V. Pasquier

M. Gaudin

L'ansatz de Bethe pour les représentations cycliques des groupes quantiques

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1993, tome 44
« Conférences de C. Dewitt-Morette, D. Foata, C. Itzykson, B.-L. Julia, J.-L. Loday, P.-A. Meyer, V. Pasquier », , exp. n° 7, p. 163-174
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1993__44__163_0>

L'ANSATZ DE BETHE POUR LES REPRESENTATIONS CYCLIQUES DES GROUPES QUANTIQUES

V. Pasquier et M. Gaudin
Service de Physique Théorique
Laboratoire de la Direction des Sciences de la Matière
du Commissariat à l'Energie Atomique
CEA-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, FRANCE

ABSTRACT

Nous appliquons la méthode de la matrice Q pour diagonaliser la matrice de transfert d'un modèle des 6 vertex cyclique. Les poids de Boltzmann de la matrice Q sont essentiellement ceux du modèle de Potts-Chiral et s'expriment simplement à l'aide d'une q-déformation de la fonction Γ. Dans un cas limite la méthode permet d'obtenir le spectre de la chaîne de Toda relativiste.

Nous exposerons ici une méthode due à Baxter [1] pour diagonaliser la matrice de transfert d'un modèle de mécanique statistique. Plus précisément nous dériverons les équations de Bethe dont la résolution permet d'obtenir les valeurs propres de cette matrice.

Lors de l'exposé en l'honneur de Pierre Cartier, nous avions montré comment la méthode permettait d'obtenir le spectre de la chaîne de Toda [3]. Ici, nous abordons le cas où la matrice R de Yang-Baxter est de type trigonométrique. (Nous considérons le cas des représentations cycliques, le cas de représentation de plus haut poids étant traité dans [1,2]). Bien que la méthode algébrique soit parallèle à celle que nous avions appliquée dans le cas de la chaîne de Toda, la nature analytique des objets mise en jeu (matrice Q) est différente. Nous nous contenterons d'évoquer les problèmes d'analyse qui résulteraient si l'on désirait pousser la méthode jusqu'à l'obtention du spectre dans un cas d'intérêt physique, celui de la chaîne de Toda relativiste [7].

I. L'Ansatz de Bethe et son lien avec les groupes quantiques

Cette section, est une tentative pour poser le problème de l'Ansatz de Bethe dans le langage des groupes quantiques. Notre but est essentiellement pédagogique et cette section n'est pas directement reliée à la suite de l'exposé. Pour une approche plus approfondie on pourra consulter [4].

La résolution d'un modèle de mécanique statistique suppose en général que l'on identifie une famille à un paramètre de matrices commutantes (la matrice de transfert) que l'on cherche à diagonaliser. Décrivons brièvement comment de telles matrices sont obtenues à partir d'une solution de l'équation de Yang-Baxter : Considérons une famille à 1 paramètre de matrices de $\mathrm{End}(V \otimes V)$ qui vérifient l'équation :

$$R_{12}(u_1 - u_2) R_{13}(u_1 - u_3) R_{23}(u_2 - u_3) = R_{23}(u_2 - u_3) R_{13}(u_1 - u_3) R_{12}(u_1 - u_2) \quad (1)$$

où chacune des matrices R_{ij} agit dans les composantes i, j de l'espace $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$.

Dans le cas qui nous intéresse, $V = \mathbb{C}^2$ et la matrice R prend la forme

$$\begin{aligned} R(z) = &\left(qz - q^{-1}z^{-1}\right)(E_{11} \otimes E_{11} + E_{22} \otimes E_{22}) \\ &+ \left(z - z^{-1}\right)(E_{11} \otimes E_{22} + E_{22} \otimes E_{11}) \\ &+ \left(q - q^{-1}\right)(E_{12} \otimes E_{21} + E_{21} \otimes E_{12}) \end{aligned} \quad (2)$$

On a posé $z = q^u$, q est un paramètre arbitraire, et les E_{ij} sont les éléments de la base naturelle des matrices 2×2.

La matrice (2) permet de définir une algèbre par générateurs et relations de la façon suivante. Définissons la matrice :

$$L(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix} \tag{3}$$

dont les éléments sont des séries formelles en z : $a(z) = \sum_0^\infty a_n \; z^{2n}$ .... Les coefficients a_n, b_n, c_n, d_n sont les générateurs et vérifient les relations qui résultent des équations :

$$R_{12}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \overset{1}{L}(z_1) \overset{2}{L}(z_2) = \overset{2}{L}(z_2) \overset{1}{L}(z_1) R_{12}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \tag{5}$$

où $\overset{1}{L}(z) = L(z) \otimes 1$ et $\overset{2}{L}(z) = 1 \otimes L(z)$.

Il résulte de (1) que cette algèbre est associative. Son centre est engendré par le "déterminant"

$$\det L(z) = a(z)d(qz) - c(z)b(qz) \tag{6}$$

On vérifie d'autre part que la trace:

$$\operatorname{tr} L(z) = a(z) + d(z) \tag{7}$$

engendre une sous algèbre commutative. On cherche à diagonaliser $a(z) + d(z)$ dans une représentation que nous caractérisons maintenant.

Pour ce faire, on utiliser le fait que l'agèbre que nous venons de définir est munie d'un coproduit donné par :

$$\Delta L(z) = \begin{pmatrix} a(z) \otimes a(z) + b(z) \otimes c(z) & a(z) \otimes b(z) + b(z) \otimes d(z) \\ c(z) \otimes a(z) + d(z) \otimes c(z) & c(z) \otimes b(z) + d(z) \otimes d(z) \end{pmatrix} \tag{8}$$

que l'on notera plus simplement :

$$\Delta L(z) = L(z) \dot{\otimes} L(z) \tag{9}$$

où la notation $\dot{\otimes}$ signifie que l'on effectue le produit ordinaire des matrices 2×2 en remplaçant le produit des éléments de matrice par le produit tensoriel.

La représentation que nous considérons est obtenue en prenant N fois le produit tensoriel d'une représentation fondamentale $\bar{L}(z)$ dont les éléments de matrice agissent dans un espace de Hilbert W.

Nous sommes conduit à considérer une matrice 2×2, $T(z)$:

$$T(z) = \bar{L}_1(z) \dot{\otimes} \bar{L}_2(z) \ldots \dot{\otimes} \bar{L}_N(z) \tag{10}$$

dont les éléments de matrice agissent dans $W \otimes^N$; chaque matrice $\bar{L}_i(z)$ agissant dans la $i^{\text{ième}}$ composante du produit tensoriel.

Pour construire la représentation fondamentale $\bar{L}(z)$, introduisons une paire d'opérateurs X et Y qui vérifient les relations de commutation :

$$XY = q\, YX \tag{11}$$

et posons :

$$\bar{L}(z) = \begin{pmatrix} zaX - z^{-1}\bar{a}X^{-1} & zY\left(cX - \bar{c}X^{-1}\right) \\ z^{-1}Y\left(bX - \bar{b}X^{-1}\right) & z^{-1}dX - z\bar{d}X^{-1} \end{pmatrix} \tag{12}$$

On vérifie facilement que cette forme vérifie l'équation (5) chaque fois que :

$$\left.\begin{array}{ll} ad & = bc \\ \bar{a}\bar{d} & = \bar{b}\bar{c} \end{array}\right\} \tag{13}$$

Dans la section qui suit, nous diagonalisons la trace de $T(z)$ (que nous dénoterons $\Lambda(z)$) étant donné une représentation de l'algèbre (11) . Signalons que ces représentations sont directement reliées aux représentations cycliques des groupes quantiques [5].

II. Diagonalisation de $\bar{\Lambda}(z)$

Dans cette section, nous utilisons la notation : $s(x) = q^x - q^{-x}$. La matrice R s'écrit sous forme matricielle :

$$R(u) = \begin{pmatrix} s(u+1) & & & \\ & s(1) & s(u) & \\ & s(u) & s(1) & \\ & & & s(u+1) \end{pmatrix} \tag{14}$$

Nous paramétrisons la matrice L_i qui correspond à (12) sous la forme :

$$L_i = \begin{pmatrix} q^{\alpha}\left(q^{u}X_i - q^{-u}X_i^{-1}\right) & q^{-\beta}Y_i^{-1}\left(q^{\mu}X_i - q^{-\mu}X_i^{-1}\right) \\ -q^{\beta}Y_i\left(q^{-\mu}X_i - q^{\mu}X_i^{-1}\right) & -q^{-d}\left(q^{-u}X_i - q^{u}X_i^{-1}\right) \end{pmatrix} \tag{15}$$

Tous les opérateurs commutent à des sites i différents, la seule relation non triviale étant : $X_iY_i = q\ Y_iX_i$.

Dans la suite nous utilisons une représentation de cette algèbre dans laquelle les Y_i sont des matrices diagonales :

$$Y_i\left|x_1, ..., x_i, ..., x_N\right\rangle = q^{x_i}\left|x_1, ..., x_i, ..., x_N\right\rangle \tag{16}$$

et les X_i agissent comme des opérateurs de translation sur la variable x_i :

$$X_i\left|x_1, ..., x_i, ..., x_N\right\rangle = \left|x_1, ..., x_i + 1, ..., x_N\right\rangle \tag{17}$$

La matrice $T(u)$ agit dans l'espace ci-dessus et s'écrit :

$$T(u) = L_1(u)\dot{\otimes}L_2(u)\dot{\otimes}...\dot{\otimes}L_N(u) \tag{18}$$

rappelons que $\Lambda(u)$ (la trace de $T(u)$ au sens des matrices 2×2) est une famille commutante à 1 paramètre de matrices de transfert. Si nous désignons par $\bar{\Lambda}(u)$ une valeur propre arbitraire de $\Lambda(u)$, nous montrons dans cette section que $\bar{\Lambda}(u)$ vérifie une équation fonctionnelle du type :

$$\bar{\Lambda}(u)\bar{Q}(u) = \Lambda_+(u)\bar{Q}(u+1) + \Lambda_-(u)\bar{Q}(u-1) \tag{19}$$

où Λ_+ et Λ_- sont des fonctions connues et $\bar{\Lambda}(u)$ et $\bar{Q}(u)$ sont les inconnues. Nous verrons ensuite sur des exemples que si on connaît les propriétés analytiques vérifiées par $Q(u)$ et $\bar{\Lambda}(u)$ (par exemple Q et Λ sont des polynômes en q^u), cette équation détermine complètement le spectre de $\Lambda(u)$.

Pour établir (19), nous construisons une matrice $Q(u)$ agissant dans $W\otimes^N$ telle que l'identité (19) devienne une égalité matricielle lorsque $\Lambda(u)$ et $Q(u)$ sont substitués à $\bar{\Lambda}$ et $\bar{Q}$. Il faudrait aussi montrer que toutes les matrices mises en jeu dans l'égalité commutent pour des valeurs différentes du paramètre spectral u de sorte que l'on puisse diagonaliser simultanément $\Lambda(u)$ et $Q(u)$ à l'aide d'une matrice S *indépendante* de u. Diagonalisant l'identité obtenue on déduit (19) pour les valeurs propres communes de Λ et Q. Le point qui permet d'utiliser cette équation est que la structure analytique dans la variable u n'est pas affectée par la diagonalisation.

Cherchons tout d'abord à établir (19) pour les vecteurs colonnes $\psi(u)$ de la matrice $Q(u)$:

$$\Lambda(u)\psi(u) = \Lambda_+(u)\psi(u+1) + \Lambda_-(u)\psi(u-1) \tag{20}$$

Nous cherchons $\psi(u)$ sous la forme d'un produit tensoriel :

$$\psi(u) = \varphi_1(u) \otimes \varphi_2(u) \otimes ... \otimes \varphi_N(u)$$

où les φ_i sont des vecteurs de $W_i \equiv \{|x_i\rangle\}$: $\varphi_i(u) = \sum_{x_i} \varphi_i(u, x_i) |x_i\rangle$.

Pour cela, remarquons que si l'on peut trouver des matrices inversibles M_i, $1 \leq i \leq N$ telles que

$$\begin{aligned} \tilde{L}_i\varphi_i &= M_i L_i M_{i+1}^{-1} \varphi_i \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{a}_i\varphi_i & \tilde{b}_i\varphi_i \\ \tilde{c}_i\varphi_i & \tilde{d}_i\varphi_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_+(u)\varphi_i(u+1) & 0 \\ * & \lambda_-(u)\varphi_i(u-1) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$

alors (20) est automatiquement vérifié pour $\Lambda_\pm = \lambda_\pm^N$.

En effet, la trace $\Lambda(u)$ de $T(u)$ n'est pas modifiée si on substitue $\tilde{L}_i$ à L_i dans l'expression (18) de $T(u)$ à condition que l'on ait $M_1 = M_{N+1}$. On a donc :

$$\Lambda(u)\psi(u) = \mathrm{tr} \prod_1^N \left(\tilde{L}_i\varphi_i\right) \tag{22}$$

La trace se calcule immédiatement à cause du caractère triangulaire de $\tilde{L}_i\varphi_i$ et on obtient (20).

Prenons la forme paramétrique suivante pour les matrices M_i :

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\tilde{L}_i$ est alors égal à :

$$\tilde{L}_i = \begin{pmatrix} a_i + \lambda_i c_i & b_i - \lambda_i\lambda_{i+1}c_i - a_i\lambda_{i+1} + \lambda_i d_i \\ c_i & d_i - \lambda_{i+1}c_i \end{pmatrix} \tag{23}$$

Avant de déterminer explicitement le vecteur φ_i, montrons que l'annulation du coefficient $\tilde{b}_i\varphi_i$ dans (21) détermine la structure des éléments diagonaux de la matrice.

En utilisant les relations de commutation (5) particularisées au cas où $z_2 = qz_1$, on montre que l'on a :

$$\begin{aligned}\tilde{a}(u+1)\tilde{b}(u) &= \tilde{b}(u+1)\tilde{a}(u)\\ \tilde{d}(u-1)\tilde{b}(u) &= \tilde{b}(u-1)\tilde{d}(u)\end{aligned} \tag{24}$$

Si le noyau de $\tilde{b}(u)$ n'est pas dégénéré et est engendré par $\varphi(u)$, ces relations entraînent que $\tilde{a}\varphi(u)$ et $\tilde{d}\varphi(u)$ sont respectivement proportionnels à $\varphi(u+1)$ et $\varphi(u-1)$.

De plus, si on évalue le déterminant quantique de L sur le vecteur φ_i, on obtient une relation reliant λ_+ et λ_-

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\ L(u) &= \lambda_+(u)\lambda_-(u+1)\\ &= s(u-\mu)s(u+\mu+1)\end{aligned} \tag{25}$$

Déterminons le vecteur φ_i solution de l'équation $\tilde{b}_i\varphi_i(u) = 0$. On posera $\lambda_i = \mathrm{e}^{-x'_i}$. Introduisons la notation des q-nombres :

$$(x)_q = 1 - q^x = -q^{\frac{x}{2}} s\left(\frac{x}{2}\right)$$

et admettons (voir appendice) que l'on puisse construire une fonction $G(x)$ vérifiant :

$$G(x+1) = (x)_q G(x-1) \tag{26}$$

Dans les raisonnements qui suivent, $G(x)$ est déterminé à une fonction de période 2 près.

Un calcul simple conduit á la solution suivante :

$$\begin{aligned}\varphi_i(u, x_i) = q^{u\left(x'_{i+1}-x_i\right)} &\frac{G\left(x_i - x'_i + u + \mu - \alpha - \beta\right)}{G\left(x_i - x'_i - u - \mu - \alpha - \beta\right)}\\ \times &\frac{G\left(x'_{i+1} - x_i + u - \mu - \alpha + \beta\right)}{G\left(x'_{i+1} - x_i - u + \mu - \alpha + \beta\right)}\end{aligned} \tag{27}$$

On obtient ensuite les éléments diagonaux :

$$\begin{aligned}\tilde{a}\ \varphi_i(u) &= q^{\alpha}\ s(u-\mu)\varphi_i(u+1)\\ \tilde{d}\ \varphi_i(u) &= q^{-\alpha} s(u+\mu)\varphi_i(u-1)\end{aligned} \tag{28}$$

ce qui montre la relation (20) pour

$$\Lambda_+(u) = q^{N\alpha} s^N(u-\mu)$$
$$\Lambda_-(u) = q^{-N\alpha} s^N(u+\mu) \tag{29}$$

Nous avons ainsi construit une famille de solutions de (20) paramétrisées par les x'_i $1 \le i \le N$. Si on considère les variables x'_i comme des variables de spin, les vecteurs $\psi(x)$ sont les vecteurs colonnes d'une matrice $Q_{\{x_i\},\{x'_i\}}$. Posant

$$\varphi_i(u, x_i) = W(x_i - x'_i)\,\bar{W}\left(x'_{i+1} - x_i\right) \tag{30}$$

Q s'écrit

$$Q_{x,x'} = \prod_{i=1}^{N} W(x_i - x'_i)\,\bar{W}\left(x'_{i+1} - x_i\right) \tag{31}$$

Cette matrice s'interprète aussi comme la matrice de transfert d'un modèle de mécanique statistique dont les variables de spins prennent les valeurs entières. Ce modèle est directement relié au modèle de Potts chiral [4,5]*. On peut montrer de façon analogue que $Q(u)$ vérifie l'équations :

$$Q(u)\Lambda(u) = \Lambda_+(u)Q(u+1) + \Lambda_-(u)Q(u-1)$$

qui entraîne la commutation de $Q(u)$ et $\Lambda(u)$. Pour compléter le raisonnement, il faudrait montrer que les Q commutent pour des valeurs différentes du paramètre spectral :

$$[Q(u),\ Q(v)] = 0\ . \tag{32}$$

Indiquons seulement que cela résulte d'une équation de type étoile triangle vérifiée par les poids W et $\bar{W}$ similaire à celle considérée dans le modèle de Potts-Chiral [4,5,6].

III. Equations de l'Ansatz de Bethe

Dans la section précédente, nous avons montré que les valeurs propres $\bar{\Lambda}(u)$ de la matrice de transfert $\Lambda(u)$ vérifiaient la relation fonctionnelle (19) et que les propriétés analytiques

* Cette observation est due à Bazhanov [5].

des valeurs propres de $Q(u)$, $\bar{Q}(u)$, étaient les mêmes que celles des éléments de matrice de $Q(u)$. Indiquons comment dans le cas où μ est entier, cette équation détermine le spectre de $\Lambda(u)$.

Si on utilise une représentation de l'algèbre X_i, Y_i pour laquelle X_i est diagonal $X_i\,|y_i\rangle = q^{y_i}\,|y_i\rangle$, il est facile de voir que la représentation de l'algèbre de Yang-Baxter est de plus haut poids ($b(u)|\mu\rangle = c(u)|-\mu\rangle = 0$) et que l'on peut restreindre y_i à prendre les valeurs $-\mu$, $-\mu+1,\ldots,\mu$. Un calcul direct [1,2] permettrait de vérifier que dans cette représentation, les éléments de matrice de $Q(u)$ sont des polynômes trigonométriques en u.

On peut donc poser :

$$\bar{Q}(u) = \prod_{k=1}^{M} (u - u_k)_q \tag{33}$$

et chercher à déterminer les racines u_k en posant $u = u_\ell$ dans l'équation (19) . Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_+}{\Lambda_-}(u_\ell) &= -\frac{\bar{Q}\,(u_\ell - 1)}{\bar{Q}\,(u_\ell + 1)} \\ q^{2N\alpha}\left(\frac{(u_\ell - 1)\,q}{(u_\ell + 1)\,q}\right)^N &= \prod_{k\neq\ell} \frac{(u_\ell - u_k - 1)_q}{(u_\ell - u_k + 1)_q} \end{aligned} \tag{34}$$

Ce système algébrique est la forme traditionnelle des équations de l'Ansatz de Bethe.

La méthode que nous présentons trouve son intérêt dans les cas où la représentation n'est pas de plus haut poids. Donnons ici l'exemple d'un problème où se formalisme pourrait s'appliquer. Considérons la forme limite de la matrice $L(z)$ ($z = q^u$) :

$$L(z) = \begin{pmatrix} zX - z^{-1}X^{-1} & Y^{-1}X \\ q^{-1}Y\,X^{-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

obtenue à partir de (15) en prenant la limite $\alpha = \mu = \infty$. Développons le coproduit de N matrices L comme en (18) et considérons la trace $\Lambda(z)$:

$$\Lambda(z) = C_0 z^N + C_1\, z^{N-2} + \ldots \tag{36}$$

posons :

$$H = C_1 C_0^{-1} = \sum_1^N \left(1 - q^{-1}Y_{i-1}Y_i^{-1}\right) X_i^{-2} \tag{37}$$

Si on utilise la représentation précédente (16,17) des opérateurs X_i et Y_i et que l' on pose $q = \exp(i\eta)$ et $x_j = i\eta y_j$, le problème séculaire s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{N} \left(e^{y_j - y_{j-1} - i\eta} - 1\right) \psi_n\left(y_1, ..., y_j - 2i\eta, ..., y_N\right) = E_n \psi_n\left(y_1, ..., y_j, ..., y_N\right) \tag{38}$$

Si η et les variables x_i sont réels, cet Hamiltonien est Hermitique. On cherche à déterminer son spectre sur les fonctions de carré sommable

$$\int_{R^n} \left|\psi\left(y_1, ..., y_N\right)\right|^2 < \infty \tag{39}$$

Si nous appliquons le formalisme précédent, nous obtenons l'expression suivante de la matrice Q :

$$Q_{x,x'} = q^{u\left(\sum x_i - \sum x_i'\right)} \prod_{i=1}^{N} \frac{G\left(x_i - x_i' - 1 + u\right)}{G\left(x_{i+1}' - x_i - u\right)} \tag{40}$$

qui est solution de l'équation

$$\Lambda(u)Q(u) = Q(u+1) - Q(u-1) \ . \tag{41}$$

Il faudrait déterminer les propriétés analytiques de $Q(u)$ qui permettent résoudre cette équation. Cela résulterait probablement d'une étude similaire à celle faite en [3]. Signalons que le Hamiltonien (38) est celui de la chaîne de Toda relativiste construit en [9].

Appendice

Donnons ici une description sommaire de la fonction $G(x)$. Pour une étude plus détaillée en particulier dans le cas où q est une racine de l'unité, on pourra se référer à [8].

Considérons le cas où $|q| < 1$.

G vérifie l'équation

$$\begin{aligned} G(x+1) &= (-q^x + 1)\, G(x-1) \\ &= (x)_q G(x-1) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Construisons G tel que G^{-1} soit une fonction entière de x :

$$G^{-1}(x) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - q^{x+2n+1}\right) \tag{A.2}$$

G^{-1} est une fonction entière dont les zéros sont sur le demi-réseau ($q = \mathrm{e}^{2\pi i \tau}$)

$$x = 2m\tau^{-1} - 2n - 1 \quad ; \qquad n \geq 0 \, .$$

en utilisant (A1), on construit une fonction entière de période 2 égale à :

$$G^{-1}(x) G^{-1}(-x) q^{-\frac{x^2}{4}} i^x \tag{A.3}$$

qui peut être exprimée à l'aide de la fonction θ_1. En effet,

$$\begin{aligned} \theta_1\left(\pi\tau\frac{x+1}{2}\right) &= \frac{1}{i} q^{\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^{2n}\right) \left(q^{\frac{x+1}{2}} - q^{-\frac{x+1}{2}}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^{x+1+2n}\right)\left(1 - q^{-x-1+2n}\right) \\ &= i\ q^{\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - q^{2n}\right) q^{-\frac{x+1}{2}} G^{-1}(x) G^{-1}(-x) \end{aligned} \tag{A.4}$$

References

[1] R.J. Baxter, "Exactly solved models in Statistical Mechanics", Academic, London 1982.

[2] M. Gaudin, "La fonction d'onde de Bethe", Collection scientifique du C.E.A., Masson (1983).

[3] V. Pasquier et M. Gaudin, *J. Phys. A Math. Gen.* **25** (1992) 5243.

[4] V. Pasquier, Cours de l'Ecole de Cargèse donné en 1991.

[5] P. Roche, D. Arnaudon, *Lett. Math. Phys.* **17**, 295 (1989).

[6] R.J. Baxter, J.H.H. Perk, H. Au-Yang, *Physics Letters* **A128**, 138 (1988).

[7] R.J. Baxter, V.V. Bazhanov, J.H.H. Perk, *Int. Journal of Modern Physics B*, Vol.4, N°5 (1990) p.803.

[8] M. Gaudin, Note CEA-N-2601 (1989).

[9] S.N.M. Ruijsenaars, *C.M.P.* **10**, 191 (1987).