l'unicité de la représentation d'une fonction par des séries trigonométriques, Cantor développe sur une centaine de pages les notions et résultats qui sont à la base de sa théorie des ensembles. Celle-ci s'articule tout d'abord sur les notions relatives aux sous-ensembles infinis de points de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^n$; celles d'ensemble dérivé (ensemble des points d'accumulation d'un ensemble donné), d'ensembles dérivés de tous les ordres, d'ensemble parfait, d'ensemble dense, ainsi que celles, profondément originales, de puissance d'un ensemble, de nombres transfinis et d'ensembles bien ordonnés. S'émancipant alors des origines de ces différentes notions engendrées de façon très «concrète», Cantor présente ensuite les nombres transfinis — pilier de sa théorie des ensembles — comme une extension autonome et systématique des nombre naturels. Cette dernière démarche est approfondie dans ses publications des années 1895–1897, les *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* dans lesquels il développe la théorie des types d'ordres, étudiant les propriétés des nombres transfinis cardinaux et ordinaux[2].

Je m'intéresserai dans cet article à la façon dont le milieu mathématique français s'est saisi de ces nouveaux concepts et de ces nouvelles méthodes ainsi qu'aux questions originales que cela lui a posées. Les premières réactions hostiles des mathématiciens français chargés en 1883 de la traduction des mémoires de Cantor pour les *Acta mathematica* sont connues [Hermite *Lettres*] ; le rôle et la nature du recours à la théorie des ensembles, à la fin du siècle, dans les travaux de Borel, Baire ou Lebesgue également ([Dugac 1976a, 1978], [Michel 1992])[3]. Ceux-ci traduisent en fait une évolution dans les mathématiques françaises qui dépasse le cercle de ces trois mathématiciens d'exception. Je voudrais montrer ici que la prise en compte de la théorie des ensembles s'inscrit dans un moment particulier des mathématiques françaises où de nouvelles recherches — concernant la théorie des fonctions — s'imposent et se développent de

---

[2] Ces travaux ont été traduits en français sous le titre *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis* [Cantor 1899].

[3] Ces recherches, sur lesquelles je m'appuierai, analysent également le devenir, dans les développements ultérieurs de l'analyse, des outils et résultats nouveaux liés à la théorie des ensembles de Borel, Baire, et Lebesgue ; il n'en sera pas question ici. Ajoutons à ces références le livre plus ancien, en langue russe, de Medvedev sur l'école française de théorie des fonctions et des ensembles à la fin du XIX^{e} et au début du XX^{e} siècle [Medvedev 1976].

façon significative. Loin d'être marginale, la théorie des ensembles devient à partir de la fin des années 1890 un outil nécessaire et privilégié de ces nouvelles recherches et s'insère ainsi dans l'activité mathématique classique du milieu français. La théorie qu'il adopte — principalement celle des sous-ensembles de points de la droite réelle et du transfini dénombrable — porte, de ce fait, les traces de son insertion dans les cadres de l'activité mathématique française et se différencie, en particulier sur la notion clef de transfini, de la version qu'en présente Cantor.

Mon enquête, menée délibérément au niveau des seules productions mathématiques des auteurs français entre 1875 et 1905, se place avant la grande crise des paradoxes de la théorie des ensembles focalisée sur l'axiome du choix de Zermelo[4]. De plus, de façon paradoxale, elle se situe pour l'essentiel en deçà des publications de Cantor des années 1895–1897, les mathématiciens français se référant pour l'essentiel aux articles des *Acta mathematica*.

Dans une première partie, je me propose d'identifier à l'aide des travaux de plusieurs mathématiciens, la nature des évolutions — tant des contenus que des contextes dans lesquels ils s'insèrent — qui mirent à l'ordre du jour dans les mathématiques françaises les études d'ensembles infinis de points et donc, nécessairement, le recours à la théorie des ensembles. Je m'attache ensuite, à titre d'exemple, à l'étude d'une entreprise majeure de ces nouvelles mathématiques des années autour de 1900, la *Collection des monographies sur la théorie des fonctions*. Les premiers volumes dus à Borel, Baire et Lebesgue font ainsi l'objet de la deuxième partie de cet article. Dans la troisième partie, je cherche à mettre en perspective cette étude de cas en élargissant mon analyse aux travaux et aux positions du milieu mathématique français.

[4] Il ne sera donc pas question ici des débats, qui opposèrent les mathématiciens français entre eux, sur les fondements et l'objet de leur science à partir de 1905, dont un temps fort fut les fameuses «Cinq lettres sur la théorie des ensembles» de Baire, Borel, Hadamard et Lebesgue publiées dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* en 1905. Dans ces débats — pour l'analyse desquels je renvoie au début de la thèse de Jean Cavaillès *Méthode axiomatique et formalisme* [1937] et à la thèse de Cassinet et Guillemot [1983] — les mathématiciens présentèrent des positions souvent plus radicales que celles qu'ils avaient adoptées dans leurs travaux antérieurs auxquels il sera ici fait référence (*cf.* les différentes éditions des *Leçons sur la théorie des fonctions* de Borel ou des *Leçons sur l'intégration et la recherche des primitives* de Lebesgue auxquelles, par exemple, se réfère Cavaillès).

1. DARBOUX, JORDAN, BAIRE : REPÈRES D'UNE ÉVOLUTION DANS LES MATHÉMATIQUES FRANÇAISES

Dans les journaux mathématiques, en particulier le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* qui recense depuis la décennie 1870 les articles mathématiques parus dans les périodiques, l'intitulé «*théorie des ensembles*» apparaît en tant que tel dans la classification des tables des matières à partir de 1905; c'est une des rubriques du premier chapitre «*Généralités*» qui comprend aussi la philosophie, l'histoire et la pédagogie. L'autonomie de cette rubrique est l'aboutissement d'un processus intéressant. Les articles consacrés à la théorie des ensembles de points puis à la théorie des ensembles ont d'abord été répertoriés sous l'intitulé «*principes de la géométrie*» dans le chapitre consacré à la «*Géométrie pure, élémentaire et synthétique*». Dans les années 1890 ils sont intégrés au chapitre «*Généralités*», mais ils figurent dans un premier temps, sans intitulé propre, dans la rubrique «*philosophie*».

La production française répertoriée, d'une façon ou d'une autre, comme «*théorie des ensembles*» dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* peut être rapidement recensée. Les premiers articles sont de Hadamard [1897] et Tannery [1897], le premier étant une courte intervention au congrès international des mathématiciens de Zürich et le second un article sur l'infini mathématique écrit dans la *Revue générale des sciences* à propos de la thèse de Couturat. En une dizaine d'années, de 1897 à 1907, on peut relever dans les *Fortschritte* — outre les cinq lettres parues dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* — les références de seize articles. Sept sont des notes aux *Comptes rendus* ([Baire 1899b], [Borel 1903a, 1903b et 1905a], [Zoretti 1904 et 1906], [Fréchet 1905]), deux paraissent dans le *Bulletin de la SMF* ([Borel 1903d] et [Lebesgue 1907b]) et quatre dans des revues de philosophie ou de diffusion des sciences ([Tannery 1897], [Borel 1899a et 1900a], [Richard 1905]). Deux articles, de Borel [1905b] et de Lebesgue [1907a], sont publiés dans des revues étrangères.

Cette rapide énumération semble indiquer que le domaine «théorie des ensembles», qui n'apparaît qu'à la fin des années 1890, est un domaine très circonscrit, avec peu d'auteurs, davantage réservé à des considérations sur les mathématiques qu'à des résultats mathématiques. En fait, une telle vision est terriblement étroite et insuffisante en même temps que très significative d'une conception de l'époque de la théorie des ensembles, philosophique et métamathématique, conception que signale et critique Painlevé dans la leçon d'ouverture des leçons de Stockholm sur les équations différentielles :

«*Je crois nécessaire d'insister ici sur les relations qui existent entre la théorie des fonctions et les travaux de M. Cantor. Dans une suite de recherches arithmétiques d'une grande profondeur, M. Cantor avait indiqué une classification des ensembles infinis, presqu'aussitôt rectifiée sur certains détails et complétée de la manière la plus heureuse par M. Bendixson. Les travaux de M. Bendixson* [1883] *mettaient notamment en évidence l'existence (bien invraisemblable* a priori*) d'ensembles infinis, dont aucun point n'est isolé et qui pourtant ne forment pas une ligne. Ce genre de recherches était d'un esprit si nouveau qu'il fallait quelque audace pour les accueillir dans un journal de mathématiques, et bien des lecteurs estimèrent que c'était là de la Philosophie plus que de la Science. Mais les progrès même des mathématiques ne devaient pas tarder à démentir ce jugement* » [1895, p. 200].

Painlevé poursuit en mentionnant des travaux majeurs dans le champ de la théorie des fonctions analytiques qui furent publiés dès 1884 dans les *Acta mathematica* et eurent recours à des résultats de la théorie des ensembles. Il cite tout d'abord les travaux de Poincaré sur les fonctions kleinéennes et fuchsiennes, — «*classe de fonctions définie par les propriétés les plus naturelles et* [...] *offrant l'exemple des singularités les plus compliquées qu'on ait prévu* a priori» —, puis ceux de Mittag-Leffler sur la classification des fonctions analytiques[5]. Dans le mémoire sur les groupes kleinéens, Poincaré utilise en effet pour l'étude des points singuliers de ses fonctions kleinéennes une notion de ligne — «*si on peut appeler cela une ligne*» écrit-il [1884, p. 285] — constituée d'un ensemble infini de points auquel on ajoute son premier dérivé, formant ainsi «*eine perfecte*

[5] Le point de vue de cet article qui s'attache aux mathématiciens français me conduit à souligner ici avec insistance, dans la mesure où cela ne sera guère mentionné par la suite, l'importance du rôle de Mittag-Leffler et de ses *Acta mathematica* dans l'introduction de la théorie des ensembles en France (voir *infra* note 17). Il était notamment engagé dans les nouvelles recherches sur le prolongement des fonctions analytiques (voir, entre autres, [Mittag-Leffler 1884]) particulièrement cultivées par les mathématiciens français, dont Picard auquel Painlevé fait référence dans la suite de cette citation.

und zusammenhängende Punktmenge» (ensemble parfait bien enchaîné)[6].

Si on aborde les grands champs de l'activité mathématique de ces années comme nous y invite Painlevé, on met alors à jour, dans l'élaboration même de résultats qui marquèrent les «progrès» de l'analyse en France — en théorie des fonctions, qu'elles soient analytiques ou de variables réelles, dans l'intégration des équations différentielles, le calcul intégral, la théorie des séries —, une prise en compte systématique de lignes singulières, d'ensembles de points singuliers, d'ensembles de mesure nulle[7] qui traduit une présence de la théorie des ensembles beaucoup plus importante.

De Darboux à Baire, ou l'entrée en scène des sous-ensembles infinis de points

Abordons, avec les travaux sur les fonctions discontinues, le champ privilégié d'utilisation de la théorie des ensembles dans les mathématiques françaises : la théorie des fonctions[8]. La comparaison des mémoires de Darboux [1875] et de Baire [1905] va nous permettre de repérer l'évolution déterminante de la place qu'occupe l'étude des sous-ensembles infinis de

[6] Les différentes notions de la théorie des ensembles que Poincaré utilise dans ce passage sont exprimées en allemand. Pour le sens précis des diverses expressions, il renvoie le lecteur, dans une note de bas de page, à l'ouvrage original de Cantor *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* dont il mentionne également la traduction française *Fondements d'une théorie générale des ensembles* dans les *Acta mathematica*, traduction à laquelle il collabora d'ailleurs activement [Dugac 1976b]. Signalons, à propos des fonctions analytiques, que Poincaré [1888] a utilisé une nouvelle fois la théorie des ensembles pour démontrer, à l'aide de la théorie cantorienne de la puissance, que l'ensemble des valeurs possibles en un point donné d'une fonction analytique est toujours dénombrable.

[7] La notion d'ensemble de mesure nulle fut mise au point par Borel [1898] et deviendra un outil classique de la théorie des fonctions (voir *infra* la deuxième partie de cet article).

[8] Cette affirmation est justifiée dans le cours de l'article. Ajoutons cependant que «privilégié» ne signifie pas «unique». Mentionnons, en effet, que Poincaré, dans son mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle [1885, p. 141–160], utilise les propriétés des ensembles parfaits qui ne sont denses dans aucun intervalle pour classer les cycles limites sur le tore ; par ailleurs, à propos des équations différentielles de la physique mathématique [1890, p. 40], il emploie de façon essentielle «*le langage de M. Cantor*» pour montrer que l'infinité de sphères intervenant dans le problème de Dirichlet est de la première puissance. Hadamard, lui, utilise le fait qu'un ensemble parfait est nécessairement non dénombrable pour montrer l'existence d'une certaine catégorie de géodésiques [1898, p. 771]. Ce type d'exemples dans d'autres domaines que la théorie des fonctions reste cependant exceptionnel.

points et d'identifier un des principaux facteurs de l'apparition de la théorie des ensembles en France : l'élargissement, en trente ans, du champ des objets auxquels s'intéresse la théorie des fonctions.

Darboux écrit son *Mémoire sur les fonctions discontinues* [1875] à la suite de la lecture du mémoire de Riemann sur le développement d'une fonction en série trigonométrique [1854]. Dans une première partie, après avoir construit l'intégrale définie de Riemann à partir de la définition rigoureuse des «sommes de Darboux» par excès et par défaut, il présente une division des fonctions discontinues en deux classes — les fonctions intégrables et les autres — en considérant leur oscillation «*dans chaque mode de subdivision*» d'un intervalle donné, lorsque tous les intervalles considérés tendent vers zéro. Une seconde partie du mémoire est consacrée à ce qui semble pour lui capital, la construction d'exemples de fonctions continues sans dérivée, dont l'existence est assurée du fait qu'il existe des fonctions discontinues susceptibles d'intégration. Darboux insiste en effet sur «*le besoin d'apporter la plus grande rigueur dans les déductions et de n'admettre que les propositions les mieux démontrées*», lorsqu'on se trouve «*en présence de propositions aussi singulières* [...]*, par exemple qu'il existe des fonctions continues qui ne sont ni croissantes ni décroissantes dans aucun intervalle, qu'il y a des fonctions discontinues qui ne peuvent varier d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires*» [Darboux 1875, p. 59].

Sollicité par un de ses collègues, le mathématicien bordelais J. Houël avec qui il échange une correspondance fournie, Darboux doit s'expliquer à plusieurs reprises sur le statut qu'il réserve à ces fonctions si singulières[9]. J. Houël oppose en effet aux préoccupations de Darboux sur la continuité et la dérivabilité des fonctions la pétition de principe selon laquelle il «*admet comme un fait d'expérience (sans chercher à le démontrer en général, ce qui peut être difficile)*» que les fonctions dont il traite — y compris les fonctions arbitraires les plus générales — sont nécessairement continues par morceaux et nécessairement dérivables. Cette restriction du champ des objets mathématiques, en référence à une norme implicite dans la pratique mathématique de ces années, rejette à l'extérieur les fonctions que Darboux construit artificiellement. Fonctions (dis)qualifiées

[9] Pour l'analyse de ces débats entre Houël et Darboux voir [Gispert 1983, 1990]. Les citations sont extraites de leur correspondance publiée dans [1983].

de «*saugrenues*», de «*drolatiques*», elles n'ont alors pour Houël qu'un statut d'exceptions et ne sont pas même considérées comme des contre-exemples.

Darboux est ainsi conduit à répondre «*qu'[il] ne fait pas plus de cas que [Houël] des fonctions bizarres, qu'[il] ne tient pas à les introduire*», et qu'elles ont pour rôle essentiel de «*séparer le bon grain de l'ivraie par des caractères précis*». C'est un rôle de critique et d'éclaircissement que Darboux assigne à ces fonctions bizarres qu'il construit explicitement comme des contre-exemples. Constituant «*une sorte de musée de monstruosités*» selon les termes qu'emploiera Lebesgue [1922a, p. 92] pour caractériser ce style de démarche, il cherche essentiellement à baliser correctement et explicitement le champ «normal» des objets. Il n'est pas question ici de l'élargissement du champ des objets en jeu dans la théorie des fonctions.

Avec ce mémoire, Darboux s'inscrit dans le courant des recherches suscitées par Weierstrass sur la représentation des fonctions et sur les principes de l'analyse, caractérisées par la rigueur des démonstrations, et d'où sont issus de premiers résultats relatifs aux ensembles de points. Cependant, fondé sur la manipulation scrupuleuse des définitions de continuité et de limite en un point ou sur un intervalle, son mémoire ne fait intervenir à aucun moment l'étude de sous-ensembles de points de la droite autres que les intervalles et, par suite, ne nécessite aucun recours à une théorie des ensembles.

A l'image de Houël, les mathématiciens français de ces années 1870, dédaignant le besoin de rigueur sur lequel insiste tant Darboux, ne s'intéressent pas aux exemples de fonctions qu'il exhibe dans son mémoire ; ils le «*blâmeront de cultiver ce champ stérile des fonctions continues sans dérivées*» [Lebesgue 1922b, p. 100]. Après la parution d'une «Addition au mémoire sur les fonctions discontinues» [1879], Darboux abandonne ainsi cet axe de recherche, se limitant, avec succès il est vrai, aux champs des fonctions usuelles continues et dérivables sur de «bons» intervalles.

Les soixante pages du mémoire de Darboux sont restées sans lendemain. Le désintérêt unanime du milieu mathématique français pour les questions qu'il soulève est d'autant plus remarquable qu'en Allemagne, dans les mêmes années, Hankel, puis Schwarz, Klein, Thomae, Cantor, tous élèves de Weierstrass, publient des articles — que cite d'ailleurs Darboux — dans ce domaine. Ce désintérêt est encore prégnant dans le milieu français[10]

[10] Painlevé mentionne bien le mémoire de Darboux en 1887 dans sa thèse sur les lignes

lorsqu'à la fin du siècle, Baire, jeune étudiant, redécouvre la différence, pour une fonction de deux variables, entre la continuité et la continuité séparée par rapport à chacune des variables, propriété mise en évidence à l'aide de contre-exemples par Thomae [1870] et Schwarz [1872], et à laquelle s'était intéressé Darboux dans un article du *Bulletin des sciences mathématiques* [1872].

Le programme de recherche que définit Baire est d'une tout autre nature que celui de Darboux. Bien que Baire, dans la préface de sa thèse [1899a], place son travail dans la lignée de ceux de Darboux [1875] et de Dini [1878][11], il s'attache à l'étude des fonctions les plus générales, définies sur les ensembles les plus généraux, étude rendue possible grâce au recours à de nouveaux outils mathématiques empruntés à la théorie des ensembles. C'est à partir de la «redécouverte» évoquée ci-dessus que, dans des travaux d'une originalité remarquable, Baire s'intéresse à la distribution des points de discontinuité d'une fonction et à son rôle sur les propriétés de la fonction[12]. Cherchant à quelles conditions une fonction discontinue peut être limite d'une suite de fonctions continues, il développe une classification des fonctions discontinues, considérant parmi elles, celles qui sont limites de fonctions continues, puis celles qui sont limites de ces dernières, etc.

A la différence de Darboux qui, s'intéressant à l'intégration, ne considère les points de discontinuité que pour les enfermer dans des intervalles qu'il fait tendre vers zéro, Baire étudie spécifiquement les ensembles de points de discontinuité. Il bâtit sa classification sur la considération d'ensembles linéaires de points (c'est-à-dire d'ensembles de points d'une droite) et d'ensembles transfinis, en recourant explicitement aux notions de la théorie des ensembles introduites par Cantor : ensembles

singulières des fonctions analytiques [1887, p. 73], mais cela reste un fait isolé. Si les recherches sur les singularités des fonctions analytiques se développent, le domaine des fonctions de variables réelles demeure peu investi.

[11] Dini, et d'autres auteurs italiens comme Peano, Arzela, Ascoli, Vivanti, Volterra, ont fortement contribué au renouveau de la théorie des fonctions dans le dernier tiers du XIX^{e} siècle. Ils ne sont cités qu'exceptionnellement dans cet article qui s'attache avant tout aux travaux mathématiques des auteurs français.

[12] Voir les articles que P. Dugac a consacrés à la vie et à l'œuvre de René Baire, dans lesquel il souligne la nouveauté et la puissance de ses travaux ([1976a], et le chapitre «*Baire ou la topologie souveraine*» de sa thèse [1978, p. 114–146]). Je ne présente ici qu'un aperçu succinct des idées de Baire, une analyse plus complète étant menée *infra* dans la deuxième partie.

fermés, ensembles denses, ensembles parfaits, puissance des ensembles, énumération transfinie des ensembles bien ordonnés.

Cette classification des fonctions est l'objet essentiel de sa thèse en 1899. Il l'expose, en 1904, dans un cours Peccot du Collège de France qui donne lieu, un an plus tard, à un volume de la collection des monographies sur la théorie des fonctions. Dans les premières années du XX^e^ siècle ces «fonctions les plus générales» ne sont plus aussi marginales que dans les années 1870. Trente ans après Darboux, la théorie des ensembles et les moyens puissants et nouveaux qu'elle propose pour s'attaquer à l'étude d'ensembles de points, ont commencé à bousculer les normes dans la théorie des fonctions : tant dans le domaine réel que dans le domaine complexe, la théorie des fonctions a alors les moyens de prendre en compte «*les singularités de toutes sortes* [...] [*qui*] *s'introduisent d'elles-mêmes, qu'on le veuille ou non, dans les questions d'où le chercheur aurait souhaité les écarter*» [Baire 1905, p. VI]. Les analystes peuvent avoir de nouvelles ambitions, s'intéresser aux fonctions les plus générales dont «*les fonctions discontinues, fonctions sans dérivées, fonctions pourvues de dérivées de tous ordres mais non développables en série de Taylor*[13]», pour reprendre en partie l'inventaire que dresse Baire dans la préface à ses *Leçons sur les fonctions discontinues.* Ils doivent, pour cela, utiliser et développer la théorie des ensembles.

De Jordan à … Jordan, ou de la nécessité d'un nouveau chapitre dans le cours d'analyse

L'apparition, dans la deuxième édition du cours d'analyse de l'École polytechnique de Camille Jordan [1893], d'un chapitre supplémentaire intitulé «*Ensembles*» conduit à identifier un autre domaine des mathématiques françaises dans lequel va s'imposer l'étude des sous-ensembles de points, donc le recours à la théorie des ensembles : les recherches sur l'intégration[14].

La première édition du tome premier de ce cours paraît en 1882 [Jordan 1882]; les considérations sur les principes de l'analyse, limitées

[13] Ces fonctions font l'objet de la deuxième partie de la thèse de Borel dont «*le but* [...] *est de montrer qu'il existe des fonctions intéressantes et ayant des propriétés simples, en dehors des fonctions analytiques proprement dites*» [Borel 1895, p. 277].

[14] La question de l'intégration fut l'objet initial des recherches de Harnack et de Du Bois-Reymond.

à quelques développements sur les infiniment petits faisant appel à l'intuition géométrique, sont traitées en deux ou trois pages. Les nombres irrationnels ne sont pas définis quoiqu'utilisés implicitement ; la continuité, si elle est définie, ne fait l'objet d'aucune étude spécifique ainsi que les énoncés sur les limites et les propriétés des fonctions sur la droite réelle. Avec ces choix, Jordan se conforme au sentiment général des auteurs de traités d'analyse français des décennies 1860 et 1870 qui accordent peu de place aux premiers principes de l'étude des fonctions d'une variable réelle et négligent, par exemple, d'exposer toute construction des irrationnels, alors même qu'un auteur français, Charles Méray, professeur à la faculté de Dijon, publie, juste avant Dedekind, Weierstrass et Cantor, une théorie des nombres irrationnels [1869].

En revanche, dans la deuxième édition de ce premier tome, Jordan expose longuement les premiers principes du calcul infinitésimal. Il consacre ainsi un premier chapitre à la construction des réels et aux propositions sur les limites ; un second chapitre, intitulé «*Ensembles*», aux notions d'ensemble dérivé, parfait, borné, d'un seul tenant, puis aux ensembles mesurables ; enfin un troisième chapitre où il utilise les résultats sur les ensembles introduits dans le chapitre précédent, aux fonctions bornées et aux fonctions intégrables.

Jordan présente en effet dans le troisième chapitre les résultats sur les intégrales définies qu'il a publiés l'année précédente dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* [1892]. Partant du constat que toutes les démonstrations concernant l'intégrale définie reposent sur «*ce double* postulatum *que chaque champ d'intégration a une étendue déterminée et que, si on le décompose, la somme des étendues de ces parties est égale à l'étendue totale*», Jordan remarque dans cet article que «*ces propositions sont loin d'être évidentes si on laisse à la conception du champ toute sa généralité*». Il se propose donc d'étudier l'influence de la nature du champ (du domaine) d'intégration sur l'intégrale. A la différence de Darboux, qui, dans des recherches précédentes, s'est intéressé uniquement au rôle que joue la fonction dans l'intégrale, Jordan a besoin de la théorie des ensembles ; les raisonnements rigoureux sur les limites et la convergence dans les intervalles réels ne suffisent plus. Il introduit ainsi les notions d'étendue extérieure, intérieure pour un domaine quelconque et démontre les propositions du double postulat dans toute leur généralité, définissant à cette fin, «*avec M. Cantor*», les notions de point limite, d'ensemble dérivé, d'ensemble parfait.

Dans les quatre chapitres suivants du cours, Jordan traite des fonctions continues, des fonctions à variation bornée, des dérivées et intégrales des fonctions d'une variable, avec toute la généralité que lui permettent les énoncés et les résultats sur les ensembles présentés pour les besoins du chapitre sur les fonctions bornées et intégrables. Ainsi, pressé par les nécessités de ses recherches sur l'intégration, la mesure des aires, la mesure des ensembles, notions qu'il juge fondamentales, Jordan «*ose*», — le mot est de Lebesgue — incorporer certaines parties de la théorie des ensembles dans son cours.

Cette audace lui avait manqué dix ans plus tôt lors de la rédaction de la première édition, alors qu'il était déjà entré dans le champ des recherches faisant intervenir des sous-ensembles infinis de points[15] et avait, à la différence de la plupart de ses collègues français, une connaissance très fine de la structure de l'ensemble des réels. Il avait alors estimé que ces questions, marginales dans la production française, n'avaient pas leur place dans un traité d'analyse.

S'il faut souligner toute l'importance en France, et même à l'étranger, de ce premier exposé global et systématique dans lequel toute une génération de mathématiciens découvrit les premiers éléments de la théorie des ensembles, il faut également en préciser les limites. Les premiers chapitres de la deuxième édition, où «*les principes sont exposés de la façon la plus solide et sous une forme qui bien souvent semble devoir être définitive*» selon Tannery dans sa critique du livre pour le *Bulletin des sciences mathématiques* [1893], se limitent strictement à ce qui est nécessaire pour la suite du propos. Jordan n'y expose, par exemple, ni la notion d'ensemble dense ni celle de puissance dont il n'a pas besoin. L'utilité dans le champ des mathématiques «classiques» semble être le critère déterminant pour l'introduction des résultats sur les fondements, et plus particulièrement de la théorie des ensembles. C'est ce dont témoigne ce jugement *a posteriori* de Lebesgue :

[15] Jordan publie en effet en 1881 une note aux *Comptes rendus* sur les séries de Fourier, objets des premiers articles de Cantor qui définit à cette occasion l'ensemble dérivé. Jordan introduit dans sa note le concept de fonction à variation bornée et donne un exemple de fonction discontinue pour toutes les valeurs rationnelles de la variable.

«*En osant incorporer certaines parties de la théorie des ensembles dans son cours à l'École polytechnique, Jordan réhabilitait en quelque sorte cette théorie ; il affirmait qu'elle est une branche utile des mathématiques. Il faisait plus que l'affirmer, il le prouvait par ses recherches* [...] *qui ont si bien préparé certains travaux, les miens en particulier*» [1922a, p. 102].

2. LES MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS : UN NOUVEAU MONDE

Réhabilitation, utilité, voici deux mots caractéristiques du statut de la théorie des ensembles dans les mathématiques françaises au tournant du siècle comme le montrent les propos de Tannery rendant compte d'un rapport de Schoenflies sur les développements de la théorie des ensembles [1900] pour la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* : «*elle* [*la théorie des ensembles*] *s'est montrée* utile[16] *et, ainsi, le reproche qu'on a été quelquefois tenté de lui faire, d'être non seulement une construction paradoxale mais encore une construction arbitraire, s'évanouit par l'épreuve du temps*» [1900, p. 239–240].

L'évolution est en effet importante depuis l'année 1883, quand quelques mathématiciens français, à l'initiative de Mittag-Leffler, prennent connaissance des travaux de Cantor. Hermite, porte-parole de ses jeunes collègues Poincaré, Picard et Appell chargés de traduire pour les *Acta mathematica* les articles de Cantor, exprime en effet dans de nombreuses lettres à Mittag-Leffler «*l'impression désolante que nous produisent les mémoires de Cantor*» qui «*tant qu'on n'en aura point déduit quelque chose, résulte*[*nt*] *de considérations tellement arbitraires, que l'auteur aurait mieux fait de* [*les*] *garder et d'attendre*»[17]. Quant au milieu mathématique français,

[16] Souligné dans le texte original.

[17] Hermite répond ainsi en 1883 à la demande que lui fit Mittag-Leffler de traduire en français pour les *Acta mathematica* les mémoires de Cantor. Il s'agit d'une des très nombreuses lettres qu'il écrivit à Mittag-Leffler, correspondance éditée par P. Dugac et dans laquelle on peut suivre en détail les premières réactions des mathématiciens français aux théories de Cantor [Hermite *Lettres*]. Hermite continue sa lettre avec une critique très significative que nous retrouvons encore à la fin du siècle : « *J'ajoute que nous jugeons absolument contraire à notre esprit mathématique d'exposer pour n'en rien faire, un appareil compliqué de nouvelles notations et de nouvelles dénominations. Nous avons et nous pratiquons à cet égard le principe qu'il faut user de sobriété, en suivant l'exemple donné par les maîtres de la science*». Voir également [Dugac 1976b], où sont publiées des lettres de Picard et Poincaré.

celui-là même qui demeura fermé aux recherches de Darboux sur les fonctions discontinues, Poincaré le juge alors «*absolument réfractaire aux recherches à la fois philosophiques et mathématiques de M. Cantor*».

Depuis ce début des années 1880 où le pionnier Poincaré «*rencontrait*» — le mot est de Tannery [1898, p. 243] — le premier exemple d'un «*de ces ensembles parfaits qui ne sont denses dans aucun intervalle*», l'univers d'un nombre de plus en plus important de mathématiciens, le rôle qu'y tient la théorie des ensembles ainsi que différents outils topologiques se sont profondément transformés. La collection des *Monographies sur la théorie des fonctions* créée en 1898 par Borel en est une manifestation exemplaire.

Dix-huit titres, qui reprennent tous des cours professés à l'École normale ou au Collège de France, paraissent jusqu'à la guerre. Dans les dix premières années Borel rédige six volumes [1898, 1900b, 1901, 1902, 1903c, 1905c] traitant successivement du prolongement des fonctions analytiques, des fonctions entières, des séries divergentes, des séries à termes positifs, des fonctions méromorphes, des fonctions de variables réelles et des développements en séries de polynômes; Lebesgue écrit ses *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* [1904] et ses *Leçons sur les séries trigonométriques* [1906], Baire ses *Leçons sur les fonctions discontinues* [1905].

Cette simple énumération témoigne de la fécondité exceptionnelle de ce champ de recherches. «*La théorie moderne des fonctions* [...] *avec son langage souple et précis dû à l'introduction systématique de la notion d'ensemble*»[18] est en fait le vecteur essentiel de nouveauté et de modernité en France, le facteur d'élargissement du champ des objets et du champ des méthodes.

[18] Cette caractérisation de l'apport de la théorie des ensembles est tirée de la critique d'un volume de Lebesgue [1906] parue dans le *Bulletin des sciences mathématiques* [Blumenthal 1906, p. 252]. Il faut souligner l'intérêt de la vingtaine de comptes rendus consacrés aux ouvrages de cette collection publiés dans ce journal entre 1898 et 1914. Les références de plusieurs d'entre eux sont données dans le cours de l'article. La place et le rôle de la théorie des fonctions dans la production des mathématiciens français durant ces années ont été étudiés par ailleurs [Gispert 1991, chap. 3 et 4]. Il est à noter, par exemple, que le milieu mathématique français, mis à part quelques individualités, reste complètement à l'écart des nouvelles recherches en algèbre qui se développent en Allemagne.

Les premières **Leçons** *de Borel*

En 1898, Borel publie «un petit livre» qu'il consacre à la théorie des ensembles et à ses applications à la théorie des fonctions ; c'est le premier tome de la collection qui va s'organiser sur un principe qu'énonce Borel dans la préface : il s'agit «*d'exposer d'une manière élémentaire, certaines recherches qui, bien que relativement récentes, prennent chaque jour une importance plus considérable.* [...] *De ce nombre, est la théorie des ensembles*» [1898, p. VII].

Le titre du volume illustre un deuxième principe constitutif de la collection. Quoiqu'il l'ait écrit pour présenter aux lecteurs la théorie des ensembles, Borel a «*tenu cependant à lui donner le titre de* Leçons sur la théorie des fonctions*, car en parlant des ensembles, j'ai cherché à ne jamais perdre de vue les applications*». Il affirme alors une position qu'adopteront, à leur tour, Lebesgue et Baire dans leurs ouvrages :

«*Ce n'est pas que je méconnaisse le très haut intérêt que présente par elle-même la théorie des ensembles, mais il m'a paru qu'il y avait lieu de distinguer nettement cet intérêt philosophique de l'utilité pratique de la théorie, c'est-à-dire de son lien avec d'autres parties des mathématiques*» [Borel 1898, p. VIII].

Borel commence ainsi par exposer dans les trois premiers chapitres du livre les notions de puissance, de dénombrable, de continu, d'ensemble dérivé, d'ensemble parfait et en montre toute l'importance et la fécondité, rendant hommage de nombreuses fois à Cantor. L'essentiel est cependant ailleurs. L'objet du livre, c'est l'extension de la théorie des fonctions analytiques que vont permettre les applications de la théorie des ensembles à la théorie des fonctions auxquelles sont consacrés les trois derniers chapitres. A cet effet, Borel présente sa notion de mesure qui lui permet de définir celle d'ensemble de mesure nulle qui va jouer un rôle décisif dans les chapitres suivants. Grâce à ce nouveau concept de mesure, explicitement formulé pour la première fois dans ce livre, il peut «négliger» certains ensembles de points d'un intervalle donné qui, tout en ayant la puissance du continu et étant dense dans cet intervalle, seront de mesure nulle[19].

[19] Nous renvoyons à Michel [1992, p. 48–60] pour une étude précise de la genèse et de l'utilisation de ce concept de mesure nulle par Borel [1895, 1898].

Comme première application des notions de la théorie des ensembles, Borel expose le résultat de Poincaré sur le prolongement analytique : l'ensemble des déterminations d'une fonction analytique en un point donné est toujours au plus dénombrable. Il présente ensuite une remarque de Weierstrass qui montre une des limites du prolongement analytique à laquelle Borel s'intéresse : une série de fonctions uniformes dans un domaine peut converger uniformément dans deux portions séparées du domaine sans que les deux fonctions analytiques vers lesquelles elle converge «*n'aient de rapport nécessaire entre elles*».

C'est une sorte de question inverse que traite alors Borel. Il montre comment, dans certains cas, des expressions analytiques, qui définissent dans des régions de convergence séparées des fonctions analytiques *a priori* sans relation entre elles, peuvent en fait être regardées comme l'expression d'une même fonction analytique. Il y voit la possibilité d'étendre la notion de fonction analytique donnée par Weierstrass. Pour lui, cependant, la question est loin d'être close puisqu'il faut notamment formuler des hypothèses restrictives sur les expressions analytiques considérées. C'est d'ailleurs pour établir la convergence de ces expressions analytiques qu'il a recours aux notions de théorie des ensembles exposées dans les premiers chapitres, dont celle d'ensemble de mesure nulle. Il étudie en effet, dans le cas d'une variable, la convergence de ces séries dans le dérivé de l'ensemble des singularités et établit que, à certaines conditions, l'ensemble des valeurs pour lesquelles la série n'est pas convergente a pour mesure zéro. Plus intéressante est l'extension de ces résultats à la convergence de certaines séries de deux variables : le plan est quadrillé par un réseau de courbes Γ et Γ' de sorte que, pour tout arc d'une courbe Γ' fixée, la série converge uniformément sur chaque courbe Γ qui le rencontre, sauf peut-être pour un ensemble de points de l'arc de mesure nulle.

Trois notes «*consacrées à quelques questions qui se rapportent aux principes de la théorie des ensembles*» terminent le livre. Borel quitte alors, j'y reviendrai, le terrain des applications pour aborder celui des principes.

Tenus d'expliciter les notions récentes auxquelles ils ont recours dans leurs recherches, Borel à nouveau, puis Lebesgue et Baire, vont, à l'image de ce premier volume, constituer avec leurs *Leçons* respectives un véritable corpus original d'exposés sur la théorie des ensembles. Adoptant des plans et des méthodes différentes en fonction de leur sujet, ils sélectionnent certains résultats «*dont l'importance dans le reste des mathématiques est en quelque sorte prouvée expérimentalement*» [Tannery 1898, p. 243], et, précisant dans quelle mesure ils les appliquent, ils vont chercher à les dégager de toutes les considérations d'ordre général qui caractérisent la théorie cantorienne. Cette présentation de la théorie des ensembles et de son articulation au corps de leurs propres recherches — spécifique à la collection et à son parti pris «pédagogique» d'explicitation — rend l'étude de ces volumes particulièrement précieuse pour saisir le rôle de la théorie des ensembles dans l'avènement de cette théorie moderne des fonctions.

Les* Leçons sur les fonctions discontinues *de Baire : la remarquable efficacité de la théorie des ensembles

Baire, qui est, au dire même de plusieurs de ses contemporains, un de ceux — sinon celui — qui recourut le plus systématiquement et le plus complètement à la théorie des ensembles[20], présente dans ses *Leçons* une partie des recherches qui ont fait l'objet de sa thèse *Sur les fonctions de variables réelles* [1899a]. Le sujet et le plan du livre sont définis brièvement dans la préface :

«*Me proposant de rechercher toutes les fonctions discontinues représentables par des séries de fonctions continues, j'étudie, en détail, à mesure qu'elles se présentent, toutes les notions et les théories qui me sont utiles pour donner la solution de ce problème*»[21] [1905, p. VII].

Dès les premières pages du livre, Baire exprime cet élargissement du champ des objets et des méthodes mentionné plus haut en présentant, à partir de l'exemple de deux fonctions discontinues développables en série

[20] Voir les témoignages de plusieurs mathématiciens dont principalement Denjoy et Lebesgue publiés par Dugac [1976a]. «*Baire,* écrit Lebesgue*, a utilisé ces procédés avec plus de continuité et avec plus de bonheur que nul ne l'avait fait avant lui. Il a ainsi appelé l'attention sur ces procédés qui, avec lui, ont commencé à devenir conscients, à constituer par suite un instrument catalogué auquel on sait qu'on pourra avoir recours dans telle ou telle circonstance*» [1932, p. 87]. Une analyse systématique de la façon dont Baire utilise dans sa thèse ces «procédés» issus de la théorie des ensembles est présentée dans [Dugac 1978].

[21] Ce parti pris aboutit à un exposé des chapitres correspondants — un, deux et quatre — de sa thèse, à peu près fidèle dans le contenu mais totalement réorganisé. Les chapitres trois et cinq, consacrés respectivement à la définition et à l'étude des classes de fonctions de Baire et à un problème d'intégration, ne se retrouvent pour ainsi dire pas dans le livre.

de fonctions continues, deux approches différentes du problème auquel il s'intéresse. Le premier est un exemple classique fourni par une série trigonométrique convergente dont la somme est discontinue ; pour le second, Baire se donne *a priori* une fonction discontinue $f(x)$ et cherche à définir une suite de fonctions continues dont la limite pour chaque valeur x_0 de x est $f(x_0)$. Il insiste alors sur la différence des deux points de vue et sur les deux notions de fonction qu'ils sous-tendent. Dans le second exemple il n'impose en effet aucune restriction à la notion de fonction :

«*On s'est attaché seulement à ce que les fonctions que l'on considère soient définies pour chaque valeur de x, le procédé de définition pouvant être choisi d'une manière arbitraire*»[22] [1905, p. 5].

Usant de cette dernière démarche, il débute la recherche de fonctions, limites de fonctions continues, dont les ensembles de points de discontinuité soient «*de plus en plus compliqués*». Dans une partie qu'il intitule «*Notions sur les ensembles de points et applications*», il définit, pour les ensembles de points d'un segment de droite, les ensembles dérivés d'ordre 1, puis 2, puis ν quelque soit l'entier ν, et enfin d'ordre ω (l'ensemble des points communs à tous les dérivés d'ordre ν quel que soit ν). Chaque définition est suivie de son «application», Baire démontrant par récurrence qu'une fonction, dont l'ensemble des points de discontinuité est tel qu'un dérivé d'ordre donné est composé d'un nombre fini de points, est limite de fonctions continues ; il a pris soin, au préalable, de construire des ensembles de points possédant des ensembles dérivés (non vides) d'ordre de plus en plus grand. La récurrence est établie grâce à un théorème énonçant que «$f(x)$ *étant une fonction définie sur le segment AB, s'il existe un nombre fini de points tels que, dans une portion quelconque de AB ne contenant aucun de ces points, f est limite de fonctions continues, la fonction est aussi limite de fonctions continues sur tout le segment AB*» [1905, p. 12].

Cette extension successive des résultats sur les limites de fonctions continues, fondés sur les ensembles dérivés, se poursuit, Baire généralisant à cet effet la notion d'ensemble dérivé d'ordre α à tout nombre α des classes I et II de Cantor (entiers naturels et «ordinaux dénombrables»).

[22] Baire a illustré cette différence de points de vue dans son article de l'*Encyclopédie* en présentant une classification des différentes définitions de la mesure des ensembles [1909, p. 523–526]. Nous y revenons à la fin de cette deuxième partie à propos des *Leçons* de Lebesgue.

Il montre, là encore, qu'il existe effectivement des ensembles de points possédant de tels dérivés, des fonctions discontinues qui admettent de tels ensembles comme ensemble des points de discontinuité et qu'elles sont limites de fonctions continues. Cela suppose l'acquisition de nouvelles notions : celle de nombres ordinaux transfinis, donc d'ensembles bien ordonnés, et d'un nouveau procédé de récurrence adapté aux nombres transfinis.

Baire s'y emploie dans un chapitre spécifique. Il commence par préciser la notion de nombre transfini déjà abordée implicitement avec les ensembles dérivés d'ordre ω du premier chapitre. Il présente à cet effet des exemples de suites de points ou d'entiers où cette notion «s'impose». Passant alors à l'étude des ensembles ordonnés, puis bien ordonnés, il définit dans le cadre des ensembles bien ordonnés dénombrables — seul cadre dont il ait besoin pour ses recherches sur les fonctions discontinues — les nombres transfinis de classe I et II pour lesquels il indique le sens du nouveau procédé de récurrence dont il a besoin.

C'est dans un autre cadre, qui nécessite le recours à des notions supplémentaires de la théorie cantorienne, que Baire poursuit la résolution du même problème : il démontre qu'une fonction égale à 0 en tous les points d'un intervalle sauf aux points d'un ensemble parfait (donc égal à son dérivé) non dense où elle est égale à 1, est limite de fonctions continues. Il a besoin pour cela des résultats classiques sur les ensembles linéaires parfaits non denses dans tout intervalle qu'il expose avec toute une série d'exemples ; le théorème n'en est alors, selon le terme de Baire, qu'une «*application*». Baire, s'intéressant aux ensembles linéaires quelconques, présente ensuite en quelques pages une étude générale des ensembles fermés et énonce, sans le citer comme tel, le théorème de Cantor-Bendixson.

Là s'arrête, pour l'essentiel, l'exposé des résultats de la théorie cantorienne des ensembles. Dans les deux derniers chapitres, Baire introduit en effet des développements personnels sur les notions de continuité et de discontinuité des fonctions les plus générales et sur les ensembles de points.

Cet exposé répond pleinement aux objectifs exprimés dans la préface. «*Se plaçant sur un terrain solide*», celui de l'infini dénombrable — le seul dont il ait besoin — et des ensembles linéaires, Baire présente une version de la théorie cantorienne «*éclaircie au moyen d'exemples concrets*» qu'on peut effectivement construire, «*présentée d'une manière en quelque sorte visible*», dont «*l'utilité*» résulte de l'application immédiate qu'il en fait dans le cours de son exposé[23]. De ce fait, il adopte une démarche radicalement différente de celle de Cantor qui cherche à dégager sa généralisation du concept de nombre de ses premières considérations sur les ensembles de points et ne privilégie d'aucune façon l'infini dénombrable dans son étude du transfini (voir [Dauben 1979, chap. 5 et 8]).

Ce parti pris est significatif de la façon même dont Baire appréhende la théorie des ensembles. Il s'en explique en 1905 dans une lettre à Borel où il évoque la «*corvée assommante*» que représente l'article sur les ensembles qu'il doit écrire pour la version française de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques* qu'édite Molk[24] :

«*En écrivant mes* Leçons sur les fonctions discontinues*, j'avais les coudées franches, j'exposais de la manière qui me paraissait la plus claire les théories dont j'avais l'intention de me servir. Je ne suis plus ici dans les mêmes conditions, je n'ai plus le droit de faire dévier la pensée de G. Cantor. Il me faut bon gré, mal gré, parler de l'addition, de la multiplication des types ordinaux, etc., choses dont je ne connais pas la moindre application. Je ne peux tout de même pas en inventer*» [*Lettres*, p. 83].

Il est intéressant, en écho à cette lettre, de relever dans les premiers chapitres des *Leçons* les «déviations» explicitement énoncées. La plus importante concerne l'exposition originale des «*conventions à l'aide desquelles on désigne les premiers nombres transfinis*» et donne lieu à une note [1905, p. 44]. Baire y signale qu'il s'éloigne du mode d'exposition de

---

[23] Ces citations sont extraites de la préface. Les caractéristiques qu'elles traduisent sont soulignées par P. Boutroux dans une critique du livre de Baire où il signale : «*Par une ingénieuse méthode, M. Baire nous montre concrètement que l'on peut former des ensembles parfaits de points qui sont non denses dans tout intervalle d'un segment donné. Il nous fait "voir" de plus comment sont constitués ces ensembles*» [1905, p. 250].

[24] A l'initiative de Klein, les académies des sciences de Göttingen, Leipzig, Münich et Vienne publient à partir de la fin des années 1890 une encyclopédie des sciences mathématiques en plusieurs volumes. Au début du siècle, Jules Molk est chargé de la réalisation de l'édition française de cette encyclopédie qui doit être constituée des traductions des articles originaux actualisés par des mathématiciens français. A ce titre, il demande à Baire la version française de l'exposé de Schoenflies sur la théorie des ensembles paru dans le tome premier «Arithmétique». Une note de bas de page [Baire 1909, p. 488] souligne l'originalité de l'exposé français par rapport à l'exposé allemand de Schoenflies.

Cantor qui s'appuie sur la définition de certaines opérations effectuées sur les nombres ordinaux, dans la mesure où — «*sans méconnaître l'intérêt de cette théorie*» — il n'a pas à en faire usage, les nombres transfinis n'intervenant dans ses applications que par leurs propriétés d'ordre relatif.

Les derniers chapitres des *Leçons* sont consacrés à établir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction discontinue soit limite de fonctions continues. Grâce aux études précédentes sur les ensembles de points, Baire étudie le rôle de la distribution des points de discontinuité dans les propriétés des fonctions les plus générales et définit, pour cela, la notion de fonction ponctuellement discontinue (continue sur un ensemble dense de points) ainsi qu'une notion nouvelle, celle d'ensemble de première catégorie par rapport à un ensemble parfait (réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est non dense dans cet ensemble parfait)[25].

A l'aide des ensembles de première catégorie, Baire démontre alors que la condition nécessaire pour qu'une fonction soit limite de fonctions continues est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. Ayant ramené le problème de la construction d'une suite de fonctions continues d'une variable à celui de la recherche d'une fonction de deux variables répondant à certaines conditions de continuité, il montre que c'est également une condition suffisante dans le cas d'une fonction prenant les valeurs 0 ou 1 sur un segment de droite. Le raisonnement employé fait à nouveau intervenir une énumération transfinie, mais dénombrable, liée aux dérivés de tous les ordres de l'ensemble des points de discontinuité. La généralisation des notions précédentes aux fonctions de plusieurs variables lui permet d'obtenir le résultat final : la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction quelconque finie ou infinie soit limite de fonctions continues est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.

Ce bref descriptif[26] de la démarche de Baire veut souligner ce qui est ici essentiel, l'articulation nécessaire de la théorie des ensembles et de la

[25] A propos des notions de fonctions ponctuellement (et totalement) discontinues, de leur histoire et de l'apport spécifique de Baire, comme de la notion d'ensemble de première catégorie qui aura un grand avenir en topologie sous le nom d'ensemble maigre, voir [Dugac 1976a, p. 315-321].

[26] Pour une analyse technique précise des contenus de ces deux derniers chapitres, voir [Dugac 1978, p. 132–140].

théorie des fonctions dans l'élaboration et la légitimation de son théorème. Baire le reconnait clairement dans la conclusion de sa thèse, lorsqu'il écrit :

«*La théorie des ensembles de points joue un rôle important dans ces méthodes ; on peut même dire, d'une manière générale, que dans l'ordre d'idées où nous nous sommes placés, tout problème relatif à la théorie des fonctions conduit à certaines questions relatives à la théorie des ensembles ; et c'est dans la mesure où ces dernières questions sont avancées ou peuvent l'être qu'il est possible de résoudre plus ou moins complètement le problème donné*» [1899a, p. 121].

Cela fait de Baire, comme d'ailleurs de Borel dans son propre volume, non seulement un utilisateur original mais encore un créateur en théorie des ensembles.

Les* Notes *de Borel et Lebesgue : définition, existence et construction

Dans le cours même de ses *Leçons*, en présentant la théorie des ensembles dont il a besoin, Baire a pris quelques distances par rapport aux publications de Cantor sur le transfini qui, «*présenté d'une certaine manière, paraît entouré d'un caractère un peu mystérieux*» [1905, p. VII]. C'est dans leurs «*Notes*» placées en fin d'ouvrage, spécifiquement consacrées aux notions de nombres ou d'ensembles de nombres, que Borel et Lebesgue vont à leur tour se démarquer de la version cantorienne des nombres transfinis. Mettant en cause la possibilité de concevoir et de construire une infinité transfinie au delà du dénombrable — dénombrable qui a dans leurs travaux, tout comme chez Baire, un statut tout à fait privilégié — Borel et Lebesgue expriment leurs positions sur les questions d'existence et de définition qui lui sont liées[27].

Dans la première note consacrée à la notion de puissance [1898, p. 102–110], Borel écrit qu'à la différence de Cantor il ne séparera jamais la notion abstraite de puissance de la notion plus concrète d'ensemble et ne cherchera pas à concevoir la puissance en soi, indépendamment de tout ensemble possédant cette puissance. Quant à la formation d'ensembles ayant des puissances de plus en plus grandes il s'interroge, moins sur

[27] Leurs réserves sont longuement étudiées, à propos du débat des années 1905–1907 sur l'axiome du choix, par Cassinet et Guillemot [1983]. Je ne veux ici qu'indiquer brièvement les versions personnelles de certaines notions que ces trois auteurs ont présentées dans leurs livres et qui ont fait connaître la théorie des ensembles en France au début du siècle. Je signale toutefois à propos de Zermelo et l'infini plusieurs lettres de Baire à Borel de la fin de 1904 et du début de 1905 [Baire *Lettres*].

la possibilité de «définir» logiquement de tels ensembles comme le fait Cantor, que sur celle de les «concevoir» dans la mesure où cela fait intervenir une infinité non dénombrable de conditions. Jugeant que seuls les ensembles de points et les fonctions qui peuvent être définis par une infinité dénombrable de conditions peuvent être actuellement considérés avec profit, il met en doute, sinon l'intérêt théorique, du moins l'utilité pratique des recherches sur les puissances en général.

Dans la deuxième note [1898, p. 111–122] Borel met en question la construction que Cantor fait d'un ensemble de puissance supérieure à la deuxième ; il le fait dans le contexte particulier d'ensembles de fonctions croissantes. Il expose tout d'abord un théorème de P. Du Bois-Reymond[28] qui lui permet de construire, grâce au procédé diagonal et «*sans faire appel à l'intuition du continu*», un ensemble qui soit non dénombrable, à savoir un ensemble de fonctions constituant une échelle de types croissants[29]. Il met alors en évidence la nécessité logique d'étendre le sens du mot «*indéfiniment*» («*aussi souvent qu'il y a de nombres entiers*»), et d'introduire le nouveau mot «*transfiniment*» («*aussi souvent qu'il y a d'éléments dans un ensemble de deuxième puissance*»), qui correspond au procédé employé pour la construction de l'ensemble. L'application «*transfinie*» du deuxième principe dont se sert Cantor dans sa construction [1883, p. 385–399] ne donne donc que des nombres de deuxième classe et ne permet jamais d'obtenir un ensemble de nombres de troisième puissance. Borel conclut en remarquant qu'«*on ne peut nier que actuellement, l'expression transfiniment n'ait encore pour nous un sens moins précis que l'expression indéfiniment, de sorte que nos connaissances sur les puissances diverses n'excèdent guère la remarque suivante : il y a des ensembles dénombrables et des ensembles non dénombrables, cette dernière notion étant surtout négative*» [1898, p. 122]. Il exprimera cette réserve, avec plus de force encore quelques années plus tard, déclarant alors que cette notion d'ensemble non dénombrable est purement négative [Borel 1908, p. 15].

[28] L'énoncé que donne Borel du théorème de Du Bois-Reymond est le suivant : «*Étant donnée une suite dénombrable quelconque* (φ) *de fonctions croissantes, on peut trouver effectivement une fonction croissante* $\psi(x)$, *telle que l'on ait, quel que soit* m, $\psi(x) > \varphi_m(x)$» [1898, p. 113].

[29] Cette notion est très utilisée dans les recherches nombreuses sur les fonctions croissantes dans ces années, en particulier celles de Borel.

Lebesgue, à son tour, explicite le même type de réserves dans ses *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* [1904], s'expliquant sur le statut des définitions des objets mathématiques. Dans une «*Note sur les ensembles de nombres*» de six pages qui conclut son volume[30], il présente les notions dont il se sert dans les premiers chapitres qui sont consacrés à l'examen des notions d'intégrales et de mesure des ensembles antérieures à la sienne ; il s'agit, là encore, de celles d'ensembles dérivés, dénombrables, denses et de puissance du continu. Comme Baire, il introduit, en partant d'un exemple concret de procédé de construction des dérivés successifs d'un ensemble, les «*symboles*» $\omega, \omega + 1, \ldots$ qu'il appelle nombres transfinis. Une note de bas de page signale que «*M. Cantor considère d'autres nombres transfinis que ceux dont il est question ici mais qui ne sont pas utiles dans l'étude des ensemble dérivés*»[31] [1904, p. 131]. Il procède après, avec beaucoup de prudence et de conditionnel, à la présentation des nombres transfinis de la deuxième espèce. Lebesgue termine sa note par une démonstration dont Borel a fait grand cas, à juste titre, la démonstration sans recours au transfini de ce qu'un ensemble fermé est la somme d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble parfait.

Dans la préface à la deuxième édition de ses *Leçons* en 1928, Lebesgue relève cette «*timidité que j'avais à parler des nombres transfinis*» dont on peut trouver une explication dans une note de bas de page [1904, p. 133] : il n'est pas possible de donner la loi de formation des ensembles dont les nombres transfinis de la deuxième espèce seraient les indices. On retrouve ici les réserves de Borel sur la définition d'ensembles ayant des puissances de plus en plus grandes, réserves qu'il développe dans la troisième note de ses *Leçons* consacrée à la notion de fonction en général.

J'insisterai ici sur cette question du statut de la définition des objets mathématiques, du rapport entre l'existence et la définition ou

---

30 Il est essentiel ici de consulter l'édition de 1904 des *Leçons*, Lebesgue l'ayant profondément modifiée pour la seconde édition de 1928. La note, dont le titre est devenu «*Note sur les nombres tranfinis*», comporte alors plus de 40 pages, le livre entier s'étant épaissi de plus de 200 pages.

31 Lebesgue — comme d'ailleurs Baire dans ses propres *Leçons* — ne mentionne pas le parallélisme entre la construction qu'il donne de ces symboles et celle que Cantor présente dans les premiers articles des *Acta mathematica*, avant «Les fondements d'une théorie générale des ensembles». Seule est manifeste la différence radicale d'avec la théorie des nombres transfinis que Cantor développe dans ses mémoires de 1895 et 1897. Baire expose cependant les deux versions de Cantor dans son article de l'*Encyclopédie*.

la construction qu'on peut en donner, question caractéristique du débat mathématique de ce début du XX^{e} siècle. Lebesgue l'a déjà abordée dans un des chapitres de son livre (chapitre 7 : «*les fonctions sommables*»), à propos des ensembles et des fonctions mesurables. Dans deux phrases, qu'il supprime vingt ans plus tard dans la deuxième édition, il indique qu'il ne considére que des ensembles et des fonctions mesurables avec la mesure de Borel, et il introduit la distinction entre l'existence, déduite logiquement, d'ensembles non mesurables et la possibilité de les définir, c'est-à-dire les «*nommer*», donc de «*prononcer un nombre fini de mots* [*les*] *caractérisant*» [Lebesgue 1904, p. 108 et 110].

Au début de ce chapitre, Lebesgue présente des considérations d'une autre nature sur les définitions mathématiques, explicitant deux «*classes*» différentes de définitions, les «*définitions constructives*» et les «*définitions descriptives*» [Lebesgue 1904, p. 99]. Ces remarques, que l'on peut rapprocher de celles que Baire développe dans le premier chapitre de son livre[32] dépassent le cadre strict de la théorie des ensembles.

Lebesgue propose une démarche nouvelle pour la définition d'une intégrale, attachant à toute fonction bornée définie sur un intervalle un nombre qu'on appelle l'intégrale de la fonction sur cet intervalle et qui satisfait à six conditions qu'il énonce. Il s'explique sur la nouveauté du procédé par lequel «*on énonce des propriétés caractéristiques de l'être qu'on veut définir*». Même si, ajoute-t-il, «*ce sont les définitions constructives qui sont le plus souvent employées en analyse*», il justifie en note de bas de page «*l'emploi de ces définitions descriptives* [*qui*] *est indispensable pour les premiers termes d'une science quand on veut construire cette science d'une façon purement logique et abstraite*». Lebesgue, comme d'ailleurs Borel dans sa définition d'ensemble mesurable [Borel 1898, p. 48], se réfère alors à J. Drach qui, dans un autre cadre que celui de la théorie des fonctions — le cadre de l'algèbre où il est alors le seul ou presque à travailler avec cet esprit —, a introduit ces méthodes de définition que Lebesgue n'appelle pas encore axiomatiques. Ce procédé est légitimé dans la suite du chapitre dans la mesure où Lebesgue donne une définition constructive — qu'il appelle analytique dans la première édition de son livre — de l'intégrale vérifiant les conditions de la définition

[32] Voir *supra* note 22.

descriptive. Il est utile de remarquer que cette question des définitions axiomatiques, de leur arbitraire, du lien à l'intuition, ne se posent alors en France, contrairement à d'autres pays, que dans ce cadre des nouvelles recherches sur la théorie des fonctions[33].

3. LE MILIEU MATHÉMATIQUE FRANÇAIS ET LA THÉORIE DES ENSEMBLES

L'évaluation du statut de la théorie des ensembles dans les mathématiques françaises autour de 1900, et non plus seulement dans le cadre des travaux d'exception des quelques figures emblématiques déjà considérées, suppose un élargissement de notre étude à la production du milieu mathématique tout entier. Grâce à ce changement d'échelle nous allons estimer, tout à la fois, l'ampleur et la nature de la prise en compte de la théorie des ensembles dans les différents courants de recherche développés en France.

Les thèses : la théorie à la mode

Le corpus des thèses de mathématiques soutenues à la Sorbonne[34], révèle de façon manifeste la montée en puissance du recours à la théorie des ensembles et des thèmes autour desquels elle se structure.

Lorsqu'en 1887, dans sa thèse sur les lignes singulières des fonctions analytiques, Painlevé s'appuie sur les travaux de Cantor pour définir sa notion de ligne et développer sa classification des ensembles de points singuliers, «*l'extrême rigueur avec laquelle sont traités des points sur lesquels on avait jusqu'ici passé*» est tout à fait exceptionnelle[35]. L'utilisation des

[33] Dans son mémoire sur les fondements de la théorie des séries divergentes sommables [1896], Borel fait écho à ce type de questions et fait montre d'une prudence que partagera Lebesgue. «*J'espère,* écrit-il*, que les lecteurs voudront bien ne pas se choquer des définitions du début, au premier abord un peu arbitraires ; s'ils ont la patience de terminer la lecture de ce mémoire, ils se rendront compte que cet arbitraire se réduira à rien ou à bien peu de chose*» [1896, p. 418]. On pourrait croire qu'ici Borel se défend encore des critiques qu'Hermite avait porté sur les travaux de Cantor (voir *supra* note 17).

[34] Pour une étude plus complète voir [Gispert 1991, p. 78–87].

[35] Le caractère d'exception de cette démarche, dont Picard souligne ici la nature dans son rapport sur la thèse de Painlevé, semble être renforcé par le fait que Painlevé ne reviendra explicitement sur cette partie préalable et spécifique de ses recherches dans aucune de ses très nombreuses notes aux *Comptes rendus* jusqu'en 1900 ; il n'en traitera

notions de Cantor est encore exceptionnelle en 1892 lorsque Hadamard, dans les premières pages de sa thèse sur les fonctions données par leur développement de Taylor, se réfère à la notion d'ensemble dérivé de Cantor pour définir la limite supérieure d'une suite infinie. Toujours exceptionnelle en 1895 lorsque Borel introduit dans sa thèse ce qui deviendra son concept d'ensemble de mesure nulle pour l'étude des prolongements analytiques[36], l'utilisation de la théorie des ensembles tend par contre à se banaliser à partir de la thèse de Baire.

Entre 1900 et 1910, plus de dix thèses — soit la moitié des thèses d'analyse ou, plus globalement, le quart de l'ensemble des thèses de mathématiques soutenues dans cette décennie — ont explicitement recours à la théorie des ensembles. Citons la thèse de Servant [1899] sur les séries divergentes, de Lebesgue [1902] sur l'intégration, de Boutroux [1904] sur les fonctions entières, de Zoretti [1905] sur les fonctions analytiques uniformes possédant un ensemble parfait discontinu de points singuliers, de Pompeiu [1905] sur la continuité des fonctions de variable complexe, de Fréchet [1906] sur le calcul fonctionnel, de Fatou [1906] sur les séries trigonométriques et les séries de Taylor, de Montel [1907] sur les suites infinies de fonctions, de Denjoy [1910] sur les produits canoniques d'ordre infini, de Sire [1911] sur les fonctions entières de deux variables. Ainsi, dans le cadre classique des fonctions de variable complexe et dans le cadre nouvellement réinvesti des fonctions de variable réelle, plusieurs jeunes mathématiciens s'aventurent dans ce genre de considérations «*à la frontière de la mathématique et de la philosophie qui sont aujourd'hui fort à l'honneur*»[37] et ont recours à la théorie des ensembles. Ces jeunes docteurs, presque tous normaliens, ont assisté en seconde année aux cycles annuels de conférences sur la théorie des fonctions que Borel donne à l'École depuis le printemps 1897 à la demande de Jules Tannery sous-directeur des études scientifiques. Ils ont ainsi pu se «familiariser» avec

à nouveau que dans ses leçons de Stockholm à propos des singularités des équations différentielles à points critiques fixes.

[36] Contrairement à Painlevé, il fera mention de ce résultat sur les ensembles de points dans une note aux *Comptes rendus* publiée l'année avant sa thèse. Ce sera sa première note [1894].

[37] Il s'agit d'un extrait du rapport de Picard sur la thèse de Baire. Ce rapport — comme l'ensemble des rapports sur les thèses cités dans cet article qui sont conservés aux Archives nationales (série AJ16 5537 à 5539) — est publié dans [Gispert 1991, p. 375].

des recherches récentes et importantes dont la théorie des ensembles. La parution, parallèlement, des nombreux volumes de la collection de Borel[38], impose sur le devant de la scène normalienne, et donc de la scène mathématique française, ce style de sujet de recherche. La théorie moderne des fonctions et son outil privilégié, la théorie des ensembles que lui associent les auteurs des *Monographies*, sont à la mode. Il en est de même d'Émile Borel, leur propagateur le plus zélé, dont l'ascension académique est fulgurante. En moins de dix ans il institutionnalise l'enseignement de ce nouveau domaine, le hissant au premier rang des orientations de recherche des jeunes générations. La théorie des ensembles de points, à travers la théorie des fonctions, acquiert ainsi en France, un statut tout à fait privilégié.

Les notes aux* Comptes rendus *: une théorie largement utilisée

L'étude des tomes des *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences* confirme l'importance de ce mouvement à l'échelle du milieu mathématique dans son ensemble. Ce journal contient environ le tiers des articles que publient les auteurs français[39] et offre, ainsi, un panorama de la recherche mathématique où se chevauchent nécessairement la nouveauté et la tradition. Il devient alors possible d'affiner l'analyse — tant quantitative que conceptuelle — de l'insertion de recherches d'avant-garde dans l'activité classique d'un milieu français attaché avant tout à «*avancer la solution de tant de problèmes depuis longtemps posés, ou que pose chaque jour le développement régulier des théories aujourd'hui classiques tant en Analyse pure qu'en Physique mathématique*» [Picard 1904, p. 183].

C'est sous une triple empreinte que se développent à partir du milieu des années 1890 des recherches examinant sous un nouvel angle la question des prolongements analytiques, adoptant de nouveaux modes de représentation des transcendantes dans des ensembles de points du plan totalement originaux tels l'étoile de Mittag-Leffler. Il y a tout d'abord l'empreinte d'Hadamard et de ses recherches sur les fonctions entières et

[38] Ces cours sont rédigés par des élèves de l'École normale dont plusieurs, tels Zoretti, Boutroux, Fréchet, Denjoy, deviendront à leur tour auteurs de la collection.

[39] Il s'agit du nombre d'articles ou de notes, indépendamment de leur importance mathématique ou de leur longueur. Pour toutes les données relatives à la production du milieu mathématique qui sont citées dans cet article, voir *La France mathématique* [Gispert 1991, p. 170–176].

les développements en série de Taylor qui firent l'objet, entre autres, d'un mémoire couronné par l'Académie [1892] ; puis celle de Painlevé et de son étude des singularités des équations différentielles du premier ordre et de nouvelles transcendantes ; enfin, celle de Borel avec, en premier lieu, l'étude du prolongement analytique d'une fonction au-delà d'une ligne singulière essentielle fermée et son nouvel outil les ensembles de mesure nulle, puis ses travaux sur les séries divergentes sommables — pour lesquels il obtient à son tour le grand prix des sciences mathématiques de l'Académie [1899b] — et enfin ceux sur les types de croissance des fonctions.

A ce nouveau genre de questions qui, pour certaines, ont donc été retenues par l'Académie comme sujet de son grand prix et font ainsi partie des intérêts «officiels» du milieu, sont consacrés une quarantaine d'articles entre 1895 et 1899. La plupart des notes se renvoient les unes aux autres et ont un réseau commun de références qui englobe tout autant les mémoires de Hadamard, Painlevé et Borel que les travaux de Picard ou de Mittag-Leffler sur le prolongement des fonctions analytiques ; certaines utilisent explicitement la théorie des ensembles, d'autres non. Elles représentent un quart des notes d'analyse, soit une partie non négligeable de la production publiée dans les *Comptes rendus*, l'analyse étant alors la branche dominante de la production française, tant dans les *Comptes rendus* que dans l'ensemble des journaux de recherche. Parallèlement, quelques notes, où les références aux travaux de Cantor sont essentielles, s'attachent à des questions d'un autre ordre et traitent des fonctions de variable réelle. Toutes sont de Baire dont le profil, parmi la douzaine d'auteurs intéressés aux prolongements analytiques, est totalement atypique.

Après 1900, la part de ces courants de recherche dans les *Comptes rendus* grandit de façon significative. Avec l'intégrale de Lebesgue, un nouvel outil s'adjoint aux précédents, entraînant notamment la réactualisation de «*problèmes qui se posent dans les branches anciennement cultivées de l'analyse*» [Fatou 1906, p. 336], dont l'étude des séries de Fourier et des développements des fonctions en séries de polynômes. Entre 1900 et 1904 l'ensemble des nouvelles recherches représente, avec une cinquantaine de notes, la moitié des notes d'analyse qui paraissent aux *Comptes rendus.* Une vingtaine ont recours au «*langage souple et précis dû à l'introduction systématique de la théorie des ensembles*» pour reprendre l'expression déjà citée de Blumenthal [1906]. Fait remarquable, la majorité d'entre elles sont publiées par d'autres auteurs que Baire, Borel et Lebesgue[40], ce qui n'était pas le cas entre 1895 et 1899.

L'agrandissement du réseau des auteurs confirme les caractéristiques déjà repérées dans les monographies. En premier lieu, tous ceux, ou presque[41], qui publient sur des questions relatives à la théorie moderne des fonctions ont, à un moment ou à un autre de leurs recherches, nécessairement recours à la théorie des ensembles. En second lieu, les notions de nature topologique, d'ensemble infini de puissance dénombrable ou non, de transfini toujours au plus dénombrable sont utilisées exclusivement comme outils pour l'étude de sous-ensembles infinis de points intervenant dans les études qu'ils mènent sur les fonctions.

Dans les années suivantes, par contre, à côté de l'aspect qui reste dominant de théorie-outil, une certaine autonomisation des recherches se dessine. Une nouvelle génération apparaît et avec elle Fréchet (10 notes) et Denjoy (11 notes) qui, entre 1905 et 1909, prennent le pas sur Borel et Lebesgue. Plusieurs contributions présentent alors des résultats spécifiques sur les ensembles de points, ensembles de droites ou ensembles abstraits, sans qu'ils soient insérés dans des recherches de théorie des fonctions. Au total, le nombre des notes — plus d'une trentaine — ayant recours explicitement à des notions de théorie des ensembles augmente encore.

Globalement, dans la première décennie du XX^e^ siècle, la théorie des ensembles est présente dans les notes de plus d'une vingtaine d'auteurs. Ce nombre prend une singulière importance lorsqu'on le compare à celui des auteurs français (une cinquantaine) qui publient régulièrement dans des revues de recherche durant ces années. La part du domaine qu'ils ont constitué est également remarquable. En une quinzaine d'années elle a atteint 17 % de l'ensemble des notes publiées dans les *Comptes rendus*, soit la moitié des notes relevant alors de l'analyse.

---

[40] Borel et Lebesgue, avec 17 notes consacrées à la théorie des fonctions en cinq ans, sont dans ce domaine les auteurs les plus prolifiques des *Comptes rendus*. Dans la période suivante (1905–1909), ils ne publieront chacun que deux ou trois notes relatives à la théorie des fonctions.

[41] Cette restriction peut s'expliquer par le style des notes aux *Comptes rendus* où tout, loin de là, n'est pas explicité ni démontré. Notons cependant le cas de Desaint, jeune auteur de nombreuses notes sur la théorie des fonctions et leurs points singuliers, encouragé par Poincaré, qui développe ses recherches avec d'autres moyens que ceux de la théorie des ensembles.

Il faut néanmoins relever l'absence ou la discrétion de la contribution effective de certains mathématiciens. Darboux, mais surtout Picard, Poincaré, Goursat, Appell qui publient massivement en analyse, n'investissent pas ces nouveaux champs des mathématiques et abandonnent à d'autres, la jeune génération essentiellement, les nouveaux outils de la théorie des ensembles. Doit-on y voir la manifestation d'un éventuel clivage dans le milieu mathématique français ?

Des réserves et des mises en garde

Plusieurs rapports de thèses, que Picard eut à rédiger dans cette période, témoignent des tensions et des débats eu égard aux évolutions contemporaines des mathématiques provoquées, en partie, par l'utilisation de la théorie cantorienne. Tout en reconnaissant l'excellence des travaux d'Hadamard, de Baire ou de Lebesgue, Picard souligne les dangers possibles de ces recherches d'un nouveau genre : une trop grande généralité, un caractère spéculatif, abstrait, l'arbitraire et le nombre des nouvelles définitions nécessaires.

Ainsi relève-t-il dans la thèse d'Hadamard «*un résultat plus théorique que pratique, qui n'en est pas moins digne de remarque*», «*regrette qu'une notion, au fond très simple, ait été voilée sous un appareil symbolique* [...] *qui complique inutilement la rédaction*» et conclut par la remarque que «*le talent dépensé est supérieur* [...] *aux résultats obtenus, la faute en* [*étant*] *imputable à la question elle-même plutôt qu'à l'auteur*» [Gispert 1991, p. 352]. A propos de la thèse de Lebesgue, il constate : «*Monsieur Lebesgue* [...] *n'est toutefois pas un intransigeant. On ne trouve pas chez lui cette méfiance de l'intuition qui est devenue une manie chez certains de nos contemporains. Les considérations subtiles, souvent nécessaires dans ce genre de recherches, sont pour M. Lebesgue un moyen et non un but*». Picard se félicite ainsi de ce que «*les deux derniers chapitres traitent de problèmes particuliers qui reposent un peu des généralités dont nous venons de donner une analyse rapide*» [Gispert 1991, p. 385].

Il exprime à nouveau ces craintes dans l'analyse qu'il fait des *Leçons* de Lebesgue de 1904. «*Il n'est pas rare qu'on y gagne en se plaçant d'un point de vue plus général*», admet-il, mais il ajoute aussitôt : «*il ne faut pas que cela devienne une excuse pour les amateurs de théorèmes dont la généralité* *nuit à l'intérêt*» [42] [1904, p. 183]. Si Picard concède que «*le mot* inutile [43] *n'a guère de sens, quand il s'agit des abstractions mathématiques*» et «*aime à dire, avec Lagrange, que "tout est bon en mathématiques"*», il tient cependant à marquer explicitement la différence avec «*des choses aussi excellentes que la philosophie des mathématiques*» dont il ne faut pas d'excès. C'est ce qu'il fait savoir à Baire dans la conclusion louangeuse du rapport sur sa thèse, lui conseillant d'aborder d'autres sujets de recherches [44].

Les mises en garde de Picard sont partagées par les autres mathématiciens de sa génération formés à l'école de Hermite. Ils ne manifestent pas pour autant d'attitude délibérément hostile vis-à-vis des travaux de la jeune génération. Parmi les «patrons» de la discipline, Hermite, seul, alors âgé de près de quatre-vingts ans, voulut, par exemple, s'opposer à l'insertion d'une des notes de Lebesgue dans les *Comptes rendus* [45]. Darboux, Picard, Poincaré, auxquels il faut ajouter les autres académiciens Jordan, Painlevé et Appell ont tous présenté aux *Comptes rendus* les différentes notes de leurs jeunes collègues, soulignant parfois à la suite du texte l'intérêt de telle ou telle communication audacieuse pour la résolution de questions en attente [46]. Picard, en particulier, n'est pas étranger au mouvement qu'animent les jeunes mathématiciens, dans la mesure où, au début comme à la fin des années 1890, il joue un rôle déterminant dans l'impulsion des nouvelles recherches sur la résolution d'équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur et le développement

[42] Lebesgue, «*qui termine par quelques applications* [*et*] *a le souci des problèmes particuliers*» [Picard 1904], n'est pas visé par cette mise en garde. Baire, par contre, réagira très vivement dans une lettre à Borel à cette critique de Picard — «*le littéraire égaré dans la science que j'ai pris autrefois comme rapporteur de ma thèse*» écrit-il —, contestant le fait «*que la généralité puisse enlever de l'intérêt à un théorème*» [*Lettres*, p. 74].

[43] Souligné dans le texte original.

[44] Il est amusant de noter, même si les contextes sont profondément différents, que les conseils que Picard prodigue ici à Baire ne sont pas sans rappeler ceux que Darboux dût entendre en son temps.

[45] Lebesgue raconte cet incident daté de 1899 dans l'introduction à sa *Notice sur ses travaux* [1922b, p. 99].

[46] Le cas de Poincaré a souvent été considéré à partir d'interprétations de l'intervention sur le cantorisme qu'il fit au congrès international des mathématiciens de Rome en 1908. Je renvoie aux articles de P. Dugac [1984] et J. Gray [1991] pour l'examen détaillé de ses positions ; je voudrais juste insister ici sur le fait qu'il n'a manifestement fait aucun barrage, au contraire, à ces recherches dans le milieu français.

des fonctions analytiques. De sa familiarité avec ces recherches, il tire la conviction que la théorie des ensembles peut être un outil efficace des mathématiques[47].

Aussi, je ne retiendrai pas l'image d'un milieu mathématique français coupé en deux, s'affrontant sur l'opportunité d'investir la théorie des ensembles dans l'activité mathématique ; celle-ci est acquise. Les réserves soulevées portent plutôt sur la légitimité des problèmes auxquels on l'applique et des objectifs poursuivis. L'objet des mises en garde est, ainsi, moins la théorie des ensembles elle-même que certaines des orientations de la théorie «moderne» des fonctions.

Un point de vue français ? assumer traditions et novation

Quoique profondément nouvelle, cette théorie des fonctions s'insère pourtant, comme l'a montré l'étude des *Comptes rendus*, dans l'activité mathématique française de la fin du siècle et dans le cadre spécifique du développement de l'analyse en France[48]. Les jeunes mathématiciens qui s'y consacrent ne se mettent en aucune façon en rupture de ban avec leur milieu. Lebesgue le souligne, quelques années plus tard, rappelant qu'il «*croyait que pour faire œuvre utile il faut marcher dans l'une des voies ouvertes par les travaux antérieurs ;* [...] *on risquait trop, en agissant autrement, de créer une science sans rapport avec le reste des mathématiques*»[49].

Assumant l'héritage de leurs aînés, au nombre desquels tant de brillants analystes, ils doivent alors négocier les contradictions qui peuvent se révéler entre les nouvelles exigences de leurs recherches et les canons de l'activité classique du milieu que nous avons pu repérer dans les mises en garde de Picard ou même, en son temps, dans la réponse que Hermite fit à Mittag-Leffler à propos de la traduction des travaux de Cantor.

---

[47] Voir par exemple des conférences qu'il fit à Clark University [Picard 1900].

[48] Voir, à ce propos, l'étude de la montée en puissance de l'analyse dans la production mathématique française des années 1880 jusqu'à la première guerre dans les chapitres 4 et 5 de *La France mathématique* [Gispert 1991]. Pour une réflexion d'ordre sociologique sur ce moment, voir [Gispert 1994].

[49] Ainsi, comme le remarque Lebesgue dans cette préface à la deuxième édition de ses *Leçons*, «*sur les sept chapitres qu'il avait écrits, il en avait consacré six à l'exposé des recherches antérieures*». «*Ce n'était pas par habileté du propagandiste qui cherche à recruter des adeptes pour la révolution*», ajoute-t-il [Lebesgue 1904/1928, p. x].

Il en résulte une littérature, inédite pour le milieu français, porteuse de questionnements épistémologiques explicites concernant la nature des mathématiques et des objets mathématiques, des relations des mathématiques avec les applications et la réalité. Entre 1900 et 1904, celui-ci consacre presque 10 % de sa production à ce type de questions, pourcentage deux à trois fois plus important que dans les périodes précédentes[50]. On constate ainsi que c'est avec des critères de même nature que leurs aînés que les jeunes analystes vont développer et légitimer leurs nouvelles recherches. En cela aussi les monographies de Borel, Baire et Lebesgue sont exemplaires.

Painlevé, le premier, justifie «*l'esprit et la tendance des mathématiques modernes*», développant l'argumentation selon laquelle les nouvelles orientations sont non seulement nécessaires mais utiles au sens même où l'entendaient ses collègues français dans la tradition de Fourier :

«*Pour bien des observateurs superficiels les mathématiques, à les en croire, seraient devenues une science de curiosité dépourvue de tout objet réel, un jeu d'esprit, dont le seul intérêt serait la difficulté et dont les efforts ne sauraient contribuer d'aucune manière à l'étude rationnelle de l'univers.* [...] *Peut-être les considérations qui vont suivre suffiront-elles à montrer qu'un tel jugement est dénué de profondeur, que le développement actuel des mathématiques est une évolution nécessaire et que l'intelligence la moins abstraite, la plus éprise de réalité, qui chercherait à perfectionner les sciences exactes en vue d'applications importantes ne pourrait guère suivre d'autre voie que celle où on s'est engagé aujourd'hui*» [1895, p. 200].

Borel puis Baire vont à leur tour préciser très concrètement l'utilité, pour la physique, des fonctions auxquelles ils s'intéressent. L'argument de Borel est double. Si ces fonctions n'ont pas été introduites jusqu'ici en physique, où elles peuvent fort bien jouer un rôle considérable, c'est simplement parce qu'elles n'étaient pas connues [1895, p. 277]. De plus, il n'est pas juste de limiter arbitrairement le champ des mathématiques que l'on juge susceptible d'applications [1905c, p. VIII]. Baire, quant à lui, introduit ses *Leçons* par une argumentation visant à la reconnaissance du

[50] Cette composante de l'activité mathématique prend alors quantitativement le pas sur l'algèbre, sur l'arithmétique et la théorie des nombres ou sur la physique mathématique. Il ne saurait être question d'analyser cette littérature dans le cadre de cet article ; je renvoie pour cela à [Gispert 1991, p. 124–136].

discontinu comme objet d'étude mathématique sous couvert de son statut dans la nature :

«*Il est bien permis de remarquer qu'en mécanique le discontinu, tout comme le continu, peut servir dans l'approximation* [...] *et que certaines théories de physique, de chimie, de minéralogie, ne sont pas sans présenter quelque analogie avec le discontinu mathématique. Dans tous les cas, en dépit du vieil adage heureusement démodé, rien ne permet d'affirmer "que la nature ne fait pas de sauts". Dans ces conditions, le devoir du mathématicien n'est-il pas de commencer par étudier,* in abstracto*, les rapports de ces deux notions, continu et discontinu*» [1905, p. VI][51].

Cette insistance, notons-le, n'est pas le fait de la seule génération de Borel, Baire et Lebesgue. Le jeune Fréchet, dans une lettre de 1904 adressée à Volterra, s'inquiètant du choix de son sujet de thèse, écrit :

«*Je ne voudrais pas non plus faire un travail dans le vide, si je puis dire, et je ne vois pourtant pas beaucoup les applications à la physique ou à la géométrie qu'on peut donner du calcul fonctionnel, quoiqu'elles soient certainement nombreuses*»[52].

Ainsi l'élargissement du champ des objets et des méthodes auquel œuvrent les jeunes analystes impliqués dans la nouvelle théorie des fonctions se fait dans un contexte où les notions d'utilité, de liens aux applications — qu'elles soient d'ordre intra-mathématique ou aient en vue d'autres disciplines — jouent un rôle fondamental. Cet aspect de «l'héritage» me semble avoir pesé de façon décisive dans la façon dont Baire, Borel et Lebesgue, et à leur suite le milieu français, appréhendèrent, développèrent et exposèrent la théorie cantorienne, «*militant dans la théorie concrète des ensembles qu'ils développent au point d'en être de nouveaux créateurs*» selon l'expression de Cavaillès [1937, p. 6]. Au-delà de la diversité de leurs approches[53], on peut trouver ici un creuset commun qui explique en partie leurs choix et leurs réticences, entre autres sur

[51] Il est intéressant de noter que les courtes analyses des thèses de Borel et de Baire parues dans la *Revue générale des sciences* sous la signature de L. Autonne, ingénieur des ponts et chaussées et maître de conférences à l'université de Lyon [1895, 1899], en soulignent précisément l'utilité pour la physique mathématique et «*l'interprétation mathématique des phénomènes naturels*».

[52] Cette lettre, datée du 22 décembre 1904, fait partie de la trentaine de lettres de Fréchet à Volterra (1904–1942) qui figurent dans la correspondance inédite de Volterra conservée à l'Accademia dei Lincei (Rome).

la question du transfini. Y a-t-il, pour autant, un point de vue français concernant la théorie des ensembles ? Il ne peut suffire, pour répondre à cette question, d'avoir dégagé des caractéristiques communes dans la prise en compte par les Français de la théorie des ensembles ; il est nécessaire de sortir du cadre national et de situer le volet français de cette histoire dans son contexte général. C'est à quoi sont consacrés, très brièvement, les derniers paragraphes de cet article.

A la naissance même de la théorie des ensembles, dès le début des années 1880, Mittag-Leffler croit pouvoir distinguer des diversités d'ordre national dans l'intérêt que celle-ci devrait susciter. Il écrit en effet à Cantor[54] que, pour ce qui est de l'Allemagne, la partie philosophique de son œuvre fera très grande sensation ; la partie mathématique, elle, ne sera pas comprise. Par contre les analystes français seront intéressés au plus haut point par ses découvertes «*précisément parce qu'ils ont maintenant besoin de telles recherches et parce qu'ils se sont heurtés, dans leurs beaux travaux de la théorie des fonctions, à des difficultés qui ne pourront être surmontées que par vos travaux*». Abandonnant aux Allemands la partie «philosophique» de la théorie cantorienne qui se heurta d'ailleurs à une forte opposition, entre autres, de la part de Kronecker, Mittag-Leffler signale aux Français un outil dont il perçoit, avant eux, la nécessité. Le statut de théorie-outil dans les «mathématiques françaises» de la théorie cantorienne est ainsi présent dès l'origine, y compris dans le projet éditorial de Mittag-Leffler.

Différents rapports consacrés dans les années 1900 aux développements de la théorie des ensembles permettent de juger de l'évolution de son statut dans les différents milieux nationaux. Deux rapports demandés par la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* [Schoenflies 1900, 1908] ont donné lieu à des comptes rendus dans le *Bulletin des sciences mathématiques* ([Tannery 1900] et [Zoretti 1911]). Le rapport de 1900 qui compte 250 pages est divisé en trois parties, la théorie générale des ensembles infinis à laquelle il ne consacre qu'une cinquantaine de pages, la théorie des ensembles de points, les applications aux fonctions de variables réelles. Je

[53] Sur «*la vision essentiellement arithmétique*» qu'a Borel des objets de l'analyse, à la différence de Lebesgue dont la vision est d'abord géométrique, voir [Michel 1992, chap. 3 et 4].

[54] Cette lettre, du 10 janvier 1883, est citée par P. Dugac [1976b, p. 153].

n'en retiendrai ici que l'absence totale de mention des applications aux fonctions de variables complexes que Schoenflies ne traitera que dans le rapport de 1908. Étant donné la place de ces dernières dans les travaux des mathématiciens français dans la décennie 1890, il semble qu'on puisse ainsi identifier une première particularité spécifiquement française dans la façon d'investir la théorie des ensembles : l'importance des applications aux fonctions analytiques, donc, d'une certaine façon, de l'ancrage dans les questions classiques de l'analyse du dernier tiers du XIX^e^ siècle. Cette particularité est d'importance dans la mesure où elle en induit une seconde, l'aspect «de masse» du recours et de la contribution des mathématiciens français à la théorie des ensembles sous le couvert de ses applications, qui ne se retrouve pas dans les autres pays.

Le deuxième rapport de Shoenflies s'ouvre sur deux «*chapitres consacrés à des questions purement théoriques*», celles des mathématiciens que Zoretti appelle les «Mengentheoretiker *purs*» [1911, p. 283]. Pas de Français parmi les auteurs cités, mais des auteurs de langue allemande ou italiens. Zoretti signale dans son commentaire ce qui apparaît donc comme une autre particularité propre au milieu français : «*Ces questions ne sont pas de celles qui sont en faveur en France. Il faut sans doute attribuer cela au goût des Français pour tout ce qui est concret*». Opinion qu'il essaye, à tort à mon avis, de tempérer en ajoutant «*qu'il serait cependant hardi d'en conclure trop vite au désintéressement de nos compatriotes pour le côté philosophique de la théorie des ensembles*». Au-delà de la formulation que peut en donner Zoretti, je trouve intéressant de rapprocher son analyse de celle de Cavaillès déjà citée [1937, p. 6]. D'autant que Zoretti, tout comme Cavaillès, souligne la part que les mathématiciens français ont pris à son développement et à son enrichissement et note que les Français «*reprennent un rang honorable dans le chapitre consacré à la théorie générale des ensembles de points*».

Il apparaît bien, ainsi, qu'il y a une dimension spécifiquement française à l'histoire de la théorie des ensembles. Il resterait cependant à étayer cette conclusion par des études du type de celle-ci sur les productions des autres milieux nationaux. L'analyse des contenus menée à l'échelle d'un milieu permet en effet de mieux saisir la dynamique selon laquelle des concepts et des résultats s'affirment ou non dans les mathématiques d'une époque. On ne peut ainsi réduire celles-ci au corpus des travaux d'exception, jugés *a posteriori* comme déterminants, sans avoir du développement d'un domaine une image partielle. C'est par le détour d'une étude globale de la production «normale» de tout un milieu, que l'on peut saisir, beaucoup plus nettement, les particularités éventuelles des cadres nationaux et leurs effets sur la pratique mathématique des individus.

Grâce à ce détour, qui s'appuie sur une étude précédente de la «France mathématique», les contributions personnelles de Baire, Borel et Lebesgue prennent une signification particulière, représentantes effectives d'un fort courant de recherches spécifiques à la France d'abord.

Remerciements

Je suis reconnaissante aux deux rapporteurs des remarques qu'ils ont présentées sur une première version de ce texte ainsi que des références complémentaires qu'ils ont indiquées.

BIBLIOGRAPHIE

AUTONNE (L.)

[1895] Analyse : Borel (Émile), Ancien élève de l'École normale supérieure, Sur quelques points de la théorie des fonctions, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 6 (1895), p. 637.

[1899] Analyse : Baire (René), Professeur au lycée de Bar-le-Duc, Sur les fonctions de variables réelles, *Ibid.*, 10 (1899), p. 402.

BAIRE (R.)

[*Œuvres*] *Œuvres scientifiques*, Paris : Gauthier-Villars, 1990.

[1899a] Sur les fonctions de variables réelles, *Annali di matematica pura ed applicata*, (III) 3 (1899), p. 1–123 ; *Œuvres*, p. 49–170.

[1899b] Sur la théorie des ensembles, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 129 (1899), p. 946–949 ; *Œuvres*, p. 171–173.

[1905] *Leçons sur les fonctions discontinues*, Paris : Gauthier-Villars, 1905

[1909] Théorie des ensembles, exposé d'après l'article allemand de A. Schoenflies, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, t. 1, vol. 1, Paris : Gauthier-Villars, 1909.

[*Lettres*] Lettres de René Baire à Émile Borel (1898-1910), (P. Dugac éd.), *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, (I) 11 (1990), p. 33-120.

BENDIXSON (I.)

[1883] Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points, *Acta mathematica*, 2 (1883), p. 415–429.

BLUMENTHAL (O.)

[1906] Comptes rendus et analyses : Lebesgue (Henri), Leçons sur les fonctions primitives, *Bulletin des sciences mathématiques*, 30 (1906), p. 250–254.

BOREL (E.)

[*Œuvres*] *Œuvres scientifiques*, 4 vol., Paris : CNRS, 1972.

[1894] Sur quelques points de la théorie des fonctions, *C. R. Acad. sci. Paris*, 118 (1894), p. 340–342 ; *Œuvres* I, p. 235–237.

[1895] Sur quelques points de la théorie des fonctions, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, (III) 12 (1895), p. 9–55 ; *Œuvres* I, p. 239–285.

[1896] Fondements de la théorie des séries divergentes sommables, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (V) 2 (1896), p. 103–122 ; *Œuvres* I, p. 417–436.

[1898] *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris : Gauthier Villars, 1898.

[1899a] A propos de l'"infini nouveau", *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, 48 (1899), p. 383–390 ; *Œuvres* IV, p. 2113–2120.

[1899b] Mémoire sur les séries divergentes, *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, (III) 16 (1899), p. 9–131 ; *Œuvres* I, p. 437–565.

[1900a] L'antinomie du transfini, *Rev. philos.*, 49 (1900), p. 378–383 ; *Œuvres* IV, p. 2121–2126.

[1900b] *Leçons sur les fonctions entières*, Paris : Gauthier-Villars, 1900.

[1901] *Leçons sur les séries divergentes*, Paris : Gauthier-Villars, 1901.

[1902] *Leçons sur les séries à termes positifs*, Paris : Gauthier-Villars, 1902.

[1903a] Sur l'approximation les uns par les autres des nombres formant un ensemble dénombrable, *C. R. Acad. sci. Paris*, 137 (1903), p. 297–299 ; *Œuvres* III, p. 1405–1407.

[1903b] Un théorème sur les ensembles mesurables, *C. R. Acad. sci. Paris*, 137 (1903), p. 966–967 ; *Œuvres* III, p. 1247–1248.

[1903c] *Leçons sur les fonctions méromorphes*, Paris : Gauthier-Villars, 1903.

[1903d] Quelques remarques sur les ensembles de droites ou de plans, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 31 (1903), p. 272–275 ; *Œuvres* IV, p. 1989–1992.

[1905a] Sur une propriété des ensembles fermés, *C. R. Acad. sci. Paris*, 140 (1905), p. 298–300 ; *Œuvres* III, p. 1249–1250.

[1905b] Remarques sur les principes de la théorie des ensembles, *Mathematische Annalen*, 60 (1905), p. 194–95 ; *Œuvres* III, p. 1251–1252.

[1905c] *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes*, Paris : Gauthier-Villars, 1905.

[1908] Sur les principes de la théorie des ensembles, *Atti del IV congresso internazionale dei matematici*, vol II, p. 15–17, Roma : Academia dei Lincei, 1909 ; *Œuvres* III, p. 1267–1269.

[1909] La théorie des ensembles et les progrès récents de la théorie des fonctions, *Rev. gén. sci.*, 20 (1909), p. 315–324 ; *Œuvres* III, p. 1277–1307.

Boutroux (P.)

[1904] Sur quelques propriétés des fonctions entières, *Acta math.*, 28 (1904), p. 97–224.

[1905] Comptes rendus et analyses : Baire (René), Leçons sur les fonctions discontinues, *Bull. sci. math.* 29 (1905), p. 249–252.

Cantor (G.)

[1883] Mémoires, *Acta math.*, 2 (1883), p. 305–414.

[1899] Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis [trad. fr. de F. Marotte], *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, (V) 3 (1899), p. 343–437.

Cavaillès (J.)

[1937] *Méthode axiomatique et formalisme*, 2[e] éd., Paris : Hermann, 1981.

CASSINET (J.) et GUILLEMOT (M.)
[1983] *L'Axiome du choix dans les mathématiques de Cauchy (1821) à Gödel (1940)*, thèse d'état, Université Toulouse III, 1983.
DARBOUX (G.)
[1872] Sur une théorème relatif à la continuité des fonctions, *Bull. sci. math.*, 3 (1872), p. 307–313.
[1875] Mémoire sur les fonctions discontinues, *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, (II) 4 (1875), p. 57–112.
[1879] Addition au mémoire sur les fonctions discontinues, *Ibid.* (II) 8 (1879), p. 195–202.
DAUBEN (J.)
[1979] *Georg Cantor, his mathematics and philosophy of the infinite*, Cambridge (Mass.) : Harvard University Press, 1979.
DENJOY (A.)
[1910] Sur les produits canoniques d'ordre infini, *J. math. pures appl.* (VI) 6 (1910), p. 1–136.
DINI (U.)
[1878] *Fondamenti per la theoria delle funzioni di variabili reali*, Pise, 1878.
DU BOIS-REYMOND (P.)
[1887] *Théorie générale des fonctions*, traduction du traité allemand de 1882 par G. Milhaud et A. Girod, Nice, 1887.
DUGAC (P.)
[1976a] Notes et documents sur la vie et l'œuvre de René Baire, *Archive for history of exact sciences*, 15 (1975–76), p. 297–383.
[1976b] Des correspondances mathématiques des XIX^e et XX^e siècles, *Revue de synthèse*, 81–82 (1976), p. 149–170.
[1978] *Sur les fondements de l'analyse de Cauchy à Baire*, thèse d'état, Université Pierre et Marie Curie, 1978.
[1984] Georg Cantor et Henri Poincaré, *Bolletino di storia delle scienze matematiche*, 4 (1984), p. 65–96.
FATOU (P.)
[1906] Séries trigonométriques et séries de Taylor, *Acta math.*, 30 (1906), p. 335–400.
FRÉCHET (M.)
[1905] Les ensembles de courbes continues, *C. R. Acad. sci. Paris*, 141 (1905), p. 818–819.
[1906] Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 22 (1906), p. 1–74.
GISPERT (H.)
[1983] Sur les fondements de l'analyse en France, *Archive for history of exact sciences*, 28 (1983), p. 37–106.
[1990] Principes de l'analyse chez G. Darboux et J. Houël (1870–1880), enjeux mathématiques, épistémologiques et institutionnels, *Revue d'histoire des sciences*, 43 (1990), p. 181–220.
[1991] La France mathématique. La Société mathématique de France (1872–1914), *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, Paris : Société française d'histoire des sciences et des techniques & Société mathématique de France, 1991
[1994] Un exemple d'approche sociologique en histoire des mathématiques : l'analyse au XIX^e siècle, dans *Le Relativisme est-il résistible ?* (R. Boudon et M. Clavelin éd.), p. 211–220, Paris : PUF, 1994.

GRAY (J.)

[1991] Did Poincaré say "Set theory is a disease ?", *The mathematical intelligencer*, 13/1 (1991), p. 19–22.

HADAMARD (J.)

[*Œuvres*] *Œuvres scientifiques*, 4 vol., Paris : CNRS, 1968.

[1892] Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, *J. math. pures appl.* (IV) 8 (1892), p. 101–186 ; *Œuvres* I, p. 7–92.

[1897] Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles, *Verhandlungen des ersten internationalen Mathematike-Kongresses*, p. 201–202, Leipzig, 1898 ; *Œuvres* I, p. 311–312.

[1898] Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques, *J. math. pures appl.*, (V) 4 (1898), p. 27–73 ; *Œuvres* II, p. 729–775.

[1912] Comptes rendus et analyses : Montel (P), Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe, *Bull. sci. math.*, 36 (1912), p. 198–203.

HERMITE (C.)

[*Lettres*] Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874–1883), (P. Dugac éd.), *Cahiers sém. hist. math.*, (I) 5 (1984), p. 49–285.

JORDAN (C.)

[*Œuvres*] *Œuvres scientifiques*, 4 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1961–1962.

[1881] Sur la série de Fourier, *C. R. Acad. sci. Paris*, 92 (1881), p. 228–230 ; *Œuvres* IV, p. 393–395.

[1882] *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, tome 1, Paris : Gauthier-Villars, 1882.

[1892] Remarques sur les intégrales définies, *J. math. pures appl.*, (IV) 8 (1892), p. 69–99 ; *Œuvres* IV, p. 427–457.

[1893] *Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique*, 2e éd. (entièrement refondue), tome 1, Paris : Gauthier-Villars, 1893.

LEBESGUE (H.)

[*Œuvres*] *Œuvres scientifiques*, 5 vol., Genève : Enseignement mathématique, 1972–1973.

[1902] Intégrale, longueur, aire, *Ann. mat. pura appl.*, (3) 7 (1902), p. 231–359 ; *Œuvres* I, p. 203–331.

[1904] *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris : Gauthier-Villars (1904) ; 2e éd., 1928.

[1906] *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris : Gauthier-Villars, 1906.

[1907a] Sur les transformations ponctuelles transformant les plans en plans qu'on peut définir par des procédés analytiques, extrait d'une lettre adressée à M. Segre, *Atti della Accademia delle scienze di Torino*, 42 (1907), p. 532–539 ; *Œuvres* III, p. 219–226.

[1907b] Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo, *Bull. Soc. math. France*, 35 (1907), p. 202–212 ; *Œuvres* III, p. 227–237.

[1922a] Notice inédite sur les travaux scientifiques, *Œuvres* I, p. 89–93.

[1922b] Notice sur les travaux scientifiques, *Œuvres* I, p. 99–175.

[1932] Notice sur René-Louis Baire, correspondant pour la section de géométrie, *C. R. Acad. sci. Paris*, 195 (1932), p. 86–88.

MEDVEDEV (F. A.)

[1976] *Francuzskaja shkola teorii funkcij i mnozhestv na rubezhe XIX–XX vv.*, Moskva : Nauka, 1976.

Méray (C.)
[1869] Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données, *Revue de la Société savante des sciences mathématiques, physiques et naturelles*, (II) 4 (1869), p. 280–289.

Michel (A.)
[1992] *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*, Paris : Vrin, 1992.

Mittag-leffler (G.)
[1884] Sur la représentation analytique des fonctions monogèmes uniformes d'une variable indépendante, *Acta math.*, 4 (1884), p. 1–79.

Montel (P.)
[1905] Comptes rendus et analyses : Émile Borel, Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, *Bull. sci. math.*, 29 (1905), p. 62–67.
[1907] Sur les suites infinies de fonctions, *Ann. scient. Éc. norm. sup.*, (III) 24 (1907), p. 233–334.

Painlevé (P.)
[*Œuvres*] *Œuvres scientifiques*, 3 tomes, Paris : Éditions du CNRS, 1972–1975.
[1887] Sur les lignes singulières des fonctions analytiques, *Annales de la faculté des sciences de l'université de Toulouse*, 2 (1887) ; *Œuvres* II, p. 29–159.
[1895] Leçons de Stockholm, *Œuvres* I, p. 199–798.

Picard (E.)
[1900] L'idée de fonction depuis un siècle, *Rev. gén. sci.*, 11 (1900), p. 61–69.
[1904] Comptes rendus et analyses : Lebesgue (Henri), Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, *Bull. sci. math.*, 28 (1904), p. 180–183.

Poincaré (H.)
[*Œuvres*] *Œuvres*, 11 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1916–1956.
[1884] Mémoire sur les groupes kleinéens, *Acta math.*, 3 (1884), p.49–92 ; *Œuvres* II, p. 258–299.
[1885] Sur les courbes définies par une équation différentielle (3e partie), *J. math. pures appl.*, (4) 1, p. 167–244 ; *Œuvres* I, p. 90–161.
[1888] Sur une propriété des fonctions analytiques, *Rend. Circ. mat. Palermo*, 2 (1888), p. 197–200 ; *Œuvres* IV, p. 11–13.
[1890] Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique, *American journal of mathematics*, 12 (1890), p. 211–294 ; *Œuvres* IX, p. 28–113.

Pompeiu (O.)
[1905] Sur la continuité des fonctions de variables complexes, *Ann. fac. sci. Toulouse*, (II) 7 (1905), p. 264–315.

Richard (J.)
[1905] Lettre à Monsieur le Rédacteur de la Revue générale des sciences, *Rev. gén. sci.*, 16 (1905) ; *Acta math.*, 30 (1906), p. 295–296.

Riemann (B.)
[1854] Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe (1854), *Gesammelte mathematische Werke*, 1867 ; trad. fr. par J. Houël dans *Bull. sci. math.*, 5 (1873), p. 20–96.

Schoenflies (A.)
[1900] Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, t. VIII–2 (1900), p. 1–250.
[1908] *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, Zweiter Teil, Leipzig, 1908.

Schwarz (H.)
[1872] Zur Integration der partiellen Differentialgleichung, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 74 (1872), p. 218–253.
Servant (M.)
[1899] Essai sur les séries divergentes, *Ann. fac. sci. Toulouse*, (II) 1 (1899), p. 117–175.
Sire (J.)
[1911] Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini, *Rend. Circ. mat. Palermo*, 31 (1911), p. 1–91.
Tannery (J.)
[1893] Comptes rendus et analyses : Jordan Camille, Cours d'analyse de l'École Polytechnique, deuxième édition entièrement refondue, *Bull. sci. math.*, 17 (1893), p. 249–250.
[1897] De l'infini mathématique, *Rev. gén. sci.*, 8 (1897), p. 129–140.
[1898] Comptes rendus et analyses : Borel (E.), Leçons sur la théorie des fonctions, *Bull. sci. math.*, 22 (1898), p. 242–250.
[1900] Comptes rendus et analyses : Schoenflies (A.), Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, *Bull. sci. math.*, 24 (1900), p. 239–245.
Thomae (J.)
[1870] *Abriss einer Theorie der Funktionen einer complexen Veränderlichen und der Thetafunctionen*, Halle, 1870.
Zoretti (L.)
[1904] Sur les ensembles parfaits et les fonction uniformes, *C. R. Acad. sci. Paris*, 138 (1904), p. 674–676.
[1905] Sur les fonctions analytiques uniformes qui possèdent un ensemble parfait discontinu de points singuliers, *J. math. pures appl.*, (VI) 1 (1905), p. 1–51.
[1906] Sur les ensemble discontinus, *C. R. Acad. sci. Paris*, 142 (1906), p. 763–764.
[1911] Comptes rendus et analyses : Schoenflies (A.), Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten (2e partie), *Bull. sci. math.*, 36 (1912), p. 283–289.