J. Ginibre

La méthode « dépendant du temps » dans le problème de la complétude asymptotique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1981, tome 29
« Conférences de : J. Ginibre, W. Krieger, M.Jaeckel-J.M. Maillard, A. Lichnerowicz et C. de Calan », , exp. n° 1, p. 1-66

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1981__29__1_0>

LA METHODE "DEPENDANT DU TEMPS" DANS LE PROBLEME DE LA COMPLETUDE ASYMPTOTIQUE ♮

J. GINIBRE

Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies *

Université de Paris-Sud, 91405 ORSAY CEDEX, France.

LPTHE 80/10

♮ Version améliorée et développée d'un exposé présenté à l'Institut de Recherches Mathématiques Avancées de l'Université de Strasbourg en Mai 1979 dans le cadre de la R.C.P. 25 du C.N.R.S.

* Laboratoire associé au Centre National de la Recherche Scientifique.

Résumé

On expose la démonstration de Enss de la complétude asymptotique dans le problème à deux corps avec interaction à courte portée, par la méthode "dépendant du temps", en essayant de faire une synthèse des différentes améliorations apportées à cette méthode depuis son apparition. En préliminaire, on discute la notion de subordination de deux opérateurs autoadjoints, et on montre son intérêt dans les problèmes de localisation du spectre essentiel (théorème de Weyl) et d'existence des opérateurs d'onde (généralisation du critère de Cook). L'exposé est à vocation didactique et ne prétend pas à l'originalité.

(1) Introduction

Depuis sa formulation mathématique précise à la fin des années cinquante, la théorie de la diffusion a connu un développement considérable. Le cadre en est typiquement le suivant: soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et $U(t)$ un groupe unitaire fortement continu à un paramètre, supposé décrire l'évolution d'un système physique, et engendré par un opérateur autoadjoint H :

$$U(t) = \exp(-itH).$$

H est le hamiltonien du système. On se propose d'étudier, simultanément car ces deux classes de propriétés sont étroitement liées, les propriétés spectrales de H et le comportement asymptotique quand $t \to \pm\infty$ des solutions

$$\psi(t) = U(t)\,\psi(0)$$

de l'équation d'évolution

$$i\dot{\psi} = H\psi.$$

Dans un grand nombre de cas d'intérêt physique, il existe dans $\mathcal{H}$ un second groupe unitaire fortement continu à un paramètre $U_0(t)$ plus simple que $U(t)$, dont on peut espérer qu'il est asymptotiquement équivalent à $U(t)$ en un sens convenable. $U_0(t)$ est appelé l'évolution libre, et est engendré par un opérateur autoadjoint H_0, le hamiltonien libre :

$$U_0(t) = \exp(-itH_0).$$

Les propriétés spectrales de H_0 sont en général simples et connues.

Le but de la théorie de la diffusion est alors d'étudier les propriétés spectrales de H et les comportements asymptotiques engendrés par $U(t)$ en les comparant aux propriétés correspondantes de H_0 et $U_0(t)$. Il est commode et traditionnel d'organiser cette étude autour de la liste de questions suivante :

(1) Détermination du spectre essentiel $\sigma_e(H)$ de H et comparaison avec $\sigma_e(H_0)$ (Pour la définition des différentes composantes du spectre, voir [12] p. 231-236).

(2) Existence des opérateurs d'onde

$$\Omega_\pm = \underset{t \to \pm\infty}{s\text{-}\lim}\ U(-t)\,U_0(t)\,E_{0ac}$$

où E_{0ac} est le projecteur sur le sous-espace d'absolue continuité de H_0.

(3) Absence de spectre continu singulier pour H : $\sigma_{cs}(H) = \emptyset$.

(4) Contrôle du spectre ponctuel plongé dans le spectre essentiel, $\sigma_p(H) \cap \sigma_e(H)$. Dans les meilleurs cas, on espère qu'il est absent, c.-à-d. $\sigma_p(H) \cap \sigma_e(H) = \emptyset$.

On voit facilement que si les $\Omega_\pm$ existent, alors leurs espaces images $\mathcal{R}(\Omega_\pm)$ sont contenus dans le sous-espace $\mathcal{H}_{ac}$ d'absolue continuité de H. La question naturelle est alors :

(5) Complétude asymptotique : déterminer si en fait

$$\mathcal{R}(\Omega_\pm) = \mathcal{H}_{ac}\ .$$

En général, les questions (1) et (2) sont assez faciles, tandis que les questions (3), (4) et (5) sont difficiles. Dans le cadre de la Mécanique Quantique, on prend typiquement $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$, $H_0 = -\Delta$ où Δ est le Laplacien dans $\mathbb{R}^n$, et $H = H_0 + V$ où V

est par exemple l'opérateur de multiplication par une fonction réelle. Dans ce cas, les problèmes (1) à (5) ont été étudiés et résolus de façon satisfaisante pour une classe très générale de potentiels V (Voir par exemple [13]). Cependant jusqu'à une date récente et à l'exception notable du théorème de Kato-Birman ([13], p. 23-27), les méthodes les plus efficaces utilisées pour traiter les problèmes (3), (4) et (5) étaient des méthodes stationnaires, c'est-à-dire des méthodes où on élimine du problème le groupe unitaire $U(t)$ par une transformée de Fourier et où on étudie à la place la résolvante $R(z)=(H-z)^{-1}$ de H, en particulier pour z au voisinage du spectre essentiel. Ce n'est qu'en 1977 que l'équilibre entre la méthode directe, dite "dépendant du temps" et la méthode stationnaire a été rétabli au profit de la première grâce aux travaux de Enss [4,5,6], qui a proposé une méthode dépendant du temps pour traiter les problèmes (3) et (5), absence de spectre continu singulier et complétude asymptotique. Cette méthode a suscité un grand intérêt et a été rapidement améliorée et généralisée par de nombreux auteurs [1,3,9,11,17,18]. Elle est maintenant bien au point, au moins dans le cas d'interactions à courte portée. Le but du présent exposé est de présenter cette méthode dans une version qui incorpore les améliorations successives apportées par les auteurs précédents. Il ne contient donc pas de résultats nouveaux. Le spécialiste reconnaîtra facilement la structure générale de la méthode calquée sur [4,17], l'utilisation systématique de la convergence faible et de la compacité empruntée à [9], et l'utilisation de la subordination mutuelle pour le traitement des singularités locales et des états cohérents pour la localisation dans l'espace de phase, empruntée à [3]. Cet exposé fait l'objet de la section 3, où on ramène le problème à la construction de deux opérateurs $R_{\pm}$ satisfaisant des propriétés convenables, et de la section 4, où on construit explicitement ces opérateurs et où on démontre les propriétés requises. La section 2 est consacrée à quelques préliminaires, en particulier la définition et une brève discussion de la notion de subordination ([10], [13] p. 28, [3]), une démonstration élémentaire d'un critère de comparaison des spectres essentiels de deux opérateurs autoadjoints, voisin d'un résultat de Weyl, et une généralisation du critère de Cook plus simple et aussi efficace que celles proposées par d'autres auteurs [8,15,16].

(2) Préliminaires. Subordination, spectre essentiel et critère de Cook.

Dans toute cette section, H_0 et H_1 sont deux opérateurs autoadjoints dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On note $U_\alpha(t) = \exp(-itH_\alpha)$, $\alpha = 0,1$, les groupes unitaires engendrés, $R_\alpha(z) = (H_\alpha - z)^{-1}$ les résolvantes, $E_\alpha(I)$ les projecteurs spectraux associés à un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $E_{\alpha\, ac}$ les projecteurs sur les sous-espaces $\mathcal{H}_{\alpha\, ac}$ d'absolue continuité de H_α. Tous les résultats de cette section sont formulés avec un seul espace de Hilbert $\mathcal{H}$, mais de façon à avoir une extension évidente à une théorie à deux espaces $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ où opèrent respectivement les groupes unitaires $U_0(t)$ et $U_1(t)$ et reliés entre eux par un opérateur borné J (respectivement J^*) de $\mathcal{H}_0$ dans $\mathcal{H}_1$ (respectivement de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_0$). On note $I_{(\alpha)}$, éventuellement avec un indice α, un intervalle borné de $\mathbb{R}$, et $I^c = \mathbb{R} \setminus I$ le complément de I dans $\mathbb{R}$. Si $I = [a, b]$, on dira que I tend vers l'infini si $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$. On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions complexes continues d'une variable réelle, tendant vers zéro à l'infini, et $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ le sous-espace des fonctions continues à support compact. Enfin, pour tout opérateur A dans $\mathcal{H}$, borné ou non, on note $\mathcal{R}(A)$ l'espace image de A.

Avant de définir la notion de subordination, on donne un lemme préparatoire.

Lemme 2.1. Soient H_0 et H_1 autoadjoints et J borné. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe deux fonctions localement bornées f_0 et f_1 définies dans $\mathbb{R}$, telles que $|f_\alpha(\lambda)| \geq 1$ pour tout

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha = 0,1$, $|f_1(\lambda)| \to \infty$ quand $|\lambda| \to \infty$, et telles que l'opérateur

$$f_1(H_1)\, J\, f_0(H_0)^{-1}$$

soit borné.

(2) Pour tout intervalle borné I, il existe une fonction localement bornée f_I définie dans $\mathbb{R}$ telle que $|f_I(\lambda)| \geqslant 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $|f_I(\lambda)| \to \infty$ quand $|\lambda| \to \infty$, et telle que l'opérateur

$$f_I(H_1)\, J\, E_0(I)$$

soit borné.

(3) Pour tout intervalle borné I_0,

$$\| E_1(I_1^c)\, J\, E_0(I_0) \| \longrightarrow 0$$

quand l'intervalle (borné) I_1 tend vers l'infini.

Remarque 2.1. Dans la condition (1), on n'a pas précisé de conditions de régularité locale sur f_α. Il suffit qu'on puisse définir les opérateurs $f_\alpha(H_\alpha)$. Par exemple, il suffit que les f_α soient boréliennes. Cependant il est clair que si on a un couple f_0, f_1 satisfaisant la condition (1), on peut trouver un couple $\tilde{f}_0$, $\tilde{f}_1$ satisfaisant la même condition, et qui soit, à volonté, continu ou $\mathscr{C}^\infty$. Il suffit de prendre $|\tilde{f}_1| \leq |f_1|$ et $|\tilde{f}_0| \geqslant |f_0|$ pour que l'opérateur $\tilde{f}_1(H_1)\, J\, \tilde{f}_0(H_0)^{-1}$ soit borné.

Une remarque analogue s'applique à la condition (2).

Preuve du lemme 2.1. On montre que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2). On a pour tout intervalle borné

$$f_1(H_1)\,J\,E_o(I) = \{f_1(H_1)\,J\,f_o(H_o)^{-1}\}\{f_o(H_o)\,E_o(I)\}.$$

Le premier facteur du second membre est borné d'après (1) et le second est borné pour I fixé car f_o est localement bornée. Ceci prouve (2). De plus, on peut prendre $f_I = f_1$ indépendante de I.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Pour tout couple d'intervalles bornés I_o, I_1, on a

$$E_1(I_1^c)\,J\,E_o(I_o) = \{E_1(I_1^c)\,f_{I_o}(H_1)^{-1}\}\{f_{I_o}(H_1)\,J\,E_o(I_o)\}.$$

Le second facteur du second membre est borné d'après (2) pour I_o fixé, et le premier facteur tend vers zéro en norme quand I_1 tend vers l'infini à I_o fixé, car $|f_{I_o}(\lambda)| \to \infty$ quand $|\lambda| \to \infty$. Ceci prouve (3).

(3) $\Longrightarrow$ (1). Il suffit de considérer le cas particulier où $H_o \geqslant 0$ et $H_1 \geqslant 0$. Le cas général s'en déduira en appliquant le cas particulier à $|H_o|$ et $|H_1|$. On note $\chi(I)$ la fonction caractéristique d'un intervalle I, et on cherche f_o et f_1 sous la forme

$$f_o = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \chi([n, n+1)) \quad ,$$

$$f_1 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, \chi([\lambda_n, \lambda_{n+1})) \quad ,$$

où $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{\lambda_n\}$ sont des suites croissantes de nombres réels positifs avec $a_o = b_o = 1$, $\lambda_o = 0$, et tendant vers l'infini quand $n \to \infty$. Les $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{\lambda_n\}$ seront choisis plus loin. On a alors

$$f_1(H_1)\,J\,f_0(H_0)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, E_1([\lambda_n,\lambda_{n+1}))\,J$$
$$\times \sum_{p=0}^{\infty} a_p^{-1}\, E_0([p,p+1)).$$

Pour chaque n on sépare la somme sur p en $A_n + A'_n$ avec

$$A_n \equiv \sum_{p<n} a_p^{-1}\, E_0([p,p+1)) = A_n\, E_0([0,n))$$

$$A'_n \equiv \sum_{p\geqslant n} a_p^{-1}\, E_0([p,p+1)) = A'_n\, E_0([n,\infty)).$$

Il est clair que $\|A_n\| = a_0^{-1} = 1$ et $\|A'_n\| = a_n^{-1}$.
On a donc

$$f_1(H_1)\,J\,f_0(H_0)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Big\{ E_1([\lambda_n,\lambda_{n+1}))\,J\,E_0([0,n))\,A_n$$
$$+ E_1([\lambda_n,\lambda_{n+1}))\,J\,A'_n \Big\}$$

et par suite

$$\| f_1(H_1)\,J\,f_0(H_0)^{-1} \| \leqslant$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \Big\{ \| E_1([\lambda_n,\infty))\,J\,E_0([0,n)) \| + a_n^{-1}\, \|J\| \Big\}$$

pourvu que la série au second membre converge. Par la condition (3), on peut choisir la suite $\{\lambda_n\}$ de façon que

$$\| E_1([\lambda_n,\infty))\,J\,E_0([0,n)) \| \leqslant 2^{-n}.$$

Pour ce choix de λ_n et par exemple pour $a_n = 2^{-n}$ et $b_n = n+1$, la série précédente converge et $|f_1(\lambda)| \to \infty$ quand $\lambda \to \infty$, ce qui prouve (1).

Q.E.D.

Le lemme 2.1 appelle la définition suivante.

<u>Définition 2.1</u>. Soient H_0 et H_1 autoadjoints et J borné. On dira que H_1 est J-subordonné à H_0 si l'une des trois conditions équivalentes du lemme 2.1 est satisfaite. Si $J = \mathbb{1}$, on dira simplement que H_1 est subordonné à H_0. Si H_1 est subordonné à H_0 et H_0 subordonné à H_1 on dira que H_0 et H_1 sont mutuellement subordonnés.

On donne maintenant quelques exemples.

<u>Exemple 2.1</u>. Soit H_0 semi-borné et $H_1 = H_0 \dot{+} V$ défini comme somme au sens des formes quadratiques avec H_1 semi-borné et $Q(H_1) \subset Q(H_0)$, où $Q(H)$ est le domaine de forme de H si H est semi-borné, c.-à-d. $Q(H) = \mathcal{D}((H+c)^{1/2})$ pour un c réel assez grand. Alors H_0 est subordonné à H_1 par la condition (1) du lemme 2.1 avec $f_1(\lambda) = f_0(\lambda) = (\lambda + i)^{1/2}$.

<u>Exemple 2.2</u>. Soit $\mathcal{D}_0 = \bigcup_I \mathcal{R}(E_0(I))$ où la réunion est prise sur les intervalles bornés I. Supposons que H_1 est semi-borné, $H_1 \geqslant c$ et que $H_1 = H_0 \dot{+} V$ comme forme quadratique sur $\mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_0$, où V est une forme quadratique sur $\mathcal{D}_0 \times \mathcal{D}_0$ et où $E_0(I)\, V\, E_0(I)$ définit un opérateur borné pour tout intervalle borné I. Alors H_1 est subordonné à H_0, par la condition (2) du lemme 2.1 avec $f_I(\lambda) = (\lambda - c + 1)^{1/2}$.

<u>Exemple 2.3</u>. C'est un cas particulier des exemples 2.1 et 2.2. Soit $H_0 = P(-i\nabla)$ où $P(k) = \overline{P(k)} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ et $P(k) \to \infty$ quand $|k| \to \infty$, soit

$$V = F(-i\nabla)^* \, W \, F(-i\nabla)$$

où $F(\cdot) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ et W est l'opérateur de multiplication par une fonction réelle positive $W \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Soit $H_1 = H_0 \dot{+} V$ au sens des formes quadratiques. Alors H_0 et H_1 sont mutuellement subordonnés.

La subordination se combine commodément à certaines propriétés de compacité [3].

<u>Proposition 2.1</u>. Soit H_0 et H_1 autoadjoints et J borné. Alors les conditions (1), (2) et (3) ci-dessous sont équivalentes.

(1) Pour un (ou pour tout) $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$R_1(z)\, J - J\, R_0(z)$ est compact.

(2) Pour un (ou pour tout) $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et pour tout intervalle borné I,

(a) $(R_1(z)\, J - J\, R_0(z))\, E_0(I)$ est compact

(b) $E_1(I)\,(R_1(z)\, J - J\, R_0(z))$ est compact.

(3) (a) H_1 est J-subordonné à H_0,

(b) H_0 est J^*-subordonné à H_1,

(c) Pour un (ou pour tout) $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et pour tout intervalle borné I,

$E_1(I)\big(R_1(z)\, J - J\, R_0(z)\big)\, E_0(I)$ est compact.

De plus, on a les équivalences suivantes :

(2a) est équivalent à (3, a + c)

(2b) est équivalent à (3, b + c)

<u>Preuve</u>. Il est évident que (1) $\Longrightarrow$ (2). Il suffit donc de montrer que (2) $\Longrightarrow$ (1) et que (2a) $\Longleftrightarrow$ (3, a + c). En échangeant H_0 et H_1 ,

J et J^*, on en déduira que (2b) $\Longleftrightarrow$ (3, b + c), ce qui entraînera que (2) $\Longleftrightarrow$ (3). On omet partout la variable z.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Pour tout couple d'intervalles bornés I_0, I_1, on a

$$\begin{aligned} R_1 J - J R_0 = {} & E_1(I_1)(R_1 J - J R_0) \\ & + E_1(I_1^c)(R_1 J - J R_0) E_0(I_0) \\ & + E_1(I_1^c)(R_1 J - J R_0) E_0(I_0^c) \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre est compact d'après (2b), le second terme est compact d'après (2a) , et le troisième est la différence de deux opérateurs qui tendent vers zéro en norme de façon indépendante quand I_1 et I_0 tendent vers l'infini. Le premier membre est donc limite en norme d'opérateurs compacts, donc est lui-même compact.

(2a) $\Longrightarrow$ (3, a + c). Il est évident que (2a) $\Longrightarrow$ (3c). Pour prouver (3a), on note que $E_1(I_1^c)$ est autoadjoint et tend fortement vers zéro quand I_1 tend vers l'infini, et que l'opérateur

$$C = (R_1 J - J R_0)(H_0 - z) E_0(I_0)$$

est compact d'après (2a). Donc $E_1(I_1^c) C$ tend vers zéro en norme quand I_1 tend vers l'infini. Mais

$$\begin{aligned} E_1(I_1^c) C = {} & \{E_1(I_1^c) R_1\}\{J(H_0 - z) E_0(I_0)\} \\ & - E_1(I_1^c) J E_0(I_0). \end{aligned}$$

Dans le second membre, le premier terme tend vers zéro en norme quand I_1 tend vers l'infini à I_0 fixé, car il en est ainsi pour le facteur $E_1(I_1^c)R_1$ tandis que le second facteur est borné. Donc le second terme tend aussi vers zéro en norme quand I_1 tend vers l'infini à I_0 fixé, ce qui prouve (3a).

(3, a + c) $\Longrightarrow$ (2a). Pour tout couple d'intervalles bornés I_0, I_1, on a

$$(R_1 J - J R_0) E_0(I_0) = E_1(I_1)(R_1 J - J R_0) E_0(I_0)$$
$$+ E_1(I_1^c) R_1 J E_0(I_0) - \{E_1(I_1^c) J E_0(I_0)\} R_0 .$$

Dans le second membre, le premier terme est compact par (3c), et quand I_1 tend vers l'infini à I_0 fixé, le second terme tend vers zéro en norme de façon évidente et le troisième tend vers zéro en norme par (3a). Donc le premier membre est limite en norme d'opérateurs compacts, donc compact, ce qui prouve (2a).

Q.E.D.

<u>Remarque 2.2</u>. Dans toutes les conditions de la proposition 2.1, on peut remplacer

(α) pour tout intervalle borné, $E_i(I)M$ est compact,

par une des conditions suivantes :

(β) pour tout $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $f(H_i)M$ est compact,

(γ) pour un (ou pour tout) $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ et un $\alpha > 0$, $R(z)^\alpha M$ est compact,

(δ) pour un $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ tel que f^{-1} soit localement borné, $f(H_i)M$ est compact.

La raison est que d'une part si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et f^{-1} est localement borné, alors

$$E_i(I) = f(H_i)\,\{f^{-1}(H_i)\,E_i(I)\}$$

où le second facteur du second membre est borné, et d'autre part toute $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions du type

$$\sum_{1 \leq j \leq N} a_j\,\chi\,(I_j)$$

où $\chi\,(I)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle I, si bien que $(\beta) \Rightarrow (\gamma) \Rightarrow (\delta) \Rightarrow (\alpha) \Rightarrow (\beta)$.

D'autre part dans toutes les conditions de la proposition 2.2, il est équivalent d'écrire "pour un $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ " ou "pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ". En effet, on a

$$R_1(z')\,J - J\,R_0(z') = \{(H_1 - z)\,R_1(z')\}\{R_1(z)\,J - J\,R_0(z)\} \times \{(H_0 - z)\,R_0(z')\}$$

et les facteurs extrêmes du second membre sont bornés pour z et $z' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

<u>Remarque 2.3</u>. La condition (3c) de la proposition 2.2 est évidemment équivalente à la condition

(3c') Pour tout intervalle borné I,

$$E_1(I)(H_1 J - J H_0)\,E_0(I) \quad \text{est compact .}$$

Une façon commode de la vérifier est de mettre la forme quadratique $H_1 J - J H_0$ sous la forme d'une somme de termes de la forme $A^* B$, où A et B sont deux opérateurs tels que pour tout intervalle borné I, $A\,E(I)$ soit borné et $B\,E_0(I)$ soit compact.

Exemple 2.4. C'est un cas particulier de l'exemple 2.3. Sous les mêmes hypothèses, on factorise $V = A^* B$ avec

$$A = B = W^{1/2} F(-i\nabla).$$

On a alors

$$0 \leq A^* A = V \leq H.$$

Donc $A E(I)$ est borné pour tout I. Si on renforce l'hypothèse sur W en supposant de plus que $W \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ où L^∞_0 est le sous-espace (fermé) de L^∞ formé des fonctions qui tendent vers zéro à l'infini, il est facile de voir que $B E_0(I)$ est compact pour tout intervalle borné I.

On donne maintenant un critère de comparaison des spectres essentiels de deux opérateurs autoadjoints qui confère un intérêt pratique à la proposition précédente. Ce critère est apparenté à un théorème de Weyl (cf. [14], p. 112). On désigne par $\sigma_e(H)$ le spectre essentiel d'un opérateur autoadjoint H.

Proposition 2.2. Soit H_0 et H_1 autoadjoints et J borné. On considère les conditions suivantes :

(1) Pour un (ou pour tout) $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

$$R_1(z) J - J R_0(z) \quad \text{est compact.}$$

(2) Pour toute $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$, $(\mathbb{1} - J^* J) f(H_0)$ est compact.

(3) Pour toute $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$, $f(H_1)(\mathbb{1} - J J^*)$ est compact.

Alors on a les implications suivantes

$$(1) \text{ et } (2) \Longrightarrow \sigma_e(H_0) \subset \sigma_e(H_1),$$

$$(1) \text{ et } (3) \Longrightarrow \sigma_e(H_1) \subset \sigma_e(H_0).$$

En particulier

$$(1),\ (2)\ \text{et}\ (3) \Longrightarrow \sigma_e(H_1) = \sigma_e(H_0).$$

Preuve. Il suffit de prouver la première assertion ; la seconde s'en déduit en échangeant H_1 et H_0, J et J^*, et la troisième en combinant les deux premières.

On montre d'abord que l'hypothèse (1) entraîne que $f(H_1)J - Jf(H_0)$ est compact pour toute $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Soit en effet $\mathcal{F}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ telles que $f(H_1)J - Jf(H_0)$ et $f(H_0)J^* - J^* f(H_1)$ soient compacts. Alors $\mathcal{F}$ est une $*$-algèbre fermée pour la norme uniforme : le seul point non évident est le fait que f et $g \in \mathcal{F}$ $\Rightarrow fg \in \mathcal{F}$, et résulte de l'identité

$$\begin{aligned} f(H_1)g(H_1)J - Jf(H_0)g(H_0) &= f(H_1)(g(H_1)J - Jg(H_0)) \\ &\quad + (f(H_1)J - Jf(H_0))g(H_0) \end{aligned}$$

et d'une identité analogue avec J^*. D'autre part, $\mathcal{F}$ contient les fonctions $(\lambda \pm i)^{-1}$ par l'hypothèse (1). Donc $\mathcal{F} = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ par le théorème de Stone-Weierstrass.

On montre ensuite que si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et si $f(H_1)$ est compact, alors sous les hypothèses (1) et (2), $f(H_0)$ est compact : en effet

$$f(H_0) = (\mathbb{1} - J^*J)f(H_0) - J^*(f(H_1)J - Jf(H_0)) + J^*f(H_1)J.$$

Le premier terme du second membre est compact par l'hypothèse (2), et le second par la première partie de la preuve.

Enfin, on caractérise $\sigma_e(H)$ comme le complément du plus grand ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ tel que $f(H)$ soit compact pour toute $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ à support contenu dans $\mathcal{O}$ ([14], p. 259). Par l'argument précédent, si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, $f(H_1)$ compact entraîne $f(H_0)$ compact, donc $\sigma_e(H_0) \subset \sigma_e(H_1)$.

Q.E.D.

Remarque 2.4. Les hypothèses (2) et (3) de la proposition 2.2 peuvent être remplacées respectivement par

(2') Pour tout intervalle borné I, $(\mathbb{1} - J^* J) E_0(I)$ est compact.

(3') Pour tout intervalle borné I, $E_1(I)(\mathbb{1} - J J^*)$ est compact. La raison est la même que dans la remarque 2.2.

La proposition 2.2 généralise le résultat de Weyl selon lequel $\sigma_e(H_1) = \sigma_e(H_0)$ si $R_1(z) - R_0(z)$ est compact. Ses hypothèses sont très maniables grâce à la proposition 2.1. En particulier, la condition (1) de la proposition 2.2 est identique à la condition (1) de la proposition 2.1. Les conditions (2) et (3) sont triviales pour $J = \mathbb{1}$. Souvent, pour traiter des problèmes avec potentiels très singuliers localement, on prend pour J l'opérateur de multiplication par une fonction réelle $j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $j = 0$ sur un certain compact, $j = 1$ en dehors d'un compact plus grand. Dans ce cas, $J = J^*$ et la condition (2) est trivialement satisfaite pour le H_0 de l'exemple 2.3. Dans ce même cas, la condition (3) est satisfaite si de plus H_0 est subordonné à H_1 (et pas seulement J^*-subordonné à H_1) car alors, pour tout intervalle borné I,

$$E_1(I)(\mathbb{1} - J J^*) = E_1(I)\, E_0(I_0)(\mathbb{1} - J^2) + E_1(I)\, E_0(I_0^c)(\mathbb{1} - J^2)$$

Le premier terme du second membre est compact par la condition (2), et le second terme tend vers zéro quand $I_0 \longrightarrow \infty$ par la subordination de H_0 à H_1, donc le premier membre est compact.

On termine cette section en donnant une généralisation du critère de Cook (cf. [8,15,16]).

<u>Proposition 2.3</u>. Soit H_0 et H_1 autoadjoints et J borné. On suppose qu'il existe un sous-espace $\mathcal{D}$ de $\mathcal{H}$ tel que

(1) $\mathcal{D}$ est un sous-espace dense de $\mathcal{R}(E_{0\,ac})$.

(2) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ pour tous intervalles bornés I_1, I,

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| E_1(I_1)(H_1 J - J H_0)\, U_0(t)\, E_0(I) E_{0\,ac}\, \varphi \| < \infty$$

(3) H_1 est J-subordonné à H_0.

Alors les opérateurs d'ondes généralisés existent :

$$\Omega_\pm(H_1, H_0; J) = \underset{t \to \pm\infty}{s\text{-}\lim}\; U_1(-t)\, J\, U_0(t)\, E_{0\,ac}\,.$$

Si de plus :

(4) $\underset{t \to \pm\infty}{s\text{-}\lim}\; (\mathbb{1} - J^* J)\, U_0(t)\, E_{0\,ac} = 0,$

alors les $\Omega_\pm(H_1, H_0; J)$ sont isométriques.

Si de plus :

$$(5)\quad \underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\ (\mathbb{1}-J)\ U_0(t)\,E_{oac} = 0\ ,$$

alors les opérateurs d'onde usuels $\Omega_\pm(H_1, H_0)$ existent et

$$\Omega_\pm(H_1, H_0) = \Omega_\pm(H_1, H_0\,;\,J).$$

<u>Preuve</u>. Il suffit de montrer la convergence forte sur un sous-espace dense de $\mathcal{R}(E_{oac})$, pour lequel on prend

$$\mathcal{D}_1 = \bigcup_I \{E_0(I)\,E_{oac}\,\varphi\ :\ \varphi\in\mathcal{D}\}$$

où la réunion est prise sur les intervalles bornés. Pour $\varphi\in\mathcal{D}_1$, $\varphi\in\mathcal{R}(E_0(I))$, on écrit

$$\begin{aligned} U_1(-t)\,J\,U_0(t)\,\varphi &= E_1(I_1^c)\,U_1(-t)\ J\,U_0(t)E_0(I)\varphi \\ &\quad + E_1(I_1)\,U_1(-t)\,J\,U_0(t)\,E_0(I)\varphi . \end{aligned}$$

La norme du premier terme est majorée par $\|E_1(I_1^c)\,J\,E_0(I)\|$ et tend vers zéro quand I_1 tend vers l'infini par l'hypothèse (3).

Le second terme se traite par dérivation et intégration et converge fortement pour I_1 fixé par l'hypothèse (2), de la même façon que dans la preuve usuelle du critère de Cook. Ceci montre l'existence des $\Omega_\pm(H_1, H_0\,;\,J)$.

La deuxième assertion de la proposition résulte de l'identité

$$\begin{aligned} &\|U_1(-t)\,J\,U_0(t)\,E_{oac}\,\varphi\|^2 - \|E_{oac}\,\varphi\|^2 \\ &= \langle U_0(t)\,E_{oac}\,\varphi, (J^*J-\mathbb{1})\,U_0(t)\,E_{oac}\,\varphi\rangle \end{aligned}$$

et la troisième assertion est évidente.

Q.E.D.

Remarque 2.5. Dans les applications, $\mathcal{D}$ sera souvent un sous-espace dense de

$$\mathcal{D}_o = \bigcup_I \mathcal{R}(E_o(I)E_{o\,ac})$$

et on aura alors $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$.

Une façon commode de vérifier l'hypothèse (2) est de mettre la forme quadratique $H_1 J - J H_o$ sous la forme d'une somme de termes de la forme $A^* B$, où A et B sont deux opérateurs tels que pour tout intervalle borné I , $A E(I)$ soit borné, que $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}_o$ et que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_1$,

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt \, \| B \, U_o(t) \varphi \| < \infty$$

(cf. la remarque 2.3 où on avait recours à une factorisation du même type).

L'hypothèse (3) a été discutée plus haut.

L'hypothèse (4) est satisfaite en particulier si $(\mathbb{1} - J^* J) E_o(I)$ est compact pour tout intervalle borné I , c'est-à-dire sous l'hypothèse (2') ou (2) de la proposition 2.2. Voir la remarque 2.4 et la discussion qui suit pour un exemple typique.

De la même façon, l'hypothèse (5) est satisfaite si $(\mathbb{1} - J) E_o(I)$ est compact pour tout intervalle borné I , et en particulier dans l'exemple mentionné ci-dessus.

On conclut cette section avec un exemple d'application qui est un cas particulier de l'exemple 2.3. On a $J = \mathbb{1}$ dans ce cas.

Exemple 2.5. On prend H_o et V comme dans l'exemple 2.3, mais on suppose de plus que $P(.) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que $\det \nabla_i \nabla_j P(k) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{R}^n$. (Cette condition pourrait être affaiblie). Sans hypothèse supplémentaire sur F, on utilise la factorisation $V = A^* B$ de l'exemple 2.4, qui assure déjà que $A E_1(I)$ est borné. Il suffit alors que $W^{1/2}$ satisfasse la condition d'Hörmander

$$\int_1^\infty dt \left\{ \int_{1 \leq |x| \leq 2} W(tx)\, dx \right\}^{1/2} < \infty$$

pour assurer l'intégrabilité de $\| B U_0(t) \varphi \|$ pour φ dans un $\mathcal{D}$ convenable [7] et par suite satisfaire toutes les hypothèses de la proposition 2.3.

Cet exemple nécessite cependant que W ait une décroissance à l'infini plus rapide que $|x|^{-2}$, ce qui n'est pas satisfaisant. Avec des hypothèses supplémentaires sur F et P, on peut affaiblir cette condition. Supposons par exemple qu'il existe une constante C telle que

$$|F(k)|^2 \leq C\,(P(k) + C)$$

pour tout $k \in \mathbb{R}^n$. Alors on peut utiliser une factorisation $V = A^* B$ avec

$$A = \mathrm{Max}\,(1, W^{1/2})\; F(-i\nabla)\,,$$

$$B = \mathrm{Min}\,(W, W^{1/2})\; F(-i\nabla)\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned} A^*A &\leq F(-i\nabla)^*\,(1 + W)\; F(-i\nabla) \\ &\leq C H_0 + V + C^2 \leq \mathrm{Max}(C, 1)\; H + C^2\,, \end{aligned}$$

ce qui assure que $A E(I)$ est borné pour tout I, et il suffit d'imposer la condition d'Hörmander à $\mathrm{Min}(W, W^{1/2})$; cette condition est satisfaite avec une décroissance de W à l'infini un peu meilleure que $|x|^{-1}$, comme on s'y attend.

Un autre exemple où on peut obtenir une amélioration analogue est le cas $F(-i\nabla) = P(-i\nabla) = -\Delta$, où on peut utiliser des propriétés de positivité ponctuelle. On renvoie à [3] pour ce point.

(3) Principe de la méthode et réduction du problème

Dans cette section, on commence l'exposé proprement dit de la méthode de Enss et on ramène le problème à la construction de deux opérateurs $R_{\pm}$ satisfaisant certaines propriétés et en particulier une estimation fondamentale. La construction de ces opérateurs sera faite par un découpage approprié de l'espace de phase et l'estimation sera démontrée par une méthode de phase stationnaire dans la section 4.

On étudie, dans $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ l'évolution décrite par le groupe unitaire $U(t)$ engendré par le Hamiltonien $H = H_0 + V$ où $H_0 = P(-i\nabla)$ et V est un opérateur d'interaction à courte portée, c'est-à-dire localisé en un sens convenable, et on compare cette évolution à l'évolution libre $U_0(t)$ engendrée par H_0, en vue de répondre aux questions (2) à (5) de la section 1.

Le principe de la méthode est le suivant. On considère l'évolution au cours du temps d'un état de diffusion, typiquement d'un état du spectre absolument continu de H. Soit $\varphi(t) = U(t)\varphi$ le vecteur d'état au temps t. Pour $|t|$ grand, par exemple t grand et positif, ce vecteur est concentré loin du centre diffuseur (au sens de la norme) et évolue donc à peu près selon l'évolution libre $U_0(t)$. Dans ces conditions, le vecteur d'état reste concentré au voisinage des trajectoires classiques engendrées par le Hamiltonien libre H_0, en un sens exprimé quantitativement par des estimations de phase stationnaire. On peut décomposer approximativement $\varphi(t) \sim \varphi_+(t) + \varphi_-(t)$,

où $\varphi_+(t)$ et $\varphi_-(t)$ sont les parties sortante et entrante de $\varphi(t)$, c'est-à-dire les parties pour lesquelles $x.v(k) \geqslant 0$ et $x.v(k) \leqslant 0$, où $v(k) \equiv \nabla P(k)$ est la vitesse classique. Cette séparation s'effectue de façon approchée par un découpage de l'espace de phase : on s'efforce d'assurer que $x.v(k) \geqslant 0$ (resp. $x.v(k) \leqslant 0$) pour x dans le support de $\varphi_+(t)$ (resp. $\varphi_-(t)$) et k dans le support de sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}_+(t)$ (resp. $\hat{\varphi}_-(t)$) . Dans ces conditions l'évolution de $\varphi_+(t)$ dans le futur et de $\varphi_-(t)$ dans le passé est régie par l'évolution libre :

$$U(s)\varphi_+(t) \sim U_o(s)\varphi_+(t) \text{ pour } s \geqslant 0 \text{ et } t \text{ grand},$$
$$U(s)\varphi_-(t) \sim U_o(s)\varphi_-(t) \text{ pour } s \leqslant 0 \text{ et } t \text{ grand}.$$

Par suite, on a approximativement

$$\Omega_\pm \varphi_\pm(t) \sim \varphi_\pm(t),$$

ce qui montre que pour t grand, $\varphi(t)$ est presque dans $\mathcal{R}(\Omega_+) + \mathcal{R}(\Omega_-)$ et par suite que $\varphi \in \mathcal{R}(\Omega_+) + \mathcal{R}(\Omega_-)$. Pour montrer qu'en fait φ est dans chacun des deux, par exemple dans $\mathcal{R}(\Omega_+)$, on a recours à l'argument suivant : par définition

$$\varphi = U(-t)\varphi(t) \sim U(-t)\varphi_+(t) + U(-t)\varphi_-(t),$$

où $U(-t)\varphi_+(t)$ est approximativement dans $\mathcal{R}(\Omega_+)$. D'après ce qui précède $U(-t)\varphi_-(t) \sim U_o(-t)\varphi_-(t)$. Pour t grand, $\varphi_-(t)$ est loin du centre diffuseur, et a fortiori $U_o(-t)\varphi_-(t)$ en est encore plus loin, et en particulier est presque orthogonal à φ . Par suite $\varphi(t)$ ne peut pas être orthogonal à $\varphi_+(t)$. On en déduit que le complément orthogonal de $\mathcal{R}(\Omega_+)$ dans $\mathcal{R}(\Omega_+) + \mathcal{R}(\Omega_-)$ est réduit à zéro, ce qui termine la preuve de la complétude asymptotique. En fait, si le découpage $\varphi(t) \sim \varphi_+(t) + \varphi_-(t)$ est bien fait, on trouve que $\varphi_-(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. On va maintenant garnir ce squelette d'énoncés précis et de démonstrations appropriées. Dans cette section, on ramène le problème à la construction, pour chaque intervalle borné d'énergie, de deux opérateurs $R_\pm$ destinés à effectuer la décomposition $\varphi_\pm(t) = R_\pm \varphi(t)$ et satisfaisant un certain nombre de conditions. Dans la section suivante, on construira effectivement de tels opérateurs et on montrera que les conditions requises sont satisfaites.

Les notations sont les mêmes que dans la section précédente, à la différence près qu'on omet partout l'indice 1 dans les quantités liées à l'évolution totale H, $U(t)$, $E(I)$, E_{ac}, $\mathcal{H}_{ac}$, $R(z)$. On se limite au cas où $J = \mathbb{1}$ et J n'apparaîtra plus désormais (voir [1,17] pour le cas $J \neq \mathbb{1}$). On note k indifféremment la variable impulsion, conjuguée de Fourier de x, et l'opérateur $-i\nabla$ dans la variable x. Si B est un ensemble Borélien de $\mathbb{R}^n$, on note $F(x \in B)$ (resp. $F(k \in B)$) l'opérateur de multiplication par la fonction caractéristique de B dans l'espace des positions (resp. des impulsions). Tous ces $F(\cdot)$ sont des projecteurs orthogonaux.

Les hypothèses sur H sont les suivantes.

(H1) Le hamiltonien libre est de la forme $H_0 = P(-i\nabla)$ où $P(k) = \overline{P(k)} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ et $P(k) \to +\infty$ quand $|k| \to \infty$. De plus P est $\mathcal{C}^{\ell+1}$ pour un ℓ assez grand (il suffit que $\ell \geq n+2$) et $\nabla P(k) \neq 0$ sauf sur un ensemble assez petit. Plus précisément, soit

$$S = \{ k : P \text{ n'est } \mathcal{C}^{\ell+1} \text{ dans aucun voisinage de } k \text{, ou } \nabla P(k) = 0 \}.$$

Il est évident que S est fermé. De plus $P(S)$ est fermé : en effet pour tout intervalle compact I, $P(S) \cap I = P(S \cap P^{-1}(I))$ est compact, car P est continu, S est fermé et $P^{-1}(I)$ est fermé (P continu) et borné ($P \to \infty$ à l'infini), donc compact. On fait l'hypothèse :

$$P(S) \text{ est dénombrable.}$$

(H2) Le hamiltonien total H est un opérateur autoadjoint tel que pour un (ou pour tout) $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $R(z) - R_0(z)$ est compact.

Il résulte des propositions 2.1 et 2.2 que H et H_0 sont mutuellement subordonnés et que $\sigma_e(H) = \sigma_e(H_0)$. De plus, $V = H - H_0$ est bien défini comme forme sesquilinéaire sur $\mathcal{D}(H) \times \mathcal{D}(H_0)$. (On ne suppose pas que V est défini comme opérateur).

(H3) Il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|g| \geq 1$, telle que pour tout intervalle borné I, la fonction

$$h_I(r) \equiv \| E(I)\, V\, g(k)^{-1} F(|x| \geq r) \| \in L^1(\mathbb{R}^+, dr).$$

Ces hypothèses appellent quelques remarques : La première partie de l'hypothèse (H1) est la même que dans l'exemple 2.3. La deuxième partie, $P \in \mathcal{C}^{\ell+1}(\mathbb{R}^n \setminus S)$ et $\nabla P \neq 0$, est destinée à permettre l'application des méthodes de phase stationnaire (voir les lemmes 4.2 et 4.3 ci-dessous), pour lesquelles il importe que la vitesse classique $\nabla P(k)$ soit bien définie et non nulle. La théorie qu'on va développer ne donnera pas d'information sur la partie du spectre de H contenue dans $P(S)$. L'hypothèse $P(S)$ dénombrable assure que $P(S)$ est trop petit pour porter du spectre continu. Elle entraîne en particulier que H_c n'a pas de spectre continu singulier. Par contre H_o peut avoir des valeurs propres de multiplicité infinie : si $P(k)=\mu$ pour k dans un ouvert $O \subset \mathbb{R}^n$, alors $O \subset S$ et H_o admet μ comme valeur propre avec un sous-espace propre de dimension infinie qui contient au moins $L^2(O)$. Dans les applications, on aura souvent P analytique et S et $P(S)$ seront localement finis.

L'hypothèse (H3) est la version adaptée à la présente théorie de la condition de décroissance de V à l'infini plus rapide que $|x|^{-1}$. Elle est satisfaite en particulier pour $V=(1+|x|)^{-(1+\varepsilon)}$ avec $g \equiv 1$. Noter que la fonction $h_I(r)$ est fonction décroissante de r, et donc, à cause de (H3), tend vers zéro quand $r \to \infty$.

En ce qui concerne les singularités locales du potentiel, il est difficile d'éviter de supposer que $E(I)\, V\, E_o(I)$ est borné pour tout I et que H est subordonné à H_o, car on va utiliser de façon essentielle le critère de Cook (proposition 2.3). Ceci entraîne que $E(I)\, V\, g(k)^{-1}$ est borné pour un g croissant assez vite, et par suite, au besoin en augmentant la croissance de g, que $E(I)\, V\, g(k)^{-1}\, F(|x| \leq r)$ est compact pour tout I. Il résulte alors de (H3) que $E(I)\, V\, g(k)^{-1}$ est limite en norme de compacts, donc compact. A fortiori $E(I)\, V\, E_o(I)$ est compact pour tout I. Comme d'autre part on utilisera presque explicitement la subordination de H_o à H, on est conduit naturellement, par la proposition 2.1, à imposer l'hypothèse (H2). Le choix de $g(k)$ est dans une large mesure arbitraire. On prendra g croissant assez vite pour que $E(I)\, V\, g(k)$ soit compact, ce qui sera réalisé si $|g(k)| \geqslant |i + P(k)|$ par la proposition 2.1, et d'autre part assez régulier pour ne pas détériorer la décroissance en x contenue dans V, par exemple $g(k)^{-1} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Dans tout ce qui suit, on suppose les hypothèses (H1), (H2) et (H3) satisfaites. On peut alors énoncer le résultat fondamental.

Théorème 3.1. Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3),

(1) Les opérateurs d'onde $\Omega_\pm$ existent.

(2) $\sigma_{cs}(H) = \emptyset$.

(3) Le spectre ponctuel de H dans $\mathbb{R} \setminus P(S)$ est formé de valeurs propres isolées de multiplicité finie, ne pouvant s'accumuler que sur $P(S)$.

(4) La complétude asymptotique est vérifiée :

$$\mathcal{R}(\Omega_\pm) = \mathcal{H}_{ac} .$$

Dans toute la suite de cette section, on supposera sans le répéter explicitement l'existence des $\Omega_\pm$. Elle sera prouvée dans la section suivante au moyen des estimations de phase stationnaire et du critère de Cook, sans recourir à la décomposition de $\varphi(t)$ en parties entrante et sortante. Dans le reste de la présente section, on va ramener la preuve des assertions (2) à (4) du théorème 3.1 à des propriétés de cette décomposition. La première étape de cette réduction est le lemme suivant.

Lemme 3.1. Soit I un intervalle compact. On suppose qu'il existe deux opérateure bornés $R_{\pm}$ tels que

(a) les opérateurs $(\Omega_{\pm} - \mathbb{1}) R_{\pm}$ sont compacts.

(b) l'opérateur $R_o E(I)$ est compact, où R_o est défini par
$$R_o = \mathbb{1} - R_+ - R_- .$$

Alors

(1) $\sigma_{cs}(H) \cap I = \phi$,

(2) $\sigma_p(H) \cap I$ consiste en valeurs propres isolées de multiplicité finie,

(3) $E(I)\mathcal{H}_{ac} = E(I)(\mathcal{R}(\Omega_+) \dotplus \mathcal{R}(\Omega_-))$.

où le signe $\dotplus$ désigne l'enveloppe linéaire.

On suppose en outre

(c) $\underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim} \; R_{\pm}^{*} U(t) E_{ac} = 0$.

Alors

(4) $E(I)\mathcal{R}(\Omega_+) = E(I)\mathcal{H}_{ac} = E(I)\mathcal{R}(\Omega_-)$,

c'est-à-dire, la complétude asymptotique est vérifiée localement dans I .

Preuve. Tout $\varphi \in \mathcal{H}$ admet une décomposition $\varphi = \varphi_+ + \varphi_- + \varphi_o$ avec $\varphi_{\pm} = R_{\pm}\varphi$, $\varphi_o = R_o\varphi$. Soit $\{\varphi_\alpha\}$ une famille de vecteurs $\varphi_\alpha \in \mathcal{R}(E(I))$, normée $(\|\varphi_\alpha\| = 1)$ et convergeant faiblement vers zéro. Il résulte alors de (a) et (b) que $(\Omega_{\pm} - \mathbb{1})\varphi_{\alpha\pm} \to 0$ et que $\varphi_{\alpha o} \equiv R_o E(I)\varphi_\alpha \to 0$. En utilisant cette propriété, on prouve d'abord (1), (2) et (3).

Pour prouver (1) et (2), il suffit de prouver que le complément orthogonal $\mathcal{R}(E(I)) \cap \mathcal{H}_{ac}^{\perp} \equiv E(I)\mathcal{H}_{ac}^{\perp}$ de $E(I)\mathcal{H}_{ac}$ dans $\mathcal{R}(E(I))$ est de dimension finie. On raisonne par l'absurde. Supposons que $E(I)\mathcal{H}_{ac}^{\perp}$ soit de dimension infinie. Alors il contient une suite orthonormée infinie $\{\varphi_n\}$. En particulier $\varphi_n \rightharpoonup 0$ quand $n \to \infty$. On a alors

$$\varphi_n = \Omega_+ \varphi_{n+} + \Omega_- \varphi_{n-} + \psi_n$$

avec

$$\psi_n = (\mathbb{1} - \Omega_+)\varphi_{n+} + (\mathbb{1} - \Omega_-)\varphi_{n-} + \varphi_{n0} .$$

Il résulte alors de (a) et (b), par la remarque précédente, que $\|\psi_n\| \to 0$ tandis que $\varphi_n - \psi_n \in \mathcal{R}(\Omega_+) + \mathcal{R}(\Omega_-) \subset \mathcal{H}_{ac}$, en contradiction avec le fait que $\|\varphi_n\| = 1$ et $\varphi_n \in \mathcal{H}_{ac}^{\perp}$. Ceci prouve (1) et (2).

Pour prouver (3), on considère un vecteur $\varphi \in E(I)\mathcal{H}_{ac}$. Alors $\varphi(t) = U(t)\varphi$ tend faiblement vers zéro quand $t \to \pm\infty$, par une application classique du lemme de Riemann-Lebesgue. On décompose $\varphi(t) = \varphi_+(t) + \varphi_-(t) + \varphi_0(t)$. On a alors

$$\varphi = U(-t)E(I)\left(\Omega_+\varphi_+(t) + \Omega_-\varphi_-(t) + \psi(t)\right)$$

avec

$$\psi(t) = (\mathbb{1} - \Omega_+)\varphi_+(t) + (\mathbb{1} - \Omega_-)\varphi_-(t) + \varphi_0(t),$$

donc, par l'entrelacement,

$$\varphi = E(I)\{\Omega_+ U_0(-t)\varphi_+(t) + \Omega_- U_0(-t)\varphi_-(t)\}$$
$$+ E(I)U(-t)\psi(t).$$

Mais

$$\|E(I)U(-t)\psi(t)\| = \|E(I)\psi(t)\| \leq \|\psi(t)\| \to 0$$

quand $t \to \pm\infty$, donc φ est limite en norme de vecteurs appartenant à $E(I)\big(\mathcal{R}(\Omega_+) + \mathcal{R}(\Omega_-)\big)$, ce qui prouve (3).

Pour prouver (4) en supposant en outre (c), on raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $\varphi \in E(I)\mathcal{H}_{ac}$, $\|\varphi\| = 1$, $\varphi \perp \mathcal{R}(\Omega_+)$. On écrit alors

$$\varphi(t) = \Omega_+ \varphi_+(t) + \varphi_-(t) + (\mathbb{1} - \Omega_+)\varphi_+(t) + \varphi_0(t)$$

et par suite

$$\|\varphi\|^2 = \|\varphi(t)\|^2 = \langle \varphi(t), \Omega_+ \varphi_+(t)\rangle + \langle \varphi(t), \varphi_-(t)\rangle$$
$$+ \langle \varphi(t), (\mathbb{1} - \Omega_+)\varphi_+(t) + \varphi_0(t)\rangle .$$

Dans le dernier membre, le premier terme est nul par hypothèse, le second est égal à $\langle R_-^* U(t)\varphi, U(t)\varphi\rangle$ et tend vers zéro quand $t \to +\infty$ par l'hypothèse (c), et le troisième tend vers zéro par le même argument que précédemment ; donc le second membre tend vers zéro quand $t \to +\infty$, en contradiction avec l'hypothèse $\|\varphi\| = 1$. Ceci prouve que $E(I)\mathcal{R}(\Omega_+) = E(I)\mathcal{H}_{ac}$. La seconde partie de (4) est prouvée de la même façon en faisant tendre t vers $-\infty$.

<u>Remarque 3.1</u>. Si on remplaçait l'hypothèse (c) par

$$\text{(c')} \quad \underset{t \to \mp\infty}{s\text{-}\lim} \; R_\pm U(t) E_{ac} = 0$$

on obtiendrait immédiatement $\varphi_\pm(t) \to 0$ pour $t \to \mp\infty$ et $\varphi \in E(I)\mathcal{H}_{ac}$, ce qui entraînerait (4) de façon directe sans utiliser l'argument d'orthogonalité précédent. La raison pour utiliser (c) est que les majorations qui permettent de prouver (a) et (b) conduisent naturellement à (c) et non à (c'). Cependant (c') est une conséquence immédiate de (c) et de la condition supplémentaire

(c") $(R_{\pm}^{*} - R_{\pm})\, E(I)$ est compact,

qui sera réalisée en pratique par la construction de la section suivante, où on aura en fait $R_{\pm} = R_{\pm}^{*}$.

<u>Corollaire 3.1</u>. On suppose que pour tout intervalle compact I ne rencontrant pas $P(S)$, $(I \cap P(S) = \phi)$, il existe deux opérateurs bornés $R_{\pm}$ (dépendant de I en général), satisfaisant les hypothèses (a),(b) et (c) du lemme 3.1. Alors les assertions (2), (3) et (4) du théorème 3.1 sont vérifiées.

<u>Preuve</u>. Résulte immédiatement du lemme 3.1 et du fait que $P(S)$ est fermé et dénombrable.

Q.E.D.

On continue maintenant la réduction du problème en donnant des conditions suffisantes pour que les conditions (a) et (c) soient satisfaites. Dans toute la fin de cette section, I est un intervalle compact fixé. On ne le suppose pas explicitement disjoint de $P(S)$ pour le moment.

On remarque tout d'abord que sous la seule hypothèse (H2), l'opérateur $(U(-t)\, U_0(t) - \mathbb{1})\, E_0(I_0)$ est compact pour tout intervalle borné I_0 et tout $t \in \mathbb{R}$. En effet, pour tout intervalle borné I_1, on a

$$(U(-t)\, U_0(t) - \mathbb{1})\, E_0(I_0) = E(I_1^C)\big(U(-t)\, U_0(t) - \mathbb{1}\big)\, E_0(I_0)$$
$$+ i \int_0^t d\tau\; U(-\tau)\, E(I_1)\, V\, E_0(I_0)\, U_0(\tau).$$

Le premier terme du second membre tend vers zéro en norme quand I_1 tend vers l'infini car H est subordonné à H_o. Le second terme a un intégrand compact d'après (H2) et continu en norme à cause des projecteurs, donc est compact.

Pour assurer la condition (a), il suffit donc d'assurer que, si on multiplie l'intégrand par $R_\pm$, l'intégrale converge en norme quand $t \to \pm\infty$. Ceci conduit naturellement au lemme ci-dessous.

Lemme 3.2. Soit I un intervalle compact et $R_\pm$ deux opérateurs bornés. On suppose que

(d) Il existe un intervalle borné I_o tel que $E_o(I_o)R_\pm = R_\pm$.

(e) Il existe un $b > 0$ tel que les fonctions (positives continues) $m_{b\pm}(t)$ définies par

$$m_{b\pm}(t) = \| F(|x| \leq b|t|)\, U_o(t)\, g(k)\, R_\pm \|$$

satisfassent $m_{b\pm} \in L^1(\mathbb{R}^\pm, dt)$.

Alors $(\Omega_\pm - \mathbb{1})R_\pm$ est compact, c.-à-d. (a) est vérifiée.

On suppose en outre que

(f) $m_{b\pm}(t) \longrightarrow 0$ quand $t \to \pm\infty$.

Alors (c) est vérifiée.

Preuve. D'après la remarque précédente et la condition (d), pour prouver la condition (a), il suffit de prouver que pour tout intervalle borné I_1, les intégrales

$$\int_0^{\pm\infty} dt\, E(I_1)\, U(-t)\, V\, U_o(t)\, R_\pm$$

convergent en norme à l'infini. On majore en norme par

$$\|\cdot\| \leq \int_0^{\pm\infty} dt \, \| E(I_1) V g(k)^{-1} F(|x| \geq b|t|) \| \, \| g(k) R_\pm \|$$

$$+ \int_0^{\pm\infty} dt \, \| E(I_1) V g(k)^{-1} \| \, \| F(|x| \leq b|t|) U_0(t) g(k) R_\pm \|$$

$$\leq \| g(k) E_0(I_0) R_\pm \| \int_0^{\pm\infty} dt \, h_{I_1}(b|t|)$$

$$+ h_{I_1}(0) \int_0^{\pm\infty} m_{b\pm}(t) \, dt ,$$

où h_{I_1} est défini dans l'hypothèse (H3). L'intégrabilité résulte alors de (H3) et de (e).

Pour prouver (c) on écrit pour $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$

$$R_\pm^* U(t) \varphi = R_\pm^* (\mathbb{1} - \Omega_\pm^*) \varphi(t) + R_\pm^* U_0(t) \Omega_\pm^* \varphi .$$

Le premier terme du second membre tend vers zéro par (a) et la convergence faible $\varphi(t) \rightharpoonup 0$. On décompose le second terme en

$$R_\pm^* U_0(t) \Omega_\pm^* \varphi = R_\pm^* U_0(t) g(k)^* F(|x| \geq b|t|) \psi$$

$$+ R_\pm^* U_0(t) g(k)^* F(|x| \leq b|t|) \psi$$

où

$$\psi = g(k)^{*-1} \Omega_\pm^* \varphi .$$

Par suite

$$\|\cdot\| \leq \| g(k) R_\pm \| \, \| F(|x| \geq b|t|) \psi \| + m_{b\pm}(-t) \| \psi \| ,$$

et ceci tend vers zéro quand $t \to \mp\infty$ par (d) et (f).

Q.E.D.

<u>Remarque 3.2</u>. Pour prouver (c), il suffirait de supposer au lieu de (f) que pour tout $r > 0$,

$$\| F(|x| \leq r) \, U_0(t) \, R_\pm \| \longrightarrow 0$$

quand $t \to \pm \infty$. La démonstration serait obtenue en décomposant

$$R_\pm^* \, U_0(t) \, \Omega_\pm^* \, \varphi = R_\pm^* \, U_0(t) \, F(|x| \leq r) \, \Omega_\pm^* \, \varphi$$
$$+ R_\pm^* \, U_0(t) \, F(|x| \geq r) \, \Omega_\pm^* \, \varphi,$$

si bien que

$$\| \cdot \| \leq \| R_\pm \| \, \| F(|x| \geq r) \, \Omega_\pm^* \, \varphi \|$$
$$+ \| F(|x| \leq r) \, U_0(-t) \, R_\pm \| \, \| \varphi \|,$$

et en faisant tendre t vers $\mp \infty$ et r vers l'infini dans cet ordre. On a préféré l'hypothèse sous la forme (f) car elle fait intervenir les fonctions $m_{f\pm}(t)$ qu'on doit de toute façon contrôler dans (e).

La dernière étape de la réduction du problème consiste à ramener la construction des opérateurs $R_\pm$ à celle de deux opérateurs $P_\pm$ tels que $P_+ + P_- = \mathbb{1}$. On prendra alors $R_\pm = f(H_0) P_\pm f(H_0)$ pour une f convenable dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, ce qui permettra de satisfaire facilement les conditions (b) et (d) et ramènera la vérification de (e) et (f) à celle d'une estimation fondamentale (g):

Lemme 3.3. Soit I un intervalle compact. Soit $P_{\pm}$ deux opérateurs bornés tels que $P_+ + P_- = \mathbb{1}$. Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ réelle à support compact I_o, $f \equiv 1$ sur I, $0 \leq f \leq 1$. Soit $R_{\pm} = f(H_o) P_{\pm} f(H_o)$. Alors

(1) Les conditions (b) du lemme 3.1 et (d) du lemme 3.2 sont satisfaites (avec $I_o =$ Supp f). Si en outre les $P_{\pm}$ sont autoadjoints, alors les $R_{\pm}$ sont autoadjoints et la condition (c") de la remarque 3.1 est satisfaite.

(2) On suppose en outre vérifiée la condition suivante

(g) Il existe $\theta > 0$, $C \geq 0$ et $\gamma > 1$ tels que

$$\| F(|x| \leq \theta |t|) U_o(t) g(k) f(H_o) P_{\pm} \| \leq C |t|^{-\gamma}$$

pour $t \gtrless 0$.

Alors les conditions (e) et (f) du lemme 3.2 sont satisfaites.

Preuve. Pour prouver (b), on remarque que

$$R_o E(I) = (f(H)^2 - f(H_o)^2) E(I)$$

est compact par l'hypothèse (H2) et le même argument que dans la preuve de la proposition 2.2. Les autres assertions du lemme sont évidentes.

Q.E.D.

Ceci termine la réduction du problème. Dans la section suivante, on construira des opérateurs $P_{\pm}$ satisfaisant la condition (g) pour un f convenable.

On conclut cette section en indiquant brièvement quelques variantes de la réduction précédente, de façon à permettre sa comparaison avec les versions antérieures de la théorie. Dans [3] et [17], on utilise une forme différente du lemme 3.1, où la décomposition $\varphi \to \varphi_{\pm}$ est effectuée individuellement pour chaque suite $\{\varphi_n\}$ et non de façon systématique au moyen d'opérateurs $R_{\pm}$ ne dépendant que de I.

Une des formes possibles de ce lemme est la suivante.

<u>Lemme 3.1'</u>. Soit I un intervalle compact. On suppose que toute suite $\{\varphi_n\}$ dans $\mathcal{R}(E(I))$, normée $(\|\varphi_n\| = 1$ pour tout $n)$ et faiblement convergente $(\varphi_n \rightharpoonup 0)$ admet une sous-suite $\{\varphi'_n\}$ pour laquelle il existe une décomposition

$$\varphi'_n = \varphi'_{n+} + \varphi'_{n-} + \varphi'_{n0}$$

telle que $(\Omega_{\pm} - \mathbb{1})\varphi'_{n\pm} \to 0$ et $\varphi'_{n0} \to 0$ quand $n \to \infty$. Alors les conclusions (1), (2) et (3) du lemme 3.2 sont vérifiées.

On suppose en outre que $\langle \varphi'_n, \varphi'_{n\mp} \rangle \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$ lorsque $\{\varphi'_n\}$ est la sous-suite extraite d'une suite $\varphi_n = U(t_n)\varphi$ pour un $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$ et une suite $t_n \to \pm\infty$. Alors la conclusion (4) du lemme 3.1 est vérifiée.

La preuve du lemme 3.1' est pratiquement identique à celle du lemme 3.1. Pour prouver (1) et (2), on opère avec la sous-suite $\{\varphi'_n\}$ extraite de la suite initiale $\{\varphi_n\}$ et pour prouver (3) et (4), avec la sous-suite $\{\varphi'_n\}$ extraite de $\varphi(t_n) = U(t_n)\varphi$, au lieu de garder $\varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{\pm}$. D'autre part, il est évident que les hypothèses du lemme 3.1 entraînent celles du lemme 3.1', sans même qu'il soit besoin de passer à une sous-suite.

La convergence faible vers zéro d'une suite $\{\varphi_n\}$ dans $\mathcal{R}(E(I))$ est une façon commode d'exprimer que φ_n s'éloigne indéfiniment du centre diffuseur. La relation entre ces deux propriétés est exprimée par le lemme suivant (qui ne sera pas utilisé dans le présent exposé).

<u>Lemme 3.3</u>. Soit $\{\varphi_n\}$ une suite dans $\mathcal{R}(E(I))$, normée $(\|\varphi_n\| = 1)$ et tendant faiblement vers zéro $(\varphi_n \rightharpoonup 0)$. Alors pour toute suite $\{r_n\}$ croissante de réels positifs tendant vers l'infini, pour toute suite $\{\varepsilon_n\}$ décroissante de réels strictement positifs tendant vers zéro, il existe une sous-suite $\{\varphi'_n\}$ de $\{\varphi_n\}$ telle que

$$\| F(|x| \leq r_n)\varphi'_n \| \leq \varepsilon_n \qquad \text{pour tout } n.$$

Réciproquement si une suite $\{\varphi_n\}$, $\|\varphi_n\| = 1$, satisfait

$$\| F(|x| \leq r_n)\varphi_n \| \leq \varepsilon_n$$

pour une suite $\{r_n\}$ et une suite $\{\varepsilon_n\}$ comme ci-dessus, alors $\{\varphi_n\}$ tend faiblement vers zéro.

<u>Preuve</u>. Pour tout $r > 0$ et tout intervalle I_0 borné,

$$F(|x| \leq r)E(I) = F(|x| \leq r)\,E_0(I_0)E(I) + F(|x| \leq r)\,E_0(I_0^c)E(I).$$

Le premier terme du second membre est compact et le second tend vers zéro en norme quand $I_o \longrightarrow \infty$ car H est subordonné à H_o. Donc le premier membre est compact. Donc si $\{\varphi_n\}$ est une suite dans $\mathcal{R}(E(I))$ normée $(\|\varphi_n\| = 1)$ et tendant faiblement vers zéro, la suite

$$F(|x| \leqslant r)\varphi_n \equiv F(|x| \leqslant r)E(I)\varphi_n$$

tend vers zéro quand $n \longrightarrow \infty$ pour r fixé. La première assertion du lemme en résulte immédiatement. La seconde est évidente.

Q.E.D.

Grâce au lemme 3.3, on peut utiliser indifféremment la convergence faible ou l'éloignement à l'infini (au sens de ce lemme) pour formuler le lemme 3.1'. (Comparer [3] et [17]).

L'idée d'utiliser une décomposition opératorielle $\mathcal{A} \sim R_+ + R_-$ pour obtenir la décomposition de $\varphi(t)$ en partie entrante et sortante et d'utiliser en association la convergence faible et la compacité pour obtenir les convergences fortes requises est due à Mourre [9]. Cette méthode permet une économie importante de majorations explicites.

Dans des versions antérieures de la théorie, l'absence de spectre continu singulier était prouvée en appliquant le lemme 3.1 ou 3.1' à une suite $\varphi_n = U(t_n)\varphi$ pour un $\varphi \in \mathcal{H}_{cs}$, le sous-espace continu singulier de H. Pour obtenir une suite de ce type tendant faiblement vers zéro (ou s'éloignant à l'infini), on recourait à un théorème ergodique ([13] p. 343). L'inutilité de ce théorème a été remarquée par Davies [3]. La preuve est maintenant basée sur le fait élémentaire qu'il n'y a pas de spectre continu singulier en dimension finie.

(4) Estimations de phase stationnaire et construction des opérateurs $P_{\pm}$.

Dans cette section on commence par rappeler les estimations de phase stationnaire qui serviront à démontrer la condition (g) du lemme 3.3 . On les applique ensuite à la démonstration de l'existence des opérateurs d'onde, qui avait été laissée en suspens. On construit ensuite explicitement, pour tout intervalle compact I disjoint de $P(S)$, les opérateurs $P_{\pm}$ associés, et on montre que la condition (g) du lemme 3.3 est satisfaite . On donne, dans le cas général, une première construction qui est à un détail près (voir remarque 4.2) celle de [3]. On donne ensuite, en ne traitant explicitement que le cas où P est à symétrie sphérique, une deuxième construction qui généralise simultanément celles de [9,11,18]. La section s'achève avec diverses remarques.

On commence par rappeler une estimation de phase stationnaire (ou plutôt non stationnaire) due à Hörmander ([7],[13] p. 37). Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{C}^\ell(K)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^\ell(\mathbb{R}^n)$ à support compact contenu dans K.

Lemme 4.1. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$, K compact, $\mathcal{U}$ un voisinage de K, ℓ entier $\geqslant 0$, $f \in \mathcal{C}^{\ell+1}(\mathcal{U})$, f réelle, telle que $\nabla f(k) \neq 0$ pour tout $k \in K$. Soit ω réel, $\omega > 0$, et $\psi \in \mathcal{C}^\ell(K)$.

Alors on a la majoration suivante

$$\int dk \exp(i\omega f(k))\, \psi(k) \leq C_\ell\, (1+\omega)^{-\ell}\, \|\psi\|_{\ell,\infty}$$

avec

$$\|\psi\|_{\ell,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq \ell} \operatorname{Sup}_{k} |D^\alpha \psi(k)|$$

où α est un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, et $D^\alpha = \prod_{1 \leq i \leq n} \partial_i^{\alpha_i}$ avec $\partial_i = \partial / \partial k_i$.

La constante C_ℓ dépend de K mais peut être prise uniforme en f si $|\nabla f(k)| \geqslant a > 0$ pour tout $k \in K$ et, si $\ell \geqslant 1$, $\|f\|'_{\ell+1, K, \infty} \leqslant M < \infty$ pour a et M fixés, avec

$$\|f\|'_{\ell+1, K, \infty} = \sum_{\alpha : 2 \leqslant |\alpha| \leqslant \ell+1} \sup_{k \in K} |D^\alpha f(k)|.$$

<u>Preuve</u>. Pour chaque $k \in K$, il existe un $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\partial_i f(k) \neq 0$, et un voisinage de k dans lequel $\partial_i f$ ne s'annule pas. Par la compacité, on peut recouvrir K par un nombre fini de tels voisinages, tous contenus dans $\mathcal{U}$. Soit $\{\theta_r\}$ une partition de l'unité adaptée à ce recouvrement, $\theta_r \in \mathcal{C}^\infty$, $\sum \theta_r = 1$ sur K. On décompose $\psi = \sum_r \psi \theta_r$ et on traite chaque terme séparément. En intégrant ℓ fois par parties

$$\int dk \exp(i \omega f(k)) \psi(k) \theta_r(k)$$

$$= \frac{i}{\omega} \int dk \exp(i \omega f(k)) \frac{\partial}{\partial k_i} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial k_i} \right)^{-1} \psi(k) \theta_r(k) \right\}$$

$$= \frac{i^\ell}{\omega^\ell} \int dk \exp(i \omega f(k)) \left\{ \frac{\partial}{\partial k_i} \left(\frac{\partial f}{\partial k_i} \right)^{-1} \right\}^\ell \psi(k) \theta_r(k)$$

où chaque $\partial / \partial k_i$ s'applique à tout ce qui est à sa droite. Par suite

$$|\cdot| \leqslant C \omega^{-\ell} \|\psi\|_{\ell, \infty}$$

d'où l'estimation annoncée en sommant sur r.

Pour montrer l'uniformité en f, on note que C_ℓ contient une somme sur r, et pour chaque r, une somme de termes contenant des dérivées de θ_r jusqu'à l'ordre ℓ, et des facteurs contenant f, qu'on peut mettre sous la forme $Q(D^\alpha f)|\partial_i f|^{-m}$ où Q est un polynôme de dérivées d'ordre α, $2 \leq |\alpha| \leq \ell+1$, donc contrôlé par $\|f\|'_{\ell+1,\infty,K} \leq M$. Pour assurer l'uniformité annoncée, il suffit donc qu'on puisse choisir un recouvrement $\{U_r\}$ fixe, dans chaque ouvert duquel la dérivée sélectionnée $\partial_i f$ soit minorée uniformément. Avec $|\nabla f| \geq a > 0$, il existe pour chaque k un i tel que $|\partial_i f(k)| \geq a\, n^{-1/2}$, car $|\nabla f|^2 = \sum_i |\partial_i f|^2$. Avec $\|f\|'_{2,\infty,K}$ uniformément borné, il existe un $\delta > 0$ uniforme en f tel que $|\partial_i f| \geq a(2n)^{-1/2}$ dans la boule de centre k et de rayon δ, et pour le i sélectionné au point k. Il suffit alors de prendre un recouvrement fixe $\{U_r\}$ par des boules ouvertes de rayon δ, et pour chaque boule de choisir i comme ci-dessus pour k au centre de la boule. Ceci prouve l'uniformité pour $\ell \geq 1$. Le cas $\ell = 0$ est trivial.

Q.E.D.

On applique maintenant ce résultat à l'évolution libre $U_0(t)$. Pour tout compact $B \subset \mathbb{R}^n$ et tout $t \neq 0$ on note

$$t B = \{ t y : y \in B \}$$

et $d(x, B)$ la distance euclidienne de x à B ($d(x,B) = 0$ si $x \in B$). On note $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier et $\hat{\varphi} = \mathcal{F}\varphi$ la transformée de Fourier d'une fonction φ.

Lemme 4.2. On suppose que H_0 satisfait l'hypothèse (H1). Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact disjoint de S. Soit $\varphi \in \mathcal{H}$ telle que $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}^\ell(K)$. Soit $\varphi_t = U_0(t)\varphi$, $t \neq 0$. Soit $B \equiv \nabla P(K) \equiv \{ v : \exists\, k \in K$ tel que $\nabla P(k) = v \}$. Alors pour tout $x \notin tB$, φ_t satisfait la majoration

$$|\varphi_t(x)| \leqslant C_\ell \left(1 + d(x, tB)\right)^{-\ell} \|\hat{\varphi}\|_{\ell,\infty}.$$

La constante C_ℓ dépend de K, mais est uniforme en x, t et φ pourvu que $d(x/t, B) \geqslant b > 0$.

Preuve. On note d'abord que B est compact (et ne contient pas l'origine car K est compact et disjoint de S). φ_t peut être représenté comme l'intégrale

$$\varphi_t(x) = (2\pi)^{-n/2} \int dk \, \exp\left(ik.x - it\, P(k)\right) \hat{\varphi}(k).$$

On applique alors le lemme 4.1 pour $x \notin tB$ avec $\omega = d(x, tB)$ et $\omega f(k) = k.x - t\, P(k)$. On a alors

$$\nabla f(k) = d(x, tB)^{-1} \left(x - t\, \nabla P(k)\right),$$

donc $|\nabla f| \geqslant 1$ pour tout $k \in K$. D'autre part, pour $\ell \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \|f\|'_{\ell+1,\infty,K} &= t\, d(x, tB)^{-1} \|P\|'_{\ell+1,\infty,K} \\ &= d(x/t, B)^{-1} \|P\|'_{\ell+1,\infty,K}, \end{aligned}$$

et cette quantité est majorée uniformément en x et t pour $d(x/t, B) \geqslant b > 0$. Le résultat est alors une conséquence immédiate du lemme 4.1.

Q.E.D.

En utilisant le lemme 4.2, on démontre maintenant l'existence des opérateurs d'onde, qui avait été laissée en suspens dans la section 3. La méthode est une variante du critère de Cook (proposition 2.3) et est logiquement indépendante de la décomposition de $\varphi(t)$ en parties entrante et sortante (Lemme 3.1 et suivants).

Lemme 4.3. Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), les opérateurs d'onde $\Omega_\pm$ existent.

Preuve. D'après la subordination de H à H_0, il suffit de montrer que pour tout intervalle borné I_1 et tout φ dans un sous-espace dense $\mathcal{D}$ de $\mathcal{R}(E_{0ac})$, les intégrales suivantes convergent :

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} \| E(I_1) V U_0(t) \varphi \| \, dt < \infty .$$

On prend

$$\mathcal{D} = \bigcup_I \mathcal{F}^{-1} \mathcal{C}^\ell (P^{-1}(I))$$

où la réunion est prise sur les intervalles compacts I disjoints de $P(S)$. Il résulte de l'hypothèse (H1) que $P^{-1}(I)$ est un compact disjoint de S pour tout I de ce type, et que $\mathcal{D}$ est un sous-espace dense de $\mathcal{R}(E_{0ac}) \equiv \mathcal{H}_{0ac}$, car il en est ainsi de

$$\bigcup_I \mathcal{R}(E_0(I)),$$

et pour chaque I, $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^\ell(P^{-1}(I))$ est dense dans $\mathcal{R}(E_0(I)) \equiv \mathcal{F}^{-1}L^2(P^{-1}(I))$.

Soit alors I compact disjoint de $P(S)$, $K = P^{-1}(I)$ et $B = \nabla P(K)$. K est un compact disjoint de S et B est un compact ne contenant pas l'origine. Soit $d(0,B) = 2b > 0$. Il est clair que $d(x/t, B) \geq b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $t \neq 0$ tels que $|x| \leq b|t|$.

Soit $\varphi \in \mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^\ell(K)$, c.-à-d. $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}^\ell(K)$.

On décompose l'intégrale précédente comme suit :

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} \| E(I_1)\, V\, U_0(t)\varphi \|\, dt \leqslant$$

$$\int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt\, \| E(I_1)\, V g(k)^{-1} F(|x| \geqslant b|t|)\, g(k)\, U_0(t)\, \varphi \|$$

$$+ \int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt\, \| E(I_1) V g(k)^{-1} F(|x| \leqslant b|t|)\, g(k)\, U_0(t)\varphi \|$$

$$\leqslant \| g(k)\varphi \| \int_{\pm 1}^{\pm\infty} h_{I_1}(b|t|)\, dt$$

$$+ h_{I_1}(0) \int_{\pm 1}^{\pm\infty} dt\, \| F(|x| \leqslant b|t|)\, U_0(t)\, g(k)\varphi \| .$$

La première intégrale est convergente par l'hypothèse (H3). L'intégrand de la deuxième est majoré pour tout t par $\| g(k)\varphi \| \leqslant \| g(k) E_0(I) \| \, \| \varphi \|$ et pour tout $t \neq 0$, d'après le lemme 4.2, par

$$\sigma_n^{1/2} (b|t|)^{n/2} C_\ell \sup_{|x| \leq b|t|} d(x, tB)^{-\ell} \| g(k)\hat{\varphi} \|_{\ell,\infty}$$

$$\leqslant \sigma_n^{1/2} C_\ell\, (b|t|)^{n/2 - \ell} \| g(k)\hat{\varphi} \|_{\ell,\infty} ,$$

où σ_n est le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$, et on a utilisé le fait que $d(x, tB) \geqslant b|t|$ pour $|x| \leqslant b|t|$.

Par suite, avec $\ell \geqslant [n/2] + 2$, la deuxième intégrale est convergente, ce qui achève la preuve du lemme.

Q.E.D.

On commence maintenant la construction des opérateurs $R_\pm$, qu'on cherche sous la forme $R_\pm = f(H_0)\, P_\pm\, f(H_0)$. La fonction f sert à assurer une localisation dans l'espace des impulsions grâce à laquelle la vitesse classique $v(k) \equiv \nabla P(k)$ est bien définie et non nulle. Il reste à construire les opérateurs $P_\pm$ qui effectuent la séparation en partie entrante et sortante. Les différentes constructions existantes sont à des détails près, du type suivant : on introduit un espace de Hilbert auxiliaire $\mathcal{K}$ et une isométrie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ et $\mathcal{C}$ peuvent dépendre de l'intervalle d'énergie I considéré) et on prend $P_\pm = \mathcal{C}^* \widetilde{P}_\pm \mathcal{C}$ où $\widetilde{P}_\pm$ sont essentiellement deux projecteurs orthogonaux particulièrement simples dans $\mathcal{K}$ tels que $\widetilde{P}_+ + \widetilde{P}_- = \mathbb{1}$. Ceci entraîne que les $P_\pm$ sont autoadjoints positifs et que $P_+ + P_- = \mathbb{1}$, grâce à l'isométrie de $\mathcal{C}$.

On donne d'abord une première construction dans laquelle la séparation en parties entrante et sortante est effectuée selon la condition $x . v(k) \gtrless 0$. Comme les opérateurs x et k ne commutent pas dans $\mathcal{H}$, on doit se contenter d'une séparation approchée, à une erreur finie près en impulsion et à une décroissance rapide près en position. Pour cela, on choisit comme espace auxiliaire

$$\mathcal{K} = L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, dy\, dq)$$

où $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est considéré comme l'espace de phase classique. La construction de l'isométrie $\mathcal{C}$ s'effectue commodément au moyen d'états cohérents généralisés ([2] p. 41).

On note τ_u et $\hat{\tau}_u$ respectivement les opérateurs de translation par u dans l'espace des positions et des impulsions:

$$(\tau_u \varphi)(x) = \varphi(x-u),$$
$$(\hat{\tau}_u \varphi)(x) = e^{iu.x} \varphi(x),$$
$$\hat{\tau}_u = \mathcal{F}^{-1} \tau_u \mathcal{F}.$$

Soit $z \in \mathcal{H}$, $\| z \| = 1$. Pour tout point $(y,q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de l'espace de phase classique, on définit la double translatée de z

$$z_{yq} = \tau_y \hat{\tau}_q z$$

ou encore

$$z_{yq}(x) = e^{iq.(x-y)} z(x-y).$$

Intuitivement, on doit considérer z_{yq} comme localisée au voisinage de y en position et au voisinage de q en impulsion. Les z_{yq} sont des états cohérents généralisés. On définit l'application $\mathcal{C}_z$ (dépendant de z) de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{K}$ par

$$(\mathcal{C}_z \varphi)(y,q) = \langle z_{yq}, \varphi \rangle .$$

$\mathcal{C}_z$ est une isométrie. En effet, pour tout φ dans $\mathcal{H}$,

$$\int dy\, dq\, |\langle z_{yq}, \varphi \rangle|^2$$
$$= \int dy\, dq\, \left| \int \bar{z}(x-y)\, e^{-iq.(x-y)} \varphi(x)\, dx \right|^2$$
$$= \int dy\, dx\, |z(x-y)|^2 |\varphi(x)|^2 = \| \varphi \|^2$$

par le théorème de Plancherel. Par contre, $\mathcal{C}_z$ n'est évidemment pas unitaire. En particulier $\mathcal{R}(\mathcal{C}_z)$ est composé de fonctions bornées continues, et on a pour tout $\varphi \in \mathcal{H}$

$$\| \mathcal{C}_z \varphi \|_\infty \leq \| \varphi \| .$$

Pour tout ensemble borélien $M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on note $\tilde{F}((y,q)\in M)$ ou plus brièvement $\tilde{F}(M)$ l'opérateur de multiplication dans $\mathcal{K}$ par la fonction caractéristique de M, et on définit un opérateur autoadjoint positif $F_z(M)$ dans $\mathcal{H}$ par

$$F_z(M) = \mathcal{C}_z^* \tilde{F}(M) \mathcal{C}_z$$

ou plus explicitement

$$\langle \varphi, F_z(M)\varphi \rangle = \int_M dy\, dq\, | \langle z_{yq}, \varphi \rangle |^2 .$$

L'application $M \to F_z(M)$ est une mesure sur les ensembles boréliens de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans les opérateurs positifs dans $\mathcal{H}$, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et dénombrablement additive (au sens de la convergence faible monotone, qui entraîne la convergence forte). Il est instructif de calculer les opérateurs $F_z(M)$ lorsque M est de la forme $M_1 \times \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^n \times M_2$. On a alors

$$\langle \varphi, F_z(M_1 \times \mathbb{R}^n)\varphi \rangle = \int_{M_1} dy \int dq \left| \int dx\, \bar{z}(x-y)\, e^{-iq.(x-y)} \varphi(x) \right|^2$$

$$= \int_{M_1} dy \int dx\, | z(x-y)|^2 \, |\varphi(x)|^2$$

par le théorème de Plancherel. Par suite $F_z(M_1 \times \mathbb{R}^n)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $\chi(M_1) * |z|^2$ dans l'espace des positions, où $*$ désigne la convolution et $\chi(M_1)$ désigne la fonction caractéristique de M_1. De la même façon

$$\langle \varphi, F_z(\mathbb{R}^n \times M_2)\varphi \rangle = \int_{M_2} dq \int dk\, |\hat{z}(k-q)|^2 |\hat{\varphi}(k)|^2$$

et $F_{z}(\mathbb{R}^{n}\times M_{2})$ est l'opérateur de multiplication par la fonction $\chi(M_2) * |\hat{z}|^2$ dans l'espace des impulsions. $F_{z}(M_1\times \mathbb{R}^{n})$ et $F_{z}(\mathbb{R}^{n}\times M_{2})$ sont des projecteurs régularisés sur $L^2(M_1)$ dans l'espace des positions et sur $L^2(M_2)$ dans l'espace des impulsions.

On définit alors les opérateurs $P_{\pm}$ par

$$P_{\pm} = \mathcal{C}_{z}^{*}\ \tilde{P}_{\pm}\ \mathcal{C}_{z}$$

avec

$$\tilde{P}_{\pm} = \tilde{F}(q \notin S \text{ et } y\cdot v(q) \gtrless 0) + \frac{1}{2}\tilde{F}(q\in S),$$

ou encore

$$P_{\pm} = F_{z}(q \notin S \text{ et } y\cdot v(q) \gtrless 0) + \frac{1}{2} F_{z}(q \in S).$$

Les $P_{\pm}$ sont autoadjoints positifs et $P_{+} + P_{-} = \mathbb{1}$ (Le second terme dans la définition a été inclus pour assurer cette propriété, mais ne jouera aucun rôle par la suite. De plus, il est nul si S est de mesure nulle).

Pour achever la construction des opérateurs $R_{\pm}$ associés à un intervalle compact I disjoint de $P(S)$, $I\cap P(S)=\emptyset$, il ne reste plus qu'à choisir la fonction f qui assure la localisation en impulsion par la définition $R_{\pm} = f(H_o)\,P_{\pm}\,f(H_o)$, et la fonction z qui figure dans la définition des $P_{\pm}$. On choisit d'abord un intervalle compact I_o contenant un voisinage de I ($I \subset\subset I_o$) et disjoint de $P(S)$, $I_o\cap P(S) = \emptyset$. On prend $f\in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ à support compact contenu dans I_o, f réelle,

$0 \leq f \leq 1$, $f \equiv 1$ sur I. On choisit ensuite η de façon à maintenir une localisation stricte en impulsion et aussi bonne que possible en position. On prend pour cela $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{\eta}$ soit à support compact :

$$\mathrm{Supp}\,\hat{\eta} \subset \{ k : |k| \leq a \}$$

pour un $a > 0$ qu'on choisira plus bas.

On peut maintenant démontrer la majoration fondamentale (g) du lemme 3.3.

Lemme 4.4. On suppose satisfaites les hypothèses (H1), (H2) et (H3). Soit I un intervalle compact disjoint de $P(S)$. Alors il existe $a > 0$ dépendant seulement de I tel que, f et $P_\pm$ étant choisis comme ci-dessus, la majoration (g) du lemme 3.3 soit satisfaite.

Preuve. On commence par choisir la constante a qui limite le support de η et la constante b qui figure dans la condition (g). Soit $K_o = P^{-1}(I_o)$ et

$$B_o \equiv v(K_o) \equiv \{ v : \exists\, k \in K_o \text{ tel que } v(k) = v \} .$$

K_o est un compact disjoint de S et B_o est un compact ne contenant pas l'origine. On choisit

$$b = \frac{1}{4}\, d(0, B_o).$$

Soit maintenant

$$a_o = d(K_o, S) = \operatorname*{Inf}_{k \in K_o,\, \ell \in S} |k - \ell| .$$

On note $B(q, r)$ la boule fermée de centre q et de rayon r

dans $\mathbb{R}^n$. Pour $q \in K_0$ et $a < a_0$, on définit

$$D(q,a) \equiv v(B(q,a)) \equiv \{ v : \exists\, k \in B(q,a) \text{ tel que } v(k) = v \}.$$

$D(q,a)$ est un compact contenant $v(q)$ et peut être rendu arbitrairement petit en prenant a assez petit uniformément pour $q \in K_0$. En effet

$$\operatorname*{Sup}_{q \in K_0} \ \operatorname*{Sup}_{|k-q| \leq a} |v(q) - v(k)| \leq a \operatorname*{Sup}_{k \in K_a} \sum_{|\alpha| \leq 2} |D^\alpha P(k)| ,$$

où

$$K_a = \bigcup_{k \in K_0} B(k,a) = \{ k : d(k, K_0) \leq a \}.$$

En particulier, il existe a_1 tel que le premier membre de l'inégalité précédente soit majoré par b pour tout $a \leq a_1$, c'est-à-dire

$$D(q,a) \subset B(v(q), b) \quad \text{pour tout } q \in K_0 .$$

On prend $a < a_0$ et $a \leq a_1$, par exemple $a = \operatorname{Min}(a_1, \frac{1}{2} a_0)$.

Avec ce choix de a et b, et f et $P_\pm$ étant définis comme précédemment, on démontre maintenant la majoration fondamentale. On se limite au cas de P_+, avec $t > 0$. On majore

$$\| F(|x| \leq bt)\, U_0(t)\, g(k)\, f(H_0)\, P_+ \varphi \| \leq$$
$$\sigma_n^{1/2} (bt)^{n/2} \operatorname*{Sup}_{|x| \leq bt} |(U_0(t)\, g(k)\, f(H_0)\, P_+ \varphi)(x)| .$$

Le support de $f(H_0) \equiv f(P(k))$ en impulsion est contenu dans K_0, et puisque $a < a_0$, on a $f(H_0) F_2(q \in S) = 0$. Si on pose

$$M = \{ (y, q) : q \notin S \text{ et } y \cdot v(q) \geqslant 0 \},$$

on a donc

$$|(U_0(t)\, g(k)\, f(H_0)\, P_+ \varphi)(x)|$$

$$= \left| \int_M dq\, dy\, (U_0(t)\, g(k)\, f(H_0)\, z_{yq})(x) < z_{yq}, \varphi > \right|$$

$$\leqslant \left\{ \int_M dq\, dy\, |(U_0(t)\, g(k)\, f(H_0)\, z_{yq})(x)|^2 \right\}^{1/2} \|\varphi\|$$

par l'inégalité de Schwarz et l'isométrie de $\mathcal{C}_z$,

$$= \left\{ \int_M dq\, dy\, |(U_0(t)\, g(k)\, f(H_0)\, \hat{\tau}_q\, z)(x-y)|^2 \right\}^{1/2} \|\varphi\|$$

car la translation τ_y commute avec $U_0(t), g(k)$ et $f(H_0)$. On majore maintenant l'intégrand dans la dernière intégrale en appliquant le lemme 4.2. Dans la variable impulsion k , le support de la fonction $\widehat{f(H_0)\hat{\tau}_q z}$ est contenu dans $K_0 \cap B(q, a)$. En particulier cette fonction est identiquement nulle si $q \notin K_a$. Pour q fixé, $q \in K_a$, l'ensemble des vitesses permises est contenu dans $B_0 \cap B(v(q), b)$, par la définition de B_0 et le choix de a . D'autre part, pour q fixé, quand x balaie la boule $|x| \leqslant bt$ et y le demi-espace $y \cdot v(q) \geqslant 0$, le vecteur $u = (x-y)/t$ balaie le demi-espace $u \cdot v(q)\, |v(q)|^{-1} \leqslant b$. Par suite

$$d((x-y)/t, B_0 \cap B(v(q), b)) \geqslant d((x-y)/t, B(v(q), b)) \geqslant b$$

pour tout $q \in K_a$, tout $(q, y) \in M$ et tout x avec $|x| \leqslant bt$, (voir figure 1). On peut donc appliquer le lemme 4.2 et on obtient, avec une constante C indépendante de x, y, t et q :

$$|(U_0(t)\, g(k)\, f(H_0)\, P_+ \varphi)(x)| \leq C\, \|\varphi\|$$
$$\left\{ \int_M dq\, dy\; d(x-y, t\, B(v(q), b))^{-2\ell}\, \| \widehat{g(k) f(H_0)\, \hat{\tau}_q z} \|^2_{\ell,\infty} \right\}^{1/2} .$$

Pour q fixé, $q \in K_a$, on majore l'intégrale sur y en remarquant que dans la variable $u = (x-y)/t$, le domaine d'intégration est contenu dans la région $|u - v(q)| \geqslant 2b$ et que dans toute cette région,

$$d(x-y, t\, B(v(q), b)) = t\, d(u, B(v(q), b))$$
$$= t\,(|u - v(q)| - b)\ .$$

Par suite, avec $v = b^{-1}(u - v(q))$,

$$\int dy\; d(x-y, t\, B(v(q), b))^{-2\ell}$$
$$\leq (bt)^{n-2\ell} \int_{|v| \geqslant 2} dv\, (|v| - 1)^{-2\ell}$$

uniformément pour $q \in K_a$ et $|x| \leq bt$. Rassemblant toutes les estimations précédentes, on obtient donc

$$\| F(|x| \leq bt)\, U_0(t)\, g(k)\, f(H_0)\, P_+ \| \leq$$
$$C(bt)^{n-\ell} \left\{ \int_{K_a} dq\; \| \widehat{g(k)\, f(H_0)\, \hat{\tau}_q z} \|^2_{\ell,\infty} \right\}^{1/2}$$

où la dernière intégrale est trivialement convergente. Ceci prouve la condition (g) avec $\gamma = \ell - n$, qui satisfait $\gamma > 1$ si $\ell \geqslant n + 2$.

Q.E.D.

Remarque 4.1. Il existe évidemment une certaine part d'arbitraire dans le choix de a et b et dans la façon de conduire les majorations. Par exemple, pour simplifier l'exposé, on a pris b assez petit pour pouvoir remplacer $d(x-y,\, t(B_o \cap B(v(q),b)))$ par $d(x-y,\, tB(v(q),b))$ et ne garder de la première forme que l'information que $B_o \cap B(v(q),b)$ doit être non vide. D'autre part, dans le cadre de la présente méthode, il n'est pas indispensable de prendre $R_\pm$ sous la forme $f(H_o)\, P_\pm\, f(H_o)$. On pourrait aussi bien prendre

$$R_\pm = F_z\,(q \in K_a \quad \text{et} \quad y \cdot v(q) \gtrless 0).$$

Ce choix serait plus proche de [3]. La démonstration du lemme 3.3 serait un peu plus compliquée et celle du lemme 4.4 se transposerait avec des changements minimes.

<u>Remarque 4.2</u>. Dans des versions précédentes de la méthode [3,17], on effectue la décomposition en partie entrante et sortante pour chaque suite $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \rightharpoonup 0$, et dans la définition de $\varphi_{n\pm}$ on élimine la contribution d'une région $|x| \leq r_n$ pour une suite $\{r_n\} \to \infty$; la suite $\{r_n\}$ dépend de la suite $\{\varphi_n\}$ considérée, ce qui interdit d'effectuer la décomposition de façon opératorielle avec deux opérateurs $R_\pm$ ne dépendant que de I. Dans la version présente, on ne fait pas ce découpage supplémentaire. La raison est qu'on ne cherche pas à montrer que $(\Omega_\pm - \mathbb{1})\, \varphi_\pm(t)$ tend vers zéro par une estimation directe, mais seulement que $(\Omega_\pm - \mathbb{1})\, R_\pm$ est compact, car représenté par une intégrale qui converge en norme. La convergence forte vers zéro résulte ensuite de la compacité et de l'éloignement à l'infini sans estimation explicite (voir la preuve du lemme 3.1).

Il existe des méthodes différentes pour effectuer le découpage au moyen d'opérateurs $R_{\pm} = f(H_o)\,P_{\pm}\,f(H_o)$. Dans [9,11], les $P_{\pm}$ sont les projecteurs spectraux associés aux parties positive ou négative du spectre de l'opérateur

$$A = -\frac{i}{2}(x.\nabla + \nabla.x) = \frac{1}{2}(x.k + k.x),$$

qui est le générateur infinitésimal des dilatations. Dans [18], on effectue une transformation de Fourier à une dimension dans la variable énergie cinétique, et les $P_{\pm}$ sont les restrictions aux demi-axes positif et négatif de la variable conjuguée. Les choix des opérateurs $P_{\pm}$ faits dans [9,11,18] sont des cas particuliers d'une même construction, qu'on va décrire brièvement dans la fin de cette section. Cette construction utilise comme la précédente un espace auxiliaire $\mathcal{H}'$, qu'on précisera plus loin. On se limite au cas particulier où on suppose, en plus des hypothèses (H1), (H2) et (H3), que P est à symétrie sphérique, $P(k) = P_1(|k|)$ $= P_1(\rho)$ avec $\rho = |k|$. Dans ce cas, l'image S_1 de S par la transformation $k \to \rho = |k|$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^+$ qui contient l'origine, car si P est $\mathcal{C}^1$ en $k = 0$, alors $\nabla P(0) = 0$ par symétrie. On définit

$$S_{\pm} = \{\rho \in \mathbb{R}^+ \setminus S_1 : P_1'(\rho) \gtrless 0\}.$$

Il est clair que $S_{\pm}$ sont des ouverts et que $\mathbb{R}^+ = S_1 \cup S_+ \cup S_-$ est une partition de $\mathbb{R}^+$. On suppose également que la fonction g de l'hypothèse (H3) est à symétrie sphérique, $g(k) = g_1(|k|)$.

Un point $k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ peut être représenté par un couple (ρ, σ) où $\rho = |k| \in \mathbb{R}^+$ et $\sigma \in \Sigma^{n-1}$, la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$. On note $d\sigma$ la mesure invariante sur

Σ^{n-1}, si bien que $dk = \rho^{n-1}\, d\rho\, d\sigma$.

On introduit l'espace auxiliaire

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, d\rho) \otimes L^2(\Sigma^{n-1}, d\sigma),$$

ainsi que les deux sous espaces

$$\mathcal{H}_{\pm} = L^2(\mathbb{R}^{\pm}, d\rho) \otimes L^2(\Sigma^{n-1}, d\sigma).$$

Il est clair que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$. Soit $Z_{\pm}$ les projecteurs orthogonaux de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_{\pm}$. L'application $\mathcal{U} : \varphi \to \mathcal{U}\varphi$ définie par

$$(\mathcal{U}\varphi)(\rho,\sigma) = \rho^{(n-1)/2}\, \hat{\varphi}(\rho,\sigma)$$

est un isomorphisme de $\mathscr{H}$ sur $\mathcal{H}_+$.

On définit maintenant une famille d'isométries de $\mathcal{H}_+$ dans $\mathcal{H}$ de la façon suivante. Soit $h \in \mathcal{C}^{\ell+1}((0,\infty))$, réelle, strictement croissante ($h'(\rho) > 0$ pour tout $\rho > 0$) et tendant vers $+\infty$ quand $\rho \to +\infty$, si bien que h est un difféomorphisme de l'intervalle ouvert $(0,\infty)$ sur un autre intervalle ouvert (δ,∞) (δ peut être $-\infty$). On définit la transformation $\mathcal{C}_h : \phi \to \mathcal{C}_h\phi$ par

$$(\mathcal{C}_h\phi)(\lambda,\sigma) = (2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty d\rho\; h'(\rho)^{1/2} \exp(-i\lambda h(\rho))\, \phi(\rho,\sigma)$$

$\mathcal{C}_h$ est donc la transformation de Fourier à une dimension dans la variable $h(\rho)$ à σ fixé. Il résulte du théorème de Plancherel que $\mathcal{C}_h$ est une isométrie de $\mathcal{H}_+$ dans $\mathcal{H}$:

$$\int d\lambda\, d\sigma\, |(\mathcal{C}_k \phi)(\lambda,\sigma)|^2 = \int_0^\infty d\rho \int d\sigma\, |\phi(\rho,\sigma)|^2 ,$$

c'est à dire $\mathcal{C}_k^* \mathcal{C}_k = \mathbb{1}$. Par contre, $\mathcal{C}_k$ n'est par unitaire si $\delta > -\infty$, i.e. $\mathcal{R}(\mathcal{C}_k) \neq \mathcal{H}$.

Ayant choisi un tel k et défini $\mathcal{C}_k$, on définit maintenant les opérateurs $P_\pm$. Soit $Y_\pm$ les opérateurs de multiplication dans $\mathcal{H}_+$ par les fonctions $\chi_\pm(\rho)$ définies par

$$\chi_+(\rho) = 1 - \chi_-(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho \in S_+ \cup S_1 , \\ 0 & \text{si } \rho \in S_- . \end{cases}$$

(Le choix de $\chi_\pm(\rho)$ pour $\rho \in S_1$ est sans importance. Le choix ci-dessus est commode, car il entraine $\chi_+ = 1$ si S_- est vide). On définit $P_\pm$ par

$$P_\pm = \mathcal{U}^* \{ Y_- \mathcal{C}_k^* Z_\pm \mathcal{C}_k Y_- + Y_+ \mathcal{C}_k^* Z_\mp \mathcal{C}_k Y_+ \} \mathcal{U} .$$

Il est clair que $P_\pm$ est autoadjoint, et que $P_+ + P_- = \mathbb{1}$, car $Z_+ + Z_- = 1$, $\mathcal{C}_k$ est isométrique, et $Y_+ + Y_- = \mathbb{1}$. Intuitivement, $P_\pm$ assure que λ a le signe opposé à celui de $\pm P_1'(\rho)$.

On peut alors démontrer la majoration fondamentale.

<u>Lemme 4.4'</u>. On suppose satisfaites (H1),(H2) et (H3), et de plus $P(\cdot)$ et $g(\cdot)$ à symétrie sphérique. Soit I un intervalle compact disjoint de $P(S)$, I_0 un intervalle compact disjoint de $P(S)$ et contenant un voisinage de I, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact

contenu dans I_o, $0 \leq f \leq 1$, $f \equiv 1$ sur I, et $P_\pm$ définis comme ci-dessus. Alors la condition (g) du lemme 3.3 est satisfaite.

<u>Preuve</u>. On se limite au cas $t>0$. Soit f comme dans l'énoncé et

$$f_1(\rho) = g_1(\rho)\ f(P_1(\rho)).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{H}$. On veut estimer pour un $b>0$ convenable

$$\| F(|x| \leq bt)\ U_o(t)\ g(k)\ f(H_o)\ P_+ \varphi \|$$

$$\leq \sigma_n^{1/2} (bt)^{n/2} \sup_{|x|\leq bt} |(U_o(t)\ f_1(|k|)\ P_+ \varphi)(x)|.$$

Pour x et t fixés, on définit $\phi_{xt} \in \mathcal{H}$ par

$$\widehat{\phi_{xt}}(k) = (2\pi)^{-n/2} \exp(-ik.x + it P_1(|k|))\ \overline{f_1(|k|)}.$$

Alors

$$|(U_o(t)\ f_1(|k|)\ P_+ \varphi)(x)| = |\langle \phi_{xt}, P_+ \varphi \rangle|$$

$$\leq \| P_+ \phi_{xt} \|\ \| \varphi \|.$$

D'après la définition de P_+, on peut estimer la dernière norme par

$$\| P_+ \phi_{xt} \| \leq \| Z_+ \mathcal{C}_h Y_- \mathcal{U} \phi_{xt} \| + \| Z_- \mathcal{C}_h Y_+ \mathcal{U} \phi_{xt} \|$$

avec

$$(Z_{\mp}\, \mathcal{C}_h\, Y_{\pm}\, \mathcal{U}\, \phi_{xt})(\lambda, \xi) = (2\pi)^{-(n+1)/2}\, \theta(\mp\lambda)$$
$$\int_0^\infty d\rho\; h'(\rho)^{1/2}\, \rho^{(n-1)/2}\, \overline{f_1(\rho)}\; \chi_{\pm}(\rho)$$
$$\times \exp\left(-i\rho(\sigma.x) + i t P_1(\rho) - i\lambda h(\rho)\right).$$

Puisque $f_1 \in \mathcal{C}^{\ell+1}(\mathbb{R}^+)$ et que f_1 est à support compact contenu dans l'ouvert $S_+ \cup S_-$, les fonctions $f_1\, \chi_{\pm}$ sont également dans $\mathcal{C}^{\ell+1}(\mathbb{R}^+)$, à support compact contenu dans $S_{\pm}$.

On majore la quantité précédente en module pour $|x| \leq bt$ avec un b convenable par une application du lemme 4.1. On choisit

$$2b = \operatorname*{Inf}_{\rho \in \operatorname{Supp} f_1} |P_1'(\rho)| \ ,$$

et on pose

$$c = \operatorname*{Inf}_{\rho \in \operatorname{Supp} f_1} h'(\rho) \ .$$

On applique le lemme 4.1 avec $\omega = bt + c|\lambda|$ et avec la fonction f du lemme 4.1 définie par

$$\omega f(\rho) = -\rho(\sigma.x) + t P_1(\rho) - \lambda h(\rho) \ ,$$

si bien que

$$f'(\rho) = (bt + c|\lambda|)^{-1}(t P_1'(\rho) - (\sigma.x) - \lambda h'(\rho)) \ .$$

Il résulte de la définition de P_+ , que pour $t > 0$ et $\rho \in \operatorname{Supp} f_1$, les termes $t P_1'(\rho)$ et $-\lambda h'(\rho)$ ont le même signe. Par suite

$|f'(\rho)| \geqslant 1$ pour $|x| \leqslant \ell t$. D'autre part, pour $\alpha \geqslant 2$, $|D^\alpha f|$ est indépendant de σ , x , et majoré uniformément en λ et t pour ρ dans un compact. On obtient donc, par le lemme 4.1,

$$| \cdot | \leqslant C\,(\ell t + c\,|\lambda|)^{-\ell}$$

avec une constante C uniforme en λ, σ , x et t pour $|x| \leq \ell t$. Par suite, pour $|x| \leqslant \ell t$, on obtient en intégrant sur (λ, σ)

$$\| P_+ \phi_{xt} \| \leqslant C\,(\ell t)^{-\ell + 1/2}$$

et par conséquent,

$$\| F(|x| \leqslant \ell t)\, U_0(t)\, f_1(|k|)\, P_+ \| \leqslant C\,(\ell t)^{-\ell + (n+1)/2}$$

ce qui prouve la majoration (g) du corollaire 3.2 avec $\gamma = \ell - (n+1)/2$.

Q.E.D.

On conclut cette section par quelques remarques permettant en particulier de faire le lien avec [9,11,18] .

Remarque 4.3 Les opérateurs $P_\pm$ utilisés dans [9,11,18] , dans le cas particulier $P_1(\rho) = \rho^2$, correspondent respectivement à $h(\rho) = \mathrm{Log}\,\rho$ et $h(\rho) = P_1(\rho) = \rho^2$. Cependant il est clair, d'une part que la méthode n'est pas limitée à ce choix particulier de P_1, comme on le voit dans l'énoncé du lemme 4.4' et dans la remarque 4.6 ci-dessous, et d'autre part que ces choix de h ne présentent pas d'avantage particulier du point de vue de la présente théorie. En outre, le choix $h(\rho) = P_1(\rho)$ est mal adapté au cas où P_1 n'est pas monotone, par exemple $P_1(\rho) = (\rho^2 - 1)^2$.

Remarque 4.4. Dans [9,11] , avec $h(\rho) = \operatorname{Log} \rho$, les opérateurs $P_\pm$ sont les projecteurs spectraux associés aux demi-axes positif et négatif de l'opérateur $A = \frac{1}{2}(x.k + k.x)$. Cette propriété s'étend au cas général, dans le cas où P_1 est monotone (i.e. $S_- = \phi$).

Dans ce cas, $P_\pm$ se réduit à

$$P_\pm = \mathcal{U}^* \mathcal{C}_h^* Z_\mp \mathcal{C}_h \mathcal{U} \quad ,$$

et $P_\pm$ sont alors les projecteurs spectraux associés aux demi-axes positif et négatif de l'opérateur

$$A_h = - \mathcal{U}^* \mathcal{C}_h^* M \mathcal{C}_h \mathcal{U} \quad ,$$

où M est l'opérateur dans $\mathcal{H}$ défini par

$$M \phi(\lambda, \sigma) = \lambda \phi(\lambda, \sigma).$$

Un calcul élémentaire montre que

$$A_h = h'(\rho)^{-1/2} \rho^{-(n-1)/2} i \frac{\partial}{\partial \rho} h'(\rho)^{-1/2} \rho^{(n-1)/2}$$

ou encore

$$A_h = \frac{1}{2}\left(x \cdot \frac{k}{|k|}\, h'(|k|)^{-1} + h'(|k|)^{-1}\, \frac{k}{|k|} \cdot x \right) ,$$

qui se réduit à A pour $h(\rho) = \operatorname{Log} \rho$.

Remarque 4.5. On a vu que la théorie présentée dans cet exposé requiert seulement la construction d'un couple d'opérateurs $P_\pm$ pour chaque intervalle compact I disjoint de $P(S)$. En particulier, dans la construction précédente, on peut prendre h dépendant de I de façon arbitraire. Par exemple, si P_1 n'est pas monotone, on peut néanmoins choisir pour chaque I un h relié à P_1 par la condition que $h'(\rho) = |P_1'(\rho)|$ sur le support de f_1. Il suffit de prendre $h(\rho) = C \pm P_1(\rho)$ sur chaque composante connexe de $S_\pm \cap \operatorname{Supp} f_1$, avec une constante C dépendant de la composante choisie, de façon à pouvoir interpoler ces choix partiels par une fonction strictement monotone.

Remarque 4.6. Il est clair que la méthode précédente s'étend au cas où $P(k)$ n'est pas à symétrie sphérique. Dans ce cas, on peut par exemple se ramener d'abord à un problème local en énergie. Ensuite, pour un petit intervalle I ne rencontrant pas $P(S)$ et dans chaque composante connexe de $P^{-1}(I)$, on peut prendre comme variable radiale $\pm P(k)$ et comme variable angulaire un point σ de $P^{-1}(\mu_0)$ pour un $\mu_0 \in I$. Les courbes intégrales du champ de vecteur $\nabla P(k)$ définissent pour $\mu \in I$, $\mu \neq \mu_0$, un difféomorphisme de $P^{-1}(\mu_0)$ sur $P^{-1}(\mu)$ qui permet d'utiliser σ pour paramétrer $P^{-1}(\mu)$

On fait ensuite une transformation de Fourier dans la variable radiale (ou dans une fonction strictement monotone de celle-ci), et on définit des $P_{\pm}$ locaux comme précédemment par la restriction aux demi axes positif et négatif de la variable conjuguée. Le détail de la construction est laissé au lecteur.

REFERENCES

1. W.O. Amrein, D.B. Pearson, M. Wollenberg. Evanescence of states and asymptotic completeness, prétirage, Université de Genève, (1979).
2. E.B. Davies, Quantum theory of open systems, Academic Press, New York, (1976).
3. E.B. Davies, On Enss' approach to scattering theory, prétirage, Oxford (1979).
4. V. Enss. Commun. Math. Phys. 61, 285-291, (1978).
5. V. Enss. Ann. Phys. N.Y. 119, 117-132, (1979).
6. V. Enss. Commun. Math. Phys. 65, 151-165, (1979).
7. L. Hörmander, Math. Zeits. 146, 69-91, (1976).
8. T. Kato, Commun. Math. Phys. 67, 85-90, (1979).
9. E. Mourre, Commun. Math. Phys. 68, 91-94, (1979).
10. D.B. Pearson, J. Math. Phys. 13, 1490-1499, (1972).
11. P.A. Perry, Mellin transforms and Scattering theory, prétirage, Princeton, (1979).
12. M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Academic Press, New York. Vol. I, Functional Analysis, (1972).
13. Id. Vol. III, Scattering theory, (1979).
14. Id. Vol. IV, Analysis of operators, (1978).
15. M. Schechter, Duke. Math. J. 44, 863-872, (1977).
16. B. Simon, Commun. Math. Phys. 53, 151-153, (1977).
17. B. Simon, Duke Math. J. 46, 119-168 (1979).
18. D. Yafaev. On the proof of Enss of asymptotic completeness in potential scattering, prétirage, Institut Steklov, Leningrad, (1979).

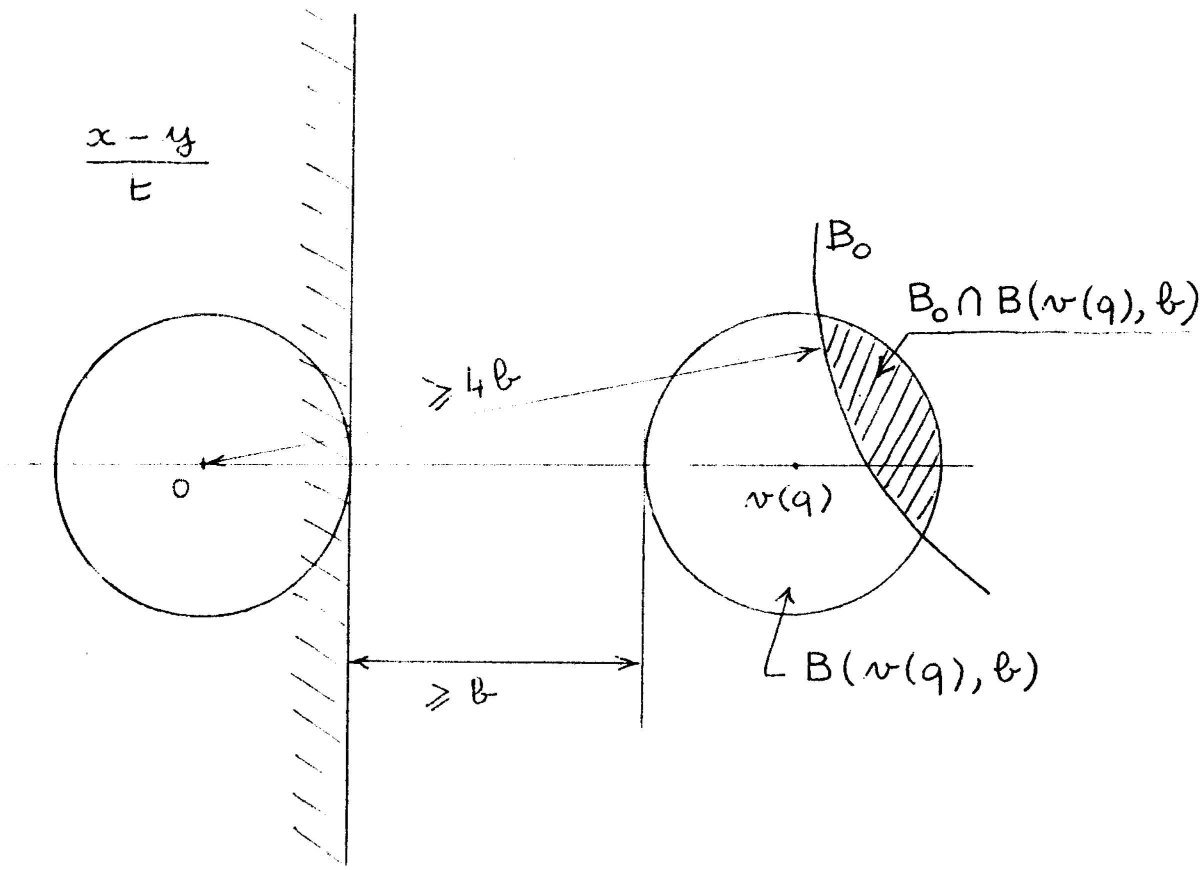

Figure 1. Localisation dans l'espace des vitesses.