Jean Leray

Chapitre I Transformation de Fourier et groupe symplectique

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1978, tome 25
« Analyse lagrangienne et mécanique quantique par Jean Leray », , exp. n° 3, p. 9-79
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1978__25__9_0>

CHAPITRE I

TRANSFORMATION DE FOURIER ET GROUPE SYMPLECTIQUE.

Ce chapitre I explicite le lien existant entre ces deux notions très classiques.

Il permettra au chapitre II d'étudier les solutions asymptotiques ~~d'équations aux dérivées partielles~~.

§ 1. Opérateurs différentiels, groupes métaplectique et symplectique.

0. INTRODUCTION. -

Historique. - Le groupe métaplectique fut défini par I. SEGAL [13] ; son étude fut reprise par D. SHALE [14] ; V.C. BOUSLAEV [3] [11] signala qu'il rendait la théorie de Maslov indépendante du choix des coordonnées. A. WEIL [17] l'étudia sur un corps quelconque, pour approfondir les travaux de théorie des nombres de C. SIEGEL.

Sommaire. - Nous reprenons l'étude de ce groupe pour préciser comment il opère sur $\mathcal{S}(R^\ell)$, $\mathcal{H}(R^\ell)$, $\mathcal{S}'(R^\ell)$, (cf. Théorème 2) et comment il transforme les opérateurs différentiels (cf. Théorème 3.1).

1. LE GROUPE METAPLECTIQUE $Mp(\ell)$. - Notons : X l'espace R^ℓ $(\ell > 1)$, muni de la mesure $d^\ell x$; X^* le dual de X ; $< p , x >$ la valeur de $p \in X^*$ en $x \in X$;

$$Z(\ell) = X \oplus X^* ;$$

$\mathcal{S}(X)$ l'espace des fonctions $X \to C$, dont toutes les dérivées sont à décroissance rapide (L. Schwartz) :

$\mathcal{S}'(X)$ son dual, espace des distributions tempérées sur X (L.Schwartz) ;

$\mathcal{H}(X)$ l'espace des fonctions $X \to \mathbb{C}$ de carré sommable ;

ν un nombre imaginaire pur d'argument $\frac{\pi}{2}$: $\frac{\nu}{i} > 0$.

Soit une fonction linéaire $a^\circ : Z(\ell) \to \mathbb{R}$: soit $a^\circ(z) = a^\circ(x, p)$ sa valeur en $z = x + p$ $(z \in Z(\ell), x \in X, p \in X^*)$: l'opérateur

$$a = a^\circ\left(x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

est un endomorphisme <u>self-adjoint</u> de $\mathcal{S}'(X)$: l'adjoint de a, qui est un endomorphisme de $\mathcal{S}(X)$, est la restriction de a à $\mathcal{S}(X)$. Ces opérateurs a et ces fonctions a° sont les éléments respectifs de deux espaces vectoriels $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^\circ$, de dimension 2ℓ, naturellement isomorphes :

$$\mathfrak{a}^\circ \ni a^\circ \mapsto a \in \mathfrak{a}.$$

Le commutateur de a et $b \in \mathfrak{a}$ est

$$[a, b] = a\,b - b\,a \in \mathbb{C},$$

$c \in \mathbb{C}$ désignant l'endomorphisme de $\mathcal{S}'(X)$:

$$(\forall f \in \mathcal{S}'(X)) \quad c : f \mapsto c\,f\,.$$

Pour étudier ce commutateur, munissons $Z(\ell)$ de la <u>structure symplectique</u>

$$[z, z'] = \langle p, x'\rangle - \langle p', x\rangle,$$

où

$$z = x + p\,,\ z' = x' + p'\,,\ x \text{ et } x' \in X, p \text{ et } p' \in X^*.$$

Toute fonction $a^\circ \in \mathfrak{a}^\circ$ est définie par un élément unique a^1 de $Z(\ell)$ tel que

(1.1) $$a^\circ(z) = [a^1, z]\ ;$$

d'où un isomorphisme naturel

(1.2) $$Z(\ell) \ni a^1 \mapsto a^\circ \in \mathfrak{a}^\circ\,.$$

Le commutateur de a et $b \in \mathfrak{a}$ est évidemment

(1.3) $$[a, b] = \frac{1}{\nu}[a^1, b^1]\,,$$

le second membre étant défini par la structure symplectique.

Un automorphisme S de $\mathcal{S}'(X)$ transforme tout $a \in \mathfrak{a}$ en un opérateur $b = S\,a\,S^{-1}$, défini par la condition

$$(\forall f \in \mathcal{S}'(X))\ b\,S\,f = S\,a\,f\ ;$$

$b \neq 0$ si $a \neq 0$; en général $b \notin \mathfrak{a}$

<u>Définition</u> 1.1. - $G(\ell)$ est le groupe des automorphismes continus S de $\mathcal{S}'(X)$ qui transforment $\mathfrak{a}$ en lui-même, c'est-à-dire tels que

$$(1.4) \qquad (\forall a \in \mathfrak{a}) \quad S\,a\,S^{-1} \in \mathfrak{a}.$$

$G(\ell)$ est évidemment un semi-groupe ; si $S \in G(\ell)$,

$$(1.5) \qquad a \to S\,a\,S^{-1}$$

est évidemment un automorphisme de $\mathfrak{a}$; donc $S^{-1} \in G(\ell)$ et $G(\ell)$ est un groupe.

L'automorphisme (1.5) de $\mathfrak{a}$ a pour transformé, par l'isomorphisme naturel $Z(\ell) \to \mathfrak{a}$, un automorphisme de l'espace vectoriel $Z(\ell)$:

$$(1.6) \qquad s : a^1 \mapsto s\,a^1 .$$

Puisque S commute avec les automorphisme $c \in \mathbb{C}$ de $\mathcal{S}'(X)$ et que $[a, b] \in \mathbb{C}$, nous avons :

$$[\,S\,a\,S^{-1}, S\,b\,S^{-1}] = [a, b]\ .$$

c'est-à-dire, vu (1.3) et l'équivalence de (1.5) et (1.6) .

$$[\,s\,a^1, s\,b^1] = [\,a^1, b^1]\ ;$$

s est donc un automorphisme de l'espace symplectique $Z(\ell)$.

Le groupe des automorphismes de cet espace symplectique $Z(\ell)$ est nommé <u>groupe symplectique</u> est noté $Sp(\ell)$:

$$s \in Sp(\ell).$$

Vu (1.1)

$$[s\, a^1, z] = [a^1, s^{-1} z] = (a^\circ \circ s^{-1})(z).$$

En résumé :

LEMME 1.1. - Pour tout $S \in G(\ell)$, l'automorphisme

$$a \mapsto S\, a\, S^{-1}$$

de $\mathfrak{a}$ a pour transformés, par les isomorphismes naturels de $\mathfrak{a}$, $Z(\ell)$ et $\mathfrak{a}^\circ$:

- un automorphisme $s : a^1 \mapsto s\, a^1$ de $Z(\ell)$; $s \in Sp(\ell)$;
- un automorphisme : $a^\circ \mapsto a^\circ \circ s^{-1}$ de $\mathfrak{a}^\circ$

L'application $S \to s$ est un morphisme naturel

(1.7) $$G(\ell) \mapsto Sp(\ell).$$

LEMME 1.2. - Le noyau de ce morphisme (1.7) est le sous-groupe de $G(\ell)$ ayant pour éléments les automorphismes de $\mathcal{S}'(X)$ du type :

$$(\forall f \in \mathcal{S}'(X))\, f \to c\, f, \text{ où } c \in \dot{C} \text{ (plan complexe pointé).}$$

<u>Note</u>. - Ce sous-groupe sera noté $\dot{C}$.

<u>Preuve</u>. - Tout $c \in \dot{C}$ commute à tout $a \in \mathfrak{a}(\ell)$ et appartient donc à ce noyau.

Réciproquement, soit S un élément de ce noyau : S est donc un automorphisme de $\mathcal{S}'(X)$ commutant à tout $a \in \mathfrak{a}(\ell)$. Soit $p \in X^*$; nous avons :

$$\left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x} + p\right) e^{-\nu\langle p, x\rangle} = 0 ;$$

donc, puisque S et $\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x} + p$ commutent :

$$\left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x} + p\right) S\, e^{-\nu\langle p, x\rangle} = 0 ;$$

donc, ~~par intégration~~ de ce système différentiel :

$$S\, e^{-\nu\langle p, x\rangle} = c(p)\, e^{-\nu\langle p, x\rangle} \quad \text{où } c : X^* \mapsto C ;$$

en dérivant par rapport à p, on constate que c a un gradient c_p vérifiant

$$-\nu S[x e^{-\nu<p,x>}] = -\nu x S e^{-\nu<p,x>} + c_p e^{-\nu<p,x>} ;$$

c'est-à-dire, puisque S et le produit par x commutent :

$$c_p = 0 .$$

$c(p)$ est indépendant de p et sera noté c. Notons F la transformation de Fourier ; soit $f \in \mathcal{S}(X)$; notons $g = F^{-1} f$; on a par définition de F :

$$f(x) = \left(\frac{\nu}{2\pi i}\right)^{\ell/2} \int_X e^{-\nu<p,x>} g(p)\, d^\ell p ;$$

puisque $Se^{-\nu<p,x>} = ce^{-\nu<p,x>}$, on a donc

$$(\forall f \in \mathcal{S}(X)) \quad Sf = cf .$$

Or $\mathcal{S}(X)$ est dense dans $\mathcal{S}'(X)$; donc $S = c \in \dot{C}$. Le lemme est prouvé :

<u>D'autres sous-groupes</u> de $G(\ell)$ serviront à prouver que $G(\ell) \to Sp(\ell)$ est un épimorphisme. Ce sont .

(i) le groupe fini qu'engendrent les transformations de <u>Fourier</u> portant sur l'une des coordonées ;

(ii) le groupe que constituent les automorphismes de $\mathcal{S}'(X)$

$$f \mapsto e^{\nu Q} f .$$

où Q est une <u>forme quadratique réelle</u> : $X \to R$;

(iii) le groupe que constituent les automorphismes de $\mathcal{S}'(X)$:

$$f' \mapsto f \quad \text{où} \quad f(x) = \sqrt{\det T}\; f'(Tx) \quad \text{et } T \text{ est ~~un automorphisme~~ de } X.$$

Chacun de ces groupes a une restriction à $\mathcal{S}(X)$, qui est un groupe d'automorphismes de $\mathcal{S}(X)$, et une restriction à $\mathcal{H}(X)$, qui est un groupe unitaire (c-à-d. isométrique) de $\mathcal{H}(X)$. La définition que voici emploie ces propriétés

<u>Définition</u> 1.2. - Soit $\mathbb{A}$ l'ensemble des éléments A constitués chacun par :

1) une forme quadratique $X \oplus X \to R$ valant en $(x, x') \in X \oplus X$:

$$(1.9) \qquad A(x,x') = \frac{1}{2}<Px,x> - <Lx,x'> + \frac{1}{2}<Qx',x'>\ ,$$

où, ${}^tP$ désignant le transposé de P :

$$P = {}^tP : X \to X^* \ , L : X \to X^* \ , Q = {}^tQ : X \to X^* \ ,$$

$$\text{dét}\ L \neq 0\ ;$$

2) un choix de $\arg L = \pi\, m(A)$, $m(A) \in \mathbb{Z}$ qui permet en particulier de définir

$$\Delta(A) = \sqrt{\text{dét}\, L} \quad \text{par} \quad \arg \Delta(A) = \frac{\pi}{2}\, m(A)\,.$$

Note. - dét L est calculé au moyen de coordonnées de X^* duales de celles de X et est indépendant du choix des coordonnés, si $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^\ell = d^\ell x$.

Note. - $m(A)$ sera identifié à l'indice de Maslov par (2.15) et §2 (8.6)

A chaque A associons l'endomorphisme S_A de $\mathcal{S}(X)$ défini par

$$(1.10) \qquad (S_A f')(x) = \left[\frac{|\nu|}{2\pi i}\right]^{\ell/2} \Delta(A) \int_X e^{\nu A(x,x')} f'(x')\, d^\ell x'\ ,$$

$$\text{où} \quad f' \in \mathcal{S}(X)\ , \quad \arg\, [i]^{\ell/2} = \frac{\pi \ell}{4}\ ;$$

S_A est évidemment le produit d'éléments des groupes (i) , (ii) et (iii) ;

S_A est donc un automorphisme de $\mathcal{S}(X)$, qui se prolonge par continuité en un automorphisme unitaire de $\mathcal{H}(X)$ et en un automorphisme de $\mathcal{S}'(X)$; ces trois automorphismes seront notés S_A ; $S_A \in G(\ell)$.

L'image s_A de S_A dans $Sp(\ell)$ est définie comme suit : (A_x : gradient en x)

$$(1.11) \qquad (x,p) = s_A(x',p') \quad \text{équivaut à :} \quad p = A_x(x,x')\ ,\ p' = -A_{x'}(x,x')\,.$$

Preuve de (1.11) . - Soit $f' \in \mathcal{S}(X)$; $\frac{\partial}{\partial x}(S_A f')$ et $S_A(\frac{\partial}{\partial x} f')$ se calculent par dérivation de (1.10) et par intégration par partie ; le résultat de ce calcul prouve les relations suivantes entre opérateurs différentiels éléments de $\mathfrak{a}$:

$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x} - Px = - S_A\,({}^tLx)\,S_A^{-1}\ ;\ S_A\left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x} + Qx\right)S_A^{-1} = Lx\ ;$$

ces relations signifient, qu'en notant

$$(x\,,p) = s_A\,(x'\,,p')$$

on a

$$\forall\,(x' \in X, p' \in X^*)\quad p - Px = - {}^tLx'\ ,\ p' + Qx' = Lx\,.$$

C'est la proposition (1.11).

<u>Définition</u> 1.3 . - Nous noterons $\sum_{Sp}$ l'ensemble des $s \in Sp(\ell)$ tels que, sur le 2ℓ - plan de $Z(\ell) \oplus Z(\ell)$ d'équation

$$(x\,,p) = s\,(x'\,,p')\,,$$

x et x' ne sont pas indépendants .

Il est bien connu que <u>l'ensemble des</u> s_A <u>définis par</u> (1.11) <u>est</u> $Sp(\ell) \setminus \sum_{Sp}$.

<u>Preuve</u> . - Evidemment $s_A \notin \sum_{Sp}$. Réciproquement, soit $s \in Sp(\ell)$; sur le 2ℓ - plan de $Z(\ell) \oplus Z(\ell)$ d'équation

$$(x\,,p) = s\,(x'\,,p')\,.$$

on a , puisque s est symplectique :

$$<p\,,dx> - <dp\,,x> = <p'\,,dx'> - <dp'\,,x'>.$$

donc

$$\frac{1}{2}\,d\,[<p\,,x> - <p'\,,x'>] = <p\,,dx> - <p'\,,dx'>;$$

supposons $s \notin \sum_{Sp}$: x et x' sont indépendants sur ce 2ℓ - plan ; définissons sur ce 2ℓ - plan :

$$A\,(x\,,x') = \frac{1}{2}<p\,,x> - \frac{1}{2}<p'\,,x'>\,; \tag{1.12}$$

nous avons donc

$dA = \langle p, dx\rangle - \langle p', dx'\rangle$, c'est-à-dire $p = A_x$, $p' = -A_{x'}$;
x et A_x doivent être indépendants : $\det_{jk}(A_{x^j x'^k}) \neq 0$; donc $s = s_A$;
ce qui achève la preuve.

Les s_A engendrent évidemment $Sp(\ell)$: donc

LEMME 1.3. - Le morphisme naturel

$$G(\ell) \to Sp(\ell) \quad \text{est un } \underline{\text{épimorphisme}}.$$

Vu le lemme 1.2. $G(\ell)$ est un <u>groupe de Lie</u> et

$$G(\ell) / \dot{C} = Sp(\ell) \; ; \tag{1.13}$$

($\dot{C}$ est le centre de $G(\ell)$ car le centre de $Sp(\ell)$ se réduit à son élément unité).

<u>Définition</u> 1.4. - Le <u>groupe métaplectique</u> $Mp(\ell)$ est le sous-groupe de $G(\ell)$ que constituent ceux de ses éléments dont la restriction à $\mathcal{H}(X)$ est un automorphisme unitaire de $\mathcal{H}(X)$.

($\forall$ A) $S_A \in Mp(\ell)$; or les s_A engendrent $Sp(\ell)$; le morphisme naturel

$$Mp(\ell) \to Sp(\ell)$$

est donc un épimorphisme ; vu (1.13) , tout élément de $G(\ell)$ se met donc, d'une façon unique, sous la forme

$$c\,S \quad \text{où} \quad S \in Mp(\ell) \; , \; c > 0 \; ;$$

notons R_+ le groupe multiplicatif des nombres réels > 0 ; on a donc

$$G(\ell) = R_+ \times Mp(\ell) . \tag{1.14}$$

L'étude de $G(\ell)$ se réduit donc à celle de $Mp(\ell)$, qui a les propriétés suivantes :

THEOREME 1. - $Mp(\ell)$ <u>est un groupe d'automorphismes de</u> $\mathcal{S}'(X)$, <u>dont les restrictions</u> à $\mathcal{H}(X)$ <u>sont des automorphismes unitaires</u>.

1) <u>Soit</u> S^1 <u>le groupe multiplicatif des nombres complexes de module</u> 1 ;

(1.15) $$Mp(\ell) / S^1 = Sp(\ell) .$$

2) Soit Σ_{Mp} l'hypersurface de $Mp(\ell)$ se projetant sur Σ_{Sp} ; tout élément de $Mp(\ell) \setminus \Sigma_{Mp}$ a l'expression $c\, S_A$ où $c \in S^1$ et S_A est du type (1.10).

3) La restriction à $\mathcal{S}(X)$ de tout $S \in Mp(\ell)$ est un automorphisme de $\mathcal{S}(X)$.

Preuve de 1). - (1.13) et (1.14) ; S^1 est identifié à un sous-groupe de $Mp(\ell)$.

Preuve de 2). - Soit $S \in Mp(\ell) \setminus \Sigma_{Mp}$; l'image de S dans $Sp(\ell)$ est donc du type s_A ; $S\, S_A^{-1} \in S^1$, vu (1.15).

Preuve de 3). - Vu 2) , $S = c\, S_A\, S_{A'}$; $\mathcal{S}(X)$ de c , S_A et $S_{A'}$ sont des automorphismes de $\mathcal{S}(X)$.

2. LE SOUS-GROUPE $Sp_2(\ell)$ de $Mp(\ell)$.-

Définition 2.1. - Nous notons $Sp_2(\ell)$ le sous-groupe de $Mp(\ell)$ qu'engendrent les S_A .

L'objet de ce n° est de prouver ceci : $Sp_2(\ell)$ est un revêtement d'ordre 2 de $Sp(\ell)$.

Pour le prouver, calculons les inverses des S_A et leurs composés.

Définition 2.2. - Etant donné $A \in \mathbb{A}$, définissons $A^* \in \mathbb{A}$ comme suit :

$$A^*(x,x') = -A(x',x) \;;\; \Delta(A^*) = i^\ell\, \overline{\Delta(A)} \;;\; m(A^*) = \ell - m(A) .$$

LEMME 2.1. - On a $S_A^{-1} = S_{A^*}$, donc $s_A^{-1} = s_{A^*}$.

Preuve . - Il s'agit de prouver, pour f et $f' \in \mathcal{S}(X)$, l'équivalence des deux conditions.

$$f(x) = \left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2} \Delta(A) \int_X e^{\nu A(x,x')} f'(x') d^\ell x' ,$$

$$f'(x') = \left(\frac{|\nu| i}{2\pi}\right)^{\ell/2} \overline{\Delta(A)} \int_X e^{-\nu A(x,x')} f(x) d^\ell x ;$$

c'est-à-dire, vu l'expression (1.9) de A, l'équivalence des deux conditions :

$$f(x) = \int_X e^{-\nu < Lx , x'>} f'(x') d^\ell x' ,$$

$$f'(x') = \left(\frac{|\nu|}{2\pi}\right)^{\ell} |\text{dét}\, L| \int_X e^{\nu < Lx , x'>} f(x) d^\ell x ;$$

la formule d'inversion de Fourier prouve cette équivalence, donc le lemme .

Pour composer les S_A explicitons $S_A\,(e^{\nu\varphi'})$, φ' étant une forme quadratique ; la définition que voici le permettra.

Définition 2.3. - Choisissons dans X des coordonnées linéaires telles que $d^\ell x = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^\ell$ et dans X^* les coordonnées duales. Les notions que voici sont indépendantes de ce choix.

Soit une fonction réelle, deux fois dérivable :

$$\varphi : X \to R .$$

$\text{Hess}_x(\varphi)$ désigne son hessien, c'est-à-dire le déterminant de ses dérivées secondes ; c'est-à-dire celui de la forme quadratique.

$$X \ni dx \mapsto < d\varphi_x , dx > \in R ;$$

$\text{Inert}_x(\varphi)$ désigne l'indice d'inertie de cette forme ; il est défini (1) quand $\text{Hess}\ (\varphi) \neq 0$

(1) C'est le nombre de valeurs propres négatives de l'opérateur linéaire symétrique

$$dx \mapsto d\varphi_x$$

Evidemment :

$$\text{Inert}\,(-\varphi) = \ell - \text{Inert}\,(\varphi) \;:$$

$$\arg \text{Hess}\,(\varphi) = \pi\, \text{Inert}\,(\varphi) \mod 2\pi \,,$$

Cette formule nous permet de <u>définir</u>

(2.1) $$\arg \text{Hess}\,(\varphi) = \pi\, \text{Inert}\,(\varphi) \;;$$

d'où, par exemple

(2.2) $$[\,\text{Hess}\,(\varphi)\,]^{\frac{1}{2}} = |\,\text{Hess}\,(\varphi)\,|^{\frac{1}{2}}\, i^{\text{Inert}\,(\varphi)}$$

Si φ est une forme quadratique réelle

$$\varphi : X \ni x \mapsto \tfrac{1}{2} < R\,x\,, x> \;, \quad \text{où} \quad R = {}^tR : X \to X^* \,,$$

alors Hess (φ) et Inert (φ) seront notés Hess (R) et Inert (R). Hess (R) est le déterminant de la matrice symétrique R. Inert (R) est le nombre de ses valeurs propres < 0. Evidemment :

(2.3) $$\text{Inert}\,(R) = \text{Inert}\,(R^{-1}) \;; \quad [\text{Hess}\,(R)]^{\frac{1}{2}}[\text{Hess}\,(-R^{-1})]^{\frac{1}{2}} = i^{\ell}$$

LEMME 2.2. - Soit φ' un polynome réel du second degré; soit $A \in \mathbb{A}$ tel que $\text{Hess}_{x'}\, (\varphi'(x') + A\,(x\,,x')) \neq 0$; notons $\varphi\,(x)$ la valeur critique du polynome :

$$X \ni x' \mapsto A\,(x\,,x') + \varphi'\,(x') \;;$$

on a

(2.4) $$S_A\,(e^{\nu\varphi'}) = \Delta\,(A)\,[\,\text{Hess}_{x'}\,(\varphi' + A)\,]^{-\frac{1}{2}}\, e^{\nu\varphi}.$$

<u>Note</u> 2.1. - Ce lemme suppose $\frac{\nu}{i} > 0$; jusqu'ici il suffisait de supposer $\frac{\nu}{i}$ réel non nul.

<u>Preuve</u>. - On sait que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}\,;$$

donc, si $c \in \mathbb{C}$ et $|\arg \mu| < \frac{\pi}{2}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\mu}{2}(x+c)^2}\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\mu}} \qquad (\,|\arg\sqrt{\mu}\,| < \frac{\pi}{4}\,).$$

on a donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu p x}\, e^{-\frac{\mu}{2}(x+c)^2}\, dx = e^{\nu\varphi} \int_X e^{-\frac{1}{2\mu}[\nu p - \mu(x+c)]^2}\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\mu}}\, e^{\nu\varphi}$$

φ étant la valeur critique de la fonction

$$x \mapsto px + \varphi'(x) \ , \quad \text{où} \quad \varphi' = -\frac{\mu}{2\nu}(x+c)^2 \ .$$

La transformation de Fourier F est définie par

$$(2.5) \qquad (\forall f' \in \mathcal{S}(X)) \ \ (Ff')(p) = \left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2} \int_X e^{-\nu\langle p, x'\rangle} f'(x')\, d^\ell x' \ ;$$

nous avons donc, pour $\ell = 1$, $|\arg \mu| < \frac{\pi}{2}$:

$$F\, e^{\nu\varphi'} = \frac{\sqrt{|\nu|}}{\sqrt{\mu}\sqrt{i}}\, e^{\nu\varphi}; \ \sqrt{i} = e^{\frac{\pi i}{4}} \ ;$$

puisque F est un automorphisme continu de $\mathcal{S}'(X)$, la formule précédente vaut encore pour $\mu = -\epsilon\nu$, $\epsilon \in \dot{\mathbb{R}}$; alors

$$\frac{\sqrt{\mu}\sqrt{i}}{\sqrt{|\nu|}} = \sqrt{\epsilon} \quad \text{si} \quad \epsilon > 0 \ , = i\sqrt{|\epsilon|} \quad \text{si} \quad \epsilon < 0 \ .$$

Autrement dit, quand $\ell = 1$, le résultat suivant vaut: Soit un polynome réel du second degré $\varphi' : X \to \mathbb{R}$ tel que Hess $\varphi' \neq 0$; soit $\varphi(p)$ la valeur critique du polynome :

$$x \mapsto \varphi'(x) - \langle p, x\rangle ;$$

on a

$$F\, e^{\nu\varphi'} = [\mathrm{Hess}\, \varphi']^{-\frac{1}{2}}\, e^{\nu\varphi} \tag{2.6}$$

Il suffit de choisir des coordonnées x^j de X telles que

$$\varphi'(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \varphi'_j (x^j) ,$$

les φ'_j étant des polynomes du second degré de la seule variable x^j, pour constater que , puisque la relation (2.6)vaut, pour $\ell = 1$, elle vaut pour tout $\ell \geqq 1$.

Or, vu la définition (1.9) de A, (1.10) de S_A et (2.5) de F, dans le cas $P = Q = 0$:

on a,

$$(S_A f')(x) = \Delta(A)\,(F f')(Lx) ;$$

(2.6) prouve donc (2.4) dans ce cas, auquel le cas général équivaut évidemment, vu ces définitions de A et S_A .

Avant de composer les S_A , composons les s_A

LEMME 2.3. - 1) Soient A et $A' \in \mathbb{A}$; la condition

$$s_A\, s_{A'} \notin \Sigma_{Sp} \tag{2.7}$$

équivaut à la condition

$$\mathrm{Hess}_{x'} [A(x,x') + A'(x',x'')] \neq 0 \quad \text{(ce Hess. est constant)}. \tag{2.8}$$

2) Cette condition équivaut, vu le lemme 2.1, à l'existence de $A'' \in \mathbb{A}$ tel que

$$s_A\, s_{A'}\, s_{A''} = e \quad [\text{élément neutre de } Sp(\ell)] ; \tag{2.9}$$

A'' est défini par la condition que voici : la valeur critique du polynome

$$x' \longmapsto A(x,x') + A'(x',x'') + A''(x'',x)$$

est nulle.

3) De même que (1.9) définit A par P, Q, L , définissons A' et A'' par P', Q', L' et P'', Q'', L'' ; la condition (2.8) d'existence de A'' s'énonce :

$$P' + Q \text{ est inversible ;}$$

A'' peut être défini par les formules :

(2.10)
$$\left\{\begin{aligned} & P'' + Q' = L' (P' + Q)^{-1}\, {}^tL' , P + Q'' = {}^tL (P' + Q)^{-1} L \\ & L'' = - {}^t L (P' + Q)^{-1}\, {}^tL' . \end{aligned}\right.$$

Note 2.2. - On a, en écrivant $A + A' + A''$ pour $A(x, x') + A'(x', x'') + A''(x'', x)$:

(2.11) $\operatorname{Inert}_x (A + A' + A'') = \operatorname{Inert}_{x'} (A + A' + A'') = \operatorname{Inert}_{x''} (A + A' + A'')$;

(2.12)
$$\operatorname{Hess}_{x'} (A + A' + A'') = \frac{\Delta^2 (A)\, \Delta^2 (A')}{\Delta^2 (A''^*)} .$$

Preuve de 1). - Vu (1.11), les relations

$$(x, p) = s_A (x', p') , (x', p') = s_{A'} (x'', p'')$$

s'écrivent

$$p = A_x (x, x') , p' = - A_{x'} (x, x') = A'_{x'} (x', x''), p'' = -A'_{x''}(x', x'') ;$$

l'élimination de p' et x' entre ces relations définit

$$(x, p) = s_A s_{A'} (x'', p'') .$$

La condition (2.7) $s_A s_{A'} \notin \sum_{sp}$ équivaut donc à chacune des suivantes :

cette élimination laisse x et x'' indépendantes ;

la relation

$$A_{x'} (x, x') + A'_{x'} (x', x'') = 0$$

laisse x et x'' indépendantes ;

il existe x' vérifiant cette relation, quels que soient x et x'' .

Or, dans (1.9), dét $L \neq 0$; donc (2.7) équivaut à (2.8).

Preuve de 2). - L'hypothèse (2.9) signifie ceci : deux quelconques des trois relations suivantes impliquent le troisième :

$$(x, p) = s_A (x', p') , (x', p') = s_{A'} (x'', p'') , (x'', p'') = s_{A''} (x, p) .$$

Donc, vu (1.11), chacune des trois relations que voici implique les deux autres :

$$(2.13) \qquad (A+A'+A'')_x = 0\,,\ (A+A'+A'')_{x'} = 0\ (A+A'+A'')_{x''} = 0\ ,$$

où $$A+A'+A'' = A\,(x\,,x') + A'(x'\,,x'') + A''\,(x''\,,x)\ .$$

Or, vu la formule d'Euler, ces trois relations impliquent

$$A + A' + A'' = 0\ .$$

Donc :

$$(A + A' + A'')_{x'} = 0,\quad \text{c'est-à-dire } (A+A')_{x'} = 0 \text{ implique } A+A'+A'' = 0.$$

~~Preuve de~~ 3). - D'une part

$$\mathrm{Hess}_{x'}\ (A+A'+A'') = \mathrm{Hess}\ (P' + Q)\ .$$

D'autre part les trois relations, deux à deux équivalentes,(2.13) s'écrivent :

$$(P+Q'')\ x - {}^tLx' - L''x'' = 0$$

$$- Lx + (P' + Q)\ x' - {}^tL'\ x'' = 0$$

$$- {}^tL''x - L'x' + (P'' + Q')\ x'' = 0\ ;$$

(2.10) exprime évidemment ces équivalences.

Preuve de la Note 2.2. - Vu $(2.10)_1$, les matrices symétriques

$$P'' + Q'\ ,\ (P' + Q)^{-1} \text{ et } P + Q''$$

peuvent être transformées l'une en l'autre ; elles ont donc la même inertie ; c'est ce qu'énonce (2.11) .

Vu $(2.10)_2$,

$$\mathrm{Hess}\ (P'+Q) = (\text{dét } L)\,.\,(\text{dét } L')\ /\ (-1)^{\ell}\ \text{dét } L''\ ;$$

vu la définition 2.2, c'est ce qu'énonce (2.12).

Définitions 2.4. - Etant donnés

$$s_A\ ,\ s_{A'}\ ,\ s_{A''} \in Sp(\ell) - \sum_{Sp} \quad \text{tels que} \quad s_A\, s_{A'}\, s_{A''} = e\ ,$$

définissons :

(2.14) $\qquad \mathrm{Inert}\,(s_A, s_{A'}, s_{A''}) = \mathrm{Inert}_x\,(A + A' + A'')$ [voir (2.11)] .

Définissons

$$\mathrm{Inert}\,(S_A, S_{A'}, S_{A''}) = \mathrm{Inert}\,(s_A, s_{A'}, s_{A''}) .$$

Définissons d'autre part l'indice de Maslov $m(S_A) \in \mathbb{Z}_4$ de S_A par :

(2.15) $$m(S_A) = m(A) \mod .4 ;$$

le § 2 n° 8 le rattachera à l'indice que V.I. Maslov a effectivement introduit.

Le lemme 2.1 et (2.15) ont pour conséquences évidentes ceci :

(2.16) $$\begin{cases} \mathrm{Inert}\,(s_{A''}^{-1}, s_{A'}^{-1}, s_A^{-1}) = \ell - \mathrm{Inert}\,(s_A, s_{A'}, s_{A''}) ; \\ m(S_A^{-1}) = \ell - m(S_A) \; ; \; m(-S_A) = m(S_A) + 2 \qquad \mod . 4 \end{cases}$$

Nous pouvons enfin étudier la composition des S_A .

LEMME 2.4. - Soit un triplet A, A', A'' d'élements de Λ, tel que

(2.17) $$s_A\, s_{A'}\, s_{A''} = e .$$

On a

(2.18) $$S_A\, S_{A'}\, S_{A''} = \pm E \quad [E : \text{élément neutre de } Mp(\ell)] .$$

La condition pour qu'on ait

(2.19) $$S_A\, S_{A'}\, S_{A''} = E$$

est

(2.20) $$\mathrm{Inert}\,(S_A, S_{A'}, S_{A''}) = m(S_A) - m(S_{A'}^{-1}) + m(S_{A''}) \mod . 4$$

Note. - La condition (2.17), qui équivaut donc à (2.18), implique (2.20) mod.2.

Preuve. - Soit $y \in X$; la formule (1.10) vaut quand on y remplace f' par la mesure de Dirac de support y :

$$\delta'(x) = \delta(x - y) ;$$

on obtient :

$$(S_{A'}\,\delta')\,(x) = \left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2} \Delta\,(A')\; e^{\nu A'(x\,,y)}\;;$$

d'où, vu le lemme 2.2

$$(S_A S_{A'}\,\delta')\,(x) = \left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2} \Delta(A)\,\Delta(A')\;\{\mathrm{Hess}_{x'}[\,A(x\,,x') + A'(x'\,,y)]\}^{-\frac{1}{2}} e^{-\nu A''(y,x)}\;;$$

d'où, en multipliant par $f'\,(y)\,d^{\ell}y$ où $f' \in \mathcal{S}(X)$ et en sommant :

$$S_A\,S_{A'}\,f' = \frac{\Delta(A)\,\Delta(A')}{\Delta(A''*)}\,[\,\mathrm{Hess}_{x'}\,(A+A'+A'')\,]^{-\frac{1}{2}}\;\;S_{A''} * f'\;;$$

d'où, vu le lemme 2.1 et la formule (2.12) :

$$S_A\,S_{A'}\,S_{A''} = \pm\,E\,,$$

Précisons ce signe : vu la définition 2.4

$$\arg[\mathrm{Hess}_{x'}\,(A+A'+A'')]^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}\;\mathrm{Inert}\,(S_A\,,S_{A'}\,,\,S_{A''})\bmod 2\,\pi\,;$$

vu la définition 1.2 , (2.16) et le lemme 2.1

$$\arg\Delta\,(A) = \frac{\pi}{2}\,m\,(S_A)\,,\arg\,\Delta\,(A') = \frac{\pi}{2}\,m\,(S_{A'}) = \frac{\pi}{2}\,[\ell - m\,(S_{A'}^{-1})\,]\,,$$

$$\arg\Delta\,(A''*) = \frac{\pi}{2}\,m\,(S_{A''}^{-1}) = \frac{\pi}{2}\,[\ell - m\,(S_{A''})\,]\;\;\bmod 2\pi\,;$$

donc

$$\arg(\pm 1) = \frac{\pi}{2}\,[\mathrm{Inert}\,(S_{A'}\,S_{A'}\,,\,S_{A''}) - m\,(S_A) + m(S_{A'}^{-1}) - m\,(S_{A''})\,]\bmod 2\pi$$

Rappelons que $Sp_2(\ell)$ désigne le groupe qu'engendrent les S_A.

LEMME 2.5. - Tout élément de $Sp_2(\ell)$ est produit de deux des S_A.

Preuve. - Vu le lemme 2.1, tout élément de $Sp_2(\ell)$ est produit de S_A. Il suffit donc de prouver ceci :

Etant donnés $U, V, W \in \mathbb{A}$, il existe B et $C \in \mathbb{A}$ tels que

(2.21) $$S_U S_V S_W = S_B S_C .$$

Or, vu les lemmes 2.3 1°) et 2.4, pour tout $W \in \mathbb{A}$ et tout T élément générique de $\{S_A\}$, $S_W S_T$ appartient à $\{S_A\}$ et est générique ; donc, pour T générique :

$$S_V S_T \in \{S_A\} , S_U S_V S_T \in \{ S_A\} , S_T^{-1} S_W \in \{S_A\};$$

d'où (2.21) avec

$$S_B = S_U S_V S_T \in \{ S_A \} , S_C = S_T^{-1} S_W \in \{ S_A \} .$$

La restriction à $Sp_2(\ell)$ du morphisme naturel $Mp(\ell) \to Sp(\ell)$ est évidemment un morphisme naturel :

$$Sp_2(\ell) \to Sp(\ell) .$$

LEMME 2.6. - Le noyau de ce morphisme est le sous-groupe

$$S^\circ = \{ E , -E \} ;$$

donc

$$Sp_2(\ell) / S^\circ = Sp(\ell) .$$

Preuve. - Vu le lemme précédent, le noyau de ce morphisme est l'ensemble des $S_A S_{A'}$ (A et $A' \in \mathbb{A}$) tels que $s_A s_{A'} = e$; d'où, vu le lemme 2.1 :

$$s_{A'} = s_{A^*} ;$$

donc, vu la définition 2.2 :

$$(\forall x, x' \in X) \quad A'(x, x') = A^*(x, x') ;$$

par suite

$$\Delta (A') = \pm \Delta (A^*)$$

et

$$S_{A'} = \pm S_{A^*} ; \text{ donc } S_A S_{A'} = \pm E .$$

LEMME 2.7. - Le groupe $Sp_2(\ell)$ est connexe.

Preuve. - Etant donné $k \in \mathbb{Z}_4$ (groupe additif des entiers mod. 4), notons D_k l'ensemble des S_A tels que

$$m(A) = k, \text{ c.à.d. } i^{-k} \Delta(A) > 0 ;$$

vu la définition 1.2 de $\mathbb{A}$, chaque D_k est un domaine connexe de $Sp_2(\ell)$.

Etant donné $k \in \mathbb{Z}_4$, soient S_A et $S_{A'}$ tels que :

$$m(S_A) - m(S_{A'}^{-1}) = -k \bmod 4 ,$$

$P' + Q$ ait une valeur propre nulle et $\ell - 1$ valeurs propres > 0 .

Soient B et $B' \in \mathbb{A}$, voisins de A et A', tel que

$$\mathrm{Hess}_{x'}(B + B') \neq 0 ;$$

définissons $B'' \in \mathbb{A}$ par $S_B S_{B'} S_{B''} = E$; $\mathrm{Inert}_{x'}(B + B')$ prend les valeurs 0 et 1 ; puisque m est localement constant :

$$m(S_B) = m(S_A) , m(S_{B'}^{-1}) = m(S_{A'}^{-1}) ;$$

vu (2.20) , $m(S_{B''})$ prend les valeurs k et $k + 1$ dans tout voisinage de $(S_A S_{A'})^{-1}$ qui appartient donc à $\overline{D_k} \cap \overline{D_{k+1}}$:

$$\overline{D_k} \cap \overline{D_{k+1}} \neq \emptyset .$$

D'où le lemme.

Les lemmes ci-dessus prouvent le théorème suivant. Son 1° réduit l'étude de $Mp(\ell)$ à celle de $Sp_2(\ell)$; on trouve son équivalent chez D. Shale et A. Weil ; mais la preuve que nous en avons donnée a établi divers autres résultats qui nous seront indispensables. L'un d'eux est le 3°) de ce théorème : c'est le n° 8 du § 2 qui l'emploiera.

THEOREME 2 . - 1) Les éléments S_A de $Mp(\ell)$ que définit (1.10) engendrent un sous-groupe $Sp_2(\ell)$ de $Mp(\ell)$; $Sp_2(\ell)$ est un revêtement d'ordre 2 du groupe $Sp(\ell)$; c'est un groupe d'automorphismes de $\mathcal{S}(X)$ se prolongeant en automorphismes unitaires de $\mathcal{H}(X)$ et en automorphismes de $\mathcal{S}'(X)$.

2) Les formules (2.11) et (2.14) définissent l'inertie de tout triplet s, s', s'' d'éléments de $Sp(\ell) \setminus \Sigma_{Sp}$ tel que :

$$s\, s'\, s'' = e \quad [\text{élément neutre de } Sp(\ell)] ;$$

l'inertie est une fonction localement constante, (discontinue sur Σ_{Sp}) , à valeurs dans $\{0 , 1 , \dots , \ell\}$, vérifiant :

$$\mathrm{Inert}(s, s', s'') = \mathrm{Inert}(s'', s, s') = \dots = \ell - \mathrm{Inert}(s''^{-1} s'^{-1} s^{-1}) .$$

Notons Σ_{Sp_2} l'hypersurface de $Sp_2(\ell)$ dont la projection naturelle sur $Sp(\ell)$ est Σ_{Sp} ; les S_A, définis par (1.10), sont les éléments de $Sp_2(\ell) \setminus \Sigma_{Sp_2}$. Soit un triplet S, S', S'' de tels éléments, vérifiant :

$$S\,S'\,S'' = E \quad [\text{élément neutre de } Sp_2(\ell)]\ ;$$

soient s, s', s'' sa projection naturelle sur $Sp(\ell)$: nous définissons

$$\operatorname{Inert}(S, S', S'') = \operatorname{Inert}(s, s', s'')\ .$$

3) La formule (2.15) définit sur $Sp_2(\ell) \setminus \Sigma_{Sp_2}$ l'indice de Maslov m ; c'est une fonction localement constante (discontinue sur Σ_{Sp_2}), à valeurs dans $\mathbb{Z}_4$; elle vérifie

$$m(S^{-1}) = \ell - m(S)\,,\; m(-S) = m(S) + 2 \mod 4\ ;$$

$$\operatorname{Inert}(S, S', S'') = m(S) - m(S'^{-1}) + m(S'') \mod 4\,.$$

Note 2.3. - Nous verrons ultérieurement que cette dernière formule et la propriété d'être localement constante caractérisent m.

Note 2.4. - $Sp_2(\ell)$ contient les trois sous-groupes de $G(\ell)$ qu'a définis le n° 1 :

(i) par Fourier ; (ii) par des formes quadratiques ; (iii) par des automorphismes de X

Preuve. - Soit S un de leurs éléments ; on trouve aisément $A \in \mathbb{A}$ tel que

$$S\,S_A = S_{A'}\,,\quad \text{où } A' \in \mathbb{A}\ .$$

Note 2.5. - On peut prouver que tout $S \in Sp_2(\ell)$ est du type :

$$S = S_1\,S_2\,S_3\,S_4\,,$$

où : $S_3 \in$ (i), c.à.d. est une transformée de Fourier portant sur au plus ℓ coordonnées ;

S_1 et $S_4 \in$ (ii), c.à.d. sont du type : $f' \mapsto e^{\nu Q} f'$, Q : forme quadratique réelle ;

$S_2 \in$ (iii) , c.à.d. est du type : $f'(\cdot) \mapsto \sqrt{\det T}\; f'(T\cdot)$, où T est un automorphisme de X

3. OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS A COEFFICIENTS POLYNOMIAUX . -

Vu la définition 1.1, les éléments de $Sp_2(\ell)$ transforment des opérateurs de ce type en opérateurs du même type ; ce n° 3 explicite cette transformation.

Soient a^+ et a^- deux polynomes de $\frac{1}{\nu}$, x , p :

$$a^+(\nu, x, p) = \sum_\alpha a^+_\alpha(\nu, x)\, p^\alpha ; \quad a^-(\nu, p, x) = \sum_\alpha p^\alpha a^-_\alpha(\nu, x) ;$$
(α : multi-indice)

Considérons les deux opérateurs différentiels :

$$(3.1) \qquad a^+\left(\nu, x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right) : f \mapsto \sum_\alpha a^+_\alpha(\nu, \cdot)\left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(\cdot) ;$$

$$(3.2) \qquad a^-\left(\nu, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}, x\right) : f \mapsto \sum_\alpha \left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha [\, a^-_\alpha(\nu, \cdot)\, f(\cdot)\,].$$

LEMME 3.1. - L'identité de ces deux opérateurs

$$(3.3) \qquad a^+\left(\nu, x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right) = a^-\left(\nu, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$$

équivaut à l'existence d'un polynome a° en $\frac{1}{\nu}$, x , p , tel que :

$$(3.4) \qquad \begin{cases} a^+(\nu, x, p) = e^{\frac{1}{2\nu}\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle} a^\circ(\nu, x, p) \\ \\ a^-(\nu, p, x) = e^{-\frac{1}{2\nu}\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle} a^\circ(\nu, x, p) . \end{cases}$$

Les notations sont les suivantes :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial p_j} \qquad (x^j, p_j \text{ : coordonnés duales de } X \text{ et } X^*)$$

$$e^{\lambda\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle^k .$$

Preuve. - La relation (3.3) définit une bijection $a^- \mapsto a^+$ telle que, pour tout $p \in X^*$:

$$a^+(\nu, x, p) = e^{-\nu<p,x>} a^+(\nu, x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})\ e^{\nu<p,x>} =$$

$$= e^{-\nu<p,x>} a^-(\nu, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}, x) e^{\nu<p,x>} = \sum_\alpha (p+\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})^\alpha a^-_\alpha(\nu, x) =$$

$$= e^{\frac{1}{\nu}<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}>} a^-(\nu, p, x),$$

car d'aprés la formule de Taylor, pour tout polynome $P : X^* \to \mathbb{C}$ et toute fonction $f : X \to \mathbb{C}$:

$$P(p+\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})\ f(x) = \sum_\beta \frac{1}{\beta!} (\frac{\partial}{\partial p})^\beta P(p)\ (\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})^\beta f(x)$$

$$= e^{\frac{1}{\nu}<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}>} [P(p)\ f(x)].$$

La bijection $a^- \to a^+$ peut donc être définie par la relation

$$a^+(\nu, x, p) = e^{\frac{1}{\nu}<\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}>} a^-(\nu, p, x) ;$$

c'est ce qu'affirme le lemme.

<u>Définition</u> 3.1. - Soit un opérateur différentiel a, d'expressions (3.1) et (3.2) ; il est défini par le polynome a° en $(\frac{1}{\nu}, x, p)$ qui ~~vérifie~~ (3.4).

Nous dirons que a est <u>l'opérateur différentiel associé au polynome</u> a°

Le théorème 3.1 explicitera le transformé $S\, a\, S^{-1}$ de a par $S \in Sp_2(\ell)$; le lemme 1.1 l'a déjà fait quand a° est linéaire en (x, p). La preuve de ce théorème emploiera les propriétés suivantes.

LEMME 3.2. - Si a et b sont les opérateurs associés aux polynomes a° et b°, alors l'opérateur

$$c = a\, b$$

est associé au polynome c° valant :

$$(3.5)\qquad c^\circ(\nu,x,p) = \left\{ e^{\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial p}> - \frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial q}>} [a^\circ(\nu,x,p) b^\circ(\nu,y,q)] \right\}_{\substack{y=x\\ q=p}} .$$

<u>Preuve</u> . - Si $b^\circ(\nu,x,p)$ ne dépend que de p, alors le polynome c° associé à $c = ab$ est :

$$c^\circ(\nu,x,p) = e^{-\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial p}>} [a^+(\nu,x,p)\, b^\circ(p)]$$

$$= \left\{ e^{-\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial p}+\frac{\partial}{\partial q}>} [a^+(\nu,x,p)\, b^\circ(q)] \right\}_{q=p}$$

$$= \left\{ e^{-\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial q}>} [a^\circ(\nu,x,p)\, b^\circ(q)] \right\}_{q=p} .$$

De même, si $b^\circ(\nu,x,p)$ ne dépend que de x, alors le polynome associé à $c = ab$ est :

$$c^\circ(\nu,x,p) = \left\{ e^{\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial p}>} [a^\circ(\nu,x,p)\, b^\circ(y)] \right\}_{y=x}$$

Donc, si $b^+(x,p) = b'(x)\, b''(p)$, alors le polynome associé à $c = ab$ est :

$$c^\circ(\nu,x,p) = e^{-\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial q}>} \left\{ e^{\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial p}>} [a^\circ(\nu,x,p)\, b'(y)] \right\}_{y=x} b''(q) \Big|_{q=p}$$

$$= \left\{ e^{-\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial q}> - \frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial q}> + \frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial p}>} [a^\circ(\nu,x,p) b'(y) b''(q)] \right\}_{\substack{y=x\\ q=p}}$$

c'est-à-dire (3.5) , puisque, vu (3.4) :

$$e^{-\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial q}>} [b'(y)\, b''(q)] = b^\circ(y,q) .$$

D'où le lemme 3.2 , dont voici une conséquence évidente :

LEMME 3.3. - L'opérateur

$$c = \frac{1}{2}\,(ab + ba)$$

est associé au polynome :

$$c^{\circ}(\nu,x,p) = \{\mathrm{ch}\,[\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial p}> - \frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial q}>]\,[a^{\circ}(\nu,x,p)b^{\circ}(\nu,y,q)]\}_{\substack{y=x\\ q=p}}.$$

Si b est linéaire en (y,q), alors

$$[<\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial p}> - <\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial q}>]^2[a^{\circ}(\nu,x,p)\,b^{\circ}(\nu,y,q)] = 0$$

d'où

$$\mathrm{ch}\,[\ldots.]\,a^{\circ}\,b^{\circ} = a^{\circ}\,b^{\circ}\;;$$

donc :

LEMME 3.4. - Si b est linéaire en (x,p), alors l'opérateur associé à $a^{\circ}\,b^{\circ}$ est $\frac{1}{2}(ab+ba)$.

Ce lemme permet de prouver le

THEOREME 3.1. - <u>Le transformé</u> SaS^{-1} <u>de</u> a <u>par</u> S <u>est l'opérateur différentiel associé au polynome</u> $a^{\circ}\circ s^{-1}$ [$S\in Sp_2(\ell)$; s est l'image de S dans $Sp(\ell)$].

<u>Preuve</u>. - Soit b un opérateur différentiel associé à un polynome b° linéaire ou affine en (x,p) ; le lemme 1.1 signifie que le théorème 3 s'applique à b. Pour le prouver par une récurrence relative au degré de a° en (x,p), il suffit donc de prouver ceci : si le théorème s'applique à a°, alors il s'applique à $a^{\circ}\,b^{\circ}$.

Puisque le théorème s'applique à a° et b°, les opérateurs associés aux polynomes

$$a^{\circ}\,b^{\circ} \quad\text{et}\quad (a^{\circ}\,b^{\circ})\circ s^{-1} = (a^{\circ}\circ s^{-1})\,(b^{\circ}\circ s^{-1})$$

sont respectivement, vu le lemme 3.4 :

$$\frac{1}{2}(ab+ba) \quad\text{et}\quad \frac{1}{2}(SaS^{-1}SbS^{-1}+SbS^{-1}SaS^{-1}) = \frac{1}{2}\,S(ab+ba)S^{-1}.$$

Le théorème s'applique donc à $a^{\circ}\,b^{\circ}$; il est donc prouvé.

Complétons-le par un théorème concernant les opérateurs adjoints.

<u>Définition</u> 3.2. - Rappelons que $\mathcal{H}(X)$ est muni du produit scalaire :

$$(\forall\, f , g \in \mathcal{H}(X))\ \ (f \mid g) = \int_X f(x)\,\overline{g(x)}\,d^{\ell}x$$

($\overline{g(x)}$: imaginaire conjugué de $g(x)$) .

Deux opérateurs différentiels a et b sont dits <u>adjoints</u> si

$$(3.6)\qquad (\forall\, f , g \in \mathcal{H}(X))\quad (af \mid g) = (f \mid bg)\ .$$

THEOREME 3.2. - <u>Pour que les deux opérateurs différentiels</u> a <u>et</u> b <u>associés aux deux polynomes</u> a° <u>et</u> b° <u>soient adjoints, il faut et suffit que</u>

$$(3.7)\qquad (\forall\, \nu \in i\mathbf{R} ,\ x \in X , p \in X^{*})\quad b^{\circ}(\nu , x , p) = \overline{a^{\circ}(\nu , x , p)}\ .$$

<u>Preuve</u> . _ Il est évident que (3.6) équivaut à :

$$b^{-}(\nu , p , x) = \overline{a^{+}(\nu , x , p)}\ ,$$

c'est-à-dire, puisque ν est imaginaire pur, à :

$$e^{-\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial p}>}\ b^{\circ}(\nu , x , p) = e^{-\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial p}>}\ \overline{a^{\circ}(\nu , x , p)}\ .$$

donc à (3.7).

Les théorèmes 3.1 et 3.2 ont évidemment le corollaire suivant

COROLLAIRE 3.1. - <u>Si</u> a^{*} <u>est l'adjoint de</u> a , <u>alors</u> $(\forall\, S \in Sp_2(\ell))$ $S\, a^{*}\, S^{-1}$ <u>est l'adjoint de</u> $S\, a\, S^{-1}$.

Le théorème 3.2 a évidemment le corollaire suivant, qui sera important :

COROLLAIRE 3.2. - <u>Pour que l'opérateur</u> a <u>associé au polynome</u> a° <u>soit auto-adjoint il faut et suffit que ce polynome soit à valeurs réelles</u> $(\forall\, \nu \in i\mathbf{R} ,$ $x \in X , p \in X^{*})$.

§ 2. Indices de Maslov ; indices d'inertie ; les variétés lagrangiennes et leurs orientations .

0 . INTRODUCTION. - Historique . - Suivant une indication de V.C.BOUSLAEV [3], [11] le § 1 vient de définir sur $Sp_2(\ell)$, par (2.15), un indice de Maslov mod. 4 et de le rattacher par (2.20), à un indice d'inertie, fonction de deux éléments de $Sp(\ell)$.

Par ailleurs V.I. ARNOLD [1] [11] définit sur le revêtement de la grasmannienne lagrangienne $\wedge(\ell)$ de $Z(\ell)$ un autre indice de Maslov, qui se rattache au précédent et à un second indice d'inertie, fonction d'un triplet de points de $\wedge(\ell)$. J.M. SOURIAU [15] a donné une variante à la définition de l'indice de Maslov qu'expose ce § 2 .

Sommaire. - Le § 3 du chap. I et le chap. II emploieront ces deux indices de Maslov et un troisième indice d'inertie, fonction d'un élément de $Sp(\ell)$ et d'un point de $\wedge(\ell)$.

Nous reprenons en les adaptant, les diverses définitions de ces divers indices (Arnold, n° 5 ; Maslov, n° 6 ; Bouslaev, n° 7) pour expliciter leurs propriétés (n° 4, 5, 6, 7, 8) , dont le § 3 énoncera celles qu'emploiera le chap. II .

Il nous faut d'abord préciser les propriétés topologiques de $Sp(\ell)$ et $\wedge(\ell)$; (théorème 3) . Pour étudier ces propriétés nous employons comme Arnold une structure hermitienne de $Z(\ell)$; (n° 1 et 2) .

1. - CHOIX DE STRUCTURES HERMITIENNES DE $Z(\ell)$. - Notons $(z|z')$ le produit scalaire de deux vecteurs de C^ℓ muni d'une structure hermitienne ; évidemment

$$\mathrm{Im}(z|z') = -\mathrm{Im}(z'|z)$$

est une structure symplectique de C^ℓ .

De façon plus précise :

Lemme 1.1. - La restriction à X définit un homéomorphisme entre :

- L'ensemble des structures hermitiennes $(.|.)$ de $Z(\ell)$ telles que

$$\text{(1.1)} \qquad \operatorname{Im}(z \mid z') = [z, z'] \;,\; iX = X^* \;;$$

- l'ensemble des structures euclidiennes de X.

Preuve. - i) La restriction à X d'une structure hermitienne de $Z(\ell)$ vérifiant (1.1) est euclidienne, puisque :

$$(\forall x, x' \in X) \quad [x, x'] = 0 \,.$$

Notons que, vu (1.1) :

$$\text{(1.2)} \qquad (z \mid z') = [iz, z'] + i[z, z'] \;;$$

en particulier :

$$\text{(1.3)} \qquad (\forall x, x' \in X) \quad (x \mid x') = [ix, x'] \;;$$

donc .

$$\text{(1.4)} \qquad ix = \frac{1}{2} \frac{\partial |x|^2}{\partial x} \in X^* \,.$$

ii) La donnée de $(.|.)$ sur X, définit :

- par (1.4), la restriction de i à X :

$$i_1 : X \to X^* \;;$$

- la restriction de i à X^* :

$$i_2 : X^* \to X \,,\ \text{car}\ i_2 = -i_1^{-1}\ \text{puisque}\ i^2 = -1 \;;$$

- donc l'automorphisme i de $Z(\ell)$:

$$\text{(1.5)} \qquad i(x, p) = (i_2 p, i_1 x)$$

- enfin, par (1.2), la structure hermitienne de $Z(\ell)$.

La restriction à X des structures hermitiennes de $Z(\ell)$ vérifiant (1.1) est donc une application injective de l'ensemble de ces structures dans celui des structures euclidiennes de X .

iii) Elle est bijective ; en effet : l'automorphisme i de $Z(\ell)$ défini par la donnée de $(.|.)$ sur X , c'est-à-dire par (1.5) , vérifie :

$$i^2 = -1 , [iz , z'] = [iz' , z] , \text{car } {}^t i_1 = i_1 , {}^t i_2 = i_2 ;$$

$(.|.)$, que (1.2) définit sur $Z(\ell)$, est évidemment linéaire en $z \in \mathbb{C}^\ell$,

- vérifie $(z' , z) = \overline{(z' , z)}$;
- est donc sesquilinéaire ;
- vérifie $$|x + iy|^2 = |x|^2 + |y|^2 ;$$
- est donc bien une structure hermitienne.

Le lemme 1.1 a pour corollaire le

LEMME 1.2. - L'ensemble des structures hermitiennes de $Z(\ell)$ vérifiant (1.1) est un cône convexe ouvert ; il est donc connexe.

Note 1. - Nous choisissons arbitrairement l'une de ces structures hermitiennes de $Z(\ell)$; nous l'emploierons à définir des notions topologiques (les indices de Maslov) ; ces notions ne dépendront pas de ce choix, vu le lemme précédent.

2. LA GRASSMANNIENNE LAGRANGIENNE $\Lambda(\ell)$ DE $Z(\ell)$. -

Un sous-espace de $Z(\ell)$ est dit lagrangien quand la restriction de $[. , .]$ à ce sous-espace est identiquement nulle, c'est-à-dire, vu (1.1), quand la restriction de la structure hermitienne de $Z(\ell)$ est une structure euclidienne de ce sous-espace.

Tout repère orthonormé d'un sous-espace lagrangien de dimension k est donc constitué par des vecteurs orthogonaux dans $Z(\ell)$; donc $k \leq \ell$.

Notons $\Lambda(\ell)$ l'ensemble des sous-espaces lagrangiens de dimension ℓ ; $\Lambda(\ell)$ est nommée grassmannienne lagrangienne.

$$X \text{ et } X^* \in \Lambda(\ell) .$$

Soient : $\lambda \in \Lambda(\ell)$; r un repère orthonormé de λ ; c'est un repère de $Z(\ell)$: $Z(\ell)$ (resp. λ) a pour éléments les combinaisons linéaires à coefficients complexes (resp. réels) des vecteurs constituant r.

Notons $U(\ell)$ le groupe des automorphismes unitaires u de $Z(\ell)$; (c'est-à-dire : $u\,u^* = e$, où : $u^* = {}^t\bar{u}$; ${}^t\bullet$: transposé ; e : identité) ; vu (1.1) :

$$U(\ell) \subset Sp(\ell)\ .$$

Soient, de même : $\lambda' \in \Lambda(\ell)$; r' un repère orthonormé de λ'. $U(\ell)$ contient un élément unique u tel que :

$$r = u\,r'\ ;$$

d'où :

$$\lambda = u\,\lambda'\ .$$

Le groupe $U(\ell)$ opère donc <u>transitivement</u> sur $\Lambda(\ell)$: il en est de même, a fortiori, pour $Sp(\ell)$; d'où le 1°) du lemme ci-dessous, où $St(\ell)$ [et $O(\ell)$] désigne le <u>stabilisateur</u> de X^* dans $Sp(\ell)$ [et $U(\ell)$], c.à.d. le sous-groupe des s tels que $s\,X^* = X^*$.

$O(\ell)$ est évidemment <u>le groupe orthogonal</u>. Le lemme 2.3 explicitera $St(\ell)$; son 2°) montre pourquoi le stabilisateur de X^* nous intéresse plus que celui de X.

LEMME 2.1. - 1) On a

$$\Lambda(\ell) = Sp(\ell)\,/\,St(\ell) = U(\ell)\,/\,O(\ell)\ . \tag{2.1}$$

2°) Notons $W(\ell)$ <u>l'ensemble</u> des éléments symétriques w de $U(\ell)$; (c'est-à-dire : ${}^t w = w$. Donc $w \in W(\ell)$ signifie : $w = {}^t w = \bar{w}^{-1}$).

Le diagramme :

$$\begin{array}{c} U(\ell) \ni u \mapsto u\,{}^t u = w \in W(\ell) \\ \downarrow \\ U(\ell)\,/\,O(\ell) = \Lambda(\ell) \ni \lambda = u\,X^* \end{array} \tag{2.2}$$

définit un <u>homéomorphisme</u> naturel :

$$\Lambda(\ell) \ni \lambda \mapsto w(\lambda) \in W(\ell)\ . \tag{2.3}$$

La condition :

(2.4) $$z \in \lambda \text{ équivaut à } z + w(\lambda)\,\bar{z} = 0 .$$

Notons :

$$z = x + iy \quad , \text{ où } x \text{ et } y \in X ;$$

supposons :

$$1 \notin sp\,(w(\lambda)) \quad [sp\,(w) : \text{spectre de } w ; 0\text{-chaîne de } S^1] ;$$

(2.5) $$z \in \lambda \text{ équivaut à } y = i\,\frac{e + w(\lambda)}{e - w(\lambda)}\,x ,$$

où $i\,\frac{e + w(\lambda)}{e - w(\lambda)}$ est une matrice réelle, symétrique ; (c'est-à-dire : identique à sa transposée).

3°) $\dim(\lambda \cap \lambda')$ est l'ordre de multiplicité de 1 dans $sp\,(w(\lambda)\,w^{-1}(\lambda'))$.

<u>Note</u> 2. - Ce 3°) prépare la définition topologique de l'indice de Maslov (n°5)

La preuve du lemme 2.1 repose sur le lemme suivant, qui est une conséquence évidente de l'expression de $u \in U(\ell)$ au moyen de ses valeurs et vecteurs propres :

LEMME 2.2. - 1°) Soit $u \in U(\ell)$; pour que $u \in W(\ell)$, il faut et suffit qu'on puisse choisir <u>réels</u> tous ses vecteurs propres .
2) Toute application surjective :

$$F : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1 \quad (\mathbf{S}^1 \text{ cercle trigonométrique de } \mathbb{C})$$

définit une application surjective :

$$W(\ell) \ni w \mapsto F(w) \in W(\ell) .$$

<u>Preuve du lemme</u> 2.1 2°) . - Le diagramme (2.2) définit une application (2.3), car si u et $uv \in U(\ell)$ ont la même image dans $\Lambda(\ell) = U(\ell)/O(\ell)$, alors $v \in O(\ell)$, donc :

$$u\,v\,{}^t(uv) = u\,v\,{}^tv\,{}^tu = u\,{}^tu .$$

Etant donné $w \in W(\ell)$, vu le lemme 2.2 2°), il existe $u \in W(\ell)$ tel que

$w = u^2$; donc $w = u\,{}^t u$; l'application (2.3) est donc surjective.

Puisque $\lambda = u\,X^*$, la condition $z \in \lambda$ s'énonce

$u^{-1} z \in X^*$, ou $\mathrm{Re}(u^{-1} z) = 0$ ou $u^{-1} z + \bar{u}^{-1} \bar{z} = 0$ ou $z + w\,\bar{z} = 0$.

L'application (2.3) est donc injective.

Preuve du lemme 2.1 3°). - Notons $w = w(\lambda)$, $w' = w(\lambda')$; $\lambda \cap \lambda'$ a pour équations :

$$z + w\,\bar{z} = 0 \quad , \quad z + w'\,\bar{z} = 0 \ ;$$

c'est-à-dire :

$$\lambda \cap \lambda' : w^{-1} z = w'^{-1} z \ ; \ z = -w\,\bar{z} \, .$$

Notons T le sous-espace analytique de $Z(\ell)$ d'équation :

$$T : w^{-1} z = w'^{-1} z \ ; \text{ on a } \dim_c T = k \, ,$$

k étant l'ordre de multiplicité de 1 dans $sp(w\,w'^{-1})$. L'équation de $\lambda \cap \lambda'$ dans T est :

$$z + w\,\bar{z} = 0 \, .$$

Vu le lemme 2.2 2°), il existe $u \in W(\ell)$ tel que :

$$-w = \bar{u}^2 = u^{-1}\,\bar{u} \, .$$

l'équation de $\lambda \cap \lambda'$ dans T s'écrit donc :

$$u\,z = \bar{u}\,\bar{z} \, .$$

L'isomorphisme

$$T \ni z \longmapsto u\,z \in C^k$$

applique donc $\lambda \cap \lambda'$ sur la partie réelle R^k de C^k ; donc :

$$\dim_r \lambda \cap \lambda' = k.$$

LEMME 2.3. - Le stabilisateur $St(\ell)$ de X^* dans $Sp(\ell)$ a les propriétés suivantes :

1°) Les éléments s de $St(\ell)$ se définissent comme suit :

$$s\,(x',p') = (x,p)$$

équivaut à :

(2.6) $$x = s_1\,x' \;,\; p = {}^t s_1^{-1}\,(p' + s_2 x')\;,$$

où : s_1 est un automorphisme arbitraire de X ;

$s_2 = {}^t s_2$ un morphisme symétrique arbitraire : $X \to X^*$.

2°) Cet élément s de $St(\ell)$ est la projection des deux éléments S de $Sp_2(\ell)$ définis par :

(2.7) $$(Sf)(x) = \sqrt{\text{dét}\, s_1^{-1}}\,\left[\, e^{\frac{\nu}{2}<x',\, s_2 x'>}\, f\,(x')\right]_{x' = s_1^{-1} x}$$

<u>Note</u> 2.1. - Nommons $St_2(\ell)$ le sous-groupe de $Sp_2(\ell)$ dont la projection sur $Sp(\ell)$ est $St(\ell)$.

Vu la Note 2.5 du § 1, $St_2(\ell)$ est l'ensemble des $S \in Sp_2(\ell)$ qui opèrent ponctuellement sur $\mathcal{S}(X)$: la valeur de Sf' en un point x de X ne dépend que de l'allure de f' en un point x' de X (en fait de la valeur de f' en x').

<u>Preuve de</u> 1°) . - Les éléments du stabilisateur de X^* dans le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel $Z(\ell)$ sont les applications $(x', p') \mapsto (x,p)$ définies par :

$$x = s_1\,x' \;,\; p = s_*\,(p' + s_2\,x')\;,$$

où s_1 et s_* sont des automorphismes de X et X^*, s_2 est un morphisme $X \to X^*$. Ces éléments appartiennent à $Sp(\ell)$ quand :

$$s_* = {}^t s_1^{-1}\;,\quad s_2 = {}^t s_2\,.$$

<u>Preuve de</u> 2°) . - La formule (2.7) définit un automorphisme S de $\mathcal{S}'(X)$, qui appartient à $Sp_2(\ell)$ vu la Note 2.4 du § 1 . On a évidemment :

$$x\,.\,(Sf) = S[\,f.\,s_1\,x'] \;,\; \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}(Sf) = S\,[\,{}^t s_1^{-1}\,(\frac{1}{\nu}\,\frac{\partial}{\partial x'} + s_2\,x')\,f\,]\;;$$

donc, pour tout a de $\mathfrak{a}$ (§ 1, n° 1) :

$$a^{\circ}\left(x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)(Sf) = S\, a^{\circ}\left(s_1 x', {}^t s_1^{-1}\left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x'} + s_2 x'\right)\right) f ;$$

c'est-à-dire, vu (2.6) :

$$S^{-1}\, a\, S \text{ est associé à } a^{\circ} \circ s ;$$

s est donc l'image naturelle dans $Sp(\ell)$ de $\pm S \in Sp_2(\ell)$.

3. LES REVÊTEMENTS DE $Sp(\ell)$ ET $\Lambda(\ell)$. - Les propriétés de ces revêtements résultent de celles de $\pi_1[Sp(\ell)]$ et $\pi_1[\Lambda(\ell)]$, qui s'obtiennent en étudiant $\pi_1[U(\ell)]$.

π_k désigne le $k^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie ; cf. N. Steenrod [16] ; précisons que N. Steenrod donne à l'expression "groupes symplectiques" un sens autre que le nôtre.

LEMME 3.1. - 1°) L'inclusion $O(\ell) \subset St(\ell)$ induit un isomorphisme :

$$(\forall\, k \in \mathbb{N}) \quad \pi_k[O(\ell)] \simeq \pi_k[St(\ell)] .$$

2°) L'inclusion $U(\ell) \subset Sp(\ell)$ induit un isomorphisme :

$$(\forall\, k \in \mathbb{N}) \quad \pi_k[U(\ell)] \simeq \pi_k[Sp(\ell)] .$$

3°) Le morphisme

$$\pi_1[U(\ell)] \ni \gamma \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{d(\det u)}{\det u} \in \mathbb{Z} \tag{3.1}$$

est un isomorphisme naturel :

$$\pi_1[U(\ell)] \simeq \mathbb{Z} .$$

<u>Preuve de</u> 1°). - Les éléments s de $St(\ell)$ sont du type (2.6) ; ceux d'entre eux pour lesquels $s_2 = 0$ constituent un sous-groupe $GL(\ell)$ de $St(\ell)$; les inclusions

$$O(\ell) \subset GL(\ell) \subset St(\ell)$$

induisent des morphismes naturels

$$\pi_k[O(\ell)] \xrightarrow{i} \pi_k[GL(\ell)] \to \pi_k[St(\ell)],$$

dont le second est un isomorphisme, car

$$St(\ell) = GL(\ell) \times \mathbb{R}^n \text{ où } n = \frac{\ell(\ell+1)}{2}.$$

Il s'agit de prouver que i est un isomorphisme : or $GL(\ell)$ opère transitivement sur l'ensemble Q_+ des formes quadratiques définies positives sur X ; $O(\ell)$ est le stabilisateur de l'une telles ; donc

$$GL(\ell)\ /\ O(\ell) = Q_+ , \text{ où } Q_+ \text{ est convexe ;}$$

l'exactitude de la suite d'homotopie de cette fibration (cf. Steenrod [16], 17.3 , 17.4) prouve que i est bien un isomorphisme.

<u>Preuve de</u> 2°) . - Les inclusions

$$U(\ell) \subset Sp(\ell) \ ; \ St(\ell) \cap U(\ell) = O(\ell) \subset St(\ell)$$

définissent une application (cf Steenrod [16] , 17.5) de la fibration

$$U(\ell)\ /\ O(\ell) = \Lambda(\ell) \text{ dans } Sp(\ell)\ /\ St(\ell) = \Lambda(\ell) \ ;$$

sa restriction à $\Lambda(\ell)$ est l'identité . Cette application induit un morphisme des suites d'homotopie de ces deux fibrations (cf. Steenrod [16] , 17.3 , 17.11 , 17.5)

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_{k+1}[\Lambda(\ell)] & \xrightarrow{\Delta'} & \pi_k[O(\ell)] & \xrightarrow{i'} & \pi_k[U(\ell)] & \xrightarrow{p'} & \pi_k[\Lambda(\ell)] & \dots & \pi_o[O(\ell)] \\
\downarrow i_o & & \downarrow i_o & & \downarrow i_1 & & \downarrow i_o & & \downarrow i_o \\
\pi_{k+1}[\Lambda(\ell)] & \xrightarrow{\Delta} & \pi_k[St(\ell)] & \xrightarrow{i} & \pi_k[Sp(\ell)] & \xrightarrow{p} & \pi_k[\Lambda(\ell)] & \dots & \pi_o[St(\ell)]
\end{array}$$

Ce diagramme, dont les lignes sont exactes, est donc commutatif ; les i_o sont des isomorphismes ; il en résulte que les i_1 sont nécessairement des isomorphismes

<u>Preuve de</u> 3°) . - (Steenrod [16]25.2 prouve, par une autre voie, une partie de 3°))

Notons dét (c-à-d. déterminant) l'épimorphisme :

(3.2) $$U(\ell) \ni u \mapsto \text{dét}\, u \in S^1 \subset \dot{C};$$

notons $SU(\ell)$ son noyau : $u \in SU(\ell)$ quand dét $u = 1$; on a donc :

$$U(\ell) / SU(\ell) = S^1 ;$$

(3.2) est la projection naturelle de $U(\ell)$ sur S^1 ; la suite d'homotopie de cette fibration contient la suivante, qui est donc exacte :

(3.3) $$\pi_1[SU(\ell)] \xrightarrow{i} \pi_1[U(\ell)] \xrightarrow{p} \pi_1[S^1] \xrightarrow{\Delta} \pi_o[SU(\ell)] ;$$

p est induit par le morphisme (3.2) ; $SU(\ell)$ est connexe, donc $\pi_o[SU(\ell)]$ est trivial ; déterminons $\pi_1[SU(\ell)]$.

$SU(\ell)$ opère transitivement sur la sphère :

$$S^{2\ell-1} : |z| = 1 ;$$

le stabilisateur du vecteur $(1,0,\ldots,0)$ de C^ℓ est $SU(\ell-1)$; donc

$$SU(\ell) / SU(\ell-1) = S^{2\ell-1};$$

la suite d'homotopie de cette fibration contient la suivante, qui est donc exacte :

$$\pi_2[S^{2\ell-1}] \xrightarrow{\Delta'} \pi_1[SU(\ell-1)] \xrightarrow{i'} \pi_1[SU(\ell)] \xrightarrow{p'} \pi_1[S^{2\ell-1}],$$

où (cf. Steenrod [16], 21.2) $\pi_1[S^{2\ell-1}]$ et $\pi_2[S^{2\ell-1}]$ sont triviaux pour $\ell \geqq 2$; donc i' est un isomorphisme ; or $\pi_1[SU(1)]$ est trivial, car $SU(1)$ est trivial ; donc :

(3.4) $$\pi_1[SU(\ell)] \text{ est trivial.}$$

Puisque, dans la suite exacte (3.3), $\pi_1[SU(\ell)]$ et $\pi_o[SU(\ell)]$ sont triviaux, p est un isomorphisme.

Or

$$\pi_1[S^1] \ni \Gamma \to \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z} \in \mathbf{Z}$$

est un isomorphisme .

La composition de p, qui est induit par (3.2), et de cet isomorphisme est un isomorphisme $\pi_1[U(\ell)] \to \mathbf{Z}$, qui est évidemment défini par (3.1) .

LEMME 3.2 1°) Le composé de l'isomorphisme naturel [cf. (2.3)]

$\pi_1[\Lambda(\ell)] \simeq \pi_1[W(\ell)]$ et du morphisme

$$\pi_1[W(\ell)] \ni \gamma \to \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d(\text{dét}\, w)}{\text{dét}\, w} \in \mathbf{Z} \tag{3.5}$$

est un isomorphisme naturel (Arnold[1])

$$\pi_1[\Lambda(\ell)] \simeq \mathbf{Z} .$$

2°) La fibration $Sp(\ell)/St(\ell) = \Lambda(\ell)$ définit un monomorphisme

$$p : \mathbf{Z} \simeq \pi_1[Sp(\ell)] \to \pi_1[\Lambda(\ell)] \simeq \mathbf{Z} \tag{3.6}$$

qui est le produit par 2 des élements de $\mathbf{Z}$.

Preuve de 1°). - L'homéomorphisme naturel (2.3) permet de définir

$$\text{dét}\, \lambda = \text{dét}\, w \in S^1 ; \tag{3.7}$$

l'application

$$\Lambda(\ell) \ni \lambda \mapsto \text{dét}\, \lambda \in S^1 \tag{3.8}$$

est évidemment un épimorphisme. Vu (2.2), on a

$$\text{dét}\, \lambda = \text{dét}^2 u , \quad \text{si} \quad \lambda = u X^* ;$$

donc, pour tout $u \in U(\ell)$:

$$\text{dét}(u\lambda) = \text{dét}^2 u \,.\, \text{dét}\, \lambda . \tag{3.9}$$

L'application (3.8) définit donc une fibration, dont $U(\ell)$ permute les fibres ; c'est :

$$\Lambda(\ell) / S\Lambda(\ell) = S^1 ,$$

en notant $S\Lambda(\ell)$ la variété de $\Lambda(\ell)$ définie par l'équation :

$$S\Lambda(\ell) : \text{dét}\, w = 1 .$$

L'exactitude de la suite d'homotopie de cette fibration prouve l'exactitude de la suite :

(3.10) $$\pi_1 [S \wedge (\ell)] \xrightarrow{i} \pi_1 [\wedge (\ell)] \xrightarrow{p} \pi_1 [S^1] .$$

Puisque

$$p : \pi_1 [\wedge (\ell)] \to \pi_1 [S^1]$$

est induit par

$$\text{dét} : W (\ell) \to S^1 ,$$

p est un épimorphisme.

Déterminons $\pi_1 [S \wedge (\ell)]$; $S\,U (\ell)$ opère transitivement sur $S \wedge (\ell)$; $\overset{*}{X} \in S \wedge (\ell)$; le stabilisateur de $\overset{*}{X}$ dans $S\,U(\ell)$ est $S\,O (\ell)$, composante connexe de l'élément neutre de $O (\ell)$; nous avons donc la fibration

$$S\,U (\ell) / S\,O (\ell) = S \wedge (\ell) ;$$

l'exactitude de sa suite d'homotopie implique celle de la suite :

$$\pi_1 [S\,U (\ell)] \xrightarrow{p'} \pi_1 [S \wedge (\ell)] \xrightarrow{\Delta'} \pi_0 [S\,O (\ell)] ,$$

où $\pi_1 [S\,U (\ell)]$ et $\pi_0 [S\,O (\ell)]$ sont triviaux, vu (3.4) et le fait que $S\,O(\ell)$ est connexe ; donc $\pi_1 [S \wedge (\ell)]$ est trivial ; dans (3.10) p est donc un isomorphisme .

Il est induit par l'application (3.8) . En la composant avec l'isomorphisme

$$\pi_1 [S^1] \ni \Gamma \to \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z} \in \mathbf{Z},$$

nous obtenons un isomorphisme $\pi_1 [\wedge(\ell)] \to \mathbf{Z}$, défini par (3.5).

<u>Preuve de</u> 2°) . - Dans (3.6) , l'isomorphisme $Z \simeq \pi_1 [Sp(\ell)]$ est le composé des isomorphismes définis par le 2°) et le 3°) du lemme 3.1 ; l'isomorphisme $\pi_1 [\wedge (\ell)] \simeq \mathbb{Z}$ est le composé de l'isomorphisme (3.5) et de celui qu'induit l'homéomorphisme de $\wedge (\ell)$ et $W (\ell)$. Prouver le 2°) du lemme 3.2 , c'est donc prouver ceci :

La fibration $U(\ell) / O(\ell) = W(\ell)$ induit un morphisme

$$p : \mathbb{Z} \simeq \pi_1 [U(\ell)] \to \pi_1 [W(\ell)] \simeq \mathbb{Z} \tag{3.11}$$

qui est le produit par 2 des éléments de $\mathbb{Z}$.

Cette fibration est définie par l'application

$U(\ell) \ni u \mapsto w = u\, {}^t u$, qui vérifie $\det w = (\det u)^2$.

Puisque les isomorphismes figurant dans (3.11) sont définis par (3.1) et (3.5), nous avons donc

$$p : \mathbb{Z} \ni \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d(\text{dét}\, u)}{\text{dét}\, u} \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d(\text{dét}\, u)^2}{(\text{dét}\, u)^2} \in \mathbb{Z} ;$$

ce morphisme $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est évidemment la multiplication par 2 .

Les deux lemmes précédents ont pour conséquence immédiate le théorème suivant, qui est évidemment indépendant de la structure hermitienne de $Z(\ell)$ employée ci dessus :

Définition 3. - α et β seront les générateurs de $\pi_1 [Sp(\ell)]$ et $\pi_1 [\Lambda(\ell)]$ d'images naturelles 1 dans $\mathbb{Z}$.

THEOREME 3 . - 1°) $Sp(\ell)$ a un revêtement unique, $Sp_q(\ell)$, d'ordre q ($q = 1, 2, \ldots, \infty$) [i. e. : dont le nombre de points ayant même projection sur $Sp(\ell)$ est q] ; α opère sur $Sp_q(\ell)$; α^r n'opère identiquement sur $Sp_q(\ell)$ que si $r = 0 \bmod q$.

2°) $\Lambda(\ell)$ a un revêtement unique, $\Lambda_q(\ell)$, d'ordre q ; β opère sur $\Lambda_q(\ell)$; β^r n'opère identiquement sur $\Lambda_q(\ell)$ que si $r = 0 \bmod q$.

3°) $Sp_q(\ell)$ opère transitivement sur $\Lambda_{2q}(\ell)$,

$$(\alpha S_q)\lambda_{2q} = S_q(\beta^2 \lambda_{2q}) = \beta^2 (S_q \lambda_{2q}), \text{ où } \lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(\ell), S_q \in Sp_q(\ell). \tag{3.12}$$

<u>Exemple</u> 3.1. - $\Lambda_2(\ell)$ est l'ensemble des sous-espaces de $Z(\ell)$ lagrangiens, orientés (au sens d'Euclide), ayant la dimension ℓ ; $Sp(\ell)$ opère sur $\Lambda_2(\ell)$.

<u>Exemple</u> 3.2. - $Sp_2(\ell)$ opère sur $\Lambda_4(\ell)$: <u>ce résultat est essentiel</u> pour la théorie des développements asymptotiques (chap. II).

<u>Notations</u> 3. - s désignera la projection sur $Sp(\ell)$ de $S \in Sp_q(\ell)$;

λ .... $\Lambda(\ell)$ de $\lambda_q \in \Lambda_q$;

λ_2 .... $\Lambda_2(\ell)$ de $\lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(\ell)$;

e désignera l'élément neutre de $Sp(\ell)$; E celui de $Sp_q(\ell)$.

Nous choisirons un élément X^*_∞ de $\Lambda_\infty(\ell)$ se projetant en X^* sur $\Lambda(\ell)$; X^*_q désignera sa projection sur $\Lambda_q(\ell)$.

4. INDICES D'INERTIE. - <u>Définition de l'indice d'inertie</u> $\mathrm{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'')$ <u>d'un triplet</u> $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ <u>d'éléments de</u> $\Lambda(q)$, <u>deux à deux transverses</u>. On a :

$$\lambda \oplus \lambda' = \lambda' \oplus \lambda'' = \lambda'' \oplus \lambda = Z(\ell).$$

Les conditions

$$z \in \lambda, \; z' \in \lambda', \; z'' \in \lambda'', \; z + z' + z'' = 0 \tag{4.1}$$

définissent donc trois isomorphismes

$$\begin{tikzcd} & z \in \lambda \arrow[dr] & \\ \lambda'' \ni z'' \arrow[ur] & & z' \in \lambda' \arrow[ll] \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

dont le produit est l'identité. On a, vu (4.1) :

$$[z, z'] = [z', z''] = [z'', z] ; \tag{4.3}$$

ce nombre est la valeur d'une forme quadratique de $z \in \lambda$ (de $z' \in \lambda'$ ou de $z'' \in \lambda''$) ; les isomorphismes (4.2) transforment les unes en les autres ces formes, qui ont donc le même indice d'inertie ; il sera noté :

$$\text{Inert } (\lambda , \lambda' , \lambda'') .$$

LEMME

$$\lambda \ni z \mapsto [z , z'] \in \mathbb{R}$$

<u>est non dégénérée</u> (c'est-à-dire : n'a pas de valeur propre nulle).

<u>Preuve</u> . - Soit un second triplet

$$\zeta \in \lambda , \zeta' \in \lambda' , \zeta'' \in \lambda'' \text{ tel que } \zeta + \zeta' + \zeta'' = 0 ;$$

puisque λ , λ' et λ'' sont lagrangiens, la forme bilinéaire

$$(z , \zeta) \mapsto [z , \zeta'] = [\zeta' , z''] = [z'' , \zeta] = [\zeta , z'] = [z' , \zeta''] = [\zeta'' , z]$$

est symétrique et est donc la forme polaire de la forme quadratique

$$z \mapsto [z , z'] .$$

Si celle-ci était dégénérée, il existerait donc $z \neq 0$ tel que :

$$z \in \lambda , (\forall \zeta' \in \lambda') [z , \zeta'] = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$z \in \lambda \cap \lambda' ,$$

contrairement aux hypothèses.

Inert (. , . , .) a donc <u>les propriétés suivantes</u> :

(4.4) $\quad \text{Inert } (\lambda , \lambda' , \lambda'') = \text{Inert } (\lambda' , \lambda'' , \lambda) = \ell - \text{Inert } (\lambda , \lambda'' , \lambda').$

Inert (. , . , .), qui est défini quand ses arguments sont deux à deux transverses, est localement constant sur son domaine de définition .

(4.5) $\quad (\forall s \in Sp(\ell)) \ \text{Inert}(s\lambda , s\lambda' , s\lambda'') = \text{Inert}(\lambda , \lambda' , \lambda'') .$

Les formules (2 11) et (2.14) du Ch I, § 1 ont défini Inert (s , s' , s") pour

(4.6) $\quad s , s' , s'' \in Sp(\ell) \setminus \sum_{Sp} , \ s s' s'' = e ;$

entre ces deux indices d'inertie existe la relation suivante :

THEOREME 4.1. - Sous l'hypothèse (4.6), on a :

(4.7) $\quad \text{Inert } (s , s' , s'') = \text{Inert } (s X^* , X^* , s''^{-1} X^*) .$

Note 4.1. - La condition $s \in \sum_{Sp}$ équivaut à la suivante : $s X^*$ et X^* ne sont pas transverses.

Preuve. - Reprenons les notations du Ch I, § 1, n° 2, plus précisément celles du lemme 2.3, en notant :

$$s = s_A \, , \, s' = s_{A'} \, , \, s'' = s_{A''} \; ;$$

$$s_A : (x', p') \mapsto (x, p) \quad \text{signifie : } p = Px - {}^tLx' \, , \, p' = Lx - Qx' \; ;$$

$$s_{A''} : (x, p) \mapsto (x'', p'') \quad \text{signifie : } p'' = P''x'' - {}^tL''x \, , \, p = L''x'' - Q''x \, .$$

Les équations des sous-espaces

$$\lambda = sX^* \, , \, \lambda' = X^* \, , \, \lambda'' = s''^{-1} X^*$$

sont donc :

$$\lambda : p = Px \; ; \; \lambda' : x' = 0 \; ; \; \lambda'' : p'' = - Q''x'' \, .$$

La condition (4.1)

$$z = (x, p) \in \lambda \, , \, z'' = (x'', p'') \in \lambda'' \, , \, z + z'' \in \lambda'$$

s'écrit :

$$z = (x, Px) \, , \, z'' = (-x, Q''x) \, .$$

D'où :

$$[z'', z] = \langle (P + Q'')x, x \rangle \; ;$$

donc, vu la définition (2.14) du § 1 :

$$\text{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'') = \text{Inert}(P + Q'') = \text{Inert}_x (A + A' + A'') = \text{Inert}(s, s', s'').$$

Les deux lemmes que voici expriment l'indice d'inertie (Inert) au moyen de l'indice de Kronecker (K.I.) ; lorsque le n° 5 aura défini l'indice de Maslov (m) au moyen de l'indice de Kronecker, le lemme 6.1 déduira de ces lemmes la relation entre les indices d'inertie et de Maslov.

LEMME 4.1. - $Sp(\ell)$ opère transitivement sur l'ensemble des couples d'éléments de $\Lambda(\ell)$ transverses.

Note 4.2. - Tout triplet d'éléments de $\Lambda(\ell)$ transverses 2 à 2 est donc du type :

$$(s\lambda\,, sX\,, sX^*)\ ;$$

rappelons que

$$\text{Inert}\,(s\lambda, sX\,, sX^*) = \text{Inert}\,(\lambda\,, X\,, X^*)\,.$$

Preuve. - Puisque $Sp(\ell)$ opère transitivement sur $\Lambda(\ell)$, il suffit de prouver que le stabilisateur de X^*, $St(\ell)$, opère transitivement sur l'ensemble des éléments de $\Lambda(\ell)$ transverses à X^*. L'élément s de $St(\ell)$ que définit (2.6) transforme

$$X : p' = 0 \quad \text{en} \quad sX : p = {}^t s_1^{-1} s_2 s_1^{-1} x\,,$$

où $s_2 : X \to X^*$ est symétrique ; or la condition que l'équation $p = s_3 x$ définisse un élément de $\Lambda(x)$ est évidemment que $s_3 : X \to X^*$ soit symétrique.

Notation 4.1. - Rappelons que $sp(u)$, spectre de $u \in U(\ell)$, est une 0-chaîne de S^1. Notons

(4.8) $$sp(\lambda) = sp(w)\,,$$

où w est l'image de λ par l'homéomorphisme naturel (2.3).

Notons $(\exp i\theta)$ le point de S^1 d'affixe $\exp i\theta\ (\theta \in \mathbb{R})$ et $\ell(\exp i\theta)$ la 0-chaîne constituée par ℓ fois ce point $(\ell \in \mathbb{Z})$; nous avons, par exemple:

(4.9) $$sp(X^*) = sp(e)\ ;\ sp(X) = sp(-e)\ ;\ sp(e) = \ell(1), sp(-e) = \ell(-1)\,.$$

Notons σ une 1-chaîne de S^1, $|\sigma|$ son support, $\partial\sigma$ son bord et K.I. l'indice de Kronecker (cf. Lefschetz, [9]).

Rappelons que K.I. $[\sigma_1, \sigma_0]$

- est défini quand σ_1 et σ_0 sont une 1-chaîne et une 0-chaîne de S^1 telles que $|\sigma_0| \cap |\partial\sigma_1| = \emptyset$,
- est nul si $|\sigma_0| \cap |\sigma_1| = \emptyset$,
- est linéaire en σ_0 et en σ_1,
- est égal à 1 si σ_0 est un point et σ_1 un arc d'orientation positive auquel ce point est intérieur ;
- on a : K.I.$[\sigma_1, \partial\sigma_1'] = -$K.I.$[\sigma_1', \partial\sigma_1]$.

LEMME 4.2. - Soient σ et σ^* deux 1-chaînes de S^1 telles que :

(4.10) $$\partial\sigma = sp(\lambda) - sp(X^*) \ , \ \partial\sigma^* = sp(\lambda) - sp(X) \ ,$$

(4.11) $\sigma - \sigma^*$ appartient au demi-cercle de S^1 où $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.

Alors :

(4.12) $$\mathrm{Inert}\,(\lambda, X, X^*) = K.I.\,[\sigma, (-1)] - K.I.\,[\sigma^*, (1)] \,.$$

Note 4.3. - Le lemme 5.1 emploiera cette décomposition de Inert.

Preuve. - Soient :

$$z = x + iy \in \lambda \ , z' \in X \ , \ z'' \in X^* \quad \text{tels que} \quad z + z' + z'' = 0 ; (x, y \in X) ;$$

évidemment

$$z' = -x \ , z'' = -iy ;$$

$$[z', z''] = \mathrm{Im}(z' \mid z'') = -(x \mid y) \,.$$

Soit w l'image naturelle de λ par (2.3) ; vu (2.5) :

$$y = i\,\frac{e+w}{e-w}\,x \qquad (e : \text{identité}) ;$$

puisque w est unitaire et symétrique, $i\,\frac{e+w}{e-w}$ est réel et symétrique. Donc $\mathrm{Inert}\,(\lambda, X, X^*)$ est l'indice d'inertie de la forme quadratique

$$X \ni x \mapsto -\left(x \,\middle|\, i\,\frac{e+w}{e-w}\,x\right) \in R \ ,$$

c'est-à-dire le nombre de valeurs propres > 0 de la matrice réelle symétrique $i\,\frac{e+w}{e-w}$.

Or le demi-axe réel positif est l'image par la transformation homographique

(4.13) $$S^1 \ni (\exp i\theta) \mapsto i\,\frac{1+\exp i\theta}{1-\exp i\theta} \in R$$

du demi-cercle de S^1 où $\mathrm{Im}\, z \leq 0$; orientons-le positivement : il constitue une chaîne χ de S^1 ; (4.13) transforme les valeurs propres de w en celles de $i\,\frac{e+w}{e-w}$; donc :

$$\mathrm{Inert}\,(\lambda, X, X^*) = K.I.\,[\chi, sp\,w] \,.$$

Soit τ une chaîne de S^1 de bord

$$\partial\tau = sp(w) - sp(ie) \,.$$

$\mathrm{Inert}\,(\lambda, X, X^*) = K.I.\,[\chi, \partial\tau] = -\,K.I[\tau, \partial\chi] = K.I.\,[\tau, (-1)] - K.I.\,[\tau, (1)]$.

Soient σ et σ^* des 1-chaînes de S^1 telles que :

$$\begin{cases} \partial(\sigma-\tau) = sp\,(ie) - sp\,(e)\,, \\ \sigma-\tau \text{ appartient à l'arc } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ de } S^1 = \{(\exp i\theta)\}\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial(\sigma^*-\tau) = sp\,(ie) - sp\,(-e)\,, \\ \sigma^*-\tau \text{ appartient à l'arc } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \text{ de } S^1. \end{cases}$$

Puisque

$$K.I.\,[\sigma-\tau, (-1)] = K.I.[\sigma^*-\tau, (1)] = 0\,,$$

l'expression précédente de Inert (λ, X, X^*) équivaut à (4.12) ; or σ et σ^* vérifient les conditions (4.10) et (4.11) ; ces conditions les déterminent, à l'addition près de 1-cycles γ et γ^* de S^1 tels que $\gamma - \gamma^*$ appartienne au demi-cercle de S^1 où $\mathrm{Im}\, z > 0$; γ et γ^* sont donc homologues ; d'où :

$$K.I.\,[\gamma, (-1)] = K.I.\,[\gamma^*, (1)]\,;$$

(4.12) vaut donc pour tout couple (σ, σ^*) vérifiant (4.10) et (4.11).

5. L'INDICE DE MASLOV m SUR $\Lambda^2_\infty(\ell)$. - Nous allons préciser la définition d'Arnold [1] ; nous emploierons la définition préliminaire que voici .

<u>Définition</u> 5.1. - <u>L'indice</u> M <u>sur</u> $\Lambda^4_\infty(\ell)$. - Notons $(\nu_\infty, \nu'_\infty)$ un élément de $\Lambda_\infty(\ell) \times \Lambda_\infty(\ell) = \Lambda^2_\infty(\ell)$, c'est-à-dire un couple d'éléments de $\Lambda_\infty(\ell)$; soient ν et $w(\nu)$ les images naturelles de ν_∞ dans $\Lambda(\ell)$ et $W(\ell)$: [cf.(2.3)] ; ν' et $w' = w(\nu'_\infty)$ celles de ν'_∞ . Vu le 3°) du lemme 2.1, la transversalité de ν et ν' s'énonce :

$$(1) \notin sp\,(w\,w'^{-1})\,;$$

$sp\,(w\,w'^{-1})$, que nous notons $sp\,(\nu, \nu')$ est une 0-chaîne de S^1 (cf. Lefschetz [9]) ; l'application

$$\Gamma \ni (\nu_\infty , \nu'_\infty) \mapsto sp(\nu , \nu')$$

applique l'arc Γ sur une 1-chaîne de S^1 notée $sp(\Gamma)$; si

$$\partial \Gamma = (\lambda_\infty , \lambda'_\infty) - (\mu_\infty , \mu'_\infty) .$$

alors :

$$\partial sp(\Gamma) = sp(\lambda , \lambda') - sp(\mu , \mu') .$$

Supposons :

(5.1) λ et λ' transverses ; μ et μ' transverses ;

alors, vu le 3°) du lemme 2.1 :

$$(1) \notin |\partial sp(\Gamma)| ;$$

K.I. $[sp(\Gamma), (1)]$ est donc défini ; c'est un entier ne dépendant que de la classe d'homotopie de Γ, c'est-à-dire de $\partial\Gamma$; nous le noterons :

(5.2) $$M[\lambda_\infty , \lambda'_\infty ; \mu_\infty , \mu'_\infty] = \text{K.I.}\,[sp(\Gamma), (1)] \in \mathbb{Z} .$$

<u>Note</u> 5.1. - Vu la Note 1, M est indépendant du choix de la structure hermitienne de $Z(\ell)$ qu'emploie sa définition .

<u>Propriétés de</u> M. - M est défini sous l'hypothèse (5.1) . M <u>est localement constant</u> sur son domaine de définition .

M possède la propriété <u>additive</u> évidente :

(5.3) $$M[\lambda_\infty , \lambda'_\infty ; \mu_\infty , \mu'_\infty] + M[\mu_\infty , \mu'_\infty ; \nu_\infty , \nu'_\infty] = M[\lambda_\infty , \lambda'_\infty ; \nu_\infty , \nu'_\infty] ,$$

qui implique

(5.4) $$M[\lambda_\infty , \lambda'_\infty ; \lambda_\infty , \lambda'_\infty] = 0 ;$$

M possède la propriété <u>d'invariance</u> :

(5.5) $$(\forall S \in Sp_\infty(\ell)) : M[S\lambda_\infty , S\lambda'_\infty ; \mu_\infty , \mu'_\infty] = M[\lambda_\infty , \lambda'_\infty ; \mu_\infty , \mu'_\infty] .$$

On a, β étant le générateur de $\pi_1[\Lambda(\ell)]$ (cf. Définition 3) :

(5.6) $$(\forall r , r' \in \mathbb{Z}) : M[\beta^r \lambda_\infty , \beta^{r'} \lambda'_\infty ; \mu_\infty , \mu'_\infty] = M[\lambda_\infty , \lambda'_\infty ; \mu_\infty , \mu'_\infty] + r - r' .$$

Preuve de (5.5) . - Sous l'hypothèse (5.1) , $s\lambda$ et $s\lambda'$ sont transverses, l'application

$$Sp_\infty(\ell) \ni S \longmapsto M[S\lambda_\infty, S\lambda'_\infty ; \mu_\infty, \mu'_\infty] \in \mathbb{Z}$$

est définie et localement constante ; elle est donc constante, puisque $Sp_\infty(\ell)$ est connexe.

Preuve de (5.6). - Choisissons l'arc Γ différentiable et tel que :

$$\partial\Gamma = (\beta^r \lambda_\infty , \beta^{r'} \lambda'_\infty ; \lambda_\infty , \lambda'_\infty) ;$$

on peut évidemment définir ℓ fonctions continues

$$\theta_j : \Gamma \ni (\nu_\infty, \nu'_\infty) \mapsto \theta_j (\nu_\infty, \nu'_\infty) \in \mathbb{R} \ (j = 1, \ldots, \ell)$$

telles que :

$$sp(\nu \ , \nu') = \sum_j (\exp i\theta_j) ; \ \theta_j (\beta^r \lambda_\infty , \beta^{r'} \lambda'_\infty) = \theta_j(\lambda_\infty , \lambda'_\infty) \bmod. 2\pi .$$

La définition (5.2) de M donne :

$$M[\beta^r\lambda_\infty , \beta^{r'}\lambda'_\infty ; \lambda_\infty , \lambda'_\infty] = \sum_j \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma d\theta_j = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma d \ (\sum_j \theta_j)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d \,\text{dét}\,(ww'^{-1})}{\text{dét}\,(ww'^{-1})} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\,(\text{dét}\,w)}{\text{dét}\,w} - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\,(\text{dét}\,w')}{\text{dét}\,w'} = r - r' ,$$

vu (3.5) et la Définition 3 ; d'où (5.6), vu la propriété additive (5.3) de M.

Pour retrouver l'hypothèse (4.11) du lemme 4.2, employons les définitions que voici :

Définition 5.2. - X_∞ est le point de $\Lambda_\infty(\ell)$ qui se projette en X sur $\Lambda(\ell)$ et qui peut être joint à X^*_∞ par un arc γ de $\Lambda_\infty(\ell)$ dont le spectre $sp(\gamma)$ appartient au demi-cercle de S^1 où $\mathrm{Im}(z) \geq 0$.

Définition 5.3. - L'indice de Maslov est la fonction m valant :

$$m(\lambda_\infty , \lambda'_\infty) = M(\lambda_\infty , \lambda'_\infty ; X^*_\infty , X_\infty) .$$

Elle permet d'énoncer comme suit le lemme 4.2 :

LEMME 5.1. - Pour tout triplet $\lambda_\infty, \lambda'_\infty, \lambda''_\infty$ d'éléments de $\Lambda_\infty(\ell)$ on a :

$$\text{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'') = m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) - m(\lambda_\infty, \lambda''_\infty) + m(\lambda'_\infty, \lambda''_\infty) . \tag{5.7}$$

Preuve . - Vu (5.6), le second membre de (5.7) ne dépend que de $(\lambda, \lambda', \lambda'')$; vu le lemme 4.1 et la propriété d'invariance (5.5) il suffit donc d'établir le cas particulier de (5.7) que voici :

$$\text{Inert}(\lambda, X, X^*) = m(\lambda_\infty, X_\infty) - m(\lambda_\infty, X^*_\infty) + m(X_\infty, X^*_\infty) . \tag{5.8}$$

La définition 5.3 de m et la propriété additive (5.3) de M donnent :

$$m(\lambda_\infty, X_\infty) = M[\lambda_\infty, X_\infty ; X^*_\infty, X_\infty] ;$$

$$m(\lambda_\infty, X^*_\infty) - m(X_\infty, X^*_\infty) = M[\lambda_\infty, X^*_\infty ; X_\infty, X^*_\infty] .$$

La définition 5.1 de ces deux valeurs de M emploie deux arcs Γ et Γ^* de $\Lambda^2(\ell)$ tels que :

$$\partial\Gamma = (\lambda_\infty, X_\infty) - (X^*_\infty, X_\infty) ; \partial\Gamma^* = (\lambda_\infty, X^*_\infty) - (X_\infty, X^*_\infty) ;$$

Choisissons ces arcs produits cartésiens :

$$\Gamma = \gamma \times X_\infty \quad , \Gamma^* = \gamma^* \times X^*_\infty ,$$

γ et γ^* étant donc des arcs de $\Lambda(\ell)$ tels que

$$\partial\gamma = \lambda_\infty - X^*_\infty \ , \partial\gamma^* = \lambda_\infty - X_\infty ;$$

nous avons :

$$\partial(\gamma - \gamma^*) = X_\infty - X^*_\infty ,$$

la définition 5.2 de X_∞ permettant de choisir γ et γ^* tels que : $sp(\gamma - \gamma^*)$ appartient au demi-cercle de S^1 où $\mathrm{Im}(z) \gtrless 0$.

Notons :

$$\sigma = sp(\gamma) \qquad , \sigma^* = sp(\gamma^*) .$$

Puisque l'homéomorphisme $w(.)$ que définit (2.3) a les valeurs :

$$w(X) = - e \qquad , w(X^*) = e ,$$

la définition 5.1 de M donne :

$$M[\lambda_\infty , X_\infty ; X^*_\infty , X_\infty] = KI[\sigma , (-1)] ,$$

$$M[\lambda_\infty , X^*_\infty ; X_\infty , X^*_\infty] = KI[\sigma^* , (1)]$$

La formule à prouver (5.8) est donc identique à la formule (4.12) , qui est valable , car $\sigma - \sigma^* = sp(\gamma - \gamma^*)$ vérifie la condition (4.11) .

LEMME 5.2 . - On a

$$m(\lambda_\infty , \lambda'_\infty) + m(\lambda'_\infty , \lambda_\infty) = \ell \tag{5.8}$$

Preuve . - On substitue dans (4.4) à Inert . son expression (5.7) .

Le lemme que voici complète le lemme 5.1 :

LEMME 5.3 . - Toute fonction :

$$n : (\lambda_q , \lambda'_q) \mapsto n(\lambda_q , \lambda'_q) ,$$

- définie pour $\lambda_q , \lambda'_q \in \Lambda_q(\ell)$, λ et λ' transverses ,
- à valeurs dans un groupe abélien,
- localement constante sur son domaine de définition ,
- telle que, pour $\lambda , \lambda' , \lambda''$ deux à deux transverses :

$$n(\lambda_q , \lambda'_q) - n(\lambda_q , \lambda''_q) + n(\lambda'_q , \lambda''_q) = 0 , \tag{5.9}$$

est identiquement nulle .

Preuve. - Vu (5.9) , n est constant au voisinage de tout couple (λ_q , λ'_q)

transverse ou non ; n est donc constant sur $\Lambda^2_q(\ell)$, qui est connexe ; vu (5.9) , sa valeur est 0 .

Voici prouvé le

THEOREME 5 . - 1°) L'indice de Maslov (Définitions 5.1 , 5.2 et 5.3) est la seule fonction

$$m : (\lambda_\infty , \lambda'_\infty) \mapsto m(\lambda_\infty , \lambda'_\infty) \in \mathbb{Z} ,$$

définie sur les couples transverses d'éléments de $\Lambda_\infty(\ell)$, localement constante et permettant de décomposer comme suit l'indice d'inertie :

(5.7) $$\mathrm{Inert}\ (\lambda , \lambda' , \lambda'') = m\ (\lambda_\infty , \lambda'_\infty) - m\ (\lambda_\infty , \lambda''_\infty) + m\ (\lambda'_\infty , \lambda''_\infty$$

2°) Cette fonction posséde les propriétés suivantes :

(5.8) $$m\ (\lambda_\infty , \lambda'_\infty) + m\ (\lambda'_\infty , \lambda_\infty) = \ell \ ;$$

(5.9) $$(\forall\ S \in Sp_\infty(\ell)) : m\ (S\lambda_\infty , S\lambda'_\infty) = m(\lambda_\infty , \lambda'_\infty) \ ;$$

(5.10) $$(\forall\ r , r' \in \mathbb{Z}) : m\ (\beta^r \lambda_\infty , \beta^{r'} \lambda'_\infty) = m\ (\lambda_\infty , \lambda'_\infty) + r - r' \ ;$$

(5.11) $$m\ (X^*_\infty , X_\infty) = 0 \ , \ m\ (X_\infty , X^*_\infty) = \ell \ ,$$

compte-tenu de la définition 5.2.

Preuve de 1°) . - Les lemmes 5.1 et 5.3

Preuve de (5.8) . - Le lemme 5.2

Preuve de (5.9) et (5.10). - La définition 5.3 de m , (5.5) et (5.6) .

Preuve de (5.11). - La définition 5.3 de m et (5.4) ; (5.8) .

Note 5.1 . - La formule (5.7) implique évidemment ceci : si $\lambda , \lambda' , \lambda'' , \lambda'''$ sont quatre éléments de $\Lambda(\ell)$ deux à deux transverses, alors :

$$\mathrm{Inert}\ (\lambda, \lambda', \lambda'') - \mathrm{Inert}\ (\lambda , \lambda' , \lambda''') + \mathrm{Inert}\ (\lambda , \lambda'' , \lambda''') - \mathrm{Inert}\ (\lambda', \lambda'', \lambda''') = 0.$$

Note 5.2 . - Nommons base tout couple transverse $(\mu_\infty, \mu'_\infty) \in \Lambda^2_\infty(\ell)$ tel que

$$(\forall\, \lambda_\infty, \lambda'_\infty \in \Lambda_\infty(\ell)) : M[\lambda_\infty, \lambda'_\infty ; \mu_\infty, \mu'_\infty] = m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) .$$

Par exemple (X^*_∞, X_∞) est une base .

Vu la propriété additive (5.3) de M , la condition que $(\mu_\infty, \mu'_\infty)$ est une base s'énonce :

$$m(\mu_\infty, \mu'_\infty) = 0 .$$

6. LE SAUT DE L'INDICE DE MASLOV $m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty)$ EN UN POINT (λ, λ') OÙ $\dim \lambda \cap \lambda' = 1$. - Maslov [11] a défini son indice, à une constante additive près, par l'expression de son saut à la traversée de l'hypersurface $\Sigma_{2\,\Lambda_\infty}$ de $\Lambda^2_\infty(\ell)$ qui est l'ensemble des couples $(\lambda_\infty, \lambda'_\infty)$ d'éléments non transverses de $\Lambda(\ell)$. Le théorème 6 va expliciter l'expression de ce saut .

Etablissons d'abord certaines propriétés de $U(\ell)$; γ désignera un arc différentiable de $U(\ell)$:

$$\gamma : [-1, 1] \ni \theta \mapsto u(\theta) \in U(\ell) ; \; u_\theta = \frac{du}{d\theta} \neq 0 .$$

LEMME 6.1 . - Soit $\exp(i\,\psi(\theta))$ une valeur propre simple de $u(\theta)$ et $z(\theta)$ un vecteur propre correspondant ; alors :

$$\|z(\theta)\|^2 \psi_\theta = \left(\frac{1}{i}\, u^{-1}(\theta)\, u_\theta\, z(\theta) \mid z(\theta)\right) \tag{6.1}$$

Note 6.1 . - Rappelons que si U est un groupe de Lie, d'élément u , de transformations infinitésimales X_k et de formes de Maurer-Cartan ω_k , alors $u^{-1}du$ (donc, en particulier, $u^{-1}u_\theta$) a l'expression ;

$$u^{-1}du = \sum_k \omega_k(u, du)\, X_k ;$$

voir : E Cartan [4].

Note 6.2. - Puisque $U(\ell)$ est le groupe unitaire,

$\frac{1}{i} u^{-1} (\theta)\, u_\theta$ est une $\ell \times \ell$ matrice self-adjointe arbitraire, caractérisant le vecteur u_θ tangent en $u(\theta)$ à $U(\ell)$.

Preuve . - Tant que $\exp(i\,\psi(\theta))$ est valeur propre simple, $\psi(\theta)$ est une fonction différentiable de θ et le vecteur $z(\theta)$, qui est défini à un facteur scalaire près, peut être choisi fonction différentiable de θ ; alors la différentiation de la relation

$$u(\theta)\, z(\theta) = z(\theta) \exp(i\,\psi(\theta))$$

donne, après multiplication à gauche par $\frac{1}{i} u^{-1}(\theta)$:

$$\frac{1}{i} u^{-1} u_\theta\, z + \frac{1}{i} z_\theta = \frac{1}{i} u^{-1} z_\theta \exp(i\,\psi) + z(\theta)\, \psi_\theta .$$

Le produit scalaire par z élimine z_θ et donne (6.1) , car, puisque u est unitaire ,

$$(u^{-1} z_\theta \exp(i\psi) | z) = (z_\theta | \exp(-i\psi)\, u z) = (z_\theta | z) .$$

Notons Σ_U l'ensemble des $u \in U(\ell)$ tels que $(1) \in sp(u)$; rappelons que (1) désigne le point de $S^1 \subset \mathbb{C}$ d'affixe 1.

Le lemme suivant a pour seul rôle d'interpréter géométriquement une condition qu'emploiera le lemme 6.3.

LEMME 6.2. - Si $u(o) \in \Sigma_U$, si (1) est valeur simple de $sp\, u(o)$, si $z(o)$ est un vecteur propre correspondant, alors la condition que u_θ définisse une direction tangente à Σ_U en $u(o)$ s'énonce :

$$(6.2) \qquad \left(\frac{1}{i} u^{-1}(o)\, u_\theta(o)\, z(o) \mid z(o) \right) = 0 .$$

Preuve . - $u(o)$ est point régulier de Σ_U ; vu le lemme 6.1, toute direction tangente en $u(o)$ à Σ_U vérifie (6.2); l'hyperplan des directions vérifiant (6.2) contient donc le plan tangent en $u(o)$ à Σ_U ; or Σ_U est une hypersurface de $U(\ell)$.

LEMME 6.3. - Si l'arc γ de $U(\ell)$ coupe Σ_U au seul point $u(o)$, si la valeur propre 1 de $u(o)$ est simple et si le vecteur propre correspondant $z(o)$ vérifie

$$\left(\frac{1}{i} u^{-1}(o)\, u_\theta\, z(o) \mid z(o) \right) \neq 0 ,$$

(c-à-d. si γ n'est pas tangent à Σ_U) , alors :

$$\text{K.I.}\,[\,sp\,\gamma\,,(1)\,] = \text{signe}\left(\frac{1}{i} u^{-1}(o)\, u_\theta\, z(o) \mid z(o) \right) . \tag{6.3}$$

<u>Preuve</u> . - Soit $\exp(i\,\psi(\theta))$ la valeur propre de $u(\theta)$ voisine de 1 ; évidemment :

$$\text{K.I.}\,[\,sp\,\gamma\,,(1)] = \text{signe}\ \psi_\theta(o) \quad \text{si} \quad \psi_\theta(o) \neq 0 ;$$

(6.3) résulte donc de (6.1) .

<u>Notations</u> . - Σ_{Λ^2} désigne l'ensemble des (λ , λ') non transverses :

$$\Sigma_{\Lambda^2} \subset \Lambda^2(\ell) ;$$

Γ désigne un arc différentiable de $\Lambda^2(\ell)$:

$$[-1 , 1] \ni \theta \mapsto (\lambda(\theta) , \lambda'(\theta)) \in \Lambda^2(\ell) .$$

$w(\theta)$ et $w'(\theta)$ désignent les images naturelles dans $W(\ell)$ de $\lambda(\theta)$ et $\lambda'(\theta) \in \Lambda(\ell)$: voir (2.3) .

LEMME 6.4. - Si l'arc Γ de $\Lambda^2(\ell)$ coupe Σ_{Λ^2} au seul point $(\lambda(o) , \lambda'(o))$ et si

$$\dim \lambda(o) \cap \lambda'(o) = 1 ,\ z(o) \in \lambda(o) \cap \lambda'(o) ,$$

$$\left(\frac{1}{i} w_\theta\, w^{-1}(o)\, z(o) \mid z(o) \right) \neq \left(\frac{1}{i} w'_\theta\, w'^{-1}(o)\, z(o) \mid z(o) \right) ,$$

alors :

$$\text{K.I.}\,[\,sp\,\Gamma\,,(1)\,] = \text{signe}\left\{ \left(\frac{1}{i} w_\theta\, w^{-1}(o)\, z(o) \mid z(o) \right) - \left(\frac{1}{i} w'_\theta\, w'^{-1}(o)\, z(o) \mid z(o) \right) \right\} \tag{6.4}$$

Preuve. - L'arc Γ de $\Lambda^2(\ell)$ a pour image l'arc de $U(\ell)$

$$\gamma : [-1,1] \ni \theta \longmapsto u(\theta) = w(\theta)\, w'^{-1}(\theta) ;$$

par définition :

$$\text{K.I.}\,[sp\,\Gamma, (1)] = \text{K.I.}\,[sp\,\gamma, (1)] .$$

Vu le 3°) du lemme 2.1, γ coupe $\sum_U$ au seul point $\theta = o$, 1 est valeur simple de $sp\,u(o)$; vu le 2°) du lemme 2.1 :

$$z(o) + w(o)\,\overline{z(o)} = o , \quad z(o) + w'(o)\,\overline{z(o)} = o ;$$

donc :

$$z(o) = u(o)\, z(o) ;$$

or :

$$u^{-1} u_\theta = u^{-1} w_\theta w^{-1} u - w'_\theta w'^{-1} ;$$

donc, puisque u est unitaire :

$$(u^{-1}(o)\, u_\theta\, z(o) \mid z(o)) = (w_\theta w^{-1}(o)\; z(o) \mid z(o)) - (w'_\theta w'^{-1}(o) z(o) \mid z(o)) ;$$

donc, vu le lemme 6.3 :

$$\text{K.I.}\,[sp\,\gamma\,(1)] = \text{signe}\,\{ (\tfrac{1}{i} w_\theta\, w^{-1}(o) z(o) \mid z(o)) - (\tfrac{1}{i} w'_\theta\, w'^{-1}(o) z(o) \mid z(o)) \} .$$

D'où (6.4).

LEMME 6.5. - Soient

$$\theta \longmapsto \lambda(\theta) , \quad \theta \longmapsto z(\theta)$$

des applications différentiables de $[-1, 1]$ dans $\Lambda(\ell)$ et $Z(\ell)$, telles que :

$$z(\theta) \in \lambda(\theta) ;$$

alors :

$$(6.5) \qquad (\tfrac{1}{2i}\, w_\theta\, w^{-1} z \mid z) = [z_\theta , z(\theta)] .$$

Preuve. - Vu le 2°) du lemme 2.1 :

$$z + w\bar{z} = o \;;$$

donc :

$$z_\theta + w_\theta \bar{z} + w\bar{z}_\theta = o \;;$$

donc :

$$(z_\theta \mid z) - (w_\theta w^{-1} z \mid z) + (w\bar{z}_\theta \mid z) = o \;,$$

où :

$$(w\bar{z}_\theta \mid z) = (\bar{z}_\theta \mid w^{-1} z) = -(\bar{z}_\theta \mid \bar{z}) = -\overline{(z_\theta \mid z)} \;;$$

d'où (6.5), vu (1.1).

Le premier membre de (6.4) s'exprime au moyen de l'indice de Maslov, vu (5.2) et la déf. 5.3 ; le second membre de (6.4) s'exprime au moyen de la forme symplectique $[\cdot\,,\cdot]$, vu le lemme 6.5 ; d'où :

LEMME 6.6. - Avec les notations du lemme 6.4

(6.6) $$m(\lambda_\infty(1), \lambda'_\infty(1)) - m(\lambda_\infty(-1), \lambda'_\infty(-1)) =$$

$$\text{signe}\left\{\frac{d}{d\theta}[z(\theta), z'(\theta)]\right\}_{\theta=o} \qquad \text{si } \{\ldots\}_{\theta=o} \neq o$$

Ce lemme 6.6 a pour conséquence évidente le théorème suivant, qui permet d'établir le théorème 3.2 du § 3 :

THEOREME 6. - <u>Choisissons</u> $(\lambda_\infty, \lambda'_\infty)$ <u>voisin d'un point de</u> $\Sigma^2_{\Lambda_\infty}$ <u>où</u> $\dim \lambda \cap \lambda' = 1$. <u>Définissons deux applications différentiables</u>

(6.7) $$\lambda_\infty \mapsto z \in Z(\ell), \; \lambda'_\infty \mapsto z' \in Z(\ell)$$

<u>telles que</u> :

$$z \in \lambda \;;\; z' \in \lambda' \;;\; z = z' \in \lambda \cap \lambda' \quad \text{quand} \quad (\lambda_\infty ; \lambda'_\infty) \in \Sigma^2_{\Lambda_\infty} \;;$$

<u>la fonction</u>

$$(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) \mapsto [z, z'] \in R$$

<u>ne s'annule ~~que~~ sur</u> $\Sigma^2_{\Lambda_\infty}$ <u>et s'y annule une seule fois.</u>

<u>Alors il existe une constante</u> $c \in \mathbb{Z}$ <u>telle que</u> :

(6.8) $$m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) = c \quad \text{pour} \quad [z, z'] < 0 ,$$
$$= 1 + c \quad \text{pour} \quad [z, z'] > 0 .$$

7. L'INDICE DE MASLOV SUR $Sp_\infty(\ell)$; L'INERTIE MIXTE . - Soient

(7.1) $$S, S', S'' \in Sp_\infty(\ell) \setminus \sum_{Sp_\infty} \quad \text{tels que} \quad S\,S'\,S'' = E \quad (\text{élément neutre}) ;$$

soient s, s', s'' leurs projections sur $Sp(\ell)$. La formule (4.7) du théorème 4.1, qui relie les définitions de l'inertie sur $\wedge(\ell)$ et $Sp(\ell)$, et la formule (5.7) du théorème 5, qui relie l'inertie sur $\wedge(\ell)$ à l'indice de Maslov, donnent, vu la propriété d'invariance de l'indice de Maslov (5.9) :

$$\mathrm{Inert}(s, s', s'') = m(S X^*_\infty, X^*_\infty) - m(S'^{-1} X^*_\infty, X^*_\infty) + m(S'' X^*_\infty, X^*_\infty) .$$

Donnons à cette formule l'expression (7.3), grâce à la définition suivante :

<u>Définition</u> 7.1 : <u>L'indice de Maslov sur</u> $Sp_\infty(\ell)$. - Si $S \in Sp_\infty(\ell) \setminus \sum_{Sp_\infty}$, définissons :

(7.2) $$m(S) = m(S X^*_\infty, X^*_\infty) .$$

Cette définition a un sens, vu la Note 4.1 : $S \notin \sum_{Sp_\infty}$ équivaut à la condition que $S X^*$ et X^* sont transverses .

Complétons cette formule par le lemme, analogue au lemme 5.3 :

LEMME 7 . - Toute fonction

$$n : S \mapsto n(S)$$

- définie pour $S \in Sp_q(\ell) \setminus \sum_{Sp_q}$,
- à valeurs dans un groupe abélien ,
- localement constante sur son domaine de définition ,
- telle que :

$$n(S) - n(S'^{-1}) + n(S'') = 0 \quad \text{quand} \quad S\,S'\,S'' = E \;,$$

est identiquement nulle

Ce lemme, le théorème 5 et (3.12) donnent :

THEOREME 7.1. - 1°) L'indice de Maslov, que définit (7.2) , est la seule fonction

$$m : Sp_\infty(\ell) \setminus \Sigma_{Sp_\infty} \to \mathbb{Z} \;,$$

localement constante, permettant de décomposer comme suit l'indice d'inertie : sous l'hypothèse (7.1) ,

(7.3) $$\operatorname{Inert}(s, s', s'') = m(S) - m(S'^{-1}) + m(S'') \,.$$

2°) Cette fonction possède les propriétés suivantes :

(7.4) $$m(S) + m(S^{-1}) = \ell \;;$$

α étant le générateur de $\pi_1[Sp(\ell)]$ (Définition 3) ,

(7.5) $$m(\alpha^r S) = m(S) + 2r \,.$$

Définition 7.2 : L'inertie mixte . - Soient :

(7.6) $s \in Sp(\ell) \setminus \Sigma_{Sp}$; λ et $\lambda' \in \Lambda(\ell)$, transverses à X^* et tels que $\lambda = s\lambda'$;

l'inertie mixte est définie par la formule suivante, dont les deux derniers termes sont égaux vu l'invariance (4.5) de l'inertie :

(7.7) $$\operatorname{Inert}(s, \lambda, \lambda') = \operatorname{Inert}(sX^*, X^*, \lambda) = \operatorname{Inert}(X^*, s^{-1}X^*, \lambda') \,.$$

Evidemment :

THEOREME 7.2. - On a, sous l'hypothèse (7.6) :

(7.8) $$\operatorname{Inert}(s^{-1}, \lambda', \lambda) = \ell - \operatorname{Inert}(s, \lambda, \lambda') \;,$$

(7.9) $$\operatorname{Inert}(s, \lambda, \lambda') = m(S) - m(\lambda_\infty, X^*_\infty) + m(\lambda'_\infty, X^*_\infty) \;,$$

si $\lambda_\infty = S\lambda'_\infty$ et si s est la projection de S.

Exprimons l'inertie mixte par l'inertie d'une forme quadratique, comme l'a été Inert (s, s', s'') (§ 1, Définition 2.4) et Inert $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ (§ 2, n° 4) ; le n° 10 emploiera ce résultat.

THEOREME 7.3. - Sous l'hypothèse (7.6) on a $s = s_A$ (§ 1, n° 1) et l'équation de λ' est, vu (2.5) : $\lambda' : p' = \varphi'_{x'}(x')$ où φ' est une forme quadratique sur X.

Alors :

$$\text{(7.10)} \qquad \text{Inert}\,(s, \lambda, \lambda') = \text{Inert}\,(A(o, .) + \varphi'(.))$$

Preuve. - Vu (7.7) et la définition d'Inert $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ (§ 2, n° 4),

$$\text{Inert}\,(s, \lambda, \lambda') = \text{Inert}\,(X^*, s^{-1} X^*, \lambda')$$

est l'inertie de la forme quadratique

$$x' \mapsto [z, z']$$

pour $z = (x, p)$, $z' = (x', p')$,

$$\text{(7.11)} \qquad (x, p) \in X^*, \; s(x', p') \in X^*, (x+x', p+p') \in \lambda' ;$$

les relations (7.11) s'écrivent :

$$x = o, \; p' = -A_{x'}(o, x'), \; p+p' = \varphi'_{x'}(x+x') ;$$

d'où :

$$x = o, \; p = A_{x'}(o, x') + \varphi'_{x'}(x'),$$

ce qui implique :

$$[z, z'] = \langle p, x' \rangle = 2A(o, x') + 2\varphi'(x'),$$

donc (7.10).

8. INDICES DE MASLOV SUR $\Lambda_q(\ell)$ ET $Sp_q(\ell)$. - Notons λ_q et $\lambda'_q \in \Lambda_q(\ell)$, $S \in Sp_q(\ell)$ les projections de λ_∞ et $\lambda'_\infty \in \Lambda_\infty(\ell)$, $S_\infty \in Sp_\infty(\ell)$. Vu (5.10) et (7.5), où α et β sont les générateurs de $\pi_1[Sp(\ell)]$ et $\pi_1[\Lambda(\ell)]$, les relations

$$\text{(8.1)} \qquad m(\lambda_q, \lambda'_q) = m(\lambda_\infty, \lambda'_\infty) \text{ mod. } q ; \; m(S) = m(S_\infty) \text{ mod. } 2q$$

définissent des fonctions m ; elles seront encore appelées <u>indices de Maslov</u> ; elles ont évidemment les propriétés suivantes, vu les théorèmes 5 , 7.1 , 7.2 et les lemmes 5.3 et 7 :

THEOREME 8 . - 1°) <u>L'indice de Maslov que définit</u> $(8.1)_1$ <u>est la seule fonction</u>

$$m : (\lambda_q, \lambda'_q) \mapsto m(\lambda_q, \lambda'_q) \in \mathbb{Z}_q$$

<u>définie sur les couples transverses d'éléments de</u> $\Lambda_q(\ell)$, <u>localement constante et permettant de décomposer comme suit l'indice d'inertie</u> :

$$(8.2) \qquad \operatorname{Inert}(\lambda_q, \lambda'_q, \lambda''_q) = m(\lambda_q, \lambda'_q) - m(\lambda_q, \lambda''_q) + m(\lambda'_q, \lambda''_q) \bmod. q.$$

2°) <u>L'indice de Maslov que définit</u> $(8.1)_2$ <u>est la seule fonction</u>

$$m : Sp_q(\ell) \setminus \Sigma_{Sp_q} \to \mathbb{Z}_{2q}$$

<u>localement constante et permettant de décomposer comme suit l'indice d'inertie</u> :

$$(8.3) \qquad \operatorname{Inert}(s, s', s'') = m(S) - m(S'^{-1}) + m(S'') \bmod. 2q.$$

3°) <u>Ces fonctions possèdent les propriétés suivantes</u> :

$$(8.4) \qquad m(\lambda_q, \lambda'_q) + m(\lambda'_q, \lambda_q) = \ell \bmod. q \; ; \; m(S) + m(S^{-1}) = \ell \bmod. 2q \; ;$$

$$(8.5) \qquad \operatorname{Inert}(s, \lambda, \lambda') = m(S) - m(\lambda_{2q}, X^*_{2q}) + m(\lambda'_{2q}, X^*_{2q}) \bmod. 2q ,$$

<u>si</u> $S \in Sp_q, \lambda_{2q} = S\lambda'_{2q}$; rappelons que $Sp_q(\ell)$ opère sur $\Lambda_{2q}(\ell)$.

Vu le 3°) du théorème 2 du § 1 , le 2°) du théorème 8 identifie, pour $q = 2$:

i) l'indice de Maslov que la formule (2.15) du § 1 définit sur $Sp_2(\ell)$ mod. 4 ;

ii) l'indice de Maslov que (7.2) et (8.1) définissent sur $Sp_q(\ell)$ mod. $2q$.

<u>Définition</u> 8 . - Etant donné $A \in \mathbb{A}$ (Définition 1.2 du § 1) , définissons $S_A \in Sp_q(\ell) \setminus \Sigma_{Sp_q}$, cette définition s'identifiant à celle du § 1 pour $q = 2$.

Vu la formule (2.15) du § 1 :

$$m(s_A) = m(A) \mod. 2 .$$

Vu (7.5), il existe donc un seul élément de $Sp_q \setminus \Sigma_{Sp_q}$ que nous noterons S_A , tel que :

(8.6) $\qquad s_A$ soit sa projection sur $Sp(\ell)$; $m(S_A) = m(A) \mod. 2q$.

L'application :

$$\mathbb{A} \ni A \mapsto S_A \in Sp_q \setminus \Sigma_{Sp_q}$$

est évidemment surjective et , si $q = \infty$, bijective .

Si $q \neq \infty$, la condition

$$S_A = S_{A'}$$

équivaut à la suivante :

$$(\forall x, x' \in X) \quad A(x, x') = A'(x, x') \quad ; m(A) = m(A') \mod 2q .$$

9. VARIETES LAGRANGIENNES . - Une <u>variété lagrangienne</u> V de $Z(\ell)$ est une variété sur laquelle :

(9.1) $\qquad d < p , dx > = o$; c'-à-d. $\sum_j dp_j \wedge dx^j = o$; c'-à-d. $d[z, dz] = o$;

son plan tangent est lagrangien ; elle est donc de dimension $\leq \ell$; nous choisirons :

$$\dim V = \ell .$$

Notons $\check{V}$ le revêtement universel de V ; (9.1) signifie évidemment qu'existent des fonctions, définies à des constantes additives près ,

$$\varphi : \check{V} \to \mathbb{R} \; ; \; \psi : \check{V} \to \mathbb{R}$$

telles que :

(9.2) $\qquad d\varphi = < p , dx >$; $\psi(x,p) = \varphi(x,p) - \frac{1}{2} < p , x >$, $d\psi = \frac{1}{2}[z, dz]$;

φ est la <u>phase</u> de V ; ψ <u>sa phase lagrangienne</u>.

Le ℓ-plan $\lambda(z)$ tangent à V en $z = (x, p) \in V$ est évidemment lagrangien. Le contour apparent $\sum_V$ de V est l'ensemble des $z \in V$ tels que $\lambda(z)$ ne soit pas transverse à X^*. Sur $V \setminus \sum_V$ et sur ses ℓ-plans tangents, x peut servir de coordonnée locale ; les équations de V et de ses ℓ-plans tangents $\lambda(z)$ sont alors, vu (9.2) :

$$V : p = \varphi_x(x) \; ; \; \lambda(z) : dp_j = \sum_{k=1}^{\ell} \varphi_{x^j x^k} \, dx^k. \tag{9.3}$$

Tout élément de $Sp(\ell)$

$$s : Z(\ell) \ni z' \mapsto sz' = z \in Z(\ell)$$

transforme toute variété lagrangienne V' de $Z(\ell)$ en une variété lagrangienne V de $Z(\ell)$, dont la phase lagrangienne vaut :

$$\psi(z) = \psi'(z') + \text{const.} \quad \text{pour} \quad z = s\,z' \; ;$$

si $z = (x, p)$ et $z' = (x', p')$, les phases φ et φ' de V et V' sont donc liées par la relation

$$\varphi(x) - \frac{1}{2}\langle p, x\rangle = \varphi'(x') - \frac{1}{2}\langle p', x'\rangle + \text{const.} \; : \tag{9.4}$$

si $s = s_A \notin \sum_{Sp(\ell)}$, alors $p = A_x$, $p' = -A_{x'}$, et l'on a donc :

$$\varphi(x) = \varphi'(x') + A(x, x') + \text{const.} \; , \; p = \varphi_x = A_x \, , \; p' = \varphi'_{x'} = -A_{x'} \, . \tag{9.5}$$

LEMME 9. - Soit $s_A \in Sp(\ell) \setminus \sum_{Sp}$; soit $z' = (x', p') \in V' \setminus \sum_{V'}$ tel que

$$s_A z' = z = (x, p) \in V \setminus \sum_V \, , \text{ où } V = s_A V' .$$

Ces relations définissent évidemment un difféomorphisme $x' \mapsto x$ des coordonnées locales de V et V'. Son déterminant fonctionnel a l'expression :

$$\frac{d^{\ell} x}{d^{\ell} x'} = \frac{\text{Hess}_{x'} [A(x, x') + \varphi'(x')]}{\Delta^2(A)} \, . \tag{9.6}$$

(Dans le calcul de $\mathrm{Hess}_{x'}$, x et x' sont considérés comme indépendants)

Preuve . Vu § 1 , (1.11) et l'équation (9.5) de V' , on a :

$$p' = - A_{x'}(x, x') \quad , \quad p' = \varphi'_{x'}(x') .$$

Le difféomorphisme $x' \mapsto x$ vérifie donc

$$\varphi'_{x'}(x') + A_{x'}(x, x') = 0 ;$$

d'où (9.6) , puisque le § 1, n° 1 a noté

$$\Delta^2 (A) = \underset{jk}{\text{dét}} \left(- A_{x^j x'^k} \right) .$$

10. q - ORIENTATION . ($q = 1, 2, \dots, \infty$). - Les notions qu'a définies ce § 2 permettent d'apporter à la formule (9.6) un complément, qu'énonce le théorème 10 et qui sera essentiel .

Nommons q - orientation de $\lambda \in \Lambda(\ell)$ le choix de l'un des $\lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(\ell)$ de projection naturelle λ .

Notons V_q et nommons variété lagrangienne q - orientée la donnée d'une variété lagrangienne V et d'une application continue

$$V \ni z \mapsto \lambda_{2q}(z) \in \Lambda_{2q}(\ell)$$

qui, composée avec l'application naturelle

$$\Lambda_{2q}(\ell) \to \Lambda(\ell) ,$$

soit l'application

$$V \ni z \mapsto \lambda(z) \in \Lambda(\ell) , \text{ où } \lambda(z) \text{ est le } \ell\text{-plan tangent à } V \text{ en } z .$$

Tout élément de $Sp_q(\ell)$ transforme une variété lagrangienne q-orientée V_q en une autre.

Une q-orientation de V est caractérisée par les valeurs prises par la fonction localement constante :

$$V \setminus \Sigma_V \ni z \to m(X^*_{2q}, \lambda_{2q}) \in Z_{2q}.$$

Vu (5.10), un changement de cette q-orientation équivaut à l'addition à cette fonction m d'une constante $\in Z_{2q}$.

L'énoncé du théorème 10 sera facilité par la

<u>Définition</u> 10. - L'argument de $d^\ell x$ est défini, en un point de $V_q \setminus \Sigma_V$, dont le ℓ-plan tangent est $\lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(\ell)$, par la formule :

$$(10.1) \qquad \arg d^\ell x = \pi\, m(X^*_{2q}, \lambda_{2q}) \mod. 2q\pi.$$

<u>Par exemple</u>, vu (5.11) :

$$(10.2) \qquad \arg d^\ell x = o \quad \text{sur} \quad X_{2q}.$$

Soient :

$$S_A \in Sp_q(\ell) \setminus \Sigma_{Sp_q} \quad \text{(Définition 8)};$$

V'_q une variété lagrangienne q-orientée de $Z(\ell)$;

$$V_q = S_A\, V'_q.$$

Soient λ'_{2q} et λ_{2q} les plans-tangents à V'_q et V_q en z' et $z = s_A z'$. Dans la formule (8.5), où nous faisons $S = S_A$ et $s = s_A$, nous avons, vu (8.6) et la définition 1.2 du § 1 :

$$m(S) = m(A) = \frac{2}{\pi} \arg(\Delta(A));$$

vu le théorème 7.3 et l'équation (9.3) de λ' :

Inert $(s_A , \lambda , \lambda')$ est l'inertie de la matrice symétrique

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^j \partial x'^k} \left[A(x, x') + \varphi'(x') \right] \right) ;$$

vu la définition 2.3 du § 1 de arg. Hess., c'est donc :

$$\frac{1}{\pi} \arg \operatorname{Hess}_{x'} \left[A(x, x') + \varphi'(x') \right] .$$

La formule (8.5) s'écrit donc, vu (8.4) :

$$m(X^*_{2q}, \lambda_{2q}) - m(X^*_{2q}, \lambda'_{2q}) = \frac{1}{\pi} \arg \operatorname{Hess}_{x'} [A + \varphi'] - \frac{1}{\pi} \arg \Delta^2(A) \bmod. 2q .$$

D'où, vu (10.1), le

THEOREME 10. - Si V_q et V'_q sont deux variétés lagrangiennes q-orientées telles que

$$V_q = S_A V'_q , \text{ où } S_A \in Sp_q(\ell) \setminus \Sigma_{Sp_q} ,$$

alors, non seulement les deux membres de (9.6) sont égaux, mais aussi leurs arguments mod. $2q\pi$. (cf. Définition 10).

C'est le cas particulier : $q = 2$ de ce théorème que nous emploierons (cf. § 3, Corollaire 3).

§ 3. Espaces symplectiques

0. INTRODUCTION. - Le chapitre II emploiera les énoncés, en géométrie symplectique, des résultats précédents.

$Z(\ell)$ est muni d'une structure symplectique et, en outre, d'un repère particulier, constitué par un couple (X, X^*) de ℓ-plans lagrangiens transverses. Il importe d'énoncer des conclusions indépendantes de ce choix d'un repère particulier.

1. UN ESPACE SYMPLECTIQUE Z est constitué par $R^{2\ell}$ et une forme symplectique, c'est-à-dire bilinéaire, alternée, à valeurs réelles, non dégénérée :

$$[.,.] : R^{2\ell} \times R^{2\ell} \ni (z, z') \mapsto [z, z'] \in R .$$

On a donc :

$$[z, z'] = -[z', z] ;$$

$[z, z'] = o$ pour z donné et tout $z' \in R^{2\ell}$ seulement si $z = o$.

$Z(\ell)$ possède donc une structure symplectique ; l'isomorphie des structures symplectiques de Z et $Z(\ell)$ est évidente et a les conséquences suivantes.

Nommons lagrangiens les sous-espaces de Z sur lesquels $[.,.]$ s'annule identiquement ; leur dimension est $\leq \ell$.

Nommons grassmannienne lagrangienne $\Lambda(Z)$ de Z l'ensemble de ses ℓ-plans lagrangiens; $\Lambda(Z)$ est homéomorphe à $\Lambda(\ell)$ et possède donc un revêtement unique $\Lambda_q(Z)$ d'ordre $q \in \{1, 2, .., \infty\}$.

La projection de $\lambda_q \in \Lambda_q(Z)$ dans $\Lambda(Z)$ est notée λ. La définition suivante (cf. § 2, n°4) a un sens dans Z.

Définition. - Soient $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \Lambda(Z)$, deux à deux transverses. Inert $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ est l'indice d'inertie de la forme quadratique non dégénérée

(1.1) $$z \longmapsto [z , z'] = [z' , z''] = [z'' , z] ,$$

où $$z \in \lambda , z' \in \lambda' , z'' \in \lambda'' , z + z' + z'' = o.$$

Evidemment : ses valeurs appartiennent à $\{ o , 1 , .., \ell \}$:

(1.2) $$\mathrm{Inert}\,(\lambda , \lambda' , \lambda'') = \mathrm{Inert}\,(\lambda' , \lambda'' , \lambda) = \ell - \mathrm{Inert}\,(\lambda , \lambda'' , \lambda') .$$

Notons $\Sigma_{\Lambda_q^2} \subset \Lambda_q^2\,(Z)$ l'ensemble des couples d'éléments non transverses de $\Lambda_q\,(Z)$.

Vu le théorème 8 et (8.1) :

THEOREME 1. - <u>Pour chaque</u> $q \in \{ 1 , 2 , \dots , \infty \}$, <u>il existe une fonction unique,</u>

$$m : \Lambda_q^2\,(Z) \setminus \Sigma_{\Lambda_q^2} \to \mathbb{Z}_q ,$$

<u>appelée indice de Maslov, qui soit localement constante sur son domaine de définition et qui vérifie</u> :

(1.3) $$\mathrm{Inert}\,(\lambda , \lambda' , \lambda'') = m\,(\lambda_q , \lambda'_q) - m\,(\lambda_q , \lambda''_q) + m\,(\lambda'_q , \lambda''_q) \mod. q .$$

<u>Elle possède les propriétés suivantes</u> :

(1.4) $$m\,(\lambda_q , \lambda'_q) + m\,(\lambda'_q , \lambda_q) = \ell \quad \mod. q ;$$

(1.5) $$m\,(\lambda_q , \lambda'_q) = m\,(\lambda_\infty , \lambda'_\infty) \qquad \mod. q ;$$

Le théorème 6 du § 2 s'applique au saut de cet indice de Maslov à travers $\Sigma_{\Lambda_q^2}$.

Une variété lagrangienne V de Z est une variété de dimension ℓ sur laquelle

(1.6) $$d\,[z , dz] = o ,$$

c'est-à-dire, sur le revêtement universel $\check{V}$ de laquelle existe une fonction, appelée <u>phase lagrangienne</u> :

(1.7) $$\psi : \check{V} \to \mathbb{R} \quad \text{telle que} \quad d\,\psi = \frac{1}{2}\,[z , dz] ;$$

elle est définie à une constante additive près.

2. LES REPERES DE Z. – Un <u>repère</u> de Z est un isomorphisme

(2.1) $$R : Z \to Z(\ell)$$

respectant $[\cdot,\cdot]$. Si R et R' sont deux tels repères, on nomme $R\,R'^{-1}$ <u>changement de repère</u> :

(2.2) $$R\,R'^{-1} \in Sp(\ell)\,.$$

Evidemment, si $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \Lambda(Z)$, alors $R\lambda, R\lambda', R\lambda'' \in \Lambda(\ell)$ et

(2.3) $$\mathrm{Inert}(\lambda, \lambda', \lambda'') = \mathrm{Inert}(R\lambda, R\lambda', R\lambda'')\,.$$

Si V est une variété lagrangienne de Z, RV est une variété lagrangienne de $Z(\ell)$, dont la phase φ_R vaut :

(2.4) $$\varphi_R(z) = \psi(z) + \frac{1}{2}\langle p, x\rangle, \text{ où } Rz = (x, p) \in X \oplus X^* = Z(\ell)\,.$$

On nomme <u>contour apparent de</u> V <u>relativement au repère</u> R l'ensemble $\sum_R$ des points de V dont le ℓ-plan tangent n'est pas transverse à $R^{-1}X^*$.

Sur $V \setminus \sum_R$, x peut servir de coordonnée locale.

Vu le lemme 9 du § 2 :

THEOREME 2. – <u>Soient</u> x <u>et</u> x' <u>les coordonnées locales définies sur</u> $V \setminus (\sum_R \cup \sum_{R'})$ <u>par deux repères</u> R <u>et</u> R' <u>tels que</u> $R\,R'^{-1} \in Sp(\ell) \setminus \sum_{Sp}$; <u>il existe donc</u> A (§ 1, n° 2) <u>tel que</u> $s_A = R\,R'^{-1}$; <u>notons</u> $\varphi'(x') = \varphi_{R'}(z)$ <u>la phase de</u> $R'V$. <u>Alors le difféomorphisme local</u> $X \ni x' \mapsto x \in X$ <u>a pour déterminant fonctionnel</u>

(2.5) $$\frac{d^\ell x}{d^\ell x'} = \frac{\mathrm{Hess}_{x'}[A(x, x') + \varphi'(x')]}{\Delta^2(A)}\,.$$

(Dans le calcul de $\mathrm{Hess}_{x'}$, x et x' sont considérés comme indépendants)

<u>Note</u> 2. – Les repères que nous venons de définir ne permettent pas de repérer les q-orientations, si $q > 1$.

3. LES q - REPERES DE Z le permettent : chaque q - repère ($q \in \{1, 2, .., \infty\}$) est constitué par

i) un isomorphisme $j_R : Z \to Z(\ell)$ respectant $[\cdot, \cdot]$;

ii) un homéomorphisme $h_R : \Lambda_{2q}(Z) \to \Lambda_{2q}(\ell)$ ayant pour image naturelle l'homéomorphisme $\Lambda(Z) \to \Lambda(\ell)$ induit par j_R.

Si R et R' sont deux tels repères, le changement de repère $R R'^{-1}$ est donc constitué par :

i)
$$s = j_R \, j_{R'}^{-1} \in Sp(\ell) ;$$

ii) $H = h_R \, h_{R'}^{-1}$, homéomorphisme de $\Lambda_{2q}(\ell)$ ayant pour image naturelle l'homéomorphisme de $\Lambda_2(\ell)$ qu'induit s. (cf. § 2, exemple 3.1).

Pour définir H, connaissant s, il suffit de donner $H X^*_{2q} \in \Lambda_{2q}(\ell)$ de projection $s X^*_2 \in \Lambda_2(\ell)$

Il existe q éléments de $Sp_q(\ell)$ d'image $s \in Sp(\ell)$; ils transforment X^*_{2q} en les q éléments de $\Lambda_{2q}(\ell)$ d'image $s X^*_2 \in \Lambda_2(\ell)$, vu § 2, (3.12).

L'élément unique $S \in Sp_q(\ell)$, d'image $s \in Sp(\ell)$ et tel que $S X^*_{2q} = H X^*_{2q}$, induit donc l'homéomorphisme H de $\Lambda_{2q}(\ell)$. Il caractérise $R R'^{-1}$, que nous noterons donc S :

$$R R'^{-1} \in Sp_q(\ell). \tag{3.1}$$

R désignera indifféremment j_R ou h_R ; nous écrirons

$$R : Z \ni z \longmapsto R z = (x, p) \in X \oplus X^* = Z(\ell) ;$$

$$R : \Lambda_{2q}(Z) \ni \lambda_{2q} \longmapsto R \lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(\ell) .$$

Evidemment :

$$\forall \lambda_{2q}, \lambda'_{2q} \in \Lambda_{2q}(Z), m(\lambda_{2q}, \lambda'_{2q}) = m(R\lambda_{2q}, R\lambda'_{2q}) \mod. 2q . \tag{3.2}$$

R transforme une variété lagrangienne q - orientée V de Z en une autre de

$Z(\ell)$; si $\lambda_{2q} \in \Lambda_{2q}(Z)$ est le plan tangent à V en z , nous définirons :

$$m_R(z) = m(R^{-1} X^*_{2q}, \lambda_{2q}) \in \mathbb{Z}_{2q}. \tag{3.3}$$

x étant la coordonnée locale de V (q-orientée), définie par le q-repère R, nous définirons

$$\arg d^\ell x = \pi\, m_R(z) \mod. 2q\pi. \tag{3.4}$$

Exemple 3.1 . - Sur $R^{-1} X_{2q}$, $\arg d^\ell x = o \mod 2q\pi$, vu § 2 , (10.2) .

Le théorème 10 du § 2 permet évidemment de compléter comme suit le théorème 2.

THEOREME 3.1. - Dans l'énoncé du théorème 2, supposons que $V = V_q$ soit q-orientée et que R et R' soient des q-repères. Alors :

$$R R'^{-1} = S_A \in Sp_q(\ell) \tag{3.5}$$

et les arguments des deux membres de (2.5) sont égaux mod. $2q\pi$.

Rappelons que le § 1 a donné les définitions 1.2 et 2.3 de $\arg \Delta(A)$ et arg Hess ; vu le § 2, (8.6) :

$$m(A) = m(S_A) \mod 2q.$$

C'est le cas particulier suivant de ce théorème qu'emploiera le ch. II, § 1, preuve des théorèmes 4 , iii) :

COROLLAIRE 3 . - Si $q = 2$, la demi-mesure $[d^\ell x]^{\frac{1}{2}}$ de V_2, variété lagrangienne 2-orientée, est définie par :

$$\arg [d^\ell x]^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2}\, m_R(z) \mod 2\pi ; \tag{3.6}$$

on a :

$$[d^\ell x]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta(A)} \{\mathrm{Hess}_{x'} [A(x, x') + \varphi'(x')]\}^{\frac{1}{2}} [d^\ell x']^{\frac{1}{2}}. \tag{3.7}$$

Au voisinage d'un point de Σ_R où $\dim \lambda \cap R^{-1} X^* = 1$, $m_R(z)$ a l'expression suivante, qui résulte du théorème 7, § 2 :

THEOREME 3.2 . - Soit $\lambda(z)$ le ℓ-plan tangent en z à la variété lagrangienne

V ; $z \in \Sigma_R$ signifie :

$$\dim \lambda \cap R^{-1} X^* > 0 \ ;$$

restons au voisinage d'un point de Σ_R en lequel

$$\dim \lambda \cap R^{-1} X^* = 1 \ ;$$

la projection parallèle à X^* de $R\lambda(z)$ sur X est donc, pour $z \in \Sigma_R$, un hyperplan :

$$\sum_{j=1}^{\ell} c_j \, dx^j = 0 \ . \tag{3.8}$$

1°) Il existe alors une mesure régulière $\bar{\omega}$ de V telle que, pour $z \in \Sigma_R$, pour tout j et tout k :

$$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{j-1} \wedge dp_k \wedge dx^{j+1} \wedge \dots \wedge dx^{\ell} = c_j \, c_k \, \bar{\omega} \ . \tag{3.9}$$

2°) Si $V = V_q$ est q-orientée, il existe une constante $c \in Z_{2q}$ telle que :

$$(3.10) \quad \begin{aligned} m_R(z) &= c \mod 2q \ \text{pour} \ \frac{d^{\ell}x}{\bar{\omega}} < 0 \ , \\ m_R(z) &= 1 + c \mod 2q \ \text{pour} \ \frac{d^{\ell}x}{\bar{\omega}} > 0 \ . \end{aligned}$$

Preuve de 1°). - Les c_j figurant dans (3.8) ne sont pas tous nuls ; supposons $c_1 \neq 0$; donc sur V, en z :

$$dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{\ell} \neq 0 \ ; \ \exists k \ \text{tel que} \ dp_k \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{\ell} \neq 0 \ . \tag{3.11}$$

Puisque sur V : $\sum_j dp_j \wedge dx^j = 0$, on a, $\widehat{\ }$ supprimant le terme qu'il coiffe :

$$dp_1 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \widehat{dx_k} \dots \wedge dx^{\ell} + dp_k \wedge dx^k \wedge dx^2 \wedge \dots \widehat{dx^k} \dots \wedge dx^{\ell} = 0 \ ; \tag{3.12}$$

vu (3.8)

$$dx^1 = -\frac{c_k}{c_1} dx^k \ ; \qquad \text{mod.} \ (dx^2, \dots, \widehat{dx^k}, \dots, dx^{\ell}) \ ;$$

donc (3.12) s'écrit, en notant

$$\bar{\omega} = \frac{1}{c_1^2} \, dp_1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{\ell} :$$

$$c_1\, c_k\ \bar{\omega} = d p_k \wedge d x^2 \wedge \ldots \wedge d x^{\ell}, \tag{3.13}$$

c-à-d. (3.9) pour $j = 1$.

Vu (3.11), (3.13) implique :

$$\bar{\omega} \neq 0 \quad \text{sur} \quad V \quad \text{en} \quad z .$$

En employant au second membre de (3.13) l'expression

$$d x^j = - \frac{c_1}{c_j} d x^1 \quad \text{mod} \ (d x^2, \ldots, \widehat{d x^j} \ldots, d x^{\ell})$$

on obtient (3.9) pour $j > 1$ et $c_j \neq 0$. Si $j > 1$ et $c_j = 0$, alors les deux membres de (3.9) sont évidemment nuls.

<u>Preuve de</u> 2°). - Supposons $c_1 \neq 0$ en un point de $\sum_R$; près de ce point, on peut donc choisir pour coordonnées sur V de $z \in V$ les coordonnées $(p_1, x^2, \ldots, x^{\ell})$ de Rz dans $Z(\ell)$; sur V, $x^1, p_2, \ldots, p_{\ell}$ sont donc fonctions de $(p_1, x^2, \ldots, x^{\ell})$.

Soit $\zeta'(z)$ le vecteur de $\lambda(z)$ ayant pour coordonnées :

$$(d p_1 = 1, d x^2 = \ldots = d x^{\ell} = 0) ;$$

$R\,\zeta'(z)$ a donc dans $Z(\ell)$ les coordonnées :

$$\left(d x^1 = \frac{\partial x^1 (p_1, x^2, \ldots x^{\ell})}{\partial p_1}, d x^2 = 0, \ldots, d x^{\ell} = 0, d p_j = \frac{\partial p_j (p_1, x^2, \ldots x^{\ell})}{\partial p_1} \right)$$

Notons $\zeta(z)$ le vecteur de $R^{-1} X^*$, fonction de $z \in V$, tel que

$$R\,\zeta(z) = \left(d x = 0, d p = \frac{\partial p (p_1, x^2, \ldots, x^{\ell})}{\partial p_1} \right).$$

On a donc :

$$\zeta(z) = \zeta'(z) \quad \text{pour} \quad z \in \textstyle\sum_R ;$$

$$[\zeta(z), \zeta'(z)] = [R\zeta(z), R\zeta'(z)] = \frac{\partial x^1}{\partial p_1} = \frac{1}{c_1^2} \frac{d^{\ell} x}{\bar{\omega}} \tag{3.14}$$

car la relation évidente :

$$d x^1 \wedge \ldots \wedge d x^{\ell} = \frac{\partial x^1 (p_1, x^2, \ldots, x^{\ell})}{\partial p_1} d p_1 \wedge d x^2 \wedge \ldots \wedge d x^{\ell} \quad \text{sur } V$$

signifie, vu (3.9) :

$$\frac{\partial x^1}{\partial p_1} = \frac{d^{\ell} x}{c_1^{\,2}\, \varpi} .$$

Or, vu le théorème 6 du § 2, on a, pour $z \in V \setminus \Sigma_R$:

$$m_R(z) = m(R^{-1} X_\infty^*, \lambda_\infty(z)) = c \quad \text{pour} \quad [\zeta(z), \zeta'(z)] < 0,$$

$$= 1 + c \quad \text{pour} \quad [\zeta(z), \zeta'(z)] > 0,$$

c étant une constante $\in \mathbb{Z}$. D'où (3.10), vu (3.14).

4. GEOMETRIES q - SYMPLECTIQUES. - Evidemment, si R est un q - repère, le groupe

$$R^{-1} Sp_q(\ell) R = Sp_q(Z)$$

opère sur Z et ses variétés lagrangiennes en conservant leur q - orientation ; ce groupe est indépendant de R, vu (3.1).

Or F.Klein a défini une géométrie par la donnée d'une variété et d'un groupe de Lie opérant sur cette variété.

Chacun des groupes $Sp_q(Z)$, où $q \in \{1, 2, .., \infty\}$, définit donc sur Z une géométrie, qu'il convient de nommer géométrie q - symplectique.

CONCLUSION. - Le § 1 de ce chapitre I a défini une représentation unitaire du groupe $Sp_2(\ell)$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(X)$, où $\dim X = \ell$; grâce au § 2, le § 3 a substitué à l'étude de ce groupe celle du groupe isomorphe $Sp_2(Z)$ qui définit la géométrie 2 - symplectique de Z, où $\dim Z = 2\ell$; les § 2 et § 3 ont approfondi les propriétés de l'indice d'inertie et de l'indice de Maslov, que le § 1 avait déjà introduits. L'intérêt de ces diverses propriétés est qu'elles s'appliquent toutes simultanément à une même structure : l'analyse lagrangienne, que le chapitre II va définir.