RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR
PROGRAMME N° 25

PIERRE MOUSSA

Problème diophantien des moments et modèle d'Ising

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1982, tome 30
« Conférences de : P. Moussa, J. Fröhlich, J.L. Koszul, P.A. Meyer, M. Sirugue », ,
exp. n° 1, p. 1-41

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1982__30__1_0>

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

PROBLEME DIOPHANTIEN DES MOMENTS ET MODELE D'ISING*

par

Pierre MOUSSA

Département de Physique Théorique - Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
91191 Gif-sur-Yvette Cedex

RESUME :

On montre le lien entre fonctions thermodynamiques du modèle d'Ising et fonctions génératrices d'un problème de moments dans un anneau polynomial. Cette question est abordée par le biais d'une question plus simple : le problème diophantien des moments, où les moments sont des nombres entiers. Dans ce cas on montre que si le support de la mesure est suffisamment restreint les seules mesures autorisées sont discrètes. L'ensemble des solutions générales admet une structure intéressante dans laquelle les transformations rationnelles de la variable semblent jouer un rôle central.

DPh-T/81/119

*Version complétée d'un exposé présenté en Novembre 1980 à l'Institut de Recherches Mathématiques Avancées (IRMA) de l'Université de Strasbourg, dans le cadre de la R.C.P. N°25 du C.N.R.S.

1. INTRODUCTION :

Cet exposé reprend pour l'essentiel un article [1] écrit en collaboration avec M.F. Barnsley et D. Bessis. L'article fondamental de Lee et Yang [3] montre que certaines fonctions thermodynamiques du modèle d'Ising apparaissent comme reliées à un problème de moments trigonométriques d'une mesure positive, mesure définie comme la densité limite de zéros de la fonction de partition. Mais il apparait aussi que ces moments s'expriment comme des polynomes à coefficients entiers dans une variable représentant l'échelle de température. Ces deux propriétés nous ont amenés à poser le problème de moments trigonométriques à moments dans un anneau de polynômes. Cependant, il est opportun de relier cette question à une question apparemment plus simple et que nous appelerons problème diophantien des moments. La section 2 de l'exposé montre comment un tel problème apparait dans le modèle d'Ising. La suite de l'article reprend donc la question suivante : quelles sont les mesures positives sur un intervalle $[0,\Lambda]$ admettant pour moments des nombres entiers. La section 3 résoud le problème pour $\Lambda < 4$ et montre que les seules mesures permises sont discrètes. La section 4 traite du cas $\Lambda = 4$, et montre que de nouvelles solutions sont admises, représentant des mesures dont la densité admet des points de branchement en racine carrée, et laisse ouverte la question de l'existence de mesures singulières. La section 5 étudie les propriétés générales des solutions pour $\Lambda > 4$, en insistant surtout sur les transformations que l'on peut faire sur les mesures tout en conservant l'intégrité des moments. Il est notamment montré que si l'on savait classifier les solutions pour $\Lambda = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \simeq 5.30$, on pourrait les classifier pour toute valeur de Λ. Quelques exemples sont donnés de la solution du problème présentant des propriétés d'analyticité variées. Enfin la section 6 évoque quelques questions connexes telles que, fonctions entières arithmétiques, domaines de valeurs prises par des polynômes à coefficients entiers, problème de moments polynômiaux. L'exposé a été rédigé de façon à ce que les section 3 à 6 puissent être lues indépendamment de la section 2 : leur lecture ne demande aucune connaissance du problème physique qui a motivé ce travail. Rappelons seulement que le cas $\Lambda = 4$ apparait dans le modèle d'Ising en dimension 1.

Cet exposé se différencie sur certains points de la référence [1], en particulier la démonstration du théorème 1 est très différente. On utilise ici le théorème 2, dont la démonstration est extraite de la référence [8], concernant les valeurs prises par les polynômes à coefficients entiers. Les théorèmes 8, 9, 10 sont originaux et ne figurent pas dans l'article [1].

En plus de mes collaborateurs de l'article [1] je tiens à remercier D. Choodnovsky, P. Deligne, B. Derrida, M.E. Fisher, M. Froissart, F. Gramain, A. Martin, et M.L. Mehta pour l'aide qu'ils m'ont apporté dans les discussions que j'ai pu avoir avec eux.

2. LE MODELE D'ISING COMME PROBLEME DES MOMENTS

1) Le problème des moments trigonométriques dans le modèle d'Ising

Soit Λ un sous ensemble fini (contenant N points) d'un réseau périodique à d dimensions (exemple : réseau hypercubique $\mathbb{Z}^d$). A chaque point $i \in \Lambda$, on attache un "spin", c'est-à-dire une variable σ_i pouvant prendre deux valeurs : $\sigma_i = \pm 1$. Une configuration $\{\sigma_i\}$ est l'ensemble des valeurs des spins à chaque point $i \in \Lambda$. L'énergie de la configuration est :

$$H(\{\sigma_i\}) = - \sum_{\substack{<i,j> \\ \text{voisins}}} J\, \sigma_i \sigma_j - \Sigma_i\, h\, \sigma_i \tag{1}$$

La première somme porte sur les paires de points i et $j \in \Lambda$ qui sont voisins sur le réseau, la deuxième somme porte sur tous les sites $i \in \Lambda$. J est communément appelé énergie d'échange, enfin h est le champ magnétique. Ce système de spin est communément dénommé modèle d'Ising [2]. Dans la suite on supposera le modèle ferromagnétique, c'est-à-dire $J > 0$. La thermodynamique du modèle à la température T, s'étudie à partir de la fonction de partition $Z_{(\Lambda)}$ que nous noterons Z_N :

$$Z_N = \sum_{\{\sigma_i, i \in \Lambda\}} \exp(-\beta H\{\sigma_i\}) \tag{2}$$

avec $\beta = 1/kT$. (3)

La somme porte sur les 2^N configurations engendrées en donnant indépendemment aux σ_i les valeurs +1 ou -1. L'énergie libre par site F_N et la magnétisation M_N sont alors définies par :

$$F_N = - \frac{1}{\beta N} \ln Z_N \tag{4}$$

$$M_N = - \frac{\partial F_N}{\partial h} \tag{5}$$

On introduira dans la suite les variables :

$$x = e^{-2\beta J} \quad , \quad z = e^{-2\beta h} \tag{6}$$

x servira d'échelle pour repérer la température : $0 \leq x \leq 1$, et z remplacera la variable de champ magnétique.

Tant que N reste fini, Z_N prend la forme :

$$Z_N = x^{-Nq/4} \, z^{-N/2} \, P_N(z) \tag{7}$$

Ici q désigne le nombre de coordination du système c'est-à-dire le nombre de plus proches voisins: $q = 2d$ pour le réseau hypercubique. P_N est un polynôme de degré N en z, dont le terme de plus haut degré est z^N. Dans le cas $J > 0$, Lee et Yang[3] ont montré que tous les zéros de ce polynome ont un module égal à 1. On trouvera une preuve moderne de ce théorème dans les articles de Ruelle[4]. Lorsque N tend vers l'infini, les zéros de P_N se densifient sur le cercle $|z| = 1$ tout entier pour $x < x_c$ et sur une partie seulement du cercle : $z = e^{i\theta}$, $\theta > \theta_o(x)$, lorsque $x > x_c$. Ce phénomène est responsable de la transition de phase[5]. En effet lorsque l'on passe à la "limite thermodynamique", c'est-à-dire une limite $N \to \infty$, prise de façon à ce que le sous ensemble $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ tende bien vers l'infini dans toutes les directions, on voit que le point $z = 1$ (correspondant au champ nul) reste dans la limite un point d'analyticité lorsque $x > x_c$. Si on pose :

$$F = \lim_{N\to\infty} F_N \quad , \quad M = -\frac{\partial F}{\partial h} = 2\beta z \frac{\partial F}{\partial z} \tag{8}$$

on montre alors facilement que pour $x > x_c$, on a

$$M(z) + M\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \tag{9}$$

dont on infère :

$$M(z=1) = 0 \tag{10}$$

Il n'y a pas de magnétisation spontanée. Au contraire pour $x < x_c$, les deux limites $M(z \to 1+)$ et $M(z \to 1-)$ peuvent être différentes (opposées à cause de (9)), car $z = 1$ n'est plus un point d'analyticité. On peut alors avoir une magnétisation spontanée.

L'équation (7) permet d'écrire une représentation des fonctions thermodynamiques dans la limite $N \to \infty$ introduite en (8). En effet si on considère les N zéros $z_i = e^{i\theta_i(x)}$ de $P_N(z)$, on a :

$$P_N(Z) = \Pi_i (z-z_i(x)) \tag{11}$$

On déduit de cette formule une représentation de F_N comme une somme qui se transforme en une intégrale dans la limite $N \to \infty$. En groupant deux par deux les zéros complexes conjugués on obtient :

$$P_N(z) = \Pi_i (z-e^{i\theta_i(x)})(z-e^{-i\theta_i(x)}) = \Pi_i (z^2-2z\cos(\theta_i(x))+1) \tag{12}$$

D'où :

$$\beta\, F_N = \frac{q}{4}\, \ell n\, x + \frac{1}{2}\, \ell n\, x - \frac{1}{N}\, \Sigma_i\, \ell n(z^2-2z\, \cos(\theta_i(x))+1) \tag{13}$$

A la limite $N \to \infty$, on obtient :

$$\beta F(z,x) = \frac{q}{4}\, \ell n\, x + \frac{1}{2}\, \ell n\, z - \int_0^\pi \ell n(1-2z\, \cos\theta + z^2)\, d\rho_x(\theta) \tag{14}$$

$$M(z,x) = 2\beta z\, \frac{\partial F}{\partial z} = 2(1-z^2) \int_0^\pi \frac{d\rho_x(\theta)}{1-2z\cos\theta + z^2} \tag{15}$$

$$\rho_x(\theta) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\, \mathcal{N}_N(x,\theta) \tag{16}$$

ou $\mathcal{N}_N(x,\theta)$ désigne le nombre de zéros de P_N compris dans l'intervalle angulaire $(0,\theta)$. N étant le degré de P_N on a :

$$\int_0^\pi d\rho_x(\theta) = \frac{1}{2} \tag{17}$$

Donc $d\rho_x(\theta)$ est une mesure positive de poids total égal à 1 sur l'intervalle $(0,2\pi)$. On a compté avec un poids $\frac{1}{2}$ les zéros éventuels aux points $z = \pm 1$.

La représentation (15) est une variante de la formule de Poisson qui permet d'exprimer une fonction analytique dans $|z| < 1$, en fonction de sa valeur au bord sur le cercle unité. En effet en écrivant (lorsqu'on en a le droit !) :

$$d\rho_x(\theta) = f_x(\theta)d\theta \tag{18}$$

on a alors :

$$f_x(\theta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r\to 1^-} \mathrm{Re}(M(z=r\ e^{i\theta},x)) \tag{19}$$

En d'autre termes, la densité de zéros est directement liée à la fonction magnétisation en champ imaginaire pur.

Nous allons montrer maintenant que le développement en puissance de z de M engendre un problème des moments trigonométriques : en effet, (15)se réecrit :

$$M(z,x) = -1+2 \int_0^{\pi} d\rho_x(\theta)\left\{\frac{1}{1-z\ e^{-i\theta}} + \frac{1}{1-z\ e^{i\theta}}\right\} \tag{20}$$

On en déduit le développement :

$$M(z,x) = 1-2 \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell\ m_\ell(x) z^\ell \tag{21}$$

$$\beta F(z,x) = \frac{q}{4}\ \ell n\ x + \frac{1}{2}\ \ell n\ z - \sum_{\ell\geq 1} m_\ell(x) z^\ell \tag{22}$$

avec

$$m_\ell(x) = -\frac{2}{\ell} \int_0^{\pi} d\rho_x(\theta)\ \cos(\ell\theta) \tag{23}$$

βM n'est donc rien d'autre que la fonction génératrice d'un problème des moments trigonométriques. On trouvera dans la littérature (voir articles de revues références [2] et [6]), de nombreux travaux consacrés au calcul des coefficients $m_\ell(x)$ qui portent souvent le nom de coefficients de Mayer-Yvon. Ils sont les propriétés suivantes :

a) $m_1(x) = x^q$ (24)

b) $m_\ell(x)$ est un polynôme de degré ℓq en x, pair si ℓq est pair, impair si ℓq est impair.

c) Le degré $d(\ell)$ le plus bas des termes non nuls de $m_\ell(x)$ est relié aux propriétés topologiques du réseau : $d(\ell) = \ell(q-2) + 2-L$ ou L est le nombre maximum de boucles indépendantes contenu dans une configuration de ℓ points, reliés entre eux lorsqu'ils sont voisins sur le réseau.

d) On peut définir le moment trigonométrique d'ordre zéro

$$m_o(x) = \frac{1}{2} = \int_0^{\pi} d\rho_x(\theta) \tag{25}$$

e) pour $\ell \geq 1$, $\ell m_\ell(x)$ est un polynôme à coefficients entier. Cette propriété est vérifiée pour tous les coefficients effectivements calculés. Elle est probablement vraie en général, au moins pour les réseaux les plus courants, mais une preuve complète manque encore. Dans la suite nous supposerons cette propriété vraie.

2) Le passage au problème des moments sur un intervalle

La représentation (15) de la magnétisation peut être mise sous la forme :

$$M(z,x) = 2\left(\frac{1-z}{1+z}\right)\int_0^\pi \frac{d\rho_x(\theta)}{1-\frac{4z}{(1+z)^2}\cos^2\frac{\theta}{2}} \tag{26}$$

D'où en posant :

$$v = \frac{4z}{(1+z)^2} = 1-\tanh^2(\beta h) \tag{27}$$

qui permet d'exprimer z en fonction de v :

$$\frac{1-z}{1+z} = \sqrt{1-v} \tag{28}$$

Cette expression donne pour $0 < v < 1$ la détermination correspondant aux valeurs physiques réelles et positives du champ magnétique : $h \geq 0$, $z \leq 1$. L'autre détermination de la racine donnera les champs magnétiques négatifs : $h \leq 0$, $z \geq 1$. La symétrie de renversement du champ magnétique (équation (9)) relie ici deux feuillets différents dans la variable v.

On a les équations suivantes déduites de (14) (15) et (26)

$$\beta F(z,x) = \frac{q}{4}\,\ell n\, x + \frac{1}{2}\,\ell n\,\frac{v}{4} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \mu_\ell \frac{v^\ell}{\ell} \tag{29}$$

$$\mu_\ell(x) = \int_0^\pi \left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^\ell d\rho_x(\theta) \quad , \quad \ell = 0,1,2\ldots \tag{30}$$

$$M(z,x) = 2\sqrt{1-v}\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \mu_\ell v^\ell\right) \tag{31}$$

$$\mu_o(x) = m_o(x) = \frac{1}{2} \tag{32}$$

En posant $y = 4\cos^2\frac{\theta}{2}$, $\theta = 2 \text{ Arc} \cos\sqrt{\frac{y}{4}}$ on peut écrire :

$$4^{\ell}\,\mu_{\ell}(x) = \int_0^4 y^{\ell}\, d\tau_x(y) \tag{34}$$

avec

$$\frac{d\tau_x(y)}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y(4-y)}}\,\frac{d\rho_x(\theta)}{d\theta}\Bigg|_{\theta = 2\text{ Arc}\cos\sqrt{\frac{y}{4}}} \tag{35}$$

$$\overline{M}(v,x) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right) M(z,x) = 2\int_0^4 \frac{d\tau_x(y)}{1-\frac{v}{4}y} \tag{36}$$

$\overline{M}$ est le rapport entre la magnétisation M et la magnétisation $\tanh(\beta h)$ d'un système de spin non couplés. Les équations (34) et (36) montrent que $\overline{M}$ est la fonction génératrice d'un problème des moments sur l'intervalle (0,4). La mesure $d\tau_x(y)$ étant positive, $\overline{M}$ est une fonction de Stieltjes.

Mais $\left(4\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{\ell} = (e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2})^{2\ell}$. Le développement du binome permet alors de relier les moments trigonométriques (équation (23)) aux moments $\mu_{\ell}(x)$ (équation 30)

$$\mu_o(x) = m_o(x) = \frac{1}{2} \tag{37}$$

$$4^{\ell}\,\mu_{\ell}(x) = \binom{2\ell}{\ell} m_o - \sum_{p=1}^{\ell} \binom{2\ell}{\ell-p}\, p\, m_p(x) \tag{38}$$

or grâce à l'identité dont la vérification est immédiate :

$$\binom{2\ell}{\ell} = 2(2\ell-1)\left\{2\binom{2\ell-2}{\ell-1} - \binom{2\ell-1}{\ell}\right\} \tag{39}$$

on déduit que $\binom{2\ell}{\ell} m_o = \frac{1}{2}\binom{2\ell}{\ell}$ est un nombre entier.

Donc si $p\, m_p(x)$ est un polynôme à coefficients entiers (pour tout $p > 1$) il en est de même de $4^{\ell}\mu_{\ell}(x)$ (pour tout $\ell > 1$). Il existe une réciproque. On a en effet $\cos \ell\theta = T_{2\ell}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)$ et le développement classique des polynômes de Tchebycheff $T_n(x)$ permet d'écrire :

$$\ell\, m_{\ell}(x) = (-1)^{\ell+1}\, 2\mu_o + \sum_{p=1}^{\ell} (-1)^{\ell-p+1}\, \frac{\ell}{p}\binom{\ell+p-1}{\ell-p} 4^p \mu_p(x) \tag{40}$$

L'identité immédiate :

$$\frac{\ell}{p}\binom{\ell+p-1}{\ell-p} = 2\binom{\ell+p}{\ell-p} - \binom{\ell+p-1}{\ell-p} \tag{41}$$

montre que si $4^p\mu_p(x)$ est un polynôme à coefficients entiers pour tout p, il en est de même pour $\ell\, m_\ell(x)$.

Les coefficients $\mu_\ell(x)$ ont les propriétés suivantes[7] :

a) $4\mu_1(x) = 1 - x^q$ (42)

b) $4^\ell \mu_\ell(x)$ est un polynôme de degré ℓq en x, pair si q est pair.

c) $\mu_o = 1/2$

d) $4^\ell\mu_\ell(x)$ est un polynôme à coefficients entiers (sous les mêmes réserves que la propriété mentionnée plus haut pour les m_ℓ).

e) $4^\ell\mu_\ell(x)$ est divisible par $(1-x)^\ell$ si q est impair et par $(1-x^2)^\ell$ si q est pair (voir[7] pour la preuve) on écrira donc dans le cas q pair :

$$4^\ell\mu_\ell(x) = (1-x^2)^\ell\ \pi_\ell(x^2) \quad . \tag{43}$$

π_ℓ est un polynôme de degré $\frac{1}{2}\ \ell(q-2)$ de la variable x^2. On trouvera dans[7] des tables de ces polynômes pour les réseaux les plus courant. On observe que les coefficients de π_ℓ sont non seulement entiers mais tous positifs, propriété que nous ne savons ni prouver ni infirmer en général.

Nous terminerons cette partie par une remarque sur le support de la mesure. A haute température (x voisin de 1), la densité de zéros ne recouvre pas tout le cercle et l'intégrale (15) porte en fait non pas sur l'intervalle $(0,\pi)$ mais sur l'intervalle $(\theta_o(x),\pi)$. L'angle θ_o tend vers π lorsque x tend vers 1, mais décroit lorsque x décroit, pour atteindre la valeur zéro à la température critique atteinte pour $x = x_c$. En-dessous le support recouvre le cercle entier ce qu'on écrit

$$\theta_o(x) = 0 \quad , \quad 0 \le x \le x_c \quad . \tag{44}$$

Par conséquent dans les formules (34) et (36), l'intégrale porte en fait sur l'intervalle $\left(0,\ 4\cos^2\frac{\theta_o(x)}{2}\right)$.

3) Le problème des moments à coefficients polynômiaux

En utilisant la propriété (43) nous pouvons toujours dans le cas ou q est pair, effectuer un nouveau changement de variable dans la représentation de Stieltjes (36) de $\overline{M}$:

$$y = \rho(1-x^2) \tag{45}$$

$$\overline{M} = 2 \int_0^{4/(1-x^2)} \frac{d\sigma_x(\rho)}{1 - \frac{v}{4}(1-x^2)\rho} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{v(1-x)^2}{4}\right)^{\ell} \pi_\ell(x^2) \tag{46}$$

avec

$$\int_0^{4/(1-x^2)} \rho^{\ell} d\sigma_x(\rho) = \frac{4^{\ell}\mu_\ell(x)}{(1-x^2)^{\ell}} = \pi_\ell(x^2) \tag{47}$$

Dans ces deux équations l'intégrale porte en fait sur l'intervale $(0, \Lambda(x))$ avec :

$$\Lambda(x) = \frac{4 \cos^2 \frac{\theta_o}{2}}{1 - x^2} \tag{48}$$

et

$$\frac{d\sigma_x(\rho)}{d\rho} = (1-x^2)\frac{d\tau_x(y)}{dy} \tag{49}$$

Nous avons donc un problème des moments polynômiaux :

$$\int_0^{\Lambda(x)} \rho^{\ell} \, d\sigma_x(\rho) = \pi_\ell(x^2) \tag{50}$$

avec les propriétés suivantes (toujours dans le cas où q est pair) :

a) pour $\ell > 1$ π_ℓ est un polynôme de degré $\frac{\ell(q-2)}{2}$ de la variable x^2, a coefficients entiers,

b) la fonction génératrice des moments est reliée à la magnétisation :

$$\Sigma\, \pi_\ell(x^2)\xi^{\ell} = \overline{M}(v,x) = \frac{M(z,x)}{\tanh\beta h} \tag{51}$$

en posant

$$\xi = \frac{v(1-x)^2}{4} = \frac{(1-\tanh^2\beta h)(1-x^2)}{4} \tag{52}$$

c) $\pi_o = \frac{1}{2}$

d) dans l'intervalle (0,1) le support $\Lambda_o(x) = \frac{4\cos^2\theta_o/2}{x-2}$ est en fait borné (voir références [1] et [7]) :

$$\pi - \theta_o/2 \leq \frac{q}{2}(\pi-\psi) \text{ avec } x = \sin\frac{\psi}{2}.$$

Au voisinage de x = 1, ceci implique :

$$\Lambda_o(x) \leq q^2 \quad , \quad x = 1_- \tag{53}$$

De plus en admettant que soit vérifiée pour toutes les valeurs de ℓ, la propriété déjà mentionnée de positivité des coefficients de $\pi_\ell(x^2)$ définis en (38), on déduit que $\Lambda(x)$ doit être une fonction non décroissante de x sur [0,1]. En effet $\Lambda_o(x)$ n'est autre que l'inverse du rayon de convergence en ξ de la série $\Sigma\ \pi_\ell(x^2)\xi^\ell$. On a donc, sous ces hypothèses

$$\Lambda_o(x) \leq q^2 \quad \forall x \in [0,1] \tag{54}$$

4) Un cas particulier : le modèle d'Ising en dimension 1

Dans ce cas on connait exactement la solution[3] :

$$M(z,x) = \left\{\frac{z^2-2z+1}{z^2-2z(1-2x^2)+1}\right\}^{1/2} = \frac{1-z}{1+z}\left\{1 - \frac{4z}{(1+z)^2}(1-x^2)\right\}^{1/2} \tag{55}$$

qui admet la représentation (15) avec

$$d\rho_x(\theta) = f_x(\theta)d\theta \tag{56}$$

$$\begin{cases} f_x(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sin(\theta/2)}{(\sin^2(\theta/2)-x^2)^{1/2}} & \text{pour } \theta > \theta_o(x) \\ f_x(\theta) = 0 & \text{pour } \theta < \theta_o(x) \end{cases} \tag{57}$$

$\theta_o(x)$ est défini par :

$$\sin \frac{\theta_o(x)}{2} = x \tag{58}$$

θ_o ne s'annule que lorsque x tend vers zéro : en dimension 1, la température critique est nulle.

Nous donnons maintenant les valeurs des autres quantités définies au paragraphe précédent (les calculs sont élémentaires) :

$$\frac{d\tau_x(y)}{dy} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{y(4(1-x^2)-y)}} \qquad 0 < y < 4(1-x^2) \tag{59}$$

$$4^{\ell}\pi_{\ell}(x) = \frac{1}{2}\binom{2\ell}{\ell}(1-x^2)^{\ell} \tag{60}$$

$\pi_{\ell}(x^2)$ est une constante :

$$\pi_{\ell}(x^2) = \frac{1}{2}\binom{2\ell}{\ell} = \int_o^4 \frac{\rho^{\ell} d\rho}{2\pi\sqrt{\rho(4-\rho)}} \tag{61}$$

de même que $\Lambda(x) = 4$.

Les nombres π_{ℓ} sont entiers (sauf $\pi_o = \frac{1}{2}$) et sont les moments d'une mesure positive de support [0,4]. La fonction génératrice des π_{ℓ} se déduit de (55) :

$$\Sigma\, w^{\ell}\pi_{\ell} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-4w}} = \frac{1}{2\pi}\int_o^4 \frac{d\rho}{\sqrt{\rho(4-\rho)}}\frac{1}{1-w\rho} \tag{62}$$

Dans ce cas nous avons un problème des moments entiers, que nous appelerons par la suite problème des moments diophantien.

5) Réduction des moments polynômiaux aux moments entiers

De (47) et (48) on déduit :

$$\pi_{\ell}(x^2) = \int_o^{\Lambda(x)} \rho^{\ell}\, d\sigma_x(\rho) \tag{63}$$

d'après (48) et (53), $\Lambda(x)$ est borné et suivant (54) sa borne supérieure est égale à q^2 :

$$0 \leq \Lambda(x) \leq q^2 \qquad \forall\, x \quad [0,1] \tag{64}$$

Donc la fonction génératrice des π_ℓ donnée en (51) s'écrit

$$S(x^2,\xi) = \Sigma\ \pi_\ell(x^2)\xi^\ell = \int_0^{q^2} \frac{d\sigma_x(\rho)}{1 - \rho\xi} \tag{65}$$

Mais π_ℓ étant un polynôme de degré $\frac{\ell(q-2)}{2}$ en x^2, il est possible de nous ramener a un problème des moments diophantien pour toute valeur rationnelle de x^2 :

$$x^2 = \frac{r}{s} \tag{66}$$

ou r et s sont des entiers premiers entre eux.

On peut introduire les entiers n_ℓ (sauf $n_o = \frac{1}{2}$)

$$n_\ell = s^{\frac{\ell(q-2)}{2}}\ \pi_\ell\left(\frac{r}{s}\right) \tag{67}$$

et

$$S\left(\frac{r}{s}, \xi\right) = \Sigma_\ell\left(\xi\ s^{\frac{2-q}{2}}\right)^\ell n_\ell \tag{68}$$

Donc en prenant comme nouvelle variable

$$W = \xi\ s^{\frac{2-q}{2}} \tag{69}$$

on obtient pour la fonction génératrice des n_ℓ une représentation de Stieltjes :

$$\Sigma\ n_\ell\ w^\ell = \int_0^\Lambda \frac{d\mu(\lambda)}{1-\lambda w} \tag{70}$$

avec

$$\Lambda = q^2 s^{\frac{q-2}{2}} \tag{71}$$

$$n_\ell = \int_0^\Lambda \lambda^\ell d\mu(\lambda) \quad , \quad n_o = \frac{1}{2} \tag{72}$$

Nous avons pu au prix d'une extension du support, ramener le cas ou x^2 est rationnel à un problème de moments entiers sur un intervalle $[0,\Lambda]$ avec dans notre cas $\Lambda > q^2$. Cet intervalle se réduit à 4 dans le cas $q = 2$ examiné au paragraphe précédent, correspondant à la dimension 1. Nous avons fait une exception en admettant que $n_o = \frac{1}{2}$,les autres moments étant entiers. Il va de soi que ce problème est équivalent à $n_o = 1$, les autres moments étant pairs. Il suffit pour cela de multiplier $d\mu(x)$ par 2.

Terminons par une remarque : en faisant varier x^2 d'un rationnel à un rationnel voisin, le dénominateur s, et donc la longueur du support peut varier dans des proportions considérables. Nous verrons dans la section 5 que cette variation n'est pas déterminante. Cependant, les propriétés de continuité en x du problème doivent être également considérées et doivent apporter de nouvelles restrictions. Ceci est une question ouverte.

3. LE PROBLEME DES MOMENTS DIOPHANTIEN POUR $\Lambda < 4$

Nous étudions les mesures positives $d\mu(x)$, de support inclus dans l'intervalle $[0,\Lambda]$, $\Lambda < 4$, pour lesquelles les moments n_ℓ sont des nombres entiers :

$$n_\ell = \int_0^\Lambda x^\ell d\mu(x) \quad . \tag{73}$$

Nous considérons la fonction génératrice :

$$G(z) = \int_0^\Lambda \frac{d\mu(x)}{1-xz} = \Sigma_\ell n_\ell z^\ell \tag{74}$$

G(z) est une fonction de Stieltjes, analytique dans un plan coupé le long de l'axe réel, entre $\frac{1}{\Lambda}$ et $+\infty$. On autorise la présence dans $d\mu(x)$ de distributions de Dirac aux extremités de l'intervalle 0 et Λ. Nous allons montrer le :

Théorème 1 :

Pour $\Lambda < 4$, $d\mu(x)$ est une mesure discrète c'est-à-dire une superposition de mesuresde Dirac et G(z) est une fraction rationnelle dont tous les pôles sont simples, réels et situés dans l'intervalle $[\frac{1}{\Lambda},+\infty]$.

Une preuve de ce théorème est donnée dans[1]. Nous allons donner ici une preuve différente qui utilise le théorème suivant :

Théorème 2 :

Pour tous intervalle $[\alpha,\beta]$, tel que $0 < \beta-\alpha < 4$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite infinie de polynômes à coefficients entiers $P_i(x)$, de degrés d_i croissants et non nécessairement consécutifs : $d_1 < d_2 \ldots < d_n < \ldots$, tels que : $|P_i(x)| < \varepsilon$, $\forall\, x \in [\alpha,\beta]$. Le coefficient de plus haut degré de chaque polynôme $P_i(x)$ est égal à $+1$.

Nous donnons ici une preuve extraite de [8]. On considère tout d'abord la suite des polynômes $U_m(y)$ définis par : $U_m(y) = 2\cos(m\theta)$ avec $y = 2\cos\theta$. $U_m(y)$ est un polynôme de degré n dont il est facile de voir que le terme de plus haut degré est égal à 1. On considère ensuite les polynômes $W_m(x)$ définis par :

$$W_m(x) = \left(\frac{\beta-\alpha}{4}\right)^m U_m\left(\frac{4x-2(\beta+\alpha)}{\beta-\alpha}\right) \tag{75}$$

W_m est un polynôme de degré m, le coefficient du terme de plus haut degré étant égal à 1. De plus on vérifie aisément que

$$|W_m(x)| < 2\left(\frac{\beta-\alpha}{4}\right)^m \qquad \forall\ x \in [\alpha,\beta] \tag{76}$$

Dans la suite, on séparera la partie entière [a] du réel a par la formule :

$$a = [a] + \{a\} \qquad \text{avec} \qquad 0 \leq \{a\} < 1 \tag{77}$$

On veut extraire de la suite des polynômes $W_m(x)$, des polynômes $S^n_{n-k}(x)$ dont les (k+1) termes de plus haut degrés ont des coefficients entiers (de x^n à x^{n-k} inclus) :

$$S^n_{n-k}(x) = \sum_{p=0}^{k} r^n_{n-k,p}\ x^{n-p} + \sum_{p=k+1}^{n} a^n_{n-k,p}\ x^{n-p} \tag{78}$$

Ces polynômes sont définis recursivement par :

$$\begin{cases} S^n_n(x) = W_n(x) \\ S^n_{n-1}(x) = S^n_n(x) - \{a^n_{n,1}\}W_{n-1}(x) \\ S^n_{n-k}(x) = S^n_{n-k+1}(x) - \{a^n_{n-k+1,k}\}W_{n-k}(x) \end{cases} \tag{79}$$

En d'autres termes on arrondit successivement les coefficients d'ordre n-k en soustrayant la partie décimale non pas multipliée par x^{n-k} mais par $W_{n-k}(x)$. La raison est que l'on a une majoration pour W_m sur une intervalle plus large. Plus précisément on peut de toute façon réecrire (79)

$$S^n_{n-k}(x) = \sum_{p=0}^{k} \alpha_p\ W_{n-p}(x) \qquad \text{avec} \qquad |\alpha_p| \leq 1 \tag{80}$$

Donc $\forall\ x \in [\alpha,\beta]$, on a :

$$|S^n_{n-k}(x)| \leq \sum_{j=n-k}^{n} |W_j(x)| \leq 2 \sum_{j=n-k}^{n} \left(\frac{\beta-\alpha}{4}\right)^j \tag{81}$$

Soit en posant $\ell = (n-k)$,

$$|S^n_\ell(x)| \leq 2\left(\frac{\beta-\alpha}{4}\right)^\ell \frac{1}{1-\left(\frac{\beta-\alpha}{4}\right)} \tag{82}$$

Donc on peut $\forall\ \varepsilon > 0$, trouver un entier $\ell = n-k$, tel que

$$\forall\ x \in [\alpha,\beta],\ \forall\ \ n \geq \ell \quad , \qquad |S^n_\ell(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{83}$$

Les coefficients de $S^n_\ell(x)$ sont entiers sauf les ℓ plus bas (allant de x^o jusqu'à $x^{\ell-1}$). Si on développe maintenant $S^n_\ell(x)$, on peut séparer à nouveau partie entière et décimale :

$$S^n_\ell(x) = \sum_{j=0}^{n} C_j\ x^j = V_n(x) + \pi_n(x) \tag{84}$$

$$V^n_\ell(x) = \sum_{j=0}^{n} [C_j]\ x^j \tag{85}$$

$$\pi^n_\ell(x) = \sum_{j=0}^{k} \{C_j\}\ x^j, |C_j| \leq 1 \tag{86}$$

Les $\pi^n_\ell(x)$ forment pour $n = \ell,\ell+1,\ldots$, une suite infinie de polynômes de degré k, dont tous les coefficients sont bornés par 1. L'ensemble de tels polynômes étant compact, cette suite infinie admet un point d'accumulation. Il existe donc une sous suite infinie de polynôme $\pi_\ell^{n_i}(x)$, $i = 1,2,\ldots$, correspondant à des n_i croissants tels que les coefficients de $(\pi_\ell^{n_i} - \pi_\ell^{n_j})$ soient bornés par $\varepsilon/[3(\ell+1)\sup(|\alpha|^\ell,|\beta|^\ell)]^{-1}$, ainsi on a :

$$|\pi_\ell^{n_i}(x) - \pi_\ell^{n_j}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall\ x \in [\alpha,\beta],\ \forall_{i,j} \tag{87}$$

Mais de (84) on déduit alors :

$$V_\ell^{n_i}(x)-V_\ell^{n_j}(x) = S_\ell^{n_i}(x)-S_\ell^{n_j}(x)-(\pi_\ell^{n_i}(x)-\pi_\ell^{n_j}(x)) \tag{88}$$

qu'on peut alors majorer en utilisant (83) et (87), pour tout $x \in [\alpha,\beta]$:

$$|V_\ell^{n_i}(x)-V_\ell^{n_j}(x)| \le |S_\ell^{n_i}(x)| + |S_\ell^{n_j}(x)| + |\pi_\ell^{n_i}(x)-\pi_\ell^{n_j}(x)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \tag{89}$$

Tous les polynômes $V_\ell^{n_i}(x)-V_\ell^{n_j}(x)$ ainsi construits ont des coefficients entiers, ont des degrés (ici $\sup(n_i,n_j)$) croissants, de plus le terme de plus haut degré est égal à 1 comme on le voit d'après (79) et (85). Le théorème 2 est donc démontré.

Montrons maintenant le théorème 1. Pour $\Lambda < 4$, il existe d'après le théorème 2, un polynôme $P(x)$ à coefficients entiers tel que :

$$\forall\, x \in [0,\Lambda] \quad , \quad |P(x)| < 1 \tag{90}$$

On considère la suite de nombres :

$$m_k = \int_0^\Lambda P(x)^{2k}\, d\mu(x) \tag{91}$$

Ces nombres sont entiers car les coefficients de $P(x)$ et les moments de la mesure sont entiers. En vertu de (90) cette suite m_k est monotone non croissante et bornée inférieurement par zéro. Les m_k ont donc une limite et comme ils sont entiers, à partir d'un certain order k_o, on doit avoir

$$m_{k_o} = m_{k_o+1} = m_{k_o+2} = \ldots \tag{92}$$

Mais alors

$$m_{k_o} - m_{k_o+1} = \int_0^\Lambda P(x)^{2k_o}(1-P^2(x))d\mu(x) = 0 \tag{93}$$

La positivité de la mesure impose que la mesure soit une mesure discrète concentrée sur les zéros de $P(x)$, et de plus on obtient $k_o = 1$. On en déduit que la fonction génératrice (74) est une fraction rationnelle dont les pôles simples sont situés sur l'intervalle $[1/\Lambda,\infty]$ ce qui établit le Théorème 1.

Remarquons que tous les zéros de $P(x)$ ne sont pas nécessairement présents. Une des conséquences du théorème se voit en exprimant $G(z)$

sous forme irréductible :

$$G(z) = \frac{Q_s(z)}{R_d(z)} \tag{94}$$

Si les degrés de Q et R sont s et d respectivement, il existe une relation à (d+1) termes entre les moments pour $\ell > s$:

$$R(z) = r_o + r_1 z + \ldots + r_d z^d \tag{95}$$

$$r_o n_\ell + r_1 n_{\ell-1} + \ldots + r_d n_{\ell-d} = 0 \tag{96}$$

Cette relation exprime les m_ℓ de façon récurrente unique à partir des (s+1) premiers $n_o, \ldots n_s$.
Dans tous les cas on voit que les moments de la mesure ne sont pas indépendants, et dépendent d'un nombre fini (ici (s+1)) de paramètres.

Donnons quelques exemples :

1) $\Lambda = 1 - \varepsilon$, $P(x) = x$, $d\mu(x) = n_o \delta(x)$, $G(z) = n_o$ (97)

G(z) est indépendant de z.

2) $\Lambda = 1$, $P(x) = x(x-1)$, $d\mu(x) = \sigma_o \sigma(x) + \sigma_1 \delta(x-1)$,

$$G(z) = \sigma_o + \frac{\sigma_1}{1-z} \quad , \quad n_o = \sigma_o + \sigma_1 \quad , \quad n_k = \sigma_1 \quad \forall k \geq 1 \tag{98}$$

σ_o et σ_1 doivent être positifs.

Cette solution s'étend jusqu'à $\Lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ valeur où le polynôme P(x) atteint la valeur -1.

3) $\Lambda = 2$, $P(x) = x(x-1)(x-2)$, $d\mu(x) = \sigma_o \delta(x) + \sigma_1 \delta(x-1) + \sigma_2 \delta(x-2)$

$$G(z) = \sigma_o + \frac{\sigma_1}{1-z} + \frac{\sigma_2}{1-2z} \; , \; n_o = \sigma_o + \sigma_1 + \sigma_2 \; , \; n_k = \sigma_1 + 2^k \sigma_2 \quad \forall\, k > 1 \tag{99}$$

cette solution s'étend jusqu'à $\Lambda \approx 2.32$, valeur pour laquelle P(x) atteint la valeur -1. σ_o, σ_1 et σ_2 sont positifs.

4) $\Lambda = 3$, on considère le polynôme $P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ qui s'exprime aussi :

$$P(x) = -1 + \left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right)^2 \tag{100}$$

Ce polynôme ne satisfait pas aux conditions du théorème, puisqu'il atteint la valeur -1 pour $x = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, valeurs numériquement égales à 2,618 et 0,381 respectivement. On peut néanmoins utiliser P(x) dans l'argument en remarquant que la formule (93) autorise alors la mesure $d\mu(x)$ à avoir des contributions aux points ou P(x) atteint les valeurs ± 1. Donc

$$\left.\begin{aligned} d\mu(x) &= \sigma_o\delta(x) + \sigma_1\delta(x-1) + \sigma_2\delta(x-2) + \sigma_3\delta(x-3) \\ &+ \sigma_+\delta\left(x - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right) + \sigma_-\delta\left(x - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

$$\left.\begin{aligned} n_o &= \sigma_o + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_+ + \sigma_- \\ n_k &= \sigma_1 + 2^k\sigma_2 + 3^k\sigma_3 + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k\sigma_+ + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k\sigma_- \quad \forall k \geq 1 \end{aligned}\right\} \tag{102}$$

La preuve s'étend jusqu'à $\Lambda \approx 3.132$, valeur pour laquelle P(x) atteint la valeur +1.

La fonction génératrice correspondant aux moments (102) est une fraction rationnelle $\frac{Q_5(x)}{R_5(x)}$ où

$$R_5(x) = (1-x)(1-2x)(1-3x)(1-3x+x^2) \tag{103}$$

Les poids $\sigma_o, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_+$ et σ_- doivent être positifs et peuvent se calculer à partir des six premiers moments (de n_o à n_5). La relation de récurrence (95) correspondant au polynôme (103) assure alors que tous les autres moments sont bien entiers.

L'examen de ces quelques cas appelle une clarification donnée par le théorème suivant, que nous démontrerons dans la section 4 suivante consacrée au cas $\Lambda = 4$, (voir théorème 5).

Théorème 3 :

Pour $\Lambda < 4$, les points de la mesure discrète donnée par le théorème 1 sont tous de la forme :

$$x = 4\cos^2\left(\frac{k\pi}{p}\right) \tag{104}$$

où $p > 2$ est entier et k peut prendre les valeurs de 1 à r, avec $r = \left[\frac{p}{2}\right]$.

Par exemple, pour $p = 2$ on obtient $x = 0$, pour $p = 3$, $x = 1$, pour $p = 4$, $x = 0$ et 2, pour $p = 5$, $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et pour $p = 6$, $x = 0$, 1 et 3. Les petites valeurs de p nous permettent de retrouver les résultats déjà mentionnés.

L'apparition successive des divers points discrets de la mesure lorsque Λ augmente n'est pas totalement clarifiée, aussi nous la formulerons sous la forme de la conjecture suivante :

Conjecture 4

Les points discrets de la mesure donnée par le théorème 1 sont de la forme :

$$x = 4 \cos^2\left(\frac{k\pi}{p}\right) \quad \text{avec} \quad 2 \leq p \leq R \quad \text{or } k = 1,2,\ldots,\left[\frac{p}{2}\right] \,. \tag{105}$$

L'ordre maximum R est relié à la longueur du support Λ par la relation :

$$4 \cos^2\left(\frac{\pi}{R}\right) \leq \Lambda < 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{R+1}\right) \tag{106}$$

En d'autres termes [9], lorsque le support augmente, de nouveaux points discrets peuvent apparaitre dans le support de la mesure, chaque fois que Λ atteint une valeur de la forme $4 \cos^2\left(\frac{\pi}{R}\right)$. Nous avons vérifié la conjecture jusqu'à $R = 10$.

Le théorème 2 montre que pour $\Lambda = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{R}\right)$, seul un nombre fini de points sont permis, puisqu'il existe un polynôme à coefficient entiers $P(x)$ strictement plus petits que 1 en module sur $[0,\Lambda]$. D'autre part, $P(x)$ doit certainement s'annuler à tous les points de la forme $4 \cos^2\left(\frac{k\pi}{p}\right)$ avec $2 \leq p \leq R$, car on peut construire des exemples de fractions rationnelles (ou par correspondance de mesures) répondant aux conditions, et ayant comme points discrets tous les points $4 \cos^2\left(\frac{k\pi}{R}\right)$. Nous les indiquerons dans la section (5,6) suivante).

Certes les points $4 \cos^2 \frac{\pi}{p}$, $p > R$ ne figure pas dans l'intervalle $[0,\Lambda]$, mais qu'en est il des points du type $4 \cos^2\left(\frac{k\pi}{p}\right)$, $p > R$, $k > 1$, qui eux peuvent s'y trouver. L'objet de la conjecture est de les exclure.

4) LE PROBLEME DES MOMENTS DIOPHANTIEN POUR $\Lambda = 4$

1) Introduction

On considère tout d'abord la fonction :

$$\frac{1}{\sqrt{1-4z}} = \Sigma_n \binom{2n}{n} z^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} \frac{1}{1-xz} \qquad (107)$$

Cette fonction est bien la fonction génératrice d'un problème des moments entiers sur [0,4]. Ce n'est pas une fraction rationnelle. Les théorèmes 1 et 2 sont donc en défaut sur [0,4]. Pour étudier le cas $\Lambda = 4$, nous devons donc emprunter une autre voie et pour cela nous allons introduire la transformation de La Vallée Poussin dont l'objet est d'associer au problème des moments sur [0,4] un problème des moments trigonométriques.

2) La transformation de La Vallée Poussin

La fonction :

$$G(z) = \int_0^4 \frac{d\mu(x)}{1-xz} \qquad (108)$$

est analytique dans le plan complexe de la variable z coupé le long de l'axe réel de $\frac{1}{4}$ à ∞. Ce plan coupé est l'image de l'intérieur du cercle de rayon unité centré à l'origine dans la variable u par la transformation :

$$z = \frac{u}{(1+u)^2} \qquad (109)$$

La transformation de La Vallée Poussin associe à G(z) la fonction I(u)

$$I(u) = G(o) + \frac{1-u}{1+u} G\left(\frac{u}{(1+u)^2}\right) \qquad (110)$$

I(u) est analytique dans le domaine $|u| < 1$, et admet la représentation intégrale :

$$I(u) = \int_0^4 d\mu(x) \frac{2+(2-x)u}{1+(2-x)u+u^2} \qquad (111)$$

On fait le changement de variable :

$$\begin{aligned} x &= 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow 2(1+\cos\theta) \\ dx &= -2 \sin\theta \, d\theta \end{aligned} \qquad (112)$$

et on pose par commodité de notations :

$$d\mu(x) = \sigma(x)dx \tag{113}$$

On obtient :

$$I(u) = \int_0^{\pi} 2\sin\theta\,\sigma\!\left(4\cos^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta\,\frac{2-2\cos\theta}{1-2u\cos\theta+u^2} \tag{114}$$

$$I(u) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2}\,g(\theta)d\theta\left(\frac{1}{1-ue^{i\theta}}+\frac{1}{1-ue^{-i\theta}}\right) = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{g(\theta)d\theta}{1-ue^{i\theta}} \tag{115}$$

avec

$$g(\theta) = 2|\sin\theta|\sigma\!\left(4\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\ ,\ g(\theta) = g(-\theta) \tag{116}$$

De (115) on déduit :

$$I(u) = \Sigma_n C_n\, u^n \tag{117}$$

$$C_n = \int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)d\theta\,\cos n\theta \tag{118}$$

$$C_o = I(0) = 2G(0) \tag{119}$$

La formule (110) montre que si le développement de G en puissance de z est à coefficients entiers, il en est de même pour le développement de I en puissance de u.

Plus précisément le développement de G(z) est donné par

$$G(z) = \Sigma_\ell n_\ell z^\ell \tag{120}$$

Dans la formule (118) l'expression de cos $n\theta$ en puissance de cos $\frac{\theta}{2}$, c'est à dire sous forme d'un polynome de Tchebycheff d'ordre 2n, permet de revenir à la variable $x = 4\cos^2\frac{\theta}{2}$. On obtient :

$$\begin{cases} C_n = 2(-1)^n n_o + \sum\limits_{p=1}^{n} (-1)^{n-p}\,\frac{n}{p}\begin{pmatrix} n+p-1 \\ n-p \end{pmatrix} n_p,\ n \geq 1 \\ C_o = 2n_o \end{cases} \tag{121}$$

L'identité (41) déjà mentionnée montre que le développement des C_n sur les n_p est à coefficients entiers. Les formules inverses de la transformation de la Vallée Poussin correspondant aux équations (110) et (121) sont respectivement :

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4z}} \left(I\left(\frac{1-\sqrt{1-4z}}{1+\sqrt{1-4z}}\right) - \frac{1}{2} I(0) \right) \tag{122}$$

$$n_\ell = \frac{1}{2} \binom{2\ell}{\ell} C_o + \binom{2\ell}{\ell-1} C_1 + \ldots + \binom{2\ell}{\ell-p} C_p + \ldots + C_\ell \tag{123}$$

$$n_o = C_o/2 \tag{124}$$

La transformation (110) transforme une fonction G analytique dans un plan coupé de $\frac{1}{4}$ à ∞, en une fonction I analytique dans le cercle unité. La représentation intégrale (115) exprime I(u) en fonction de sa valeur au bord sur le cercle unité. En effet, on a :

$$\mathrm{Re}\left\{ \lim_{r\to 1_-} (I(re^{i\theta})) \right\} = \frac{I(0)}{2} + \pi g(\theta)$$

Enfin on peut considérer la représentation intégrale (115) pour $|u| > 1$, elle définit alors une fonction $I_\ell(u)$ et on a pour $|u| < 1$:

$$\begin{aligned} &I(u) + I_e\left(\frac{1}{u}\right) = I(0) \\ &\lim_{r\to 1_-} I(re^{i\theta}) - \lim_{r\to 1_+} I_e(re^{i\theta}) = 2\pi g(\theta) \end{aligned} \tag{125}$$

3) Problème des moments trigonométriques entiers : les fractions rationnelles

Si tous les moments n_ℓ de la mesure $d\mu(x) = \sigma(x)dx$ sont entiers :

$$n_\ell = \int_o^4 x^\ell \sigma(x)dx \tag{126}$$

alors la mesure $g(\theta)d\theta$, définie en (116) admet des moments trigonométriques C_n entiers :

$$C_n = \int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)d\theta \cos n\theta \tag{127}$$

et de plus C_o est pair. On peut supprimer cette dernière restriction en autorisant au départ n_o à être demi entier. Alors tout problème de moments trigonométriques entier est équivalent à un problème de moments entiers sur (0,4), n_o étant demi entier lorsque C_o est impair. Mais la fonction génératrice des moments trigonométriques est alors une fonction holomorphe dans le cercle unité, admettant un développement à coefficients entiers, et ayant sur le cercle une valeur au bord à partie réelle positive. Remarquons tout d'abord que le cas $\Lambda < 4$ étudié dans la section précédente correspond au cas où $g(\theta)$ est nulle dans un intervalle entourant la valeur 0, et on sait qu'alors $G(z)$ et donc $I(u)$ est une fraction rationnelle.

Nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 5 :

Toute fonction génératrice $I(u)$ d'un problème des moments trigonométriques entiers satisfaisant à (117) et (118), et qui est une fraction rationnelle peut s'écrire de la façon suivante :

$$I(u) = \frac{C_o+C_1 u+\ldots+C_{N-1}u^{N-1}+(C_N-C_0)u^N}{1-u^N} \tag{128}$$

La preuve repose sur la positivité de la mesure. En effet, de (127) on déduit, puisque g est positive :

$$-C_o \leq C_n \leq +C_o \tag{129}$$

Chaque nombre C_n ne peut donc prendre qu'un nombre fini égal à $(2C_o+1)$ de valeurs différentes. Une séquence de k nombres consécutifs C_n, $C_{n+1},\ldots,C_{n+k}$, . Il peut donc prendre que $(2C_o+1)^k$ ensemble de valeurs distinctes. Une telle séquence se répètera donc nécessairement, c'est-à-dire, quelque soit n, et k, il existera un n' supérieur à n+k tel que :

$$C_{n+j} = C_{n'+j} \qquad \text{pour} \qquad j = 0,1,\ldots k. \tag{130}$$

D'autre part si $I(u)$ est une fraction rationnelle, on peut écrire sa forme irréductible :

$$I(u) = \frac{Q_s(u)}{P_m(u)} \tag{131}$$

ou les polynômes Q_s et P_m ont pour degré respectifs s et m alors les coefficients du développement de I satisfont une relation de récurrence :

$$p_o C_n + p_1 C_{n-1} + \ldots + p_m C_{n-m} = 0 \qquad \text{pour } n > s \tag{132}$$

L'analyticité au voisinage de l'origine assure que $p_o \neq 0$, et donc cette relation permet de connaitre C_n lorsqu'on connait les m termes précédents de la suite. $C_{n-1}, C_{n-2}, \ldots C_{n-m}$. Mais nous avons vu qu'une suite de longueur m commençant par C_{n_o} pour un n_o donné plus grand que s : $C_{n_o}, C_{n_o+1}, \ldots C_{n_o+m-1}$, va nécessairement se répéter, c'est-à-dire il existe un N tel que

$$C_{n_o+j} = C_{n_o+N+j} \qquad \text{pour} \quad j = 1,2,\ldots m-1 \ . \tag{133}$$

Alors la relation de récurrence montre que cette égalité est vraie pour j = m, puis à nouveau pour j = m+1, etc... c'est-à-dire pour tout j. La suite des C_n est donc périodique (de période N) pour n supérieur à n_o. I(u) s'écrit alors

$$I(u) = \sum_{n=0}^{n_o-1} C_n u^n + \sum_{r=0}^{N-1} C_{n_o+r} u^{n_o+r} (1+u^N+u^{2N}+\ldots) \ . \tag{134}$$

D'ou :

$$I(u) = R(u) + \frac{u^{n_o}(C_{n_o}+C_{n_o}u+\ldots+C_{n_o+N-1}u^{N-1})}{1-u^N} \tag{135}$$

ou R est un polynôme de degré égal au plus à n_o-1. Pour montrer que n_o peut être pris égal à 1, il suffit d'utiliser le fait que I(u) ne doit pas croître à l'infini:en effet, la fraction rationnelle est prolongeable en dehors du cercle unité et l'équation (125) montre alors que $I(\infty)$ est borné. Donc tous les termes de degré supérieur à 1 dans R(u) doivent se compenser avec des parties provenant du deuxième terme de (135). Ceci revient à dire en fait que la périodicité (133) peut commencer plus tôt, c'est-à-dire en y remplaçant n_o par n_o-N, à condition que $n_o-N \geq 1$. On répète le processus de remplacement jusqu'à ce que cette inégalité ne soit plus satisfaite. Les compensations restantes montrent alors que l'on peut ramener n_o à 1, d'où le résultat cherché (128).

Le théorème 5 nous permet de donner la preuve du théorème 3 de la section précédente. En effet les pôles de I(u) sont nécessairement des racines de l'unité et si $u=e^{i\theta}$, $z=\dfrac{1}{4\cos^2\theta/2}$. Donc si $u = e\left(\dfrac{2ik\pi}{p}\right)$,

$z = \dfrac{1}{4\cos^2\left(\frac{k\pi}{p}\right)}$, ce qui établit la formule (104) du théorème 3. Il faut simplement ajouter la condition que le point $x = 4$ doit être exclu du support lorsque $\Lambda < 4$, donc le point $z = \frac{1}{4}$, est un point régulier pour G et le point $u = 1$ est régulier pour I.

4) Solution générale : frontières naturelles

Un théorème du à Szegö[10], montre qu'une fonction analytique dans le cercle unité et dont les coefficients de Taylor à l'origine ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs différentes, est soit une fraction rationnelle soit une fonction non prolongeable en dehors du cercle unité. De plus le théorème montre également que les pôles de la fraction rationnelle sont nécessairement des racines de l'unité. Un théorème plus général du à Carlson et Polya[11] établit le même résultat sous la seule condition que les coefficients soient entiers, la fonction étant toujours holomorphe dans le cercle unité. Ces théorèmes généralisent nos résultats et montrent en particulier que le problème des moments diophantien pour $\Lambda < 4$ se résout aussi pour une mesure quelconque, non nécessairement positive : si $\Lambda < 4$ et si les coefficients de Taylor sont des nombres entiers, la fonction génératrice G(z) est une fraction rationnelle. La positivité de la mesure impose alors que tous les pôles sont simples.

Revenons au problème trigonométrique sur le cercle. Se pose alors la question suivante : une fonction analytique holomorphe dans le cercle unité, ayant un développement à coefficients entiers peut elle avoir le cercle unité comme frontière naturelle si sa valeur au bord sur le cercle a pour partie réelle une mesure positive ? Nous ignorons la réponse en générale, mais la réponse est négative dans le cas ou $C_o = 1$. En effet la positivité impose alors $-1 \leq C_n \leq +1$. Donc ou bien tous les C_n sont nuls (sauf C_o) ou bien il existe un n tel que $C_n = \pm C_o$. Mais on a alors d'après (118)

$$C_o+C_n = \int_{-\pi}^{+\pi} (1+\cos n\theta)g(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} 2\cos^2\frac{n\theta}{2}\,g(\theta)d\theta \tag{136}$$

$$C_o-C_n = \int_{-\pi}^{+\pi} 2\sin^2\frac{n\theta}{2}\,g(\theta)d\theta \tag{137}$$

Donc écrire $C_o \pm C_n = 0$ impose à $g(\theta)$ d'être une mesure discrète constituée de mesures de Dirac aux points d'annulation de $\cos\frac{n\theta}{2}$ ou $\sin\frac{n\theta}{2}$. $I(u)$ est alors une fraction rationnelle dont les poles sont racines de l'unité. Donc ou bien $I(u) = 1$ ou bien $I(u)$ est une fraction rationnelle. Lorsque $C_o = 1$, il n'y a pas de frontières naturelles. Ce résultat partiel s'applique au problème physique étudié à la section (1,4) et nous permet de retrouver les formules (55), (56), (57) correspondant au cas $I(u) = 1$.

5) Forme explicite des solutions rationnelles du problème trigonométrique

Si on laisse de côté les frontières naturelles, les solutions $I(u)$ sont des fractions rationnelles données par (128), qu'on peut réécrire :

$$N \geq 1 \;:\; I(u) = (C_o-C_N) + \frac{C_N + \sum_{p=1}^{N-1} C_p u^p}{1-u^N} \tag{138}$$

$$N = 0 \;:\; I(u) = C_o \tag{139}$$

En séparant en éléments simples la fraction rationnelle (138) et en comparant avec la représentation intégrale (115), on peut décomposer $g(\theta)$ en une partie constante et une partie discrète :

$$N \geq 1 \;:\; g(\theta) = \frac{1}{2\pi}(C_o-C_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k \delta\left(\theta - \frac{2k\pi}{N}\right) \tag{140}$$

$$N = 0 \;:\; g(\theta) = \frac{1}{2\pi} C_o \tag{141}$$

Les fonctions $I(u)$ et $I_e(u)$ définie par (115) pour $|u| < 1$ et $|u| > 1$ respectivement, sont toutes deux méromorphes et on a d'après (125) :

$$\begin{aligned} N \geq 1 \;&:\; I(u) - I_e\left(\frac{1}{u}\right) = (C_o-C_N) \\ N = 0 \;&:\; I(u) - I_e\left(\frac{1}{\bar{u}}\right) = C_o \end{aligned} \tag{142}$$

Mais la relation

$$I(u) + I_e\left(\frac{1}{u}\right) = C_o \qquad (143)$$

est également prolongeable analytiquement et elle impose alors :

$$N \geq 1 \ : \quad I(u) + I\left(\frac{1}{u}\right) = 2C_o - C_N \qquad (144)$$

$$N = 0 \ : \quad I(u) + I\left(\frac{1}{u}\right) = 2C_o \qquad (145)$$

En comparant (144) et (138) pour $N \geq 1$, on obtient :

$$C_p = C_{N-p} \quad \text{pour} \quad p = 1,\ldots N-1 \qquad (146)$$

D'où la solution générale

$$N = 0 \ : \ I(u) = C_o \qquad (147)$$

$$N = 2p \neq 0 \ : \ I(u) = (C_o - C_{2p}) + \frac{C_{2p} + \sum_{k=1}^{p-1} C_k(u^k + u^{2p-k}) + C_p u^p}{1-u^{2p}} \qquad (148)$$

$$N = 2p+1 \ : \ I(u) = (C_o - C_{2p+1}) + \frac{C_{2p+1} + \sum_{k=1}^{p} C_k(u^k + u^{2p+1-k})}{1-u^{2p+1}} \qquad (149)$$

Reste à imposer les conditions de positivité de la mesure $g(\theta)$, équation (140) :

$$\begin{cases} C_o - C_N \geq 0 \\ \gamma_k \geq 0 \qquad k = 0,1,\ldots N-1 \end{cases} \qquad (150)$$

Cette dernière relation est une suite d'inégalités compliquées sur les coefficients C_k. Un résultat classique[12] montre qu'on peut les exprimer à travers les déterminants de Toeplitz :

$$T(a_o, a_1, \ldots, a_k) = \begin{vmatrix} a_o & a_1 & a_2 \ldots a_k \\ a_1 & a_o & a_1 \ldots a_{k-1} \\ a_2 & a_1 & a_o \ldots a_{k-2} \\ a_k & a_{k-1} \ldots & a_o \end{vmatrix} \qquad (151)$$

Les nombres a_k sont définis comme le développement de

$$I(u) - (C_o - C_N) = \Sigma_k a_k u^k \qquad (152)$$

Les a_k sont les moments trigonométriques de la partie discrète de la mesure. On a :

$$a_o = C_N \quad \text{et} \quad a_k = C_k \quad \forall\, k \geq 1 \qquad (153)$$

et les conditions seront

$$\left.\begin{array}{l} C_o - C_N \geq 0 \quad \text{ou} \quad a_o \leq C_o \\ T(a_o, a_1, \ldots a_k) \geq 0 \quad \text{pour} \quad k = (0,1,\ldots N-1) \end{array}\right\} \qquad (154)$$

ou encore :

$$\left.\begin{array}{l} C_o - C_N \geq 0 \\ T(C_N, C_o, C_1, \ldots C_k) \geq 0 \quad \text{pour } k = (0,1,\ldots N+1) \end{array}\right\} \qquad (155)$$

Dans cette dernière inégalité, on doit tenir compte de (146). Enfin remarquons que dans les expressions (138) ou (148) et (149) certaines des racines du dénominateur peuvent s'éliminer par simplification si la racine apparait également au numérateur. En particulier les solutions du problème des moments diophantien sur $[0,\Lambda]$, $\Lambda < 4$ correspondent au cas ou la racine $u = 1$ est éliminée, ainsi que la partie continue de la mesure :

$$\left.\begin{array}{l} N = 2p : \quad I(u) = \dfrac{C_o + \sum_{k=1}^{p-1} C_k (u^k + u^{2p-k}) + C_p u^p}{1 - u^{2p}} \\ C_o = C_{2p} = -C_p - 2 \sum_{k=1}^{p-1} C_k \end{array}\right\} \qquad (156)$$

$$\left.\begin{array}{l} N = 2p+1 : \quad I(u) = \dfrac{C_o + \sum_{k=1}^{p} C_k (u^k + u^{2p+1-k})}{1 - u^{2p+1}} \\ C_o = C_{2p+1} = -2 \sum_{k=1}^{p} C_k \end{array}\right\} \qquad (157)$$

6) Formes explicites des solutions du problème diophantien pour $\Lambda = 4$

Nous laissons toujours de côté les éventuelles solutions ayant une frontière naturelle et nous allons indiquer ici les solutions du problème des moments sur [0,4] correspondant aux solutions du problème trigonométrique associé (équations (147), (148) et (149)). Les relations (122) et (147) donnent :

$$N = 0, \quad G(z) = \frac{C_o}{2\sqrt{1-4z}} = \frac{n_o}{\sqrt{1-4z}} \tag{158}$$

Si C_o est impair, n_o sera demi-entier, tous les autres moments étant entiers (voir équations (107) et (39)).

Pour $N > 0$, on a d'après (138)

$$I(u) - \frac{C_o}{2} = \frac{C_o - C_N}{2} + \frac{C_N(1+u^N)+2\sum\limits_{p=1}^{N-1} C_p u^p}{2(1-u^N)} = \frac{C_o - C_N}{2} + A(u) \tag{159}$$

La relation (146) de symétrie des coefficients C_N montre que le deuxième terme $A(u)$ de (159) est antisymétrique lorsqu'on change u en $\frac{1}{u}$. Le terme constant $\frac{C_o-C_N}{2}$ lui seul est symétrique. Si l'on pose $u = \frac{1-V}{1-V}$ avec $V = \sqrt{1-4z}$, on voit alors que

$$G(z) = \frac{C_o - C_N}{2V} + \frac{1}{V} A\left(\frac{1-V}{1+V}\right) \tag{160}$$

ou maintenant $\frac{1}{V} A\left(\frac{1-V}{1+V}\right)$ est une fraction rationnelle paire en V, donc une fraction rationnelle de z. Donc :

$$G(z) = \frac{C_o - C_N}{2\sqrt{1-4z}} + R(z) \tag{161}$$

où

$$R(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4z}} A\left(\frac{1-\sqrt{1-4z}}{1+\sqrt{1-4z}}\right) \tag{162}$$

Donnons quelques exemples :

a) $N = 1$

$$\left.\begin{aligned} I(u) &= \frac{C_o}{2} + \frac{C_o - C_1}{2} + \frac{C_1(1+u)}{2(1-u)} \\ G(z) &= \frac{C_o - C_1}{2\sqrt{1-4z}} + \frac{C_1}{2(1-4z)} = \frac{4n_o - n_1}{2\sqrt{1-4z}} + \frac{n_1 - 2n_o}{2(1-4z)} \end{aligned}\right\}$$

(163)

b) $N = 2$

$$\left.\begin{aligned} I(u) &= \frac{C_o}{2} + \frac{C_o - C_2}{2} + \frac{C_2(1+u^2)+2C_1 u}{2(1-u^2)} \\ G(z) &= \frac{C_o - C_2}{2\sqrt{1-4z}} + \frac{C_2(1-2z)}{2(1-4z)} + \frac{C_1 z}{(1-4z)} \\ G(z) &= \frac{4n_1 - n_2}{2\sqrt{1-4z}} + \frac{4n_o + n_2 - 5n_1}{4} + \frac{n_2 - 3n_1}{4(1-4z)} \end{aligned}\right\} \qquad (164)$$

c) $N = 3$, $C_1 = C_2$ ce qui implique $n_2 = 5n_1 - 4n_o$

$$\left.\begin{aligned} I(u) &= \frac{C_o}{2} + \frac{C_o - C_3}{2} + \frac{C_3(1+u^3)+2C_1(u+u^2)}{2(1-u^3)} \\ G(z) &= \frac{C_o - C_3}{2\sqrt{1-4z}} + \frac{C_3(1-3z)+2C_1 z}{2(1-z)(1-4z)} \\ &= \frac{21n_1 - 20n_o - n_3}{2\sqrt{1-4z}} + \frac{n_3 - 22n_1 + 24n_o}{3(1-z)} + \frac{n_3 - 19n_1 + 18n_o}{6(1-4z)} \end{aligned}\right\} \qquad (165)$$

Nous avons donné explicitement ces trois exemples ou figurent les fonctions 1, $\frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{1-4z}$, et $\frac{1}{\sqrt{1-4z}}$ qui sont séparement solution du problème des moments. On obtient bien dans tous les cas des combinaisons linéaires de ces fonctions, mais les coefficients calculés ci-dessus peuvent à l'évidence être fractionnaires. Par contre les conditions de positivité s'expriment alors simplement en écrivant que ces coefficients sont positifs.

d)

$$\left\{\begin{aligned} I(u) &= \frac{C_o}{1-u^N}\ , \quad C_o = C_N = 1, \quad C_p = 0 \quad \text{pour } p = 1,\dots n-1 \\ I(u) &- \frac{C_o}{2} = \frac{C_o(1+u^N)}{2(1-u^N)} \\ G(z) &= \frac{C_o((1+\sqrt{1-4z})^N + (1-\sqrt{1-4z})^N)}{2\sqrt{1-4z}((1+\sqrt{1-4z})^N - (1-\sqrt{1-4z})^N)} \end{aligned}\right. \qquad (166)$$

$G(z)$ est en fait une fraction rationnelle dont les pôles sont à $z = \frac{1}{4\cos^2\left(\frac{\pi p}{N}\right)}$ pour $p = 0,1,\ldots N-1$.

e) On peut supprimer dans l'exemple précédent le pôle à $u = 1$ en considérant la fonction suivante pour C_o multiple de $(N-1)$

$$I(u) = Nk\left(\frac{1}{1-u^N} - \frac{1}{N(1-u)}\right) = \frac{k((N-1)-u-u^2-\ldots-u^{N-1})}{(1-u^N)} \tag{167}$$

On a alors $C_o = C_N = (N-1)k$, $C_p = -k$ pour $p = 1,\ldots N-1$

$$I(u) - \frac{C_o}{2} = \frac{k((N-1)(1+u^N)-2u-2u^2-\ldots-2u^{N-1})}{2(1-u^N)} \tag{168}$$

La fonction $G(z)$ correspondante calculée par la formule (122) est une fraction rationnelle dont tous les poles sont sur l'intervalle $\left(\frac{1}{4\cos\frac{2\pi}{N}}, \infty\right)$.
Cette fonction est bien solution du problème des moments sur $\left[0,4\cos^2\frac{\pi}{N}\right]$ sans l'être sur l'intervalle correspondant à l'ordre $(N-1)$. On obtient un exemple de fonction venant ainsi corroborer la conjecture 4 de la section précédente :

$$G(z) = \frac{z}{2\sqrt{1-4z}}\left[N\,\frac{(1+\sqrt{1-4z})^N+(1-\sqrt{1-4z})^N}{(1+\sqrt{1-4z})^N-(1-\sqrt{1-4z})^N} - \frac{1}{\sqrt{1-4z}}\right] \tag{169}$$

Cette fonction est une fraction rationnelle correspondant à la mesure :

$$\sigma(x) = \frac{k}{2}\sum_{\ell=1}^{N-1}\delta\left(x - 4\cos^2\left(\frac{\ell\pi}{N}\right)\right) \tag{170}$$

5. LE PROBLEME DES MOMENTS DIOPHANTIEN POUR $\Lambda > 4$

1) Une équivalence inattendue

Nous considérons le problème des moments entiers sur $[0,\Lambda]$ avec $\Lambda > 4$:

$$n_\ell = \int_0^\Lambda x^\ell\,\sigma(x)\,dx \tag{171}$$

$$G(z) = \Sigma_\ell n_\ell z^\ell = \int_0^\Lambda \frac{\sigma(x)dx}{1-xz} \tag{172}$$

On définit la transformation T_q : $G(z) \overset{T_q}{\to} G^q(z)$ par la relation suivante :

$$G^{(q)}(z) = \frac{1}{1-qz}\, G\left(\left(\frac{z}{1-qz}\right)^2\right) \tag{173}$$

Si on suppose que le support de la mesure $\sigma(x)dx$ est contenu dans un intervalle $[a,b]$ avec

$$0 \leq a < b \leq q^2 \tag{174}$$

$$G^{(q)}(z) = \frac{1}{1-qz}\int_a^b \frac{\sigma(x)dx}{1-x\left(\frac{z}{1-qz}\right)^2} = (1-qz)\int_a^b \frac{\sigma(x)dx}{(1-qz)^2-xz^2} \tag{175}$$

D'ou l'on tire :

$$G^{(q)}(z) = \frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x)\left[\frac{1}{1-(q+\sqrt{x})z} + \frac{1}{1-(q-\sqrt{x})z}\right] \tag{176}$$

$G^{(q)}(z)$ admet donc la représentation :

$$G^{(q)}(z) = \frac{1}{2}\int_E \sigma^{(q)}(x)\,\frac{dx}{1-xz} \tag{177}$$

L'intégrale porte sur l'ensemble E :

$$E = [q-\sqrt{b},q-\sqrt{a}] \cup [q+\sqrt{a},q+\sqrt{b}] \tag{178}$$

et on a :

$$\sigma^{(q)}(x) = |x-q|\sigma((x-q)^2) \tag{179}$$

Dans le cas ou $a = 0$, $b = \Lambda = q^2$, (173) associe à tout problème des moments sur $[0,q^2]$ un problème des moments sur $[0,2q]$. Si q est entier les moments de $\sigma^T(x)dx$ sont entiers lorsque les moments de $\sigma(x)dx$ le sont. D'où le :

Théorème 6 :

Lorsque q est entier > 2, la solution générale du problème des moments entiers sur $[0,2q]$ permet de déduire la solution générale sur l'intervalle plus grand $[0,q^2]$.

En effet il suffit de considérer les solutions sur $[0,2q]$ pour lesquelles la fonction $\sigma(x)$ est symétrique autour de q :

$$\sigma(q+x) = \sigma(q-x) \tag{180}$$

et d'appliquer sur la fonction génératrice là relation inverse de (173). On obtient alors une fonction génératrice du problème des moments sur $[0,q^2]$.

On peut itérer T une fois et on passe alors à l'aide de T^2, de l'intervalle $[0,q^2]$ à $[q-\sqrt{2q},q+\sqrt{2q}]$. Si l'on itère un grand nombre de fois on passe de $[0,q^2]$ à l'intervalle :

$$[q-\sqrt{q+\sqrt{q+\ldots+\sqrt{2q}}},\ q+\sqrt{q+\sqrt{q+\ldots+\sqrt{2q}}}] \tag{181}$$

Ces intervalles ont pour limite l'intervalle :

$$\left[q-\frac{1}{2}-\sqrt{q+\frac{1}{4}},\ q+\frac{1}{2}+\sqrt{q+\frac{1}{4}}\right] \tag{182}$$

D'où le théorème suivant

Théorème 7 :

Etant donné $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on veut, la connaissance de la solution générale du problème des moments entiers sur $\left[\frac{5-\sqrt{13}}{2}-\varepsilon,\ \frac{7+\sqrt{13}}{2}+\varepsilon\right]$ permet de trouver la solution générale sur tout intervalle $[0,\Lambda]$.

En effet étant donné Λ, il existe q_1, entier tel que : $(q_1-1)^2 < \Lambda \leq q_1^2$. On peut considérer une mesure sur $[0,\Lambda]$ comme étant en fait sur $[0,q_1^2]$, avec une densité nulle sur une partie de l'intervalle. On peut alors retrouver les solutions du problème sur $[0,\Lambda]$ à partir des solutions sur $[0,2q_1]$. L'entier q_2 est alors défini par : $(q_2-1)^2 < 2q_1 \leq q_2^2$ et on peut alors passer à nouveau du problème sur $[0,2q_1]$ au problème sur $[0,2q_2]$. On définit ainsi une suite q_n décroissante jusqu'à ce que pour un certain n_o, on a $2q_{n_o} < 9$. On est alors ramené sur l'intervalle $[0,6]$ par la transformation correspondant à $q = 3$. Mais on peut itérer alors cette transformation autant de fois que l'on désire, et se ramener sur un intervalle dont les extrémités sont $3 \pm \sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+3+\sqrt{6}}}$, qui tendent vers $\frac{7+\sqrt{13}}{2}$ et $\frac{5-\sqrt{13}}{2}$. D'où le théorème énoncé, l'agrandissement de l'intervalle de 2ε permet d'atteindre la solution en un nombre fini de pas. Notons également que remonter de $\left[\frac{5-\sqrt{13}}{2}-\varepsilon,\ \frac{7+\sqrt{13}}{2}+\varepsilon\right]$ à $[0,\Lambda]$ n'est possible que sur un sous ensemble de solution ayant à la fois les propriétés de symétrie $x \to 2q-x$ et les "trous" , c'est-à-dire les points de densité nulle nécessaires pour remonter au problème initial. L'important est que pour toute solution sur $[0,\Lambda]$ il existe sur l'intervalle final une solution qui peut être remontée.

2) Correspondance avec les problèmes trigonométriques

Nous allons montrer que la relation (173) à une équivalence correspondante dans le problème trigonométrique. Pour cela on définit les opérations suivantes :

i) l'homothétie H_λ : $f \xrightarrow{H_\lambda} H_\lambda f$

$$(H_\lambda f)(z) = f\left(\frac{z}{\lambda}\right) \tag{183}$$

ii) La transformation de La Vallée Poussin : $G \xrightarrow{L} I$, définie par l'équation (110) :

$$I(u) = G(0) + \frac{1-u}{1+u}\, G\left(\frac{u}{(1+u)^2}\right) \tag{184}$$

iii) La transformation inverse de la précédente $I \xrightarrow{L^{-1}} G$, définie par l'équation (122) :

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4z}}\left\{I\left(\frac{1-\sqrt{1-4z}}{1+\sqrt{1-4z}}\right) - \frac{1}{2}\, I(0)\right\} \tag{185}$$

iv) la transformation C_2 correspondant au passage de u à u^2 : $I \xrightarrow{C_2} I'$ avec

$$I'(u) = I(u^2). \tag{186}$$

v) la transformation T_q déjà introduite en (173) : $G \xrightarrow{T_q} G_q$

$$G_q(z) = \frac{1}{1-qz}\, G\left(\left(\frac{z}{1-qz}\right)^2\right) \tag{187}$$

A l'aide de ces notations on montre le théorème suivant :

Théorème 8 :

La transformation T_q, appliquée aux fonctions génératrices du problème des moments sur $[0,q^2]$ admet la décomposition suivante :

$$T_q = H_{\left(\frac{2}{q}\right)}\, L^{-1}\, C_2\, L\, H_{\left(\frac{q^2}{4}\right)} \tag{188}$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de vérifier le résultat par un calcul fastidieux mais sans difficultés, que nous ne reproduirons pas ici.

Cependant il convient de noter que les arguments des homothéties, respectivement $\frac{2}{q}$ et $\frac{q^2}{4}$ ne sont pas inverse l'un de l'autre, sauf dans le cas $q = 2$, soit $q^2 = 4$. La relation (188) n'est donc pas une relation d'équivalence, d'autre part la relation (188) est vraie que les moments soient entiers ou pas, bien que $H\left(\frac{q^2}{4}\right)$ et $H\left(\frac{2}{q}\right)$ ne conservent pas l'intégrité des coefficients de Taylor. Il est donc difficile de voir que lorsque q est entier, l'intégrité des coefficients est préservée par le membre de droite de (188). En fait (188) associe à la transformation T_q la transformation C_2 (correspondant au changement de u en u^2) agissant sur des fonctions dont les coefficients de Taylor C_n sont tels que $\left(\frac{q^2}{4}\right)^n C_n$ est entier. Après application de C_2, la fonction a des coefficients de Taylor soit nuls, soit tels que $\left(\frac{q^2}{4}\right)^n C_{2n} = \left(\frac{q}{2}\right)^{2n} C_{2n}$ est entier. On peut alors revenir au problème des moments entier sur $[0,2q]$. Ce théorème admet une généralisation : si on définit C_n comme la tranformation associée au passage de u à u^n :

$$I \overset{C_n}{\rightarrow} I' \quad , \quad \text{avec} \quad I'(u) = I(u^n) \tag{189}$$

on a alors la généralisation suivante du théorème précédent :

<u>*Théorème 9*</u> :

La transformation $T_q^{(n)}$ définie par

$$T_q^{(n)} = H_{\left(\frac{1}{r}\right)} \, L^{-1} \, C_n \, L \, H_{(r^n)} \tag{190}$$

transforme une fonction génératrice du problème des moments sur $[0,4r^n]$ en une fonction génératrice du problème des moments sur $[0,4r]$. L'intégrité des moments est conservée si r est entier (exceptionnellement r peut être demi-entier dans le cas n = 2).

La preuve est immédiate : la suite des opérations effectuées donne bien à la fonction les bonnes propriétés d'analyticité et de positivité des valeurs au bord . Pour l'intégrité il suffit d'observer le comportement des coefficients dans les diverses transformations , en remarquant que C_n ne fait qu'intercaler (n-1) zéros entre chacun des coefficients, ce qui oblige l'homothétie finale a été d'un rapport égal à l'inverse de la $n^{\text{ième}}$ racine du rapport de l'homothétie initiale. C'est la propriété de divisibilité par 2 des coefficients représentant sur les moments la transformation L qui autorise r a être demi-entier dans le cas n = 2.

Donnons deux exemples

i) $n = 3$; la transformation $T_r^{(3)}$ qui fait passer de $[0,4r^3]$ à $[0,4r]$ s'exprime de la façon suivante :

$$(T_r^{(3)}G)(z) = \frac{1-zr}{1-3zr}\, G\left(\frac{z^3}{(1-3zr)^2}\right) \tag{191}$$

ii) $n = 5$: $T_r^{(5)}$ fait passer de $[0,4r^5]$ à $[0,4z]$. On a

$$(T_r^{(5)}G)(z) = \frac{1-3zr+z^2r^2}{1-5zr+5z^2r^2}\, G\left(\frac{z^5}{(1-5zr+5z^2r^2)^2}\right) \tag{192}$$

iii) La transformation $T_r^{(n)}$ générale qui fait passer de $[0,4r^n]$ à $[0,4r]$ s'exprime :

$$(T_r^{(n)}G)(z) = \frac{(1+V)^n-(1-V)^n}{V\{(1+V)^n+(1-V)^n\}}\, G\left(\frac{4^n z^n}{[(1+V)^n+(1-V)^n]^2}\right) \tag{193}$$

avec

$$V = \sqrt{1-4zr}$$

Il existe encore bien d'autres façons de ramener l'intervalle $[0,\Lambda]$ sur un intervalle plus petit. Ceci montre bien que la classification des solutions pour $\Lambda > 4$ ne procède pas des mêmes méthodes que dans le cas $\Lambda \leq 4$.

3) Quelques exemples :

A défaut d'une classification générale nous citerons ici quelques exemples de fonctions génératrices sur $[0,\Lambda]$, $\Lambda > 4$.

i) Fractions rationnelles. On montre [13] qu'une fraction rationnelle dont le développement est à coefficients entiers peut se mettre sous la forme du rapport de deux polynômes à coefficients entiers, le coefficient de plus bas degré du dénominateur étant égal à 1. En conséquence les points discrets de la mesure, inverses des pôles de la fraction rationnelle, sont des entiers algébriques. Donc toute fraction rationnelle $\frac{P^{(s)}}{Q^{(n)}}$ ou Q est un polynôme de degré n à coefficient entier, tel que $Q(0) = 1$, et dont toute les racines sont réelles comprises entre $[1/\Lambda$ et $\infty]$ répondra aux conditions à condition que le degré s du numérateur soit inférieur ou égal au degré du dénominateur et que les résidus des poles soient positifs.

ii) Fonctions algébriques

On trouve des singularités en racines carrées :

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4z}} \quad \text{pour} \quad \Lambda = 4r, \quad r \text{ entier} \tag{194}$$

on trouve des singularités en racine cubique

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-9rz}} \quad \text{pour} \quad \Lambda = 9r, \quad r \text{ entier} \tag{195}$$

On trouve [1] les fonctions algébriques solutions de l'équation

$$p - G(z) + z\, G(z)^N = 0 \tag{196}$$

ou p et N > 1 sont des entiers positifs, pour $\Lambda = \frac{N-1}{p}\left\{\frac{pN}{N-1}\right\}^N$. (197)

iii) Singularités logarithmiques

La fonction $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}^2 z^k = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 ; 16z\right)$ (198)

est une solution sur [0,16]. Cette fonction hypergéométrique à une singularité logarithmique [1].

iv) Mesures singulières

Lorsque q est entier ≥ 2 la solution de l'équation

$$G(z) = \frac{1}{1-qz}\, G\left(\left(\frac{z}{1-qz}\right)^2\right) \tag{199}$$

peut s'obtenir comme limite d'itérations successives de la transformation T_q définie à l'équation (173). Dans la référence [1], il est montré que cette fonction est solution du problème des moments entiers sur $[0,\Lambda(a)]$ avec $\Lambda(q) = q + \frac{1}{2} + \sqrt{q+\frac{1}{4}}$. (200)

Pour $\Lambda = 2$ la solution n'est autre que la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-4z}}$, mais pour $\Lambda \geq 3$, la mesure correspondante est singulière et a pour support l'ensemble de Cantor limite obtenu à partir des nombres. $q \pm \sqrt{q \pm \sqrt{q \pm \ldots}}$

Cependant cette fonction G(z) est analytique dans un plan coupé le long de l'axe réel de $\frac{1}{\Lambda(q)}$ à l'infini, et le comportement lorsque z s'approche du point singulier est du type suivant

$$G\left(\frac{1}{\Lambda(q)} - \varepsilon\right) \sim \varepsilon^{\alpha} \tag{201}$$

avec

$$\alpha = \frac{\ell n\sqrt{\Lambda(q)}}{\ell n\Lambda(q)-\ell n2(\Lambda(q)+q\sqrt{\Lambda(q)})} \tag{202}$$

4) Remarquons sur le problème $\Lambda > 4$

On ne sait donc pas grand chose sur la classification générale. Cependant et de façon moins ambitieuse : Peut-on, moyennant des hypothèses supplémentaires restreindre la famille des fonctions autorisées? Toute information du type : bornes sur la densité de la mesure, propriété d'analyticité est elle susceptible de restreindre suffisamment la solution ?. La question est ouverte.

6. QUESTION RELIEES

1) Les fonctions entières arithmétiques

On considère ici le problème des moments sur un intervalle $[\varepsilon,\Lambda]$ ou ε est strictement positif. Le théorème 7 de la section précédente montre que cette restriction est sans importance.

Les moments n_ℓ la mesure peuvent alors être étendus à une fonction analytique $n(\ell)$ de l'ordre

$$n_\ell = n(\ell) = \int_\varepsilon^\Lambda x^\ell d\mu(x) = \int_\varepsilon^\Lambda e^{\ell \ln x} d\mu(x) \tag{203}$$

L'ordre à l'infini de la fonction est alors relié (dans le cas ou la mesure est positive) à la borne supérieure du support

$$n(\ell) \lesssim e^{\ell \ln\Lambda} \tag{204}$$

Enfin $n(\ell)$ prend des valeurs entières aux points entiers positifs de la variable. C'est donc une fonction entière arithmétique. Mais la représentation (203) montre également que $n(\ell)$ doit être la transformée de Laplace d'un mesure (dans la variable $-\ell nx$). Le problème des moments entiers est donc un cas particulier du problème des fonctions entières arithmétiques. Notons cependant que la classification des solutions pour $\Lambda < 4$ peut-être comparé aux théorèmes de décomposition des fonctions entières arithmétiques sur les fonctions exponentielles, les coefficients étant polynomiaux, théorème que l'on démontre lorsque l'ordre est suffisamment bas. Pour plus de détails, voir les références [14] et [15].

2) Les itérations de transformations

La classification générale des solutions du problème des moments entiers est certainement reliée au itération des transformations rationnelles. En effet les transformations du type de celles rencontrées à la section précédente (équation 173 et 188) sont associées à des transformations rationnelles de l'intervalle support de la mesure [16]. Classification des solutions et familles de transformations du problème de moments entiers sont intimement reliés.

3) Polynômes à coefficients entiers

Dans la démonstration du Théorème 1, on établit un lien entre l'existence d'un polynôme à coefficients entiers en module inférieur à 1 sur un intervalle, et le fait que les fonctions génératrices du problème diophantien des moments sur cet intervalle sont des fractions rationnelles. Ce résultat s'étend de façon immédiate au cas de la réunion d'intervalle disjoints (la preuve est la même : voir équation 91) et on a le théorème suivant :

Théorème 10 :

Soit S un ensemble constitué de la réunion d'un nombre fini d'intervalles fermés disjoints, tels qu'il existe un polynôme à coefficients entiers $P(x)$ dont le module est strictement plus petit que 1 pour tout x dans S, alors toute mesure positive à support dans S dont les moments sont des entiers est une mesure discrète localisée aux zéros du polynôme. La fonction génératrice des moments est alors une fraction rationnelle.

Il y a donc une relation entre les domaines de valeurs pris par les polynômes à coefficients entiers et les domaines tels que le problème diophantien des moments n'admette pour solution que des mesures discrètes. Réciproquement, on peut résoudre le problème de moment sur tout support "gruyère" S engendré par n'importe quel polynôme à coefficients entiers.

4) Les moments polynomiaux

Rappelons que la motivation physique du problème résidait dans l'étude du modèle ferromagnétique d'Ising. Mais dans ce modèle on rencontre un problème des moments polynômiaux

$$\pi_\ell(x) = \int_o^{\Lambda(x)} \rho^\ell \, d\sigma_x(\rho) \tag{205}$$

ou $\pi_\ell(x)$ est un polynôme de degré proportionnel à ℓ en x, à coefficient entiers et positifs en x.

Le support dépend a priori de x, mais pour tout l'intervalle $0 \leq x \leq 1$, on a à la fois:

$$0 \leq \Lambda(x) \leq \frac{4}{1-x} \tag{206}$$

$$0 \leq \Lambda(x) \leq q^2 \tag{207}$$

ou q est relié au degré de π_ℓ par la relation

$$\text{degré}(\pi_\ell) = \ell(q-2) \tag{208}$$

Nous ne savons pratiquement rien sur ce problème mis à part le fait qu'il se ramène à un problème des moments entiers lorsque x est rationnel. Cependant nous sommes certains que quelque chose peut-être dit sur ce problème et sur la classification des solutions, moyennant peut être des hypothèses supplémentaires. Il convient de remarquer que toute propriété non élémentaire de la fonction génératrice peut être très utiles pour l'avancement du problème d'Ising.

REFERENCES

[1] M. Barnsley, D. Bessis, and P. Moussa, J. Math. Phys. Vol 20, p 535, 1979

[2] Pour plus détails sur le modèle d'Ising, voir par exemple l'article de revue "On the theory of cooperative phenomena in crystals" de C. Domb, Advances in Physics, Vol IX, p 149, 1960

[3] T.D. Lee and C.N. Yang, Phys. Rev. Vol 87, p 410, 1952

[4] D. Ruelle, Phys. Rev. Lett. Vol 26, p 303, 1971 et Commun. Math. Phys. Vol 31, p 265, 1973

[5] C.N. Yang and T.D. Lee, Phys. Rev. Vol 87, p 404, 1952

[6] C. Domb, in "Phase transition and critical phenomena", C. Domb and M.S. Green, editors, Vol 3, p 357, Academic Press, New-York, 1974

[7] J.D. Bessis, J.M. Drouffe, and P. Moussa, J. Phys. A : Math. Gen. Vol 9, p 2105, 1976

[8] E. Hewitt and H.S. Zuckerman, Duke Mathematical Journal, Vol 26, p 305, 1959

[9] D. Bessis, in "Bifurcation phenomena in mathematical physics and related topics", C. Bardos and D. Bessis editors, Nato Advanced Study Institute Series, Series C, Vol 54, p 203, D. Reidel Publishing Company 1980

[10] P. Dienes, "The Taylor series", Dover, New-York, 1957, p 324

[11] Voir l'article de revue "Uber potenzreihen, die irrationale funktionen darstellen" (I et II), "Uberblicke Mathematik", Vol 6, p 179, 1973 et Vol 7, p 7, 1974. Les références originales sont : G. Polya, Proceedings of the London Mathematical Society (2), Vol 21, p 22, 1923 et F. Carlson, Mathematische Zeitschrift, Vol 9, p 1, 1921

[12] U. Grenander and G. Szegö, "Toeplitz forms and their applications", University of California Press, 1958

[13] Voir par exemple A. Zygmund, "Trygonometric series", Cambridge University Press, 1968, Vol II, p 150

[14] F. Gramain, "Fonctions entières arithmétiques", séminaire Delange-Pisot-Poitou, 19è année, 1977/ 1978, n°8, Paris)

[15] R. Creighton Buck, Duke Mathematical journal, Vol 15 page 879, 1948

[16] D. Bessis, M.L. Mehta and P. Moussa, "Orthogonal polynomials on a family of Cantor sets and the problem of iteration of quadratic mappings" Preprint Saclay DPh-T/81/79, à paraître en 1982 "Letters in Mathematical Physics"