Pierre Pansu

Effondrement des variétés riemanniennes

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1986, tome 36
« Conférences de : C. Bardos, L. Baulieu, H.J. Borchers, M. Dubois-Violette, P. Pansu et R. Stora », , exp. nº 2, p. 19-25

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1986__36__19_0>

EFFONDREMENT DES VARIETES RIEMANNIENNES, d'après J. Cheeger et M. Gromov

Pierre Pansu

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cédex

"La courbure d'une variété riemannienne mesure sa déviation à être localement euclidienne". Lorsqu'on considère les variétés riemanniennes d'un point de vue métrique, cette affirmation prend un sens très précis.

Définition

Soient X, Y des espaces métriques. Une application $f : X \to Y$ est <u>contractante</u> si, pour tous $x \neq x' \in X$,

$$d(f(x), f(x')) \leqslant d(x, x') .$$

1. Théorème (H. Rauch [12])

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, on note B_ε^a la boule de rayon ε dans l'espace de courbure constante a (une sphère si $a > 0$, l'espace euclidien si $a = 0$, un espace hyperbolique si $a < 0$). Si, sur une variété riemannienne M, la courbure sectionnelle K satisfait

$$a \leqslant K \leqslant b ,$$

alors, pour tout point m et pour ε assez petit, la boule $B(m,\varepsilon)$ de M est métriquement encadrée par des boules de courbure constante, i.e., il existe des applications contractantes

$$B_\varepsilon^a \longrightarrow B(m,\varepsilon) \longrightarrow B_\varepsilon^b .$$

L'inconvénient du théorème 1, c'est le "ε assez petit". Le plus grand ε tel que la conclusion du théorème 1 soit satisfaite s'appelle le <u>rayon d'injectivité</u> de M en x. On <u>ne peut pas</u> le contrôler en fonction de la courbure.

Exemple

Sur un cylindre de révolution dans $\mathbb{R}^3$ de circonférence 2ε, la courbure est nulle mais le rayon d'injectivité vaut ε.

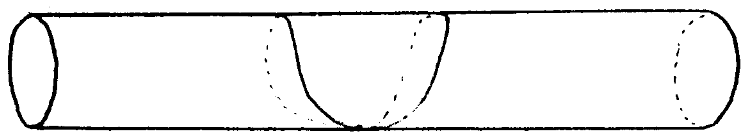

figure 1

Le rayon d'injectivité a une influence déterminante sur le comportement d'une variété riemannienne. Le théorème suivant exprime la fait que, tant qu'on évolue parmi des vRs dont le rayon d'injectivité ne tend pas vers zéro, on ne risque pas de rencontrer de surprise désagréable.

Définition : topologie Lipschitz

On dira que deux epsaces métriques X et Y sont ε-proches au sens de Lipschitz s'il existe un homéomorphisme $f : X \to Y$ tel que, pour tous $x \neq x' \in X$,

$$1-\varepsilon \leqslant \frac{d(f(x),f(x'))}{d(x,x')} \leqslant 1+\varepsilon .$$

La topologie ainsi définie coincide en gros avec la topologie C^0 sur les métriques (modulo difféomorphismes) sur une variété fixée.

2. Théorème de compacité (M. Gromov [8])

Notons $\mathbf{M}(n,\varepsilon,D)$ l'ensemble des vRs de dimension n, de rayon d'injectivité supérieur à ε, de diamètre inférieur à D, et dont la courbure sectionnelle K satisfait $|K| \leqslant 1$. Cet ensemble est compact pour la topologie Lipschitz.
(Pour une démonstration complète, voir [11]).

En particulier, les variétés de $\mathbf{M}(n,\varepsilon,D)$ ont toutes à peu prèsle même volume, le même spectre du Laplacien.
On retrouve le

3. Théorème de finitude (J. Cheeger [3])

Dans $\mathbf{M}(n,\varepsilon,D)$, il n'y a qu'un nombre fini de variétés deux à deux non difféomorphes.

En revanche, si on laisse le rayon d'injectivité tendre vers zéro, on perd tout contrôle global. On trouve une infinité de types topologiques (même parmi les variétés à courbure positive, [1]). Il est pourtant possible d'analyser le phénomène. La suite de tores de révolution de la figure 2 diverge au sens de Lipschitz, mais, intuitivement, elle doit converger vers un cercle dans une topologie plus grossière.

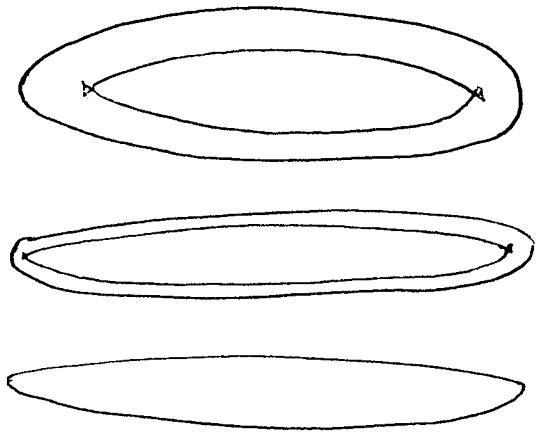

figure 2

M. Gromov est parvenu a formaliser cette intuition. L'idée consiste à ne comparer que des représentations grossières des variétés riemanniennes, à savoir des ε-réseaux. Un ε-<u>réseau</u> dans un espace métrique X est un sous-ensemble fini N tel que les boules de rayon ε centrées sur N recouvrent X.

<u>Définition</u> : <u>topologie de Hausdorff-Gromov</u>

On dit que deux espaces métriques X et Y sont ε-proches au sens de Hausdorff-Gromov s'il existe des ε-réseaux $N \subset X$ et $N' \subset Y$ qui sont ε-proches au sens de Lipschitz.

Lorsque X et Y sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$, qui sont proches au sens de la distance de Hausdorff, (éventuellement après déplacement dans $\mathbb{R}^3$), alors ils sont proches aussi au sens de Hausdorff-Gromov. La définition est donc conforme à l'intuition. Mais la puissance du concept provient du fait qu'il est défini intrinsèquement.

<u>4</u>. <u>Théorème de précompacité</u> (M. Gromov [8]).

L'ensemble des variétés riemanniennes de dimension n, de diamètre inférieur à D, dont la courbure de Ricci est $\geqslant -1$ est précompact au sens de Hausdorff-Gromov.

<u>Démonstration</u>

Il s'agit de contrôler la qualité de l'approximation par des ensembles finis. On est donc amené à compter combien de boules de rayon ε on peut mettre dans une boule de rayon D. L'hypothèse sur la courbure de Ricci (plus faible qu'une borne inférieure sur la courbure sectionnelle) permet justement de minorer le volume relatif d'une boule de rayon ε par rapport à une boule de rayon D (R. Bishop [2] page 253) indépendamment du rayon d'injectivité (M. Gromov). ∎

Le théorème 7 entraîne que, dans une suite de variétés à courbure et diamètre bornés, dont le rayon d'injectivité tend vers zéro, il y a une sous-suite qui converge vers un espace métrique de dimension inférieure. Le volume tend vers zéro. Pour le spectre du Laplacien, il y a en général un changement de comportement asymptotique.

On peut se demander quel genre d'espaces limites on peut obtenir, surtout si on fixe la topologie des variétés qui convergent.

Définition

On dit qu'une variété différentiable M s'effondre sur X où X est un espace métrique de dimension inférieure à celle de M, s'il existe des métriques riemanniennes g_j sur M, à courbure sectionnelle bornée, qui convergent vers X au sens de Hausdorff-Gromov.
On dit que M s'effondre si elle admet une suite de métriques g_j à courbure bornée, dont le rayon d'injectivité tend uniformément vers zéro.

Le résultat le plus complet concerne l'effondrement vers un point.

5. Théorème (M. Gromov [6], E. Ruh [13])

Une variété s'effondre sur un point si et seulement si elle est difféomorphe à un quotient N/Γ où N est un groupe de Lie nilpotent et Γ un groupe discret d'isométries de N.

Il est facile de construire des exemples d'effondrement. Pour toute variété riemannienne N, le produit $N\times S^1$, où le facteur S^1 a une longueur qui tend vers zéro, s'effondre sur N. Plus généralement, les actions localement libres de S^1 et des tores donnent lieu à effondrement. On renvoie à [4] pour des exemples plus subtils. En revanche, les variétés à caractéristique d'Euler non nulle ne s'effondrent pas [4]. Dans [8] page 141, M. Gromov a donné une description heuristique des espaces limites : localement, l'espace X est isométrique à un quotient M/G où G est un groupe presque nilpotent d'isométries de M (cette description a été affinée par K. Fukaya [5]), ce qui laisse entendre qu'une variété qui s'effondre possède des actions locales de groupes de Lie. La notion de F-structure est un raffinement de l'idée d'action d'un faisceau de tores, qui a permis d'élucider la question de la caractérisation topologique des variétés qui s'effondrent.

6. <u>Théorème</u> (J. Cheeger, M. Gromov [4])

Une variété s'effondre si et seulement si elle admet une F-structure.

La notion de convergence au sens de Hausdorff-Gromov s'est révélée fructueuse dans d'autre questions de géométrie riemannienne. Elle permet par exemple de parler de <u>cône tangent</u> en un point d'un espace métrique arbitraire : on dira que (X,d) admet un cône tangent en x si les boules $B(x,\varepsilon)$, munies de la distance d/ε, convergent au sens de Hausdorff-Gromov.

<u>Exemple</u>

Si X est une variété riemannienne, son cône tangent en tout point est l'espace euclidien.

<u>Exemple</u>

Soit M une variété munie d'un champ de plan H. On fait l'hypothèse suivante : pour chaque entier i, les crochets i-uples de champs de vecteurs tangents à H engendrent un sous-fibré de TM, qui coincide avec TM pour i assez grand. Etant donné une métrique sur le champ H, on peut définir la longueur des courbes tangentes à H, et la distance entre deux points comme borne inférieure des longueurs des courbes tangentes à H qui les relient. On obtient ainsi une distance non riemannienne d appelée <u>métrique de Carnot-Carathéodory</u>.

<u>Théorème</u> (J. Mitchell [9])

L'espace (M,d) admet un cône tangent en tout point. C'est un groupe de Lie gradué (qui dépend du point) muni d'une métrique de Carnot-Carathéodory invariante à gauche.

Alors que, dans le cas riemannien, les petites boules normalisées convergent vers le cône tangent au sens de Lipschitz, on peut montrer que ceci n'est plus vrai dans le cas Carnot-Carathéodory, ce qui rend la topologie Hausdorff-Gromov nécessaire.

Renversant le point de vue, on peut aussi définir des <u>cônes tangents à l'infini</u>. On dit que (X,d) admet un (resp. des) cônes tangents à l'infini si, lorsque ε tend vers 0, la suite $(X,\varepsilon d)$ admet une limite (resp. des sous-suites convergentes).

<u>Exemple</u>

Les espaces qui admettent des homothéties ont trivialement des cônes tangents à l'infini. Outre l'espace euclidien, certains groupes de Lie nilpotent (dits <u>gradués</u>) ont cette propriété.

<u>Remarque</u> Il résulte de [10] qu'un groupe de Lie connexe muni d'une métrique invariante admet un (ou des) cônes tangents à l'infini si (seulement si ?) il est extension d'un groupe nilpotent par un groupe compact. Le cône tangent est alors un groupe gradué muni d'une métrique de Carnot-Carathéodory ou riemannienne.

<u>7. Théorème des groupes à croissance polynomiale</u> (M. Gromov [7],L.P.D. van den Dries, A.J. Wilkie [13])

Pour un groupe discret de type fini Γ, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Γ est à croissance polynomiale,

(ii) Γ admet des cônes tangents à l'infini,

(iii) Γ admet un cône tangent à l'infini,

(iv) Γ a un sous-groupe nilpotent d'indice fini.

REFERENCES

[1] S.ALOFF, N. WALLACH, An infinite family of distinct 7-manifolds admitting positively curved Riemannian structures, Bull. A.M.S. **81** (1975) 93-97.

[2] R. BISHOP, R. CRITTENDEN, Geometry of manifolds, Academic Press (1954).

[3] J. CHEEGER, Finiteness theorems for Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 92 (1970) 61-74.

[4] J. CHEEGER, M. GROMOV, Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded, J. Diff. Geom. **21** (1986).

[5] K. FUKAYA, A boundary of the set of Riemannian manifolds with bounded curvatures and diameters, preprint univ. of Tokyo (1985).

[6] M. GROMOV, Almost flat manifolds, J. Diff. Geom **13** (1978) 231-241.

[7] M. GROMOV, Groups of polynomial growth and expanding maps, Publ. Math. I.H.E.S. 53 (1981) 53-78.

[8] M. GROMOV, Structures métriques pour les variétés riemanniennes, notes de cours rédigées par J. Lafontaine et P. Pansu, CEDIC - Fernand-Nathan, Paris (1981).

[9] J. MITCHELL, On Carnot-Caratheodory metrics, Preprint UCLA (1984).

[10] P. PANSU, Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés, Erg. Th. Dynam. Syst. 3 (1983) 415-445.

[11] S. PETERS, The regularity of limit metrics in Gromov's compactness theorem, Math. Ann. **273** (1986).

[12] H. RAUCH, A contribution to Riemannian geometry in the large, Ann. of Math. **54** (1951) 38-55.

[13] E. RUH, Almost flat manifolds, J. Diff. Geom. **17** (1982) 1-14.

[14] L.P.D. VAN DEN DRIES, A.J. WILKIE, Preprint.