RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR
PROGRAMME N° 25

JEAN LERAY

Chapitre II Fonctions lagrangiennes ; opérateurs différentiels lagrangiens

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1978, tome 25
« Analyse lagrangienne et mécanique quantique par Jean Leray », , exp. n° 4, p. 81-186
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1978__25__81_0>

CHAPITRE II .

FONCTIONS LAGRANGIENNES ; OPERATEURS DIFFERENTIELS LAGRANGIENS

INTRODUCTION . - Sommaire . - Le chapitre I n'étudie que des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux et des fonctions définies sur $X = \mathbb{R}^{\ell}$ tout entier.

Le but du chapitre II est d'étendre ces résultats : son § 2 se donne un espace symplectique Z , de dimension 2ℓ, muni d'une géométrie 2-symplectique ; il définit :

des fonctions lagrangiennes, sur lesquelles $Sp_2(Z)$ opère localement ;

des opérateurs lagrangiens, plus généraux que les opérateurs différentiels, transformés par $Sp_2(Z)$ comme le sont les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux (cf. Chap. I, § 1, théor. 3.1) .

Chaque fonction lagrangienne U est définie sur une variété lagrangienne V de Z ; dans chaque 2-repère R , U possède une expression U_R , qui est une fonction à valeurs formelles, définie sur $V \setminus \sum_R$. Dans chaque repère R , chaque opérateur lagrangien a possède une expression $a_R = a_R^+ (\nu , x , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x})$, qui est un opérateur différentiel formel d'ordre $\leq \infty$, opérant localement sur les U_R .

Un changement de repère

$$S = R R'^{-1} \in Sp_2(\ell) \qquad \text{(cf. Chap.I , §3 , n° 3)}$$

est un opérateur local , qui transforme

$$U_{R'} \text{ en } U_R = S\, U_{R'} ,\ a_{R'} \text{ en } a_R = S\, a_{R'} S^{-1} ,$$

donc

$$a_{R'} U_{R'} \text{ en } a_R U_R = S\, (a_{R'} U_{R'}) ;$$

il en résulte que les opérateurs lagrangiens opèrent sur les fonctions lagrangiennes .

Toutes les expressions a_R d'un même opérateur lagrangien a se déduisent aisément d'une même fonction formelle a° , définie sur Z .

En géométrie, un changement de repère laisse invariante (ou transforme linéairement) la valeur en un point d'une fonction scalaire (ou vectorielle) ; mais un caractère essentiel de l'analyse lagrangienne est le suivant : en chaque point z de V , le groupe $Sp_2(\ell)$ des changements de repère opère sur les germes des expressions U_R d'une même fonction lagrangienne U et non sur les valeurs en z de ces expressions ; $U_R = S\, U_{R'}$, peut avoir des singularités sur $\sum_R$, mais n'en a pas sur $\sum_{R'} \setminus \sum_{R'} \cap \sum_R$, alors que les singularités de $U_{R'}$ sont sur $\sum_{R'}$; les singularités des expressions U_R de U ne sont donc pas des singularités de U : elles peuvent être qualifiées de singularités apparentes ; leur nature peut être précisée, grâce à l'indice de Maslov.

Historique. - V.P. Maslov [10] a explicité ce caractère essentiel de l'analyse lagrangienne, bien qu'il n'ait étudié que les projections sur X des fonctions lagrangiennes, sans définir ni les fonctions lagrangiennes explicitement , ni les opérateurs lagrangiens. Il n'a employé qu'un sous-groupe de $Sp_2(\ell)$, dépendant d'un choix des coordonnées de X : le sous-groupe qu'engendrent les transformations de Fourier portant sur une seule coordonnée .

§ 1. Analyse formelle .

0. SOMMAIRE . - Le n° 1 définit et étudie les classes d'équivalence asymptotique des fonctions.

Le n° 2 définit les fonctions formelles ; les fonctions formelles définies sur X et à support compact sont des classes d'équivalence asymptotique. On peut donc (n° 3, 4 et 6) leur appliquer l'intégration, $Sp_2(\ell)$ et les opérateurs différentiels, dont la définition peut être généralisée. On en déduit (n° 4 et 6) que $Sp_2(\ell)$ et les opérateurs différentiels formels opèrent localement sur les fonctions formelles définies sur les variétés lagrangiennes V ou leurs revêtements $\check{V}$, ces fonctions formelles étant à support compact ou non. Le n° 5 étudie leur produit scalaire.

Les fonctions formelles sur $\check{V}$, qui ne sont plus des classes d'équivalence asymptotique, permettront au § 2 de définir les fonctions lagrangiennes .

1. L'ALGEBRE $C(X)$ DES CLASSES D'EQUIVALENCE ASYMPTOTIQUE . - L'algèbre $B(X)$. Soit $\mathcal{J}$ la demi-droite imaginaire pure de $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{J} = i\,[1, \infty[$$

$B(X)$ désignera l'algèbre des applications :

$$f : \mathcal{J} \times X \ni (\nu, x) \mapsto f(\nu, x) \in \mathbb{C},$$

dont toutes les dérivées en x sont continues en (ν, x) et vérifient :

$$(1.1) \qquad (\forall\, q, r \in \mathbb{N}^{\ell}) \quad \operatorname{Sup} \left| x^q \left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^r f(\nu, x) \right| < \infty .$$

$Sp_2(\ell)$ et les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux en $(\frac{1}{\nu}, x)$

$$a = a^+\left(\nu, x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right) = a^-\left(\nu, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$$

opèrent sur $B(X)$.

Si $\ell = \dim X = 0$, $B(X)$ est noté B : B est l'algèbre des applications continues bornées $\mathcal{J} \to \mathbb{C}$.

<u>L'algèbre</u> $C(X)$. - Soit $N \in \mathbf{R}_+$; soit $B_N(X)$ l'ensemble des $f \in B(X)$ telles que l'application

$$(\nu, x) \to \nu^N f(\nu, x)$$

appartienne encore à $B(X)$; évidemment $B_N(X)$ est un <u>idéal</u> de $B(X)$, qui décroît quand N croît ; $B_\infty(X) = \bigcap_{N \in \mathbf{R}_+} B_N(X)$ est donc un idéal de $B(X)$. Définissons :

$$C(X) = B(X) / B_\infty(X) \ ; \tag{1.2}$$

$C(X)$ est une algèbre sur le corps C ; ses éléments seront nommés : classes d'équivalence asymptotique ; la condition que les éléments f et f' de $B(X)$ appartiennent à une ~~même classe est que~~

$$(\forall N \in \mathbf{R}_+) \quad f - f' \in B_N(X) .$$

$$C_N(X) = B_N(X) / B_\infty(X) \tag{1.3}$$

est évidemment un idéal de $C(X)$, qui décroît quand N croît ;

$$\bigcap_{N \in \mathbf{R}_+} C_N(X) = \{0\} . \tag{1.4}$$

Soient f et $f' \in B(X)$, de classes $\tilde{f}$ et $\tilde{f}' \in C(X)$; pour exprimer les relations équivalentes

$$f - f' \in B_N(X) \ , \ \tilde{f} - \tilde{f}' \in C_N(X), \tag{1.5}$$

nous écrirons l'une quelconque des relations :

$$f = f' \mod \frac{1}{\nu^N} \ , \ \tilde{f} = \tilde{f}' \mod \frac{1}{\nu^N} \ , \ f' \in \tilde{f} \mod \frac{1}{\nu^N} . \tag{1.6}$$

Si $\ell = \dim X = 0$, $C(X)$ est noté C. Evidemment, $C(X)$ <u>est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions</u> $X \to C$.

Tout élément $\tilde{f}$ de $C(X)$ possède donc une <u>restriction</u> à toute partie de X et un support :

$$\operatorname{Supp}(\tilde{f}) \subset X . \tag{1.7}$$

Note 1 . - Soit une fonction holomorphe

$$F : C^J \to C \quad \text{telle que} \quad F(0) = 0 \ ;$$

$(\forall f_j \in \tilde{f}_j)$ les $F(f_1,\dots,f_J)$ sont dans une même classe notée $F(\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_J)$.

ainsi : $\forall \tilde{f}_j \in C(X) \quad (j = 1,\dots,J) \quad , \quad F(\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_J) \in C(X)$.

Soit une fonction holdérienne

$$F : C^J \to C \quad \text{telle que} \quad F(0) = 0 \ ;$$

on définit de même :

$$\forall \tilde{f}_j \in C \quad (j = 1,\dots,J) \quad , \quad F(\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_J) \in C .$$

Par exemple, si $\tilde{f} \in C$, alors $|\tilde{f}|$, $\mathrm{Re}\,\tilde{f}$, $\mathrm{Im}\,\tilde{f}$ sont définis. $\tilde{f} \in C$ est réel si $\mathrm{Im}\,\tilde{f} = 0$; alors $\tilde{f}_+$ (partie positive) et $\tilde{f}_-$ sont définis ; $\tilde{f}_- = 0$ s'écrit $0 \leqq \tilde{f}$ et définit un ordre partiel sur Re C, ensemble des éléments réels de C : soient $\tilde{f}$ et $\tilde{g} \in \mathrm{Re}\, C$; $\tilde{f} \geqq 0$ et $\tilde{g} \geqq 0$ impliquent : $\tilde{f} + \tilde{g} \geqq 0$, et $\tilde{f} \cdot \tilde{g} \geqq 0$; $\tilde{f}^2 \geqq 0$; $\tilde{f} \leqq 0$ (i.e. $-\tilde{f} \geqq 0$) exclut $\tilde{f} > 0$ (i.e. $0 \leqq \tilde{f} \neq 0$); mais $\tilde{f}$ peut ne vérifier ni $\tilde{f} \leqq 0$ ni $\tilde{f} > 0$.

Soit une fonction höldérienne (croissante)

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{telle que} \quad F(o) = 0 \ ;$$

$\forall \tilde{f} \in \mathrm{Re}\, C$, on a $F(\tilde{f}) \in \mathrm{Re}\, C$ (la relation d'ordre de Re C étant conservée).

En particulier, on a l'inégalité de Schwarz :

$$(\forall \tilde{f}_j , \tilde{g}_j \in C) \ : \ \Big|\sum_j \tilde{f}_j \tilde{g}_j\Big| \leqq \Big[\sum_j |\tilde{f}_j|^2\Big]^{\frac{1}{2}} \cdot \Big[\sum_j |\tilde{g}_j|^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

Les opérateurs différentiels, à coefficients polynomiaux en $(\frac{1}{\nu}, x)$

$$a = a^+\left(\nu, x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right) = a^-\left(\nu, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$$

sont évidemment des endomorphismes de $B(X)$, $B_N(X)$, $C(X)$, $C_N(X)$. Ils opèrent localement : la restriction de $a\tilde{f}$ à un ouvert Ω de X ne dépend que de la restriction de $\tilde{f}$ à cet ouvert ;

$$\mathrm{Supp}\,(a\,\tilde{f}) \subset \mathrm{Supp}\,(\tilde{f}) .$$

Comme au § 1, n° 3 , l'opérateur différentiel

$$a = a^{+}\left(\nu , x , \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right) = a^{-}\left(\nu , \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x} , x\right)$$

est <u>associé</u> au polynome a^{o} de $\left(\frac{1}{\nu} , x , p\right)$ valant

(1.8) $$a^{o}(\nu , x , p) = e^{-\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial p}>}\, a^{+}(\nu , x , p) = e^{\frac{1}{2\nu}<\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial p}>}\, a^{-}(\nu,x,p)$$

<u>L'intégration</u> opère sur $C(X)$: si $f \in B(X)$, la fonction

$$\nu \mapsto \int_X f(\nu , x)\, d^{\ell}x$$

appartient à B ; sa classe d'équivalence asymptotique, qui ne dépend que de la classe $\tilde{f}$ de f , sera notée :

$$\tilde{\int_X} \tilde{f}(\nu , x)\, d^{\ell}x \in C ;$$

$\tilde{\int}$ est nommée <u>intégrale asymptotique</u> .

Le <u>produit scalaire</u> $(.\,|\,.)$ est une forme sesquilinéaire sur $C(X) \times C(X)$, à valeurs dans C, définie par :

(1.9) $$(\tilde{f} , \tilde{g}) = \tilde{\int_X} f(\nu , x)\, \overline{g(\nu , x)}\, d^{\ell}x , \quad \text{où } f \in \tilde{f} \in C(X) , \ g \in \tilde{g} \in C(X) ,$$

$\overline{g(\nu , x)}$ est l'imaginaire conjuguée de $g(\nu , x)$, $\bar{\nu} = -\nu$. Donc :

$$(\tilde{g} , \tilde{f}) = \overline{(\tilde{f} , \tilde{g})} .$$

La <u>semi-norme</u> $\|.\|$ est la fonction $C(X) \to C$, à valeurs ≥ 0 , définie par

$$\|\tilde{f}\|^{2} = (\tilde{f} , \tilde{f}) ;$$

évidemment :

$$\|\tilde{f} + \tilde{g}\| \leq \|\tilde{f}\| + \|\tilde{g}\| \ , \ |(\tilde{f}, \tilde{g})| \leq \|\tilde{f}\| \, . \, \|\tilde{g}\| \quad \text{dans} \quad C.$$

D'autre part :

LEMME 1.1. - $Sp_2(\ell)$ constitue un groupe d'automorphismes de $C(X)$, qui sont unitaires, c'est-à-dire conservent normes et produits scalaires.

Preuve. - Soit $S_A \in Sp_2(\ell) \setminus \sum_{Sp_2}$; sa définition ch. I, § 1 par l'intégrale (1.10) prouve que S_A transforme la classe d'équivalence asymptotique $\tilde{f}'$ en la classe $S_A \tilde{f}'$ définie par l'intégrale asymptotique

$$(S_A \tilde{f}')(x) = \left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2} \Delta(A) \tilde{\int_X} e^{\nu A(x,x')} \tilde{f}'(x') \, d^\ell x' \ ;$$

cette formule a un sens, car le produit par $e^{\nu A}$, où νA est imaginaire pur, conserve évidemment l'équivalence asymptotique. Les S_A opèrent sur $C(X)$, en se composant comme ils le font quand ils opèrent sur $\mathcal{S}(X)$; or ils engendrent le groupe $Sp_2(\ell)$; ce groupe opère donc sur $C(X)$.

Puisque $Sp_2(\ell)$ est unitaire sur $\mathcal{S}(X)$, il est unitaire sur $C(X)$

Les théorèmes 3.1 et 3.2 du chap I, § 1 et leurs corollaires donnent :

LEMME 1.2. - Le transformé $S \, a \, S^{-1}$ de l'opérateur différentiel a par $S \in Sp_2(\ell)$ est l'opérateur différentiel associé à $a^{\circ} \circ s^{-1}$; s désigne l'image de S dans $Sp(\ell)$; s opère sur l'espace $Z(\ell)$ des vecteurs (x, p).

LEMME 1.3. - Pour que les opérateurs différentiels a et b soient adjoints, il faut et suffit que

$$b^{\circ}(\nu, x, p) = \overline{a^{\circ}(\nu, x, p)}.$$

En particulier : a est auto-adjoint quand $a^{\circ}(\nu, x, p)$ est à valeurs réelles pour

$$\nu \in \mathcal{J}, \ (x, p) \in Z(\ell).$$

S transforme des opérateurs adjoints en opérateurs adjoints.

2. NOMBRES FORMELS ; FONCTIONS FORMELLES . - Le théorème 2.2 reliera les définitions suivantes aux précédentes.

Un nombre formel est une série formelle

$$(2.1)\qquad u = u(\nu) = \sum_{j\in J}\ \sum_{r\in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{jr}}{\nu^r}\, e^{\nu\varphi_j}\,,$$

où : J est un ensemble fini ; $\alpha_{jr} \in C$, $\varphi_j \in R$, $\varphi_j \neq \varphi_k$ si $j \neq k$.

L'expression (2.1) d'un nombre formel est unique, par définition.

L'ensemble des nombres formels est une algèbre commutative F dont les règles d'addition et multiplication sont évidentes.

F est muni de la topologie que définit le sytème de voisinages $W(N,\epsilon)$ de son origine que voici :

$$N \in \mathbb{N}\,,\ \epsilon \in \dot{R}_+\ ,\ u \in W(N,\epsilon)\ \text{ signifie : } (\forall r \leq N)\ \sum_{j\in J} |\alpha_{jr}| < \epsilon.$$

Une fonction formelle sur X est une application $u : X \to F$ qui peut être mise sous la forme

$$(2.2)\qquad u = u(\nu) = \sum_{j\in J}\ \sum_{r\in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{jr}}{\nu^r}\, e^{\nu\varphi_j}$$

où : J est un ensemble fini ; $\alpha_{jr} : X \to C$; $\varphi_j : X \to R$;

α_{jr} et φ_j sont indéfiniment différentiables.

u peut être mis de plusieurs façons sous la forme (2.2) en les points au voisinage desquels deux des φ_j sont égaux. La valeur de $u(\nu)$ en x est notée :

$$(2.3)\qquad u(\nu,x) = \sum_{j\in J}\ \sum_{r\in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{jr}(x)}{\nu^r}\, e^{\nu\varphi_j(x)}.$$

$u(\nu)$ a un support ;

$$(2.4)\qquad \operatorname{Supp} u(\nu) \subset \overline{\bigcup_{j,r} \operatorname{Supp}\ \alpha_{jr}}.$$

L'ensemble $F(X)$ des fonctions formelles sur X est une algèbre sur F ; elle est commutative . L'ensemble des fonctions formelles sur X , à supports compacts, est une sous-algèbre $F_o(X)$ de $F(X)$.

Les φ_j sont nommés phases ; les $\alpha_j = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{jr}}{\nu^r}$ amplitudes .

L'ensemble F^o [resp. $F^o(X)$] des éléments de F [resp. $F(X)$] de phase nulle constitue une sous-algèbre de F (resp. $F(X)$).

Notons Z un espace symplectique, muni d'une géométrie 2-symplectique, V une variété lagrangienne de Z (ch I, § 3, n° 1 et 4) et $\check{V}$ le revêtement universel de V .

Une fonction formelle $\check{U}_R$ sur $\check{V}$ est constituée par :

i) un 2-repère R de Z;

ii) une application

$$\check{U}_R = \check{U}_R(\nu) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_r}{\nu^r} e^{\nu \varphi_R} : \check{V} \to F , \tag{2.5}$$

où : φ_R est la phase de RV (ch I , §3 , n° 2) ,

$\alpha_r : \check{V} \to \mathbb{C}$ est indéfiniment différentiable

Evidemment :

$$\operatorname{Supp} \check{U}_R = \overline{\bigcup_r \operatorname{Supp} \alpha_r} \subset \check{V} . \tag{2.6}$$

Pour R et V donnés, l'ensemble de ces fonctions formelles $\check{U}_R$ est un espace vectoriel sur F^o, noté $F(\check{V}, R)$; l'ensemble de celles de ces fonctions dont le support est compact est un sous espace $F_o(\check{V}, R)$.

$F(\check{V}, R)$ est muni de la topologie que définit le système de voisinages $W(K, p, r, \varepsilon)$ de l'origine que voici :

K est un compact de V ; $p, r \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \dot{\mathbb{R}}_+$;

$\check{U}_R \in W(K, p, r, \varepsilon)$ signifie que sur K les dérivées d'ordres $\leq p$ des α_s $(s \leq r)$ sont de modules $< \varepsilon$.

Σ_R désigne <u>le contour apparent</u> de V pour le repère R (ch I, §3, n° 2) ;

$\check{\Sigma}_R$ désigne le contour apparent de $\check{V}$, c'est-à-dire l'ensemble des points de $\check{V}$ se projetant sur $\check{\Sigma}_R$; nous déduirons les propriétés de $F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$ de celles de $F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$; celles-ci seront déduites de celles de $F_o(X)$ par le morphisme résultant de la composition des deux morphismes que vont définir respectivement les théorèmes 2.1 et 2.2.

<u>Notation</u>. - Si $z \in Z$ et $R\,z = (x, p)$, alors nous notons $x = R_X\,z$. Le composé de la projection naturelle $\check{V} \to V$ et de la restriction de R_X à V est noté $\check{R}_X : \check{V} \to X$.

THEOREME 2.1. - <u>Il existe un morphisme naturel</u>

$$\Pi_R : F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R) \to F_o(X). \tag{2.7}$$

<u>appelé projection ; il se définit comme suit :</u>

<u>soit</u> $\check{U}_R \in F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$; $u = \Pi_R\,\check{U}_R$ <u>vaut</u>

$$u(\nu, x) = \sum_{\check{z} \in \check{R}_X^{-1} x} \check{U}_R(\nu, \check{z}). \tag{2.8}$$

<u>Note</u> 2.1. - Π_R est un monomorphisme si aucune période de φ_R n'est nulle.

<u>Preuve</u>. - La formule (2.8) a un sens, car $\check{R}_X^{-1} x \cap \operatorname{Supp} \check{U}_R$ est un ensemble fini puisque $\operatorname{Supp} \check{U}_R$ est une partie compacte de $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$ et que $\check{R}_X$ est un homéomorphisme local $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \to X$.

THEOREME 2.2. - <u>Il existe un monomorphisme naturel de l'algèbre</u> $F_o(X)$ <u>dans l'algèbre</u> $C(X)$; <u>il permet la convention</u>

$$F_o(X) \subset C(X) ; \tag{2.9}$$

<u>il se définit comme suit.</u>

Soit

(2.10) $$u = \sum_{j\in J}\sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_{jr}}{\nu^r} e^{\nu\varphi_j} \in F_o(X) \ ;$$

notons

(2.11) $$u_N = \sum_{j\in J}\sum_{r=o}^{N-1} \frac{\alpha_{jr}}{\nu^r} e^{\nu\varphi_j} : \mathfrak{J}\times X \to \mathbb{C}$$

1°) ~~Il existe des fonctions~~ $f \in B(X)$ telles que $(\forall N) : f - u_N = 0 \mod \frac{1}{\nu^N}$.

2°) Toutes ces fonctions appartiennent à une même classe d'équivalence asymptotique $\tilde{f} \in C(X)$; l'application $u \mapsto \tilde{f}$ définit un morphisme naturel $F_o(X) \to C(X)$.

3°) Ce morphisme est un ~~monomorphisme~~.

Ce théorème résulte d'un raisonnement de type classique ; explicitons-le.

Preuve de 1°). - Il suffit de traiter le cas où (2.10) se réduit à :

(2.12) $$u(\nu, x) = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_r(x)}{\nu^r} e^{\nu\varphi(x)} .$$

Pour tout $g \in B(X)$, nul hors d'un compact de X, employons la norme :

(2.13) $$|g|_r = \operatorname{Sup.}_{\nu, x, s} \left| \left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^s g \right| \text{ où } \nu \in \mathfrak{J},\ x \in X,\ |s| \leq r .$$

Choisissons une suite croissante de nombres

$$0 \leq \mu_o \leq \mu_1 \leq \dots$$

telle que

(2.14) $$2^r |\alpha_r e^{\nu\varphi}|_r \leq \mu_r \ , \quad \lim_{r\to\infty} \mu_r = \infty \ ;$$

choissons une suite de fonctions continues $\epsilon_o, \epsilon_1, \dots : \mathfrak{J} \to \mathbb{R}_+$

telle que

(2.15) $$0 \leq \epsilon_r(\nu) \leq 1 \ ; \ \epsilon_r(\nu) = 0 \text{ pour } |\nu| \leq \mu_r \ ; \ \epsilon_r(\nu) = 1 \text{ pour } 2\mu_r \leq |\nu| \ ;$$

définissons alors :

(2.16) $$f(\nu, x) = \sum_{r=0}^{\infty} \epsilon_r(\nu) \frac{\alpha_r(x)}{\nu^r} e^{\nu\varphi(x)} ;$$

cette série converge, puisque, vu $(2.14)_2$ et $(2.15)_2$, sur tout intervalle borné de variation de ν, ses termes non nuls sont en nombre fini. Notons, conformément à (2.11) :

(2.17) $$u_N(\nu, x) = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{\alpha_r(x)}{\nu^r} e^{\nu\varphi(x)} ;$$

vu $(2.15)_3$, pour $2\mu_N \leqq |\nu|$:

$$|f(\nu) - u_{N+1}(\nu)|_N \leqq \sum_{r=N+1}^{\infty} \frac{\epsilon_r(\nu)}{|\nu|^r} |\alpha_r e^{\nu\varphi}|_r ;$$

or $(2.14)_1$, $(2.15)_1$ et $(2.15)_2$ impliquent :

$$\epsilon_r(\nu)\, 2^r |\alpha_r e^{\nu\varphi}|_r \leqq |\nu| ;$$

donc, pour $2\mu_N \leqq |\nu|$:

$$|f(\nu) - u_{N+1}(\nu)|_N \leqq \sum_{r=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^r |\nu|^{r-1}} = \frac{1}{2^N |\nu|^N} \frac{1}{2 - \frac{1}{|\nu|}} \leqq \frac{1}{|\nu|^N}$$

car $1 \leqq |\nu|$; donc :

(2.18) $$|f - u_N|_N = 0 \mod \frac{1}{\nu^N} .$$

Prouvons que, plus généralement :

(2.19) $$(\forall M, N \in \mathbb{N}) \quad |f - u_N|_M = 0 \mod \frac{1}{\nu^N} .$$

Si $M \leqq N$, (2.19) résulte de (2.18) et de la croissance de $|\cdot|_M$ avec M.

Si $N < M$, (2.19) résulte des relations :

$$|f - u_N|_M \leqq |f - u_M|_M + |u_M - u_N|_M ; \quad |f - u_M|_M = 0 \mod \frac{1}{\nu^M} \text{ donc } \mod \frac{1}{\nu^N} ;$$

$$|u_M - u_N|_M = 0 \mod \frac{1}{\nu^N} , \quad \text{car } u_M - u_N = \sum_{r=N}^{M-1} \frac{\alpha_r}{\nu^r} e^{\nu\varphi} .$$

Puisque les supports de f et des u_N appartiennent à $\operatorname{Supp} u = \overline{\bigcup_r \operatorname{Supp} \alpha_r}$, qui est compact, (2.19) implique

$$(\forall \quad M, N, q \in \mathbb{N}) \qquad |x^q (f - u_N)|_M = 0 \bmod \frac{1}{\nu^N}$$

c'est-à-dire

$$f - u_N = 0 \bmod \frac{1}{\nu^N}$$

<u>Preuve de</u> 2°). - Si f et $f' \in B(X)$ et vérifient

$$(\forall N) \quad f - u_N = f' - u_N = 0 \bmod \frac{1}{\nu^N}$$

on a évidemment

$$f - f' = 0 \bmod \frac{1}{\nu^N}.$$

<u>Preuve de 3</u>°). - Supposons

$$u \mapsto \tilde{f} = 0 ,$$

donc

$$(\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in X) \quad u_N(\nu, x) = 0 \bmod \frac{1}{\nu^N} ;$$

il s'agit de prouver que

$$(\forall x \in X) \quad u(\nu, x) = 0$$

Il suffit donc de traiter le cas où u est un <u>nombre</u> formel ; supposons que dans son expression (2.1)

$$(\forall j \in J) \quad \alpha_{jr} = 0 \quad \text{pour} \quad r < N ;$$

nous avons donc

$$u_{N+1}(\nu) = \sum_{j \in J} \frac{\alpha_{jN}}{\nu^N} e^{\nu \varphi_j} = 0 \bmod \frac{1}{\nu^{N+1}} ,$$

donc

$$\lim_{\nu \to i\infty} \sum_{j \in J} \alpha_{jN} e^{\nu \varphi_j} = 0 ,$$

ce qui implique

$$(\forall_j) \; \alpha_{jN} = 0;$$

d'où le théorème 2.2

COROLLAIRE 2. - L'intégration asymptotique, les éléments de $Sp_2(\ell)$ et les opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sont des morphismes :

$$F_o(X) \to C \; ; \; F_o(X) \to C(X) \; ; \; F_o(X) \to F_o(X) \, .$$

La fin de ce § 1 explicitera les propriétés de ces morphismes.

Le n° 3 du § 2 emploiera, pour étudier la norme des fonctions lagrangiennes, le

THEOREME 2.3 . - 1°) Soit un nombre formel de phase nulle :

$$u = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_r}{\nu^r} \in F^o \, .$$

La condition qu'il soit réel, $u \in \mathrm{Re}\, F^o$, est :

$$(\forall r) \; \frac{\alpha_r}{\nu^r} \text{ est réel ; i.e : } i^{-r} \alpha_r \text{ est réel} \, .$$

La condition $u > 0$ est, en notant s le premier des r tels que $\alpha_r \neq 0$:

$$0 < \frac{\alpha_s}{\nu^s} \; ; \text{ i.e. : } i^{-s} \alpha_s > 0 \, .$$

Tout $u \in \mathrm{Re}\, F^o$ vérifie donc : soit $u > 0$; soit $u \leq 0$.

$\geq$ définit donc une relation d'ordre sur $\mathrm{Re}\, F^o$.

2°) La condition $u^{1/2} \in \mathrm{Re}\, F^o$ équivaut à la suivante :

$u \in F^o$; $u > 0$; l'entier s (défini ci-dessus) est pair.

Notation . - $u^{1/2}$ a alors deux déterminations opposées ; on choisit : $u^{1/2} \geq 0$.

Preuve : Soit

$$u = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_r}{\nu^r} \in F^o \; ; \text{ notons } s \text{ le premier des } r \text{ tels que } \alpha_r \neq 0 \, .$$

Si $(\forall r)$ $\alpha_r \nu^{-r}$ est à valeurs réelles, la preuve du théorème 2.2 construit une fonction $f \in u$, à valeurs réelles ; donc $u \in \mathrm{Re}\, F^o$. D'où :

$$\mathrm{Re}\, u = \sum_{r \in \mathbb{N}} \mathrm{Re}\, \frac{\alpha_r}{\nu^r} \, , \quad \mathrm{Im}\, u = \sum_{r \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}\, \frac{\alpha_r}{\nu^r} \, .$$

Donc $u \in \operatorname{Re} F^o$ si et seulement si $(\forall r)\ \alpha_r \nu^{-r}$ est réel .
Etudions $u^{1/2}$.

$$u^2 = \frac{\alpha_s^2}{\nu^{2s}} \bmod \frac{1}{\nu^{2s+1}} ;$$

donc

$u^{1/2} \in \operatorname{Re} F^o$ exige : s pair ; $u \geqq 0$ (cf. Note 1) .

Pour prouver la réciproque, il suffit évidemment de prouver ceci :

$$u^{1/2} \in \operatorname{Re} F^o \quad \text{quand} \quad \alpha_o > 0 ;$$

c'est évident puisque la condition

$$\left(\sum_r \frac{\beta_r}{\nu^r}\right)^2 = \sum_r \frac{\alpha_r}{\nu^r}$$

équivaut à la condition $\beta_o^2 = \alpha_o$ et à des conditions donnant (pour chaque $r = 1, 2, \dots$) $\beta_o \beta_r$ en fonction linéaire réelle de α_r et des $\beta_t \beta_{r-t}$ $(0<t<r)$.

Or $u^{1/2} \in \operatorname{Re} F^o$ implique $u \geqq 0$ (cf. Note 1) ; donc $\alpha_o > 0$ implique $u > 0$; donc $\alpha_s \nu^{-s} > 0$ implique $u > 0$. Tout $u \in \operatorname{Re} F^o$ vérifie donc : soit $u > 0$, soit $u \leqq 0$.

3. INTEGRATION DES ELEMENTS DE F_o (X) . - Les propriétés essentielles des fonctions formelles seront déduites du théorème suivant, qui précise des résultats classiques (méthode de la phase stationnaire) ; ces précisions exigent l'emploi des lemmes 3.4 et 3.5 au lieu du lemme de Marston MORSE [12] , qui transforme localement par changement de coordonnées une fonction ayant un point critique non-dégénéré en une forme quadratique. Nous rappelons brièvement les autre lemmes nécessaires à la preuve de ce théorème .
Vu le corollaire 2, l'intégration asymptotique est un morphisme

$$\tilde{\int_X} : F_o(X) \to C .$$

Evidemment, quand les phases de u sont toutes constantes :

$$\tilde{\int_X} u(\nu, x)\, d^\ell x \in F .$$

Le théorème 3 prouve que, dans le cas important qu'énonce le corollaire 3 :

$$\nu^{\ell/2} \tilde{\int_X} u(\nu, x)\, d^\ell x \in F .$$

THEOREME 3 . - Soit $u \in F_o(X)$.

1°) La valeur de $\tilde{\int_X} u(\nu, x)\, d^\ell x$ ne dépend que de la restriction de u à un voisinage arbitrairement petit de l'ensemble des points critiques des phases de u ; cette valeur est 0 si cet ensemble est vide.

2°) Soit

(3.1) $$u(\nu) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_r}{\nu^r} e^{\nu\varphi} \in F_o(X) ,$$

où φ a, sur Supp u , un point critique unique, x_c , non-dégénéré . Notons :

$\varphi_c = \varphi(x_c)$ la valeur critique de φ ; $\arg i^{\ell/2} = \Pi \ell / 4$;

$\sqrt{\mathrm{Hess}_c\, \varphi}$ la valeur en x_c de $\sqrt{\mathrm{Hess}\, \varphi}$, (Déf. 2.3 du ch. I , § 1) .

Alors

(3.2) $$\tilde{\int_X} u(\nu, x)\, d^\ell x = \left(\frac{2\Pi i}{|\nu|}\right)^{\ell/2} (\mathrm{Hess}_c\, \varphi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} I_r(\varphi; \alpha)\, e^{\nu\varphi_c} ,$$

où :

$(3.3)_o$ $$I_o(\varphi; \alpha) = \alpha_o(x_c) ;$$

$(3.3)_r$ $$I_r(\varphi, \alpha) = \sum_{s=o}^{r} \sum_{j=o}^{2(r-s)} \frac{1}{(r-s+j)!\, j!} \left\{ \Phi^{*\, r-s+j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) [\Theta^j(x)\, \alpha_s(x)] \right\}_{x=x_c} ,$$

Φ , Φ^* et Θ étant définis comme suit .

<u>Notations</u>. - Le développement de Taylor d'ordre 2 de φ en x_c est noté :

(3.4) $$\varphi(x) = \Phi(x - x_c) + \Theta(x) ;$$

donc : Θ s'annule 3 fois en x_c ; Φ est une forme quadratique.

Φ^* est sa forme "<u>duale</u>" ; c'est-à-dire :

(3.5) $\Phi^*(p)$ est la valeur critique de la fonction $x \mapsto \Phi(x) + \langle p, x\rangle$;

autrement dit, si M est la valeur en x_c de la matrice $(\varphi_{x^j x^k})$:

(3.6) $$\Phi(x) = \tfrac{1}{2}\langle Mx, x\rangle, \quad \Phi^*(p) = -\tfrac{1}{2}\langle p, M^{-1}p\rangle, \text{ où } M = {}^tM : X \to X^* .$$

Evidemment :

COROLLAIRE 3. - <u>Soit</u> $u \in F_o(X)$. <u>Si, sur</u> Supp u, <u>tous les points critiques de toutes les phases de</u> u <u>sont non-dégénérés, alors</u> :

$$\nu^{\ell/2} \tilde{\int_X} u(\nu, x)\, d^\ell x \in F ;$$

<u>les phases de</u> $\nu^{\ell/2}\tilde{\int_X} u\, d^\ell x$ <u>sont les valeurs critiques, sur</u> Supp u, <u>des phases de</u> u.

Il suffit évidemment de prouver le théorème 3 quand on y remplace u par une fonction f valant :

(3.7) $$f(\nu, x) = \alpha(x)\, e^{\nu\varphi(x)} ,$$

où $\alpha \in \mathcal{D}$ (c-à-d : est indéfiniment diférentiable, à support compact). Ce théorème résulte alors des lemmes suivants, dont le premier prouve le 1°) <u>du théorème</u> :

LEMME 3.1. - Notons x_c les points critiques de φ appartenant à Supp f. S'ils sont tous non-dégénérés, alors

$$\int_X \alpha(x)\, e^{\nu\varphi(x)}\, d^\ell x \mod \frac{1}{\nu^N}$$

est fonction linéaire des valeurs, en les points x_c, des dérivées de α d'ordres $< 2N$.

Preuve . - Il s'agit de prouver ceci :

$(3.8)_N$ Si α s'annule $2N$- fois en les points x_c, alors $\int_X f\, d^\ell x = 0 \bmod \frac{1}{\nu^N}$.

Or $(3.8)_o$ est évident. Supposons $(3.8)_N$ vrai . Si α s'annule $2(N+1)$ - fois en les points x_c , alors il existe des $\beta_j \in \mathcal{D}$ tels que :

$\alpha = \sum_j \beta_j \varphi_{x^j}$, β_j s'annule $(2N+1)$ - fois en les points x_c ;

donc, vu $(3.8)_N$:

$$\int_X \alpha\, e^{\nu\varphi} d^\ell x = - \int_X \frac{1}{\nu} \sum_j \frac{\partial \beta_j}{\partial x^j} e^{\nu\varphi} d^\ell x = 0 \mod \frac{1}{\nu^{N+1}} ,$$

ce qui prouve $(3.8)_{N+1}$.

On prouve de même :

LEMME 3.2 . - Soit $\alpha \in \mathcal{S}$ (notation de L. Schwartz ; cf ch I , § 1 , n° 1) . Soit Φ une forme quadratique non-dégénérée $X \to \mathbb{R}$. Alors

$$\int_X \alpha(x)\, e^{\nu\Phi(x)}\, d^\ell x \mod \frac{1}{\nu^N}$$

est une fonction linéaire des valeurs en 0 des dérivées de α d'ordre $< 2N$.

Ce lemme s'explicite comme suit :

LEMME 3.3. - Soit $\alpha \in \mathcal{S}$. Soit Φ une forme quadratique non-dégénérée $X \to \mathbb{R}$. Alors

$$\int_X \alpha(x)\, e^{\nu\Phi(x)}\, d^\ell x =$$

$$\left(\frac{2\pi i}{|\nu|}\right)^{\ell/2} [\text{Hess}\ \Phi]^{-\frac{1}{2}} \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{r!\,\nu^r} \left[\Phi^{*r}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \alpha(x)\right]_{x=0} \mod \frac{1}{\nu^\infty} .$$

Preuve. - On sait (cf. ch. I, § 1, lemme 2.2) que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\mu}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}\, \mu^{-1/2} \qquad \text{pour } |\arg \mu| < \frac{\pi}{2} .$$

D'où, par dérivations en μ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2r} e^{-\frac{\mu}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}\, \frac{\mu^{-1/2}}{(2\mu)^r} \frac{(2r)!}{r!}$$

$$= \sqrt{2\pi}\, \mu^{-\frac{1}{2}} \left[e^{\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dx^2}} x^{2r} \right]_{x=0}$$

Or

$$(\forall r \in \mathbb{N}) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2r+1} e^{-\frac{\mu x^2}{2}} dx = 0 \,.$$

Donc, pour toute $\ell \times \ell$ matrice diagonale complexe M_c , à valeurs propres non nulles, d'arguments $\in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et pour tout polynome $P : X \to \mathbb{C}$:

(3.9)
$$\int_X P(x)\, e^{-\Phi_c(x)}\, d^\ell x =$$

$$(2\pi)^{\ell/2} \left[\text{Hess}\, \Phi_c \right]^{-1/2} \left[e^{\Psi_c(\frac{\partial}{\partial x})} P(x) \right]_{x=0} ,$$

où :

$$\Phi_c(x) = \tfrac{1}{2} < M_c\, x , x > \,,\quad \Psi_c(p) = \tfrac{1}{2} < p , M_c^{-1} p > ;$$

arg. Hess Φ_c est la somme des arg. des valeurs propres de Φ_c .

Explicitons :

$$\Phi_c = \Phi_+ - \nu\, \Phi \,,$$

où : $\nu \in i[1,\infty]$; Φ_+ et Φ sont des formes quadratiques : $X \to \mathbb{R}$, indépendantes de ν ; Φ_+ est définie positive ; nous supposons Φ <u>non-dégénérée</u>.

L'hypothèse que la matrice M_c est diagonale est surperflue, puisqu'un changement de coordonnées réduit deux telles formes à :

$$\Phi_+(x) = \sum_j x_j^2 \,,\quad \Phi(x) = \sum_j c_j\, x_j^2 \qquad (c_j \neq 0) \,.$$

Soit $\varepsilon \in \mathcal{D}$ tel que $\varepsilon(x) = 1$ pour x voisin de 0 . Le lemme 3.2 et (3.9) donnent :

$$(3.10) \qquad (-\frac{\nu}{2\pi})^{\ell/2} \int \epsilon(x)\, P(x)\, e^{\nu\Phi(x) - \Phi_+(x)}\, d^\ell x =$$

$$[\mathrm{Hess}(\Phi - \frac{1}{\nu}\Phi_+)]^{-1/2}\, [e^{\Psi_c(\frac{\partial}{dx})}\, P(x)]_{x=0} \qquad \mathrm{mod}\, \frac{1}{\nu^\infty}\,;$$

arg Hess $(\Phi - \frac{1}{\nu}\Phi_+)$ est la somme des arg. des valeurs propres de $\Phi - \frac{1}{\nu}\Phi_+$, qui appartiennent à $]0, \pi[$; $-\nu = \frac{|\nu|}{i}$ a pour arg $-\frac{\pi}{2}$.

Le second membre est une fonction de $\frac{1}{\nu}$, holomorphe pour $\frac{1}{\nu} = 0$, donc, mod $\frac{1}{\nu^\infty}$, un élément de F, dont la $\lim\limits_{\Phi_+ \to 0}$ est, vu le développement de Taylor de cette fonction :

$$[\mathrm{Hess}\,\Phi]^{-1/2}\, [e^{\frac{1}{\nu}\Phi^*(\frac{\partial}{\partial x})}\, P(x)]_{x=0} \qquad \mathrm{mod}\, \frac{1}{\nu^\infty}\,;$$

arg. Hess Φ a la définition 2.3 du chap. I, § 1.

Le premier membre de (3.10) est donc, mod $\frac{1}{\nu^\infty}$, un élément de F ; vu le lemme 3.2, sa $\lim\limits_{\Phi_+ \to 0}$ est

$$(\frac{|\nu|}{2\pi i})^{\ell/2} \int_X \epsilon(x)\, P(x)\, e^{\nu\Phi(x)}\, d^\ell x\,.$$

Donc :

$$(3.11) \qquad \int_X \epsilon(x)\, P(x)\, e^{\nu\Phi(x)}\, d^\ell x =$$

$$(\frac{2\pi i}{|\nu|})^{\ell/2}\, [\mathrm{Hess}\,\Phi]^{-1/2}\, [e^{\frac{1}{\nu}\Phi^*(\frac{\partial}{\partial x})}\, P(x)]_{x=0} \qquad \mathrm{mod}\, \frac{1}{\nu^\infty}\,;$$

d'où le lemme 3.3, en approximant α à l'origine par sa série de Taylor limitée P et en appliquant le lemme 3.2.

Le lemme 3.3 prouve le 2°) du théorème 3 dans le cas particulier où la phase φ est une forme quadratique Φ ; nous déduirons le cas général de ce cas particulier en appliquant au reste d'un développement de Taylor limité le lemme suivant, dont la preuve est analogue à celle du lemme 3.1 :

LEMME 3.4. – Soient :

$$\theta \in [o, 1] \; ; \; x \in X \; ;$$

$$\alpha : (\theta, x) \mapsto \alpha(\theta, x) \in \mathbb{C},$$

indéfiniment différentiable, à support compact, s'annulant $2N$-fois quand x s'annule ;

$$\varphi : (\theta, x) \mapsto \varphi(\theta, x) \in \mathbb{R},$$

indéfiniment différentiable, tel que, sur $\operatorname{Supp} \alpha$, $\forall \theta$, $\varphi : x \mapsto \varphi(\theta, x)$ ait l'origine pour point critique unique, non-dégénéré. Alors :

$$\int_0^1 d\theta \int_X \alpha(\theta, x)\, e^{\nu \varphi(\theta, x)}\, d^\ell x = 0 \mod \frac{1}{\nu^N}. \tag{3.12}$$

Nous déduirons de ce lemme le suivant :

LEMME 3.5. – Soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$, indéfiniment différentiable, ayant l'origine pour point critique unique, non dégénéré, sa valeur critique étant nulle :

$$\varphi(o) = o \;, \quad \varphi_x(o) = o \;, \quad \operatorname{Hess} \varphi(o) \neq o .$$

Soit

$$\varphi(x) = \Phi(x) + \Theta(x)$$

son développement de Taylor d'ordre 2 à l'origine :

Φ est une forme quadratique ; Θ s'annule 3 fois à l'origine.

Soit $\alpha : X \to \mathbb{C}$, indéfiniment différentiable, dont le support est compact et ne contient pas d'autre point critique que l'origine. Alors :

$$\int_X \alpha(x)\, e^{\nu \varphi(x)}\, d^\ell x = \sum_{s=o}^{\infty} \frac{\nu^j}{j!} \int_X \Theta^j(x)\, \alpha(x)\, e^{\nu \Phi(x)}\, d^\ell x \mod \frac{1}{\nu^\infty} ; \tag{3.13}$$

cette série converge dans $\mathcal{F}$, puisque, vu le lemme 3.3,

$$\nu^j \int_X \Theta^j(x)\, \alpha(x)\, e^{\nu \Phi(x)}\, d^\ell x = o \mod \nu^{-\frac{\ell}{2} - [\frac{j+1}{2}]}$$

où $[\ldots]$ désigne la partie entière de ..., c'est-à-dire le plus grand entier $\leq \ldots$.

Preuve . - Vu (3.12) et la formule de Taylor :

$$(3.14) \qquad e^{\nu\varphi} = \sum_{j=1}^{2N-1} \frac{\nu^j \Theta^j}{j\,!}\, e^{\nu\Phi} + \nu^{2N} \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{2N-1}}{(2N-1)\,!}\, \Theta^{2N} e^{\nu(\Phi+\theta\Theta)}\, d\theta .$$

Le lemme 3.4 donne :

$$(3.15) \qquad \nu^{2N} \int_X d^\ell x \int_0^1 (1-\theta)^{2N-1}\, \Theta^{2N}(x)\, \alpha(x)\, e^{\nu(\Phi+\theta\Theta)}\, d\theta = o \bmod \frac{1}{\nu^N} ,$$

puisque Θ^{2N} s'annule $6N$-fois à l'origine ; quand N tend vers l'infini , (3.14) et (3.15) impliquent (3.13).

Preuve du 2°) du théorème 3 . - On peut remplacer u par une fonction f , de valeur (3.7) ; φ possède un point critique unique, non dégénéré ; il suffit de traiter le cas où ce point critique est l'origine et où la valeur critique est nulle. Alors, vu (3.13) et le lemme 3.3 :

$$(3.16) \qquad \int_X \alpha(x)\, e^{\nu\varphi(x)}\, d^\ell x =$$

$$\left(\frac{2\pi i}{|\nu|}\right)^{\ell/2} (\text{Hess } \Phi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{r,j} \frac{1}{r!\, j\,!\, \nu^{r-j}} \left\{\Phi^{*r}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\Theta^j(x)\, \alpha(x)\right]\right\}_{x=o} \bmod \frac{1}{\nu^\infty}$$

où $r, j \in N$. Notons $q = r - j$ l'exposant de ν . Puisque $\Theta(x) = o \bmod |x|^3$, la condition $\{\ldots\}_{x=o} \neq o$ implique $3j \leq 2r$, c'est-à-dire $j \leq 2q$. Soit :

$$I_q(\varphi\,;\alpha) = \sum_{j=o}^{2q} \frac{1}{(q+j)\,!\, j\,!} \left\{\Phi^{*\,q+j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\Theta^j(x)\, \alpha(x)\right]\right\}_{x=o} ,$$

donc, en particulier :

$$I_o(\varphi\,;\alpha) = \alpha(o) \;;$$

(3.16) s'écrit :

$$\int_X \alpha(x)\, e^{\nu\varphi(x)}\, d^\ell x = \left(\frac{2\pi i}{|\nu|}\right)^{\ell/2} (\text{Hess } \Phi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{q\in N} \frac{1}{\nu^q}\, I_q(\varphi\,;\alpha) .$$

D'où le 2°) du théorème .

4. TRANSFORMATION DES FONCTIONS FORMELLES PAR LES ELEMENTS DE $Sp_2(\ell)$. - Tout $S \in Sp_2(\ell)$ induit un isomorphisme

$$S : C(X) \to C(X) \quad (\text{voir n}^\circ\ 1) ,$$

dont la restriction à

$$F_o(X) \subset C(X) \quad (\text{théorème } 2.2.)$$

est un <u>monomorphisme</u>

$$(4.1) \qquad S : F_o(X) \to C(X) .$$

Les théorèmes 4.1, 4.2 et 4.3 précisent les propriétés de ce monomorphisme .

THEOREME 4.1 . - <u>Soit un espace</u> 2-<u>symplectique</u> Z , <u>une variété lagrangienne</u> V <u>de</u> Z , <u>un</u> 2-<u>repère</u> R' <u>de</u> Z <u>et</u>

$$S \in Sp_2(\ell) ;$$

$R = SR'$ <u>est donc un</u> 2-<u>repère de</u> Z (Chap. I , § 3 , n°3) .

1°) <u>Il existe un isomorphisme , induit par</u> S <u>et noté</u> S :

$$(4.2) \qquad S : F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} , R') \to F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} , R)$$

<u>caractérisé par les deux propriétés suivantes</u> :

i) <u>il est local</u> ; c'est-à-dire : soit

$$\check{U}_{R'} \in F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} , R') , \ \check{U}_R = S\check{U}_{R'} \in F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} , R) ;$$

alors la valeur $\check{U}_R(\nu , \check{z})$ de $\check{U}_R$ en $\check{z} \in \check{V}$ est fonction linéaire de la valeur de $\check{U}_{R'}$, et de ses dérivées en ce même point $\check{z}$;

ii) <u>le diagramme suivant est commutatif</u> :

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\text{(4.2)} & F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} , R') \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\Pi_{R'}"'] & F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} , R) \arrow[d, "\Pi_R"'] \\
\text{(4.1)} & F_o(X) \arrow[r, "S"] & C(X) \ ;
\end{tikzcd}$$

<u>il définit donc un morphisme</u>

(4.3) $$S \circ \Pi_{R'} = \Pi_R \circ S : F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} , R') \to F_o(X) .$$

2°) <u>La loi de composition des morphismes</u> (4.1) <u>et</u> (4.2) <u>est celle de</u> $Sp_2(\ell)$.

<u>Note 4.</u> - La restriction de (4.1)

(4.4) $$S : \Pi_{R'} F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} , R') \to \Pi_R F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} , R) \subset F_o(X)$$

est donc un isomorphisme ; alors que (4.2) est local,(4.4) n'est pas local, mais seulement ponctuel : si

$$u' \in \Pi_{R'} F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} , R') \quad , u = S u' ,$$

alors la valeur $u(\nu , x)$ en $x \in X$ est fonction linéaire de la valeur de u' et de ses dérivées en les points de l'ensemble fini $R'_X R_X^{-1} x$.

Le caractère local du morphisme (4.2) s'explicite comme suit :

THEOREME 4.2 . - <u>Soit</u>

(4.5) $$\check{U}_{R'} = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \alpha_r e^{\nu \varphi_{R'}} \in F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} , R') ;$$

<u>alors</u> :

$$\check{U}_R = S \check{U}_{R'} \in F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} , R) \ , \ \underline{\text{où}} \ R = S R' ,$$

<u>vaut en</u> $\check{z}$

(4.6) $$\check{U}_R(\nu , \check{z}) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \left(\frac{d^\ell x'}{d^\ell x}\right)^{3r+1/2} \frac{1}{\nu^r} J_{R,r}(\check{z} ; \alpha) e^{\nu \varphi_R(\check{z})}$$

où :

(4.7) $\quad x = \check{R}_X \check{z}$; $x' = \check{R}'_X \check{z}$; $[d^\ell x]^{1/2}$ est défini chap I , § 3 coroll. 3 ;

$J_{R,r}$ est une fonction linéaire des dérivées d'ordres $\leq 2(r-s)$, sur V , des α_s $(s \leq r)$; ses coefficients sont des fonctions indéfiniment différentiables de $\check{z} \in \check{V} \setminus \check{\Sigma}_{R'}$; ces fonctions dépendent de V, R' et S ;

(4.8) $$J_{R,0}(\check{z}, \alpha) = \alpha_0(\check{z}) .$$

La formule (4.6) garde un sens pour tout $\check{U}_{R'} \in F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_{R'}, R')$; et $\check{z} \in \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}$; donc, évidemment :

THEOREME 4.3. - La formule (4.6) définit un isomorphisme, induit par S et noté S

(4.9) $$S : F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R') \to F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R) .$$

La loi de composition de ces isomorphismes et celle du groupe $Sp_2(\ell)$.

Preuve des théorèmes précédents. - Soit $\check{U}_{R'} \in F_0(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}, R')$ tel que la restriction

$$\check{R}'_X : \mathrm{Supp}\, \check{U}_{R'} \to X \quad \text{de} \quad \check{R}'_X : \check{V} \to X$$

soit un difféomorphisme, dont l'inverse sera noté R'^{-1}_X.

Cas où $S \notin \Sigma_{Sp_2(\ell)}$. - Alors $S = S_A$ (Ch. I, § 1, n° 1) . Soit (4.5) l'expression de $\check{U}_{R'}$;

$$u' = \Pi_{R'} \check{U}_{R'}$$

vaut en x'

(4.10) $$u'(\nu, x') = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \alpha'_r(x')\, e^{\nu \varphi'(x')}$$

où :

$$\alpha'_r(x') = \alpha_r(R'^{-1}_X x') \ , \ \varphi'(x') = \varphi_{R'}(R'^{-1}_X x') \text{ pour } x' \in \operatorname{Supp} u' \ ,$$

$$\alpha'_r(x') = 0 \text{ pour } x' \notin \operatorname{Supp} u' = R'_X \operatorname{Supp} \check{U}'_R \ ;$$

puisque $u' \in F_o(X) \subset C(X)$, $u = S u' \in C(X)$; vu le ch. I, § 1 , (1.10) , l'expression de u en x est :

$$(4.11) \qquad u(\nu, x) = \left(\frac{|\nu|}{2\Pi i}\right)^{\ell/2} \Delta(A) \tilde{\int_X} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \alpha'_r(x') \, e^{\nu[A(x,x') + \varphi'(x')]} d^\ell x' \ .$$

Appliquons le théorème 3 à cette intégrale asymptotique.

i) Pour chaque $x \in X$, cherchons sur $\operatorname{Supp} u'$ <u>les points critiques</u> de la phase :

$$(4.12) \qquad X \ni x' \mapsto A(x, x') + \varphi'(x') \in \mathbb{R} \ ;$$

c'est-à-dire les $x' \in \operatorname{Supp} u'$ tels que :

$$(4.13) \qquad A_{x'} + \varphi'_{x'} = 0 \ .$$

Notons :

$$(4.14) \qquad \check{z} = \check{R}'^{-1}_X x' \ ; \ \check{R}' \check{z} = (x', p') \ , \ \text{c'est-à-dire } p' = \varphi'_{x'} \in X^* \ .$$

La relation (4.13) s'écrit

$$p' + A_{x'} = 0 \ ;$$

vu ch. I , § 1, (1.11) elle signifie l'existence de $p \in X^*$ tel que

$$(x, p) = s_A(x', p') \ ;$$

elle équivaut donc à :

$$x = R_X R'^{-1}(x', p') = \check{R}_X \check{R}'^{-1} (x', p') \ ,$$

c'est-à-dire, vu (4.14) , à :

$$x = \check{R}_X \check{z} \ .$$

Sur supp u', les points critiques de la phase (4.12) sont donc les points :

(4.15) $$x' = \check{R}'_X \check{z} \text{ , où } \check{z} \in \check{R}_X^{-1} x \cap \text{Supp } U_{R'} \text{ .}$$

Leur ensemble est fini, puisque Supp $\check{U}_{R'}$ est une partie compacte de $\check{V} \setminus \check{\sum}_R$ au voisinage de laquelle $\check{R}_X$ est, localement, un difféormorphisme .

ii) Cherchons les valeurs critiques de la phase (4.12) . Au point critique x' défini par (4.15), notons

$$\check{R}\,\check{z} = (x\,,p) \quad , \check{R}'\,\check{z} = (x'\,,p') \; ;$$

d'après les formules précédentes

$$p = A_x \quad , p' = - A_{x'} \; ;$$

puisque A est une forme quadratique en $(x\,,x')$, nous avons donc :

$$A\,(x\,,x') = \tfrac{1}{2} < p\,,x> - \tfrac{1}{2} < p'\,,x'> \,,$$

c'est-à-dire, vu ch. I, § 3, (2.4) :

$$A\,(x\,,x') = \varphi_R\,(\check{z}) - \varphi_{R'}\,(\check{z}) \text{ , où } \varphi_{R'}\,(\check{z}) = \varphi'\,(x') \text{ .}$$

Au point critique x' défini par (4.15), la valeur de la phase (4.12) est donc $\varphi_R\,(\check{z})$.

iii) La racine carré du Hessien de cette phase (4.12) est donnée par le ch. I, § 3, (3.7) :

(4.16) $$\{ \text{Hess}_{x'} [\, A(x\,,x') + \varphi'\,(x') \,] \}^{1/2} = \Delta\,(A)\,\left[\frac{d^\ell x}{d^\ell x'}\right]^{1/2} \; ;$$

lors du calcul de $\text{Hess}_{x'}$, x et x' sont considérés comme indépendants ; puis on leur donne les valeurs $x = \check{R}_X \check{z}$ et $x' = \check{R}'_X \check{z}$; au second membre, x et x' ont ces valeurs, c'est-à-dire sont les coordonnées locales d'un même point $\check{z} \in \check{V} \setminus \check{\sum}_R \cup \check{\sum}_{R'}$. De (4.16) résulte donc

$$\mathrm{Hess}_{x'} \left[A(x, x') + \varphi'(x') \right] \neq 0 .$$

Par suite le théorème 3 s'applique au calcul de (4.11) .

iV) <u>Fin de la preuve</u> . - Cette application à (4.11) du théorème 3 donne :

(4.17) $$u(\nu, x) = \sum_{\check{z} \in \check{R}'^{-1}_X x} \check{U}_R(\nu, \check{z}) .$$

où : $\check{U}_R$ a même support que $\check{U}_{R'}$;

$\check{U}_R$ vaut en $\check{z}$, en notant $x = \check{R}_X \check{z}$ et $x' = \check{R}'_X \check{z}$:

(4.18) $$\check{U}_R(\nu, \check{z}) = \Delta(A) \left[\mathrm{Hess}_{x'} (A+\varphi') \right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{r \in N} \frac{1}{\nu^r} I_r(A+\varphi' ; \alpha') e^{\nu \varphi_R(\check{z})} .$$

Or d'une part, (4.17) signifie :

$$u = \Pi_R \check{U}_R ;$$

d'autre part, vu (4.16) , (4.18) équivaut à (4.6) ; en effet : vu $(3.3)_r$,

$I_r(A + \varphi' ; \alpha')$ est la valeur d'une fonction linéaire des dérivées d'ordres

$\leq 2(r-s)$ des α'_s $(s \leq r)$; les coefficients de cette fonction sont des fonctions rationnelles des dérivées de φ' ; le dénominateur commun de ces fonctions rationnelles est $\left[\mathrm{Hess}_{x'}(A+\varphi')\right]^{3r}$, dont (4.16) donne la valeur .

Les théorèmes 4.1 et 4.2 s'appliquent donc aux $S_A \in Sp_2(\ell) \setminus \Sigma_{Sp_2}$.

<u>Cas où</u> $S \in \Sigma_{Sp_2}$. - Vu le ch. I , § 1 , lemme 2.5 , étant donné $S \in \Sigma_{Sp_2}$, il existe S_A et $S_{A'} \in Sp_2(\ell) \setminus \Sigma_{Sp_2}$ tels que

$$S = S_{A'} S_A .$$

Puisque les morphismes (4.1) et (4.2) se composent comme les éléments de $Sp_2(\ell)$

qui les induisent, les composés des morphismes induits par S_A et $S_{A'}$ ne dépendent que de $S = S_{A'} S_A$; ce sont donc des morphismes induits par S ; étant donné $\check{U}_{R'}$ tel que Supp $\check{U}_{R'} \subset \check{V} \setminus \check{\Sigma}_{R'} \cup \check{\Sigma}_{SR'}$, on peut choisir S_A assez voisin de l'identité pour que $\check{\Sigma}_{S_A R'} \cap$ Supp $\check{U}_{R'} = \emptyset$; d'où les théorèmes 4.1 et 4.2 , qui impliquent le théorème 4.3.

5. NORME ET PRODUIT SCALAIRE DES FONCTIONS FORMELLES A SUPPORT COMPACT . - Soient :

V et V' deux variétés lagrangiennes de Z ;

$\check{V}$ et $\check{V}'$ leurs revêtements universels ; R un 2-repère de Z ;

φ_R et φ'_R les phases de RV et RV' ;

$$(5.1)\qquad \begin{aligned} \check{U}_R &= \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}\, \alpha_{R,r}\, e^{\nu \varphi_R} \in F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R) , \\ \check{U}'_R &= \sum_{s \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^s}\, \alpha'_{R,s}\, e^{\nu \varphi'_R} \in F_o(\check{V}' \setminus \check{\Sigma}'_R, R) , \end{aligned}$$

de projections

$$u = \Pi_R \check{U}_R \quad , \quad u' = \Pi_R \check{U}'_R .$$

<u>Définition</u> 5. - Sous l'hypothèse (5.1), <u>le produit scalaire</u> de $\check{U}_R$ et $\check{U}'_R$ est la classe asymptotique

$$(5.2)\qquad (\check{U}_R \mid \check{U}'_R) = (u \mid u') \in C ,$$

où $(u \mid u')$ est défini par l'intégrale asympotique (1.9) . Donc :

$(\check{U}_R \mid \check{U}'_R)$ et $(\check{U}'_R \mid \check{U}_R)$ sont imaginaires conjugués ;

l'inégalité de Schwarz s'applique :

$$(5.3) \qquad |(\check{U}_R \check{|} \check{U}'_R)| \leq (\check{U}_R \check{|} \check{U}_R)^{1/2} (\check{U}'_R \check{|} \check{U}'_R)^{\frac{1}{2}} .$$

La semi-norme de $\check{U}_R$ est $(\check{U}_R \check{|} \check{U}_R)^{1/2} = \|u\| \geqq 0$;

cette semi-norme vérifie l'inégalité du triangle.

THEOREME 5.1. - 1°) La valeur de $(\check{U}_R \check{|} \check{U}'_R)$ ne dépend que de l'allure de $\check{U}_R$ et $\check{U}_{R'}$ en les couples de points de $\check{V}$ et $\check{V}'$ se projetant en un même point de $V \cap V'$.

Cette valeur est 0 si $V \cap V' = \emptyset$.

2°) Si $V = V'$, ce qui implique $\varphi_R = \varphi'_R$, alors

$$(5.4) \qquad (\check{U}_R \check{|} \check{U}'_R) =$$

$$\sum_{r,s} \frac{(-1)^s}{\nu^{r+s}} \int_{z \in V} \sum_{\check{z},\check{z}'} \alpha_{R,r}(\check{z}) \overline{\alpha'_{R,s}(\check{z}')} e^{\nu[\psi(\check{z}) - \psi(\check{z}')]} d^{\ell}x \in F ,$$

où : $x = R_X z$, $d^{\ell}x > 0$;

$\check{z}$ et $\check{z}'$ sont les points de Supp $\check{U}_R$ et Supp $\check{U}'_R$ se projetant en z .

Dans (5.4) , $\psi(\check{z}) - \psi(\check{z}')$ est l'une des périodes de ψ :

$c_\gamma = \frac{1}{2} \int_\gamma [z , dz]$, où γ est un lacet de V.

Les phases de $(\check{U}_R \check{|} \check{U}'_R)$ sont donc ces périodes c_γ de ψ .

3°) Si V et V' sont transverses, alors

(5.5) $$\nu^{\ell/2}(\check{U}_R \check{|}\, U_R \in F.$$

<u>Si</u> V <u>et</u> V' <u>sont transverses et se coupent en un seul point</u> z , <u>projection d'un seul point</u> $\check{z}$ <u>de</u> Supp $\check{U}_R$ <u>et d'un seul point</u> $\check{z}'$ <u>de</u> Supp $\check{U}'_R$, <u>alors</u> :

(5.6) $$\left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2}(\check{U}_R \check{|}\, \check{U}'_R) =$$

$$\sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}[\,\mathrm{Hess}\,(\varphi-\varphi')\,]^{-3r-1/2} P_r(\alpha_R, \alpha'_R)\, e^{\nu[\psi(\check{z})-\psi'(\check{z}')]}$$

<u>où</u> φ <u>et</u> φ' <u>sont définis près de</u> $R_X z$ <u>par</u>

$$\varphi(x) = \varphi_R(\check{R}_X^{-1}x\cap\check{V}),\ \varphi'(x) = \varphi'_R(\check{R}_X^{-1}x\cap\check{V}');$$

$$\mathrm{Hess}\,(\varphi-\varphi') = \{\mathrm{Hess}_x[\varphi(x)-\varphi'(x)]\}_{x=R_X z};$$

P_r <u>est une fonction sesquilinéaire des valeurs en</u> $\check{z}$ <u>et</u> $\check{z}'$ <u>des dérivées d'ordres</u> $\leq 2(r-s)$ <u>des</u> $\alpha_{R,s}$ <u>et</u> $\alpha'_{R,s}$ $(s\leq r)$;

<u>les coefficients de cette fonction dépendent de l'allure en</u> z <u>de</u> V <u>et</u> V';

(5.7) $$P_o(\alpha_R, \alpha'_R) = \alpha_{R,o}(\check{z})\,\overline{\alpha'_{R,o}(\check{z}')}.$$

4°) [<u>Invariance par</u> $Sp_2(\ell)$]. - <u>Soit</u> $S\in Sp_2(\ell)$; <u>sous l'hypothèse plus stricte que</u> (5.1) :

$$\check{U}_R \in F_o(\check{V}\setminus\check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{SR}),\ \check{U}'_R \quad o \quad R \quad SR$$

on a

(5.8) $$(U_R \check{|}\, \check{U}'_R) = (S\,\check{U}_R \check{|}\, S\,\check{U}'_R).$$

<u>Preuve de</u> 1°), 2°) <u>et</u> 3°). - u et u' ont des expressions du type :

$$u(\nu, x) = \sum_{j \in J} v_j(\nu, x)\, e^{\nu\varphi_j(x)}, \quad \text{où} \quad v_j(\nu, x) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} v_{j,r}(x) ;$$

$$u'(\nu, x) = \sum_{k \in K} v'_k(\nu, x)\, e^{\nu\varphi'_k(x)}, \quad \text{où} \quad v'_k(\nu, x) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} v'_{k,r}(x) ;$$

J et K sont des ensembles finis. Vu le 1°) du théorème 3,

$$(u \mid u') = \tilde{\int_X} u(\nu, x)\, \overline{u'(\nu, x)}\, d^{\ell} x$$

ne dépend que de l'allure des couples $v_j\, e^{\nu\varphi_j}$, $v'_k\, e^{\nu\varphi'_k}$ en les points critiques de $\varphi_j - \varphi'_k$, c'est-à-dire en les points

$$x \in X \text{ tels que } \varphi_{j,x} = \varphi'_{k,x} .$$

Autrement dit, $(\check{U}_R \mid \check{U}'_R)$ ne dépend que de l'allure de $\check{U}_R$ et $\check{U}'_R$ en les couples de points $(\check{z}, \check{z}') \in \check{V} \times \check{V}'$ tels que

$$\check{R}\,\check{z} = \check{R}\,\check{z}' = (x, \varphi_{j,x}) = (x, \varphi'_{k,x}) ;$$

ces couples sont les couples de points de $\check{V} \times \check{V}'$ se projetant en un même point z de $V \cap V'$. D'où 1°), 2°) et, vu (3.2) et (3.3), 3°).

<u>Preuve de</u> 4°). - Le lemme 1.1 et le 1°) du théorème 4.1.

L'invariance par $Sp_2(\ell)$ de $(\check{U}_R \mid \check{U}_{R'})$, qu'énonce ce 4°) du théorème 5.1 , pose le problème suivant :

donner des expressions invariantes des seconds membres de (5.4) et (5.6) .
Les théorèmes 5.2 et 5.3 donneront de telles expressions mod $\frac{1}{\nu}$.

Notations . - Soient η et η' des mesures régulières > 0 de $\check{V}$ et $\check{V}'$; définissons :

$$\arg \eta = \arg \eta' = 0 .$$

Supposons $\check{V}$ et $\check{V}'$ munis chacun d'une 2-orientation :

$$\text{si } \check{z} \in \check{V} , x = \check{R}_X \check{z} , \text{ alors :}$$

$$\frac{d^\ell(\check{R}_X \check{z})}{\eta} = \frac{d^\ell x}{\eta} \text{ est une fonction } \check{V} \to \mathbb{R} ,$$

nulle sur $\check{\Sigma}_R$, dont le ch. I , § 3 , coroll. 3 a précisé l'argument :

$$\arg \frac{d^\ell(\check{R}_X \check{z})}{\eta} = \pi \, m_R(\check{z}) \mod 4\pi .$$

Définissons $\beta_o : \check{V} \to \mathbb{C}$ par :

$$\beta_o(\check{z}) = \left[\frac{d^\ell(\check{R}_X \check{z})}{\eta} \right]^{1/2} \alpha_{R,o}(\check{z}) , \text{ où } \check{z} \in \check{V} . \tag{5.9}$$

Vu les formules (4.6) et (4.8) du théorème 4 , β_o est invariant quand , sans changer V ni V' , on remplace R par S R ; β_o sera nommée amplitude lagrangienne de $\check{U}_R$; cette amplitude dépend donc des choix de la mesure η de $\check{V}$ et de la 2-orientation de $\check{V}'$.

En portant dans (5.4) l'expression (5.9) de $\alpha_{R,0}$ et $\alpha'_{R,0}$ on obtient :

THEOREME 5.2 . - <u>Supposons</u> $V = V'$, <u>ce qui implique</u> $\psi = \psi'$; notons β_o et β'_o les amplitudes lagrangiennes de U_R et U'_R . Alors

$$(5.10) \qquad (\check{U}_R \check{|} \check{U}'_R) = \int_{z \in V} \sum_{\check{z},\check{z}'} \beta_o(\check{z})\, \overline{\beta'_o(\check{z}')}\, e^{\nu[\psi(\check{z}) - \psi(\check{z}')]}\, \eta \mod \frac{1}{\nu}$$

<u>où</u> $\check{z}$ <u>et</u> $\check{z}'$ <u>sont les points de</u> Supp $\check{U}'_R$ <u>et</u> Supp $\check{U}'_R$ <u>se projetant en</u> z.

<u>Notations</u> (suite) . - Notons ψ et ψ' <u>les phases lagrangiennes</u> de V et V' (ch. I , § 3 , (1.7)) . Faisons l'hypothèse 3°) du théorème 5.1 ; soient λ_4 et $\lambda'_4 \in \Lambda_4(Z)$, tangents respectivement en $\check{z}$ et $\check{z}'$ aux variétés 2 - orientées $\check{V}$ et $\check{V}'$; soient λ et λ' leurs images naturelles dans $\Lambda(Z)$; soit η_o (et η'_o) la mesure de λ (et λ') , invariante par translation et égale à η (et η') en $\check{z}$ (et $\check{z}'$) . V et V' sont supposés transverses (3° du théorème 5.1) ; donc

$$(5.11) \qquad Z = \lambda \oplus \lambda' \; ; \; \eta_o \wedge \eta'_o \text{ est une mesure de } Z .$$

Vu (5.1) et le 1°) du théorème 5.1) , les deux membres de (5.6) sont nuls si l'on ne suppose pas :

$$(5.12) \qquad \check{z} \in \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \; , \; \check{z}' \in \check{V}' \setminus \check{\Sigma}'_R$$

c'est-à-dire :

$$R\lambda \text{ et } R\lambda' \text{ transverses à } X^*.$$

En portant dans (5.6) l'expression (5.9) de $\alpha_{R,0}$ et $\alpha'_{R,0}$ on obtient, sous l'hypothèse (5.12) :

$$(5.13) \qquad \left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2} (\check{U}_R \check{|} \check{U}'_R) =$$

$$[\text{Hess}\,(\varphi - \varphi')]^{-1/2} \left[\frac{\eta}{d^{\ell}(\check{R}_X \check{z})}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\overline{\left(\frac{\eta'}{d^{\ell}(\check{R}_X \check{z}')}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \beta_o(\check{z})\, \overline{\beta'_o(\check{z}')}\, e^{\nu[\psi(\check{z}) - \psi'(\check{z}')]} \mod \frac{1}{\nu} .$$

Le lemme 5.1 transforme cette formule en la suivante :

THEOREME 5.3 . - Si V et V' sont munis chacun d'une 2-orientation , sont transverses et ne se coupent qu'en un point z , projection d'un seul point $\check{z}$ de Supp $\check{U}_R$ et d'un seul point $\check{z}'$ de Supp $\check{U}'_R$, alors :

$$(5.14)\qquad \left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2} (\check{U}_R \mid \check{U}'_R) =$$

$$\left|\frac{\eta_o \wedge \eta'_o}{d^{2\ell}z}\right|^{1/2} \beta_o(\check{z})\, \beta'_o(\check{z}')\, e^{\nu[\psi(\check{z}) - \psi'(\check{z}')] - \frac{\pi i}{2} m(\lambda'_4, \lambda_4)} \mod \frac{1}{\nu} .$$

où : m est l'indice de Maslov , défini mod 4 (Ch. I , §3, n°3) ; $\eta_o \wedge \eta'_o$ et $d^{2\ell}z$ sont les mesures de Z définies respectivement par (5.11) et (5.15) .

LEMME 5.1 . - 1°) La structure symplectique de Z définit sur Z une mesure invariante par les translations et par Sp(Z) :

$$(5.15)\qquad d^{2\ell}z = \frac{1}{\ell !}(dx \wedge dp)^{\ell} = (-1)^{\ell(\ell-1)/2}\, d^{\ell}x \wedge d^{\ell}p$$

où :

$$Rz = (x , p) \ ; \ dx \wedge dp = \sum_{j=1}^{\ell} dx^j \wedge dp_j ,$$

$\{x^j\}$ et $\{p_j\}$ étant des coordonnées duales de X et X^* .

2°) Sous l'hypothèse (5.12) , avec les notations (5.9) :

$$(5.16)\qquad \left| \text{Hess}\,(\varphi - \varphi')\, \frac{d^{\ell}(\check{R}_X \check{z})}{\eta}\, \frac{d^{\ell}(\check{R}_X \check{z}')}{\eta'} \right| = \left| \frac{d^{2\ell}z}{\eta_o \wedge \eta'_o} \right| ;$$

$$(5.17)\qquad \arg\left[\text{Hess}\,(\varphi - \varphi')\, \frac{d^{\ell}(\check{R}_X \check{z})}{\eta}\, \overline{\left(\frac{d^{\ell}(\check{R}_X \check{z}')}{\eta'}\right)}\right] = \pi\, m(\lambda'_4, \lambda_4) \mod 4\pi .$$

Preuve de 1°) . - La valeur de $dp \wedge dx$ sur un couple de vecteurs z , z' est [z , z'] .

Preuve de (5.16) . - Puisque $R\lambda$ et $R\lambda'$ sont lagrangiens et transverses à X^* d'après (5.12), leurs équations sont du type :

(5.18) $$R\lambda \ : \ p = \Phi_x(x) \ ; \ R\lambda' \ : \ p = \Phi'_x(x) ,$$

Φ et Φ' étant deux formes quadratiques : $X \to \mathbb{R}$.

Puisque λ et λ' sont transverses :

$$\text{Hess}\,(\Phi - \Phi') \neq 0 .$$

Vu (5.11) , tout $z \in Z$ se décompose d'une façon unique en la somme d'un vecteur de λ et d'un vecteur de λ' :

$$R\,z = (x + x' \ , \ \Phi_x(x) + \Phi_{x'}(x')) \in Z(\ell) ,$$

où x et $x' \in X$ et sont uniques . D'où, vu (5.15) :

$$d^{2\ell} z = (-1)^{\ell(\ell-1)/2}\, d^\ell\,[x + x'] \wedge d^\ell\,[\Phi_x(x) + \Phi'_{x'}(x')]$$

$$= (-1)^{\ell(\ell-1)/2}\, d^\ell\,[x + x'] \wedge d^\ell\,[\Phi_x(x) - \Phi'_x(x)]$$

$$= (-1)^{\ell(\ell+1)/2}\ \text{Hess}\,(\Phi - \Phi')\ d^\ell x \wedge d^\ell x'$$

$$= (-1)^{\ell(\ell+1)/2}\ \text{Hess}\,(\Phi - \Phi')\ \frac{d^\ell(R_X\zeta)}{\eta_o}\ \frac{d^\ell(R_X\zeta')}{\eta'_o}\ \ \eta_o \wedge \eta'_o$$

où $\zeta \in \lambda$, $\zeta' \in \lambda'$; d'où (5.16) .

Preuve de (5.17) . - Par définition [ch. I, § 3 ; coroll. 3 , (3.2) et (3.3)]

$$\arg \frac{d^\ell(\check{R}_X \check{z})}{\eta} = \pi\, m_R(\check{z}) = \pi\, m\,(X^*_4 , R\lambda_4) \qquad \text{mod } 4\pi ;$$

donc :

$$\pi\, m\,(\lambda'_4 , \lambda_4) - \arg \frac{d^\ell(\check{R}_X \check{z})}{\eta} + \arg \frac{d^\ell(\check{R}_X \check{z}')}{\eta'} =$$

$$\pi\, m\, (\lambda_4', \lambda_4) - \pi\, m(X_4^*, R\lambda_4) + \pi\, m\, (X_4^*, R\lambda_4') =$$

$$\pi \text{ Inert } (X^*, R\lambda', R\lambda) \bmod 4\pi ,$$

vu ch I , § 2 , (8.2) ; pour prouver (5.17) , il suffit donc, vu la définition de arg Hess [Ch I , § 1 , (2.1)],de prouver :

$$(5.19) \qquad \text{Inert } (\Phi - \Phi') = \text{Inert } (X^*, R\lambda', R\lambda) .$$

Preuve de (5.19) . - Ecrivons les équations de $R\lambda$, $R\lambda'$ et X^* :

$R\lambda : p = \Phi_x(x)$; $\qquad R\lambda' : p' = \Phi'_{x'}(x')$; $\qquad X^* : x'' = 0$.

La définition d'Inert. (chap. I , § 2, n° 4) emploie :

$$z \in R\lambda, z' \in R\lambda' , z'' \in X^* \text{ tels que } z + z' + z'' = 0 ;$$

notons :

$$z = (x , p) , z' = (x' , p') , z'' = (x'' , p'') ;$$

d'où :

$$x + x' = 0 , x'' = 0 , p + p' + p'' = 0 ,$$

$$[z'' , z] = < p'' , x > = - < p , x > - < p' , x > =$$

$$- < \Phi_x(x) , x > + < \Phi'_x(x) , x > = 2\, \Phi'(x) - 2\, \Phi(x) ;$$

par suite :

$$\text{Inert } (R\lambda , R\lambda' , X^*) = \text{Inert } (\Phi' - \Phi)$$

D'où (5.19) , vu ch I , § 2 , (4.4) et la définition 2.3 , chap I , § 1 de l'inertie d'une forme .

6 . OPERATEURS DIFFERENTIELS FORMELS . - Définitions 6.1. - Soit Ω un ouvert de Z . Notons $F^0(\Omega)$ l'ensemble des fonctions formelles de phase nulle

$$a^{\circ} = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \alpha_r : \Omega \to F^{\circ} \qquad (6.1)$$

telles que les

$$\alpha_r : \Omega \to \mathbb{C}$$

soient indéfiniment différentiables. Munissons l'espace vectoriel $F^{\circ}(\Omega)$ de la topologie que définit le système de voisinages $W(K, p, r, \epsilon)$ de l'origine que voici :

K est une partie compacte de Ω ; $p, r \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in \overset{\circ}{R}_+$;

$a^{\circ} \in W(K, p, r, \epsilon)$ signifie que, sur K, les dérivées d'ordres $\leq p$ des α_s $(s \leq r)$ sont de modules $< \epsilon$.

Nous dirons que a° est un polynome si

$$(\nu, z) \mapsto a^{\circ}(\nu, z)$$

est un polynome en $\frac{1}{\nu}$ et en les 2ℓ coordonnées de z.

D'après le théorème de Weierstrass : l'ensemble des polynomes de $F^{\circ}(Z)$ est partout dense dans $F^{\circ}(\Omega)$.

$F^{\circ}(\Omega(\ell))$ se définit de même en remplaçant Ω par un domaine $\Omega(\ell)$ de $Z(\ell) = X \oplus X^*$.

Tout 1-repère R de Z (donc, a fortiori, tout 2-repère R) induit un isomorphisme

$$F^{\circ}(\Omega) \ni a^{\circ} \mapsto a^{\circ}_R \in F^{\circ}(\Omega(\ell)), \quad \text{où} \quad \Omega(\ell) = R\,\Omega,$$

défini par la formule :

$$(\forall \nu, z) \quad a^{\circ}(\nu, z) = a^{\circ}_R(\nu, Rz). \qquad (6.2)$$

Les formules (3.4) du ch. I, § 1

$$\begin{cases} a^{+}_R(\nu, x, p) = e^{\frac{1}{2\nu}\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle} a^{\circ}_R(\nu, x, p) \\ a^{-}_R(\nu, p, x) = e^{-\frac{1}{2\nu}\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle} a^{\circ}_R(\nu, x, p) \end{cases} \qquad (6.3)$$

définissent deux automorphismes de $F^o(Z(\ell))$, inverses l'un de l'autre :

$$\overset{o}{a}_R \mapsto \overset{+}{a}_R \ , \ \overset{o}{a}_R \mapsto \overset{-}{a}_R \ .$$

La définition 6.2 des opérateurs différentiels formels repose sur le lemme suivant :

LEMME 6.1. - Soit

$$u = \alpha\, e^{\nu\varphi} \in F(X) \ , \quad \text{où} \quad \alpha = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}\, \alpha_r \ . \tag{6.4}$$

En un point critique x de la phase φ, on a :

$$\left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^h u(\nu, x) = 0 \mod \frac{1}{\nu^{|h|/2}} \ .$$

<u>Preuve</u>. - Il suffit de traiter le cas où $\alpha = \alpha_0$. Alors en un point critique de φ :

$$\left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)^h u = \frac{1}{\nu^{|h|}}\ P_h\, e^{\nu\varphi} \qquad (h : \text{multi-indice})$$

où P_h est un polynome en les dérivées de α d'ordres $\in [0, |h|]$ et en les dérivées de $\nu\varphi$ d'ordres $\in [2, |h|]$, puisque $\varphi_x = 0$; chaque monôme de P_h est un produit de dérivées dont la somme des ordres est $|h|$. Donc ν, dans un tel monôme, a une puissance $\leq |h|/2$. D'où le lemme.

<u>Définition</u> 6.2. - Notons

$$\Theta(y, x) = \varphi(x) - \varphi(y) - \langle \varphi_y(y), x - y \rangle \tag{6.5}$$

le reste, au point y, de la série de Taylor, limitée à l'ordre 1, de la phase φ de (6.4).

Associons à l'élément $\overset{o}{a}$ de $F^o(\Omega)$ et au repère R l'endomorphisme <u>local</u> a_R de $F(X)$ et $F_o(X)$, nommé <u>opérateur différentiel formel</u>, que définissent les deux formules équivalentes :

$$(a_R u)(\nu, y) = \tag{6.6}$$

$$\sum_h \frac{1}{h!} \left\{ \frac{\partial^{|h|} \overset{+}{a}_R}{\partial p^h} (\nu , x , p) \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}\right)^h [\alpha(\nu , x)\, e^{\nu \Theta (y , x)}] \right\}_{\substack{x=y \\ p=\varphi_y(y)}} e^{\nu \varphi (y)} =$$

$$\sum_h \frac{1}{h!} \left\{ \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}\right)^h \left[\frac{\partial^{|h|} \bar{a}_R}{\partial p^h} (\nu , p , x)\, \alpha (\nu , x)\, e^{\nu \Theta (y , x)} \right] \right\}_{\substack{x=y \\ p=\varphi_y(y)}} e^{\nu \varphi (y)}$$

Chacune de ces deux formules a un sens, vu le lemme 6.1, quand $(y , \varphi_y) \in \Omega (\ell)$: nous dirons que a_R <u>est défini</u> sur $\Omega (\ell) = R\,\Omega$.

<u>Preuve de l'équivalence de ces deux formules</u> . - La formule de Leibniz donne (cf. ch I , §1 , preuve du lemme 3.1) :

$$\sum_h \frac{1}{h!} \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}\right)^h \left[\frac{\partial^{|h|} \bar{a}_R (\nu , p , x)}{(\partial p)^h} v (\nu , x) \right] =$$

$$\sum_{j , k} \frac{1}{j!\,k!} \frac{\partial^{|2 j + k|} \bar{a}_R (\nu , p , x)}{(\partial p)^{j + k} (\nu \partial x)^j} \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}\right)^k v (\nu , x) =$$

$$\sum_k \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} \overset{+}{a}_R (\nu , x , p)}{(\partial p)^k} \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}\right)^k v (\nu , x) ,$$

car, vu (6.3) :

$$\sum_j \frac{1}{j!} \frac{\partial^{|2 j|} \bar{a}_R (\nu , p , x)}{(\partial p)^j (\nu \partial x)^j} = e^{\frac{1}{\nu} \langle \frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial p} \rangle} \bar{a}_R (\nu ,p ,x) = \overset{+}{a}_R (\nu ,x ,p) .$$

<u>Justification de la définition 6.2</u>. - Montrons qu'elle équivaut à celle du n° 1 quand a^o est un polynome , c'est-à-dire quand a_R est un opérateur différentiel classique, à coefficients polynomiaux en $(\frac{1}{\nu}, x)$. Dans ce cas, (6.6) signifie :

$$(a_R\, u) (\nu , x) = \left\{ \overset{+}{a}_R \left(\nu , x , p + \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}\right) [u(\nu , x)\, e^{- \nu \langle p , x - y \rangle}] \right\}_{\substack{y=x \\ p=\varphi_x}} ;$$

or :

$$a_R^+ (\nu , x , p + \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}) [u(\nu, x) e^{-\nu<p , x-y>}] =$$

$$e^{-\nu<p , x-y>} a_R^+ (\nu, x , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}) u (\nu , x) ;$$

on a donc, au sens donné par le n° 1 à $a^+ (\nu, x , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}) = a^- (\nu , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} , x)$:

$$(a_R u) (\nu , x) = a_R^+ (\nu , x , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}) u (\nu , x) = a_R^- (\nu , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} , x) u (\nu , x) .$$

<u>Notations</u> . - Nous noterons :

$$(a_R u) (\nu , x) = a_R^+ (\nu , x , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}) u (\nu , x) = a_R^- (\nu , \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x} , x) u (\nu , x) .$$

<u>Définition</u> 6.3. - Soit $V \subset \Omega$, $a^\circ \in F^\circ (\Omega)$. Notons a_R l'endomorphisme <u>local</u> unique de $F_0 (\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R , R)$ tel que :

(6.7) $$a_R \Pi_R = \Pi_R a_R ;$$

a_R , étant local, se prolonge en un endomorphisme de $F (\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R , R)$ dont voici les propriétés :

THEOREME 6. - 1°) <u>L'opérateur différentiel formel</u> a_R <u>est local</u> (au sens du 1°) théorème 4.1) ; <u>donc</u>

$$\mathrm{Supp}\, (a_R U_R) \subset \mathrm{Supp}\, U_R \cap \mathrm{Supp}\, (a^\circ) .$$

2°) <u>L'application</u> :

(6.8) $$F^\circ (\Omega) \times F (\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R , R) \ni (a_R , U_R) \mapsto a_R U_R \in F (\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R , R)$$

<u>est continue</u> .

3°) <u>Tout</u> $S \in Sp_2 (\ell)$ <u>transforme</u> a_R <u>en un opérateur</u>

$$a_{SR} = S a_R S^{-1}$$

défini comme suit :

$$a_{SR}(S\check{U}_R) = S(a_R\check{U}_R) \quad \text{pour tout} \quad \check{U}_R \in F(\check{V}\setminus\sum_R \cup \sum_{SR}, R) .$$

a_R et son transformé a_{SR} sont associés à la même fonction a° , qui vérifie :

$$(6.9) \qquad (\forall \nu , z)\ a^\circ(\nu , z) = a_R^\circ(\nu , Rz) = a_{SR}^\circ(\nu , SRz) .$$

4°) Pour que les opérateurs différentiels formels a_R et b_R soient adjoints, c'est-à-dire pour que :

$$(\forall \check{U}_R , \check{U}'_R)\ (a_R\check{U}_R , \check{U}'_R) = (\check{U}_R , b_R\check{U}'_R) ,$$

il faut et suffit que :

$$(\forall \nu , z) \qquad b^\circ(\nu , z) = \overline{a^\circ(\nu , z)} .$$

5°) Si a_R et b_R sont deux opérateurs différentiels associés aux éléments a° et b° de $F^\circ(Z)$, alors leur composé $c_R = a_R \circ b_R$ est associé à l'élément c° de $F^\circ(Z)$ défini par la formule

$$(6.10) \qquad c^\circ(\nu , z) = \left\{ e^{-\frac{1}{2\nu}\left[\frac{\partial}{\partial z} , \frac{\partial}{\partial z'}\right]} \left[a^\circ(\nu , z)\, b^\circ(\nu , z')\right]\right\}_{z=z'} ,$$

où :

$$(6.11) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial z} , \frac{\partial}{\partial z'}\right] = \left\langle\frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial p'}\right\rangle - \left\langle\frac{\partial}{\partial x'} , \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle \text{pour} \quad Rz = (x,p) , Rz' = (x', p).$$

est évidemment indépendant de R .

Preuve de 1°) . - La définition de a_R .

Preuve de 2°) . - La définition de a_R et des topologies de $F^\circ(\Omega)$ (n° 6) et de $F(\check{V}\setminus\sum_R , R)$ (n° 2) .

Preuve de 3°) 4°) et 5°) . - Le ch I , § 1 (théorème 3.1 , théorème 3.2 et lemme

3.2) , dans le cas particulier où a° est un polynôme . Ce cas particulier implique le cas général, puisque (6.8) est continu et que les polynomes sont partout denses dans $F^{\circ}(\Omega)$.

LES COROLLAIRES 3.1 (opérateur adjoint) et 3.2 (opérateur auto-adjoint) du ch I , § 1 s'appliquent évidemment aux opérateurs différentiels formels.

§ 2 . Analyse lagrangienne .

0. SOMMAIRE . - C'est en synthétisant les propriétés des fonctions formelles et des opérateurs différentiels formels, obtenues au § 1 , que ce § 2 définit et étudie les opérateurs lagrangiens, les fonctions lagrangiennes et leur produit scalaire, c'est-à-dire les trois notions qui sont l'objet essentiel de cet article.

Le n° 1 définit les opérateurs lagrangiens et étudie leurs inverses .

Le n°2 définit les fonctions lagrangiennes sur le revêtement $\check{V}$ d'une variété lagrangienne V ; leur produit scalaire $(.\check{|}.)$ est défini quand leurs supports sont compacts

Le n° 3 peut alors définir les fonctions lagrangiennes sur V ; leur produit scalaire $(.|.)$ est défini quand l'intersection de leurs supports est compacte . Ce n° 3 exige la donnée d'un nombre $\nu_o \in i\,[\,0\,,\infty[$: il emploie " la restriction" à la valeur ν_o de ν des séries formelles définissant les expressions U_R d'une fonction formelle U .

Ce processus de définition des fonctions lagrangiennes sur V a une justification théorique, qui est la possibilité de définir leur produit scalaire $(.|.)$, et une justification pragmatique, que voici : c'est le processus de certains " calculs approchés". Par exemple, en physique quantique, la constante de Planck h est considérée comme un infiniment petit, $\frac{2\pi i}{h}$ jouant le rôle de notre variable $\nu \in i[\,1\,,\infty]$, sans que soient comparés les ordres de grandeur des valeurs numériques prises par les termes en jeu quand on donne à h sa valeur physique : on lui donne cette valeur physique quand on a achevé les calculs supposant h infiniment petit. Un autre exemple antérieur est celui de la mécanique céleste (cf. H. Poincaré)

H. Poincaré a expliqué comment un tel processus est un calcul approché, capable de prédire avec une précision extrême les phénomènes célestes à l'aide de séries divergentes, dont on ne conserve finalement que les premiers termes . V.P. Maslov veut, par ce processus, obtenir des "asymptotiques", c'est-à-dire faire des calculs approchés. Le Chap. III appliquera ce processus à des cas où il n'est certainement pas un calcul approché et retrouvera les résultats numériques qui sont en accord avec les résultats expérimentaux. Expliciter ce processus est donc bien "un problème qui se pose et non pas un problème qu'on pose" , au sens où l'entendait H. Poincaré .

1. OPERATEURS LAGRANGIENS . - Soit Z un espace symplectique et Ω un ouvert de Z.

Définition 1.1. - Soit $a^o \in F^o(\Omega)$ (Chap. II , § 1, défin. 6.1) ; soit

$$a_R = a_R^+ \left(\nu, x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right) = a_R^- \left(\nu, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$$

l'opérateur différentiel formel associé à a^o et au 1 - repère R (Chap. II , § 1, défin. 6.2) . L'opérateur lagrangien associé à a^o est l'ensemble $\{a_R\}$ de ces opérateurs différentiels formels a_R (a^o donné ; R arbitraire) ; a_R est nommé expression de a dans le repère R .

Le théorème 2.3 justifiera cette terminologie .

Nous dirons que a est défini sur Ω; définissons :

$$\mathrm{Supp}\,(a) = \mathrm{Supp}\,(a^o) .$$

Si

$$(\forall\, \nu, z) \quad a^o(\nu, z) = 1 ,$$

alors a est noté

$$a = 1 .$$

La formule (2.9) justifiera la

Définition 1.2 . - Deux opérateurs lagrangiens a et b associés à a^o et $b^o \in F^o(\Omega)$ sont adjoints quand

$$(\forall\, \nu, z) \quad b^o(\nu, z) = \overline{a^o(\nu, z)} ,$$

c'est-à-dire (Chap. II , § 1 , théorème 6.1 4°)) quand $(\forall R)$ a_R et b_R sont adjoints.

Notation . - L'adjoint de a est noté a^* .

La formule (2.2) et la formule (1.2), dont elle résulte, justifieront la

Définition 1.3. - Le composé $\overset{\circ}{a} \circ \overset{\circ}{b}$ de $\overset{\circ}{a}$ et $\overset{\circ}{b} \in \overset{\circ}{F}(\Omega)$ vaut, par définition :

(1.1) $$(\overset{\circ}{a} \circ \overset{\circ}{b})(\nu, z) = \left\{ e^{-\frac{1}{2\nu}\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'}\right]} \overset{\circ}{a}(\nu, z) . \overset{\circ}{b}(\nu, z') \right\}_{z=z'},$$

où $\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'}\right]$ est défini par (6.11) § 1.

Le composé $a \circ b$ des opérateurs lagrangiens a et b est l'opérateur lagrangien associé à $\overset{\circ}{a} \circ \overset{\circ}{b}$.

Vu le 5°) du théorème 6,

(1.2) $$(a \circ b)_R = a_R \circ b_R$$

La composition des a_R étant associative, la composition des $\overset{\circ}{a}$ et celle des a sont associatives. Il est facile de le vérifier directement en constatant que (1.1) implique :

(1.3) $$(\overset{\circ}{a} \circ \overset{\circ}{b} \circ \overset{\circ}{c})(\nu, z) =$$

$$\left\{ e^{-\frac{1}{2\nu}\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'}\right] - \frac{1}{2\nu}\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z''}\right] - \frac{1}{2\nu}\left[\frac{\partial}{\partial z'}, \frac{\partial}{\partial z''}\right]} \overset{\circ}{a}(\nu,z) . \overset{\circ}{b}(\nu,z') . \overset{\circ}{c}(\nu,z'') \right\}_{z=z'=z''}.$$

Cette formule s'étend aisément à la composition d'un nombre quelconque d'éléments de $\overset{\circ}{F}(\Omega)$

Evidemment :

(1.4) $$\text{Supp}\,(a \circ b) \subset \text{Supp}\,(a) \cap \text{Supp}\,(b) ;$$

(1.5) $$(\overset{\circ}{a} \circ \overset{\circ}{b})(\nu, z) = \overset{\circ}{a}(\nu, z) . \overset{\circ}{b}(\nu, z) \bmod \frac{1}{\nu},$$

le second membre étant le produit dans $\overset{\circ}{F}$ des valeurs de $\overset{\circ}{a}$ et $\overset{\circ}{b}$;

(1.6) $$(\overset{\circ}{a} \circ \overset{\circ}{a})(\nu, z) = \left\{ \operatorname{ch}\frac{1}{2\nu}\left[\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z'}\right] \overset{\circ}{a}(\nu,z) . \overset{\circ}{a}(\nu,z') \right\}_{z=z'}.$$

L'ensemble des opérateurs lagrangiens définis sur Ω est donc une algèbre non commutative $\overset{\circ}{F}(\Omega)$ sur l'algèbre $\overset{\circ}{F}$ des nombres formels de phase nulle ; $\overset{\circ}{F}(\Omega)$ possède un élément unité.

THEOREME 1.1. - (Inverse d'un opérateur lagrangien). - Pour que, dans l'algèbre des opérateurs lagrangiens définis sur Ω , l'opérateur a possède un inverse, il faut et suffit que

$$(\forall z \in \Omega) \qquad a^{\circ}(\nu , z) \neq 0 \quad \text{mod} \frac{1}{\nu} \quad . \tag{1.7}$$

Rappelons que, par définition, $a^{\circ}(\nu , z)$ est la série formelle :

$$a^{\circ}(\nu , z) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} a_r(z) \; ; \tag{1.8}$$

la condition (1.7) signifie :

$$(\forall z \in \Omega) \qquad a_0(z) \neq 0 . \tag{1.7}^{\text{bis}}$$

Preuve . - Les conditions équivalentes (1.7) et $(1.7)^{\text{bis}}$ sont nécessaires, vu (1.5).

Réciproquement, si ces conditions sont vérifiés, un inverse à droite a' de a est un opérateur associé à un élément

$$a'^{\circ}(\nu , .) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} a'_r(.)$$

de $F^{\circ}(\Omega)$ vérifiant :

$$\{ e^{-\frac{1}{2\nu}\left[\frac{\partial}{\partial z} , \frac{\partial}{\partial z'}\right]} a^{\circ}(\nu , z) \, a'^{\circ}(\nu , z')\}_{z = z'} = 1 , \tag{1.9}$$

c'est-à-dire :

$$a_0(z) \, a'_0(z) = 1 \tag{1.10$_0$}$$

$$a_0(z) \, a'_r(z) = c_r(z) , \tag{1.10$_r$}$$

où $c_r(z)$ est une combinaison linéaire des

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{s} a_t(z) \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{s'} a'_{t'}(z) \right]$$

tels que $0 \leq |s| = |s'| = r - t - t'$, $t' < r$; ces conditions déterminent a' .

a possède donc inverse à droite et de même un inverse à gauche, qui sont identiques puisque la composition des éléments de $F^{\circ}(\Omega)$ est associative . D'où le théorème.

La définition des produits scalaires (n° 2 et n° 3) emploiera la

<u>Définition</u> 1.4 . - Une <u>décomposition de l'unité</u> est un ensemble $\{a_j\}$ d'opérateurs lagrangiens, définis sur Z , tels que :

$\bigcup_j \operatorname{Supp} a_j = Z$ soit un recouvrement localement fini de Z ;

$$\sum_j a_j = 1 \quad \text{(opérateur unité)} . \tag{1.11}$$

Cette décomposition est dite plus fine qu'un recouvrement ouvert $\bigcup_k \Omega_k = X$ de X quand tout $\operatorname{Supp} a_j$ appartient à au moins l'un des Ω_k .

THEOREME 1.2. - (<u>Décomposition de l'unité</u>) . - 1°) <u>Il existe des décompositions de l'unité plus fines qu'un recouvrement ouvert donné de</u> X .

2°) <u>On peut les choisir telles que leurs éléments</u> a_j <u>soient auto-adjoints</u> .

3°) <u>Plus précisement, on peut les choisir telles que chaque</u> a_j <u>soit du type</u> :

$$a_j = b_j^* \circ b_j \ , \quad \operatorname{Supp} b_j = \operatorname{Supp} a_j \ ,$$

b_j étant un opérateur lagrangien et b_j^* son adjoint .

<u>Preuve de</u> 1°) <u>et</u> 2°) . - Il suffit de prouver le théorème quand on remplace les opérateurs a_j par des fonctions C^∞ $\overset{\circ}{a}_j : Z \to \mathbb{R}$, indépendantes de ν ; il est alors classique .

<u>Preuve de</u> 3°) . - On peut choisir, les $\overset{\circ}{b}_j : Z \to \mathbb{R}$ étant C^∞ :

$$\overset{\circ}{a}_j = (\overset{\circ}{b}_j)^2, \text{ c'est-à-dire } \overset{\circ}{a}_j(z) = [\overset{\circ}{b}_j(z)]^2 \text{ dans } \mathbb{R} ;$$

d'où, vu (1.6) et (1.11) :

$$\operatorname{Supp} \overset{\circ}{b}_j = \operatorname{Supp} \overset{\circ}{a}_j \ ; \ \sum_j \overset{\circ}{b}_j \circ \overset{\circ}{b}_j = \sum_{r \in N} \frac{1}{\nu^{2r}} \beta_r \ , \text{ où } \beta_r : Z \to \mathbb{R} \ , \beta_0 = 1 \ .$$

Cherchons

$$c^{\circ} = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^{2r}} \gamma_r \quad \text{où} \quad \gamma_r : Z \to \mathbb{R} \, , \, \gamma_0 = 1 \, ,$$

tel que

$$c^{\circ} \circ c^{\circ} = \sum_j b_j^{\circ} \circ b_j^{\circ} \, ,$$

c'est-à-dire tel que

$$\left\{ \operatorname{ch} \frac{1}{2\nu} \left[\frac{\partial}{\partial z} , \frac{\partial}{\partial z'}\right] \sum_{t\,t'} \frac{1}{\nu^{2(t+t')}} \gamma_t(z) \gamma_{t'}(z') \right\}_{z=z'} = \sum_r \frac{1}{\nu^{2r}} \beta_r \, ;$$

cette condition définit γ_r en fonction de β_r et des

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{s} \gamma_t(z) \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{s'} \gamma_{t'}(z) \right] \text{ tels que } 0 \leq |s| = |s'| = 2(r-t-t') \, , 0<t<r \, ;$$

c° existe donc, est unique et a un inverse, vu le théorème 1.1. Donc :

$$\operatorname{Supp} b_j = \operatorname{Supp} a_j \, ; \; b_j = b_j^* \; ; \; c = c^* \, ;$$

$$\sum_j b_j \circ b_j = c \circ c \, ;$$

d'où

$$\sum_j (b_j \circ c^{-1})^* \circ (b_j \circ c^{-1}) = 1 \, , \; \operatorname{Supp} \; b_j \circ c^{-1} = \operatorname{Supp} a_j \, ;$$

ce qui prouve le théorème .

2. FONCTIONS LAGRANGIENNES SUR $\check{V}$. - Soit Z un espace symplectique, muni d'une géométrie 2-symplectique ; soit V une variété lagrangienne de Z et $\check{V}$ son revêtement universel .

Le théorème 4.1 du Chap. II , § 1 justifie la

<u>Définition</u> 2.1 . - Une <u>fonction lagrangienne</u> $\check{U}$ sur $\check{V}$ est constituée par la donnée, pour chaque 2-repère R , d'une fonction formelle $\check{U}_R$ sur $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$, ces fonctions formelles vérifiant

$$(\forall \, R \, , \, R') \qquad \check{U}_R = R\,R'^{-1}\,\check{U}_{R'} \quad \text{sur} \quad \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'} \, ;$$

$\check{U}_R$ est nommée expression de $\check{U}$ dans le repère R .

Le support de $\check{U}$, Supp $\check{U}$, est la partie de $\check{V}$ définie par la condition

$$(\forall R) \qquad \text{Supp } \check{U}_R = (\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R) \cap \text{Supp } \check{U} \quad ;$$

cette définition a un sens puisque $S = R R'^{-1}$ est ponctuel.

L'ensemble des fonctions lagrangiennes sur $\check{V}$ et le sous-ensemble de celles d'entre elles qui sont à support compact sont des espaces vectoriels sur F, notés $F(\check{V})$ et $F_o(\check{V})$. Leur dimension est infinie , comme le prouve le

THEOREME 2.1. - (Existence) . - <u>Tout</u> $\check{U}_{R'} \in F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_{R'}, R')$ <u>est l'expression dans</u> R' <u>d'une fonction</u> $\check{U}$ <u>lagrangienne sur</u> $\check{V}$, <u>à support compact</u> .

<u>Preuve</u> . - Soit R un 2-repère quelconque ; notons :

$$S = R R'^{-1} \in Sp_2(\ell) \; ; \; \check{U}_R = S \, \check{U}_{R'} \quad ;$$

$\check{U}_R$ est une fonction formelle, définie sur $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \cup \check{\Sigma}_{R'}$, identiquement nulle au voisinage de $\check{\Sigma}_{R'}$; prolongeons sa définition en convenant que

$$\check{U}_R = 0 \quad \text{sur } \check{\Sigma}_{R'} \setminus \check{\Sigma}_R \cap \check{\Sigma}_{R'} \; ;$$

$\check{U}_R$ devient une fonction formelle définie sur $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$; $\check{U} = \{\check{U}_R\}$ est évidemment une fonction lagrangienne.

$$\text{Supp } \check{U} = \text{Supp } \check{U}_{R'} \, .$$

Le théorème 4.2 du Chap. II , § 1 prouve le

THEOREME 2.2 . - (Structure) . - Notons : ψ <u>la phase lagrangienne de</u> $\check{V}$; η <u>une mesure régulière</u> > 0 <u>de</u> V ; $x = R_x \check{z} \in X$, <u>où</u> $\check{z} \in \check{V}$; <u>convenons que</u> $[\eta]^{\frac{1}{2}} > 0$; <u>munissons</u> $\check{V}$ <u>d'une 2-orientation</u> ; <u>rappelons que</u> $[d^\ell x]^{\frac{1}{2}}$ <u>est défini, au moyen de l'indice de Maslov, par le Corollaire</u> 3 <u>du Chap</u>. I , § 3.

<u>Nous avons, sur</u> $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$:

$$(2.1) \qquad \check{U}_R(\nu, \check{z}) = \sum_{r \in \mathbb{N}} \left(\frac{\eta}{d^\ell x}\right)^{3r+1/2} \frac{1}{\nu^r} \beta_{R\,r}(\check{z})\, e^{\nu \varphi_R(\check{z})},$$

où les $\beta_{R\,r}$ sont des fonctions indéfiniment différentiables : $\check{V} \to \mathbb{C}$.

$\beta_{R\,0}$ est indépendant de R, est noté β_o et est nommé : AMPLITUDE LAGRANGIENNE.

Note 2.1. - Dans la formule (2.1), l'exposant $3\,r + 1/2$ ne peut être diminué ; cf. Chap. III, § 3, théor. 4.2.

Le théorème 6 du Chap. II, § 1 justifie la

Définition 2.2. - Soit Ω un voisinage ouvert de V ; soient a un opérateur lagrangien sur Ω et U une fonction lagrangienne sur V ; soient R et R' des 2-repères ; $S = R\,R'^{-1} \in Sp_2(\ell)$; nous avons

$$a_R\, U_R = S\,(a_{R'}\, U_{R'})\,;$$

les fonctions formelles $a_R\, U_R$ constituent donc une fonction lagrangienne, qui sera notée : $a\,U$. Donc :

THEOREME 2.3. - L'algèbre des opérateurs lagrangiens a, b définis sur $\Omega \supset V$ opère sur l'espace vectoriel $F(\check{V})$ [et $F_o(\check{V})$] des fonctions lagrangiennes $\check{U}$ [à support compact] définies sur $\check{V}$;

$$(2.2) \qquad a\,(b\,\check{U}) = (a \circ b)\,\check{U}\,;$$

(2.3) $\operatorname{Supp}(a\,\check{U}) = \operatorname{Supp}\check{U} \cap \check{\Pi}^{-1}\operatorname{Supp} a$, $\check{\Pi}$ étant la projection de $\check{V}$ sur $V \in Z$.

Définition 2.3. - Le produit scalaire $(.\,\check{|}\,.)$. - Soient $\check{U} \in F_o(\check{V})$ et $\check{U}' \in F_o(\check{V}')$. Supposons d'abord vérifiée la condition suivante :

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \text{Il existe un 2-repère } R \text{ tel que :} \\ \operatorname{Supp}\check{U} \cap \check{\Sigma}_R = \emptyset\,, \quad \operatorname{Supp}\check{U}' \cap \check{\Sigma}'_R = \emptyset \end{cases}$$

Cette condition signifie :

$$\check{U}_R \in F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)\,; \quad \check{U}'_R \in F_o(\check{V}' \setminus \check{\Sigma}'_R, R)\,.$$

Définissons alors :

(2.5) $$(\check{U} \mid \check{U}) = (\check{U}_R \mid \check{U}'_R) \in C$$ pour tout R vérifiant (2.4) ;

le second membre de (2.5) est une classe asymptotique, vu la définition 5 du Chap. II , § 1 ; elle est indépendante de R vu le 4°) du théorème 5.1

Soient $\check{U}$ et $\check{U}'$ ne vérifiant plus (2.4) . Notons

(2.6) $$\sum_j a_j = 1 \ , \sum_{j'} a'_{j'} = 1$$

un couple de décompositions de l'unité (définition 1.4) assez fines (théorème 1.2) pour qu'à tout choix de (j , j') correspondent des 2-repères $R_{j,j'}$ vérifiant la condition :

(2.7) $$\mathrm{Supp}\ a_j \cap \sum_{R_{j,j'}} = \emptyset \ , \ \mathrm{Supp}\ a'_{j'} \cap \sum_{R_{j,j'}} = \emptyset \ ;$$

$$(\forall\ j , j') \quad (a_j\, \check{U} \mid a'_{j'}\, \check{U}') \text{ est donc défini .}$$

Nous définirons

(2.8) $$(\check{U} \mid \check{U}') = \sum_{j,j'} (a_j\, \check{U} \mid a'_{j'}\, \check{U}') \in C \ ;$$

le second membre de (2.8) est indépendant du choix des décompositions (2.6) de l'unité : en effet, si

$$\sum_k b_k = 1 \ , \ \sum_{k'} b'_{k'} = 1$$

est un second choix vérifiant (2.7) , alors :

$$\sum_{j,j'} (a_j\, \check{U} \mid a'_{j'}\, \check{U}') = \sum_{j,j'} (a_j\, \check{U}_{R_{j,j'}} \mid a'_{j'}\, \check{U}'_{R_{j,j'}})$$

$$\sum_{j,j',k,k'} (a_j \circ b_k\, \check{U}_{R_{j,j'}} \mid a'_{j'} \circ b'_{k'}\, \check{U}'_{R_{j,j'}}) = \sum_{k,k'} (b_k\, \check{U} \mid b'_{k'}\, \check{U}') ,$$

puisque $R_{j,j'}$ peut être remplacé par $R_{k,k'}$.

THEOREME 2.4. - (Produit scalaire). - 1°) Le produit scalaire $(\cdot \check{|} \cdot)$ est une fonction sesquilinéaire sur $\overset{\circ}{F}$, à valeurs dans C (classe d'équivalence asymptotique), des couples, $\check{U}$ et $\check{U}'$, de fonctions lagrangiennes, sur $\check{V}$ et $\check{V}'$, à supports compacts.

$(\check{U} \check{|} \check{U}')$ et $(\check{U}' \check{|} \check{U})$ sont imaginaires conjugés et ne dépendent que de l'allure de $\check{U}$ et $\check{U}'$ en les couples de points de $\check{V}$ et $\check{V}'$ se projetant en un même point de $V \cap V'$.

Si $V \cap V' = \emptyset$, alors $(\check{U} \check{|} \check{U}') = 0$.

(2.9) $(a \check{U} \check{|} \check{U}') = (\check{U} \check{|} a^* \check{U}')$, si les opérateurs lagrangiens a et a^* sont adjoints.

2°) Si $V = V'$, ce qui implique $\psi = \psi'$, alors :

$$(2.10) \qquad (\check{U} \check{|} \check{U}') \in F,$$

les phases de $(\check{U} \check{|} \check{U}')$ étant les périodes de ψ (c'est-à-dire les valeurs de $\frac{1}{2}\int_\gamma [z, dz]$ sur les lacets γ de V) ;

$$(2.11) \qquad (\check{U} \mid \check{U}') = \int_{z \in V} \sum_{\check{z}, \check{z}'} \beta_o(\check{z})\, \overline{\beta_o'(\check{z}')}\; e^{\nu[\psi(\check{z}) - \psi(\check{z}')]}\, \eta \quad \mathrm{mod}\ \frac{1}{\nu}$$

où les notations sont celles du théorème 2.2 et où $\check{z}$ et $\check{z}'$ sont les points de Supp $\check{U}$ et Supp $\check{U}'$ se projetant en z sur V. On a

$$(2.12) \qquad 0 \leq (\check{U} \check{|} \check{U}) \in F.$$

La semi-norme de $\check{U}$,

$$0 \leq (\check{U} \mid \check{U})^{\frac{1}{2}} \in C,$$

vérifie l'inégalité du triangle et celle de Schwarz :

$$|(\check{U} \check{|} \check{U}')| \leq (\check{U} \check{|} \check{U})^{\frac{1}{2}} \cdot (\check{U}' \mid \check{U}')^{\frac{1}{2}}, \text{ dans } C.$$

3°) Si V et V' sont transverses, alors ($\check{V}$ et $\check{V}'$ étant munies de 2-orientations) :

(2.13) $$\nu^{\ell/2}(\check{U} \mid \check{U}') \in F ;$$

(2.14) $$\left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2}(\check{U} \mid \check{U}') =$$

$$\sum_{z \in V \cap V'} \left|\frac{\eta_o \wedge \eta'_o}{d^{2\ell} z}\right|^{1/2} \sum_{\check{z},\check{z}'} \beta_o(\check{z})\, \overline{\beta'_o(\check{z}')}\, e^{\nu[\psi(\check{z})-\psi'(\check{z}')] - \frac{\pi i}{2} m(\lambda'_4,\lambda_4)} \mod \frac{1}{\nu}$$

où : $\eta_o \wedge \eta'_o$ et $d^{2\ell} z$ sont les mesures de Z définies respectivement par (5.11) et (5.15) (Ch. II, § 1) au point $z \in V \cap V'$;

$\check{z}$ et $\check{z}'$ sont les points de Supp $\check{U}$ et Supp $\check{U}'$ se projetant en z ;

m est l'indice de Maslov défini mod.4 (Ch I, § 3 n° 3) ;

λ_4 et λ'_4 sont les plans lagrangiens 2-orientés tangents à $\check{V}$ et à $\check{V}'$ en $\check{z}$ et $\check{z}$.

Preuve de 1°). - La définition 2.3, le 1°) du théoréme 5.1 (Ch. II, §1), le 4°) du théorème 6 (Ch. II, § 1) et la définition 1.2 des opérateus lagrangiens adjoints.

Preuve de (2.10). - La définition 2.3 et (5.4) (Ch. II § 1).

Preuve de (2.11). - Le théorème 5.2 (Ch. II, § 1) et le fait que $a\check{U} \mod \frac{1}{\nu}$ est le produit de $\check{U}$ par la fonction a^o_o.

Preuve de (2.12). - Employons une décomposition de l'unité [3°) du théorème 1.2] :

$$\sum_j b_j^* \circ b_j = 1 ,$$

assez fine pour qu'existe $(\forall_j)$ un repère R_j tel que

$$\text{Supp } b_j \cap \sum_{R_j} = \emptyset.$$

Nous avons :

$$(\check{U} \mid \check{U}) = \sum_j (b_j \check{U}_{R_j} \mid b_j \check{U}_{R_j}) \geq 0 \text{ (Ch. II, § 1, Déf. 5) .}$$

Preuve de l'inégalité de Schwarz . – Nous avons, vu la définition 5 du Ch. II , § 1, l'inégalité du triangle et l'inégalité de Schwarz dans R (Ch. II, § 1 , (5.3)) et dans C (Ch. II, § 1, Note 1) :

$$|(\check{U} \check{|} \check{U}')| = |\sum_j (b_j \check{U}_{R_j} \check{|} b_j \check{U}'_{R_j})| \leq \sum_j |(b_j \check{U}_{R_j} \check{|} b_j \check{U}'_{R_j})| \leq$$

$$\sum_j (b_j \check{U}_{R_j} \check{|} b_j \check{U}_{R_j})^{1/2} \cdot (b_j \check{U}'_{R_j} \check{|} b_j \check{U}'_{R_j})^{1/2} \leq [\sum_j (b_j \check{U}_{R_j} \check{|} b_j \check{U}_{R_j})]^{1/2} \cdot [\sum_j (b_j \check{U}'_{R_j} \check{|} b_j \check{U}'_{R_j})]^{1/2}$$

$$= (\check{U} \check{|} \check{U})^{\frac{1}{2}} \cdot (\check{U}' \check{|} \check{U}')^{\frac{1}{2}} .$$

L'inégalité du triangle résulte de celle de Schwarz.

Preuve de 3°) . – Le théorème 5.3 (Ch II , § 1)

Note 2 . 2 – Si $V = V'$, $(\check{U} \check{|} \check{U}')$ est défini par le second membre de (5.4) (Ch II , § 1) sous l'hypothèse

$$\mathrm{Supp}\, \check{U} \cap \check{\Sigma}_R = \emptyset \ , \ \mathrm{Supp}\, \check{U}' \cap \check{\Sigma}_R = \emptyset \ .$$

Si cette hypothèse n'est pas satisfaite, ce second membre est une intégrale divergente vu le théorème 2.2 (structure).

Donc, la définition 2.3 de $(. \check{|} .)$ donne un sens à cette intégrale divergente.

3. FONCTIONS LAGRANGIENNES SUR V . – Nous nous intéressons, non pas aux fonctions sur $\check{V}$, c'est-à-dire multiformes sur V, mais aux fonctions sur V ; leur définition exigera le choix d'un nombre $\nu_o \in i\,]\,o\,,\infty\,[$.

Le premier groupe d'homotopie $\pi_1[V]$ opère sur $\check{V}$: V est le quotient de $\check{V}$ par $\pi_1[V]$; évidemment :

$$(\forall R)\ \pi_1[V] \text{ laisse } \check{\Sigma}_R \text{ invariant ;}$$

$$(\forall \gamma \in \pi_1[V])\quad \psi(\gamma\check{z}) = \psi(\check{z}) + c_\gamma \,,\ \varphi_R(\gamma\check{z}) = \varphi_R(\check{z}) + c_\gamma \,,\ \text{où } c_\gamma = \tfrac{1}{2}\int_\gamma [z\,,dz]\ ;$$

c'est-à-dire :

$$\psi \circ \gamma^{-1} = \psi - c_\gamma \;,\; \varphi_R \circ \gamma^{-1} = \varphi_R - c_\gamma \;.$$

<u>Définition</u> 3.1 . - Le <u>groupe</u> $\pi_1[V]$ <u>d'automorphismes de</u> $F(\check{V})$. - Soient

$$\check{U}_R = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{R,r}}{\nu^r} e^{\nu\varphi_R} \in F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R) \;;\; \gamma \in \pi_1[V]. \tag{3.1}$$

Définissons le transformé de $\check{U}_R$ par γ comme étant, non pas

$$\check{U}_R \circ \gamma^{-1} = e^{-\nu c_\gamma} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{R,r} \circ \gamma^{-1}}{\nu^r} e^{\nu\varphi_R} \notin F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$$

mais

$$\gamma\check{U}_R = e^{(\nu-\nu_o)c_\gamma} \check{U}_R \circ \gamma^{-1} = e^{-\nu_o c_\gamma} \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{R,r} \circ \gamma^{-1}}{\nu^r} e^{\nu\varphi_R} \in F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R). \tag{3.2}$$

Evidemment

$$\gamma'(\gamma\check{U}_R) = (\gamma'\gamma)\check{U}_R \;;$$

$\pi_1[V]$ est donc un groupe d'automorphismes de $F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R, R)$.

De la définition (3.2) et de la définition de l'opérateur $S \in Sp_2(\ell)$ par le Ch II , § 1 [lemme 1.1, 1°) du théorème 4.1, théorème 4.3] résulte évidemment que S et γ <u>commutent</u> : si

$$\check{U}_{R'} \in F(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_{R'} \cup \check{\Sigma}_R, R') \quad \text{et} \quad R = SR' ,$$

alors :

$$\gamma(S\check{U}_{R'}) = S(\gamma\check{U}_{R'}) . \tag{3.3}$$

Si les $\check{U}_R$ sont les expressions d'une même fonction $\check{U}$ lagrangienne sur $\check{V}$, alors les $\gamma\check{U}_R$ sont donc les expressions d'une même fonction lagrangienne sur $\check{V}$; nous la notons $\gamma\check{U}$; donc $(\gamma\check{U})_R = \gamma\check{U}_R$ et $\pi_1[V]$ <u>est un groupe d'automorphismes de</u> $F(\check{V})$.

Evidemment ($\forall \gamma \in \pi_1[V]$; $\forall \check{U} \in F(\check{V})$; $\forall a$ opérateur lagrangien) :

$$\operatorname{Supp}(\gamma\check{U}) = \gamma \operatorname{Supp}\check{U} \;; \tag{3.4}$$

γ et a commutent, c'est-à-dire :

$$(3.5) \qquad \gamma\,(a\,\check{U}) = a\,(\gamma\,\check{U}).$$

Définition 3.2. - Une fonction lagrangienne sur V est une fonction U lagrangienne sur $\check{V}$ et possédant les trois propriétés suivantes, qui sont évidemment deux à deux équivalentes et donc indépendantes du choix du 2-repère R :

i) U est invariante par $\pi_1[V]$, c'est-à-dire :

$$(\forall\,\gamma \in \pi_1[V]) \quad \gamma\,U = U \quad [\text{ cf. déf. } 3.1];$$

ii) $(\forall\, r \in \mathbb{N}) \quad e^{-\nu_o\, {}^c\gamma}\, \alpha_{R,r} \circ \gamma^{-1}$ est indépendant de $\gamma \in \pi_1[V]$;

iii) la fonction, nommée restriction de U_R à ν_o :

$$(3.6) \qquad U_R^o = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_{R,r}}{\nu^r}\, e^{\nu_o \varphi_R} = U_R\, e^{(\nu_o - \nu)\varphi_R}$$

prend la même valeur en tous les points de $\check{V}$ ayant même projection sur V et est donc une fonction

$$U_R^o : V \setminus \Sigma_R \to F^o .$$

Le support d'une fonction lagrangienne U est invariant par $\pi_1[V]$; c'est donc l'ensemble des points de $\check{V}$ se projetant sur une partie fermée de V, qui sera nommée support de U dans V et notée Supp U ; donc :

$$(\forall\, R) \quad \operatorname{Supp} U_R^o = \operatorname{Supp} U \setminus \Sigma_R \cap \operatorname{Supp} U .$$

L'ensemble des fonctions lagrangiennes sur V [et à supports compacts dans V] est un espace vectoriel sur l'algèbre F^o ; il est noté $F(V)$ [et $F_0(V)$].

Evidemment, vu (3.5) :

THEOREME 3.1. - L'algèbre des opérateurs lagrangiens a, b définis sur $\Omega \supset V$ opère sur l'espace $F(V)$ des fonctions lagrangiennes sur V ;

$$(a \circ b)\, U = a\,(b\, U)\ ;\ \mathrm{Supp}\,(a\, U) \subset \mathrm{Supp}\ a \cap \mathrm{Supp}\ U\ .$$

Le produit scalaire des fonctions lagrangiennes sur V sera défini au moyen du lemme et des définitions que voici .

LEMME 3.1 . - Il existe un épimorphisme naturel :

$$F_0\,(\check{V}) \ni \check{U} \mapsto U = \sum_{\gamma \in \pi_1[V]} \gamma\, \check{U} \in F_0\,(V)\ . \tag{3.7}$$

<u>Preuve</u> . - La définition (3.7) a un sens : elle définit $U\,(\check{z})$ par une somme finie, car $(\forall\ \check{z} \in V)$ le nombre des γ tels que $\gamma\, \check{z} \in \mathrm{Supp}\ \check{U}$ est fini . Evidemment, U est indéfiniment différentiable, à support compact .

Pour prouver que (3.7) est un épimorphisme, il suffit, puisque γ commute avec les décompositions de l'unité (Déf. 1.4 ; Théor. 1.2), de prouver ceci : tout $U \in F_0\,(V)$, de support appartenant à une partie simplement connexe ω de V, est l'image par (3.7) d'un élément $\check{U}$ de $F_0\,(\check{V})$. Voici cette preuve.

La partie de $\check{V}$ qui se projette sur ω a pour composantes connexes les transformées $\gamma\, \check{\omega}$ de l'une quelconque $\check{\omega}$ de ces composantes par les éléments γ de $\pi_1\,[V]$. Soit $\check{U}$ la fonction lagrangienne sur $\check{V}$, nulle hors de $\check{\omega}$, égale à U dans $\check{\omega}$; $\gamma\, \check{U}$ est donc nulle hors de $\gamma\, \check{\omega}$ et égale à $U = \gamma\, U$ dans $\gamma\, \check{\omega}$; d'où :

$$U = \sum_{\gamma \in \pi_1\,[V]} \gamma\, \check{U}\ .$$

Explicitons la notion de restriction à ν_0 .

<u>Définition</u> 3.3 . - Soit I l'idéal de F qu'engendrent ses éléments

$$e^{\nu\varphi} - e^{\nu_0 \varphi} \qquad (\varphi \in \mathbb{R})\ ;$$

tout élément de I s'écrit de façon unique :

$$\sum_{j \in J} \alpha_j\, (e^{\nu \varphi_j} - e^{\nu_0 \varphi_j}) \qquad (\ J : \text{fini}\ ;\ \alpha_j \in F^0\ ;\ \varphi_j \in \mathbb{R})\ ;$$

F est somme directe de I et F^0. Nous nommons <u>restriction de</u> F <u>à</u> ν_0 la projection de F sur F° :

$$F \ni u = \sum_j \alpha_j \, e^{\nu \varphi_j} \mapsto u^{\circ} = \sum_j \alpha_j \, e^{\nu_0 \varphi_j} \in F^{\circ} = F / I.$$

En particulier, si $U \in F(V)$, alors <u>la restriction de</u> $U_R(\nu, \check{z}) \in F$ <u>à</u> ν_0 <u>est</u> <u>la valeur</u>, en la projection z de $\check{z}$ sur V, $U_R^{\circ}(\nu, z)$, <u>de la restriction</u> U_R° de U_R à ν_0.

<u>Définition</u> 3.4. - Nommons <u>sous-module</u> de C tout sous-groupe additif M de C ayant les propriétés suivantes :

$$F \subset M \subset C \ ; \ M = \bar{M} \ \text{(imaginaire conjugué)} \ ;$$

la multiplication dans l'algèbre C fait de M un module <u>sur l'algèbre</u> F.

En particulier :

$$u \in M, \ \varphi \in R \ \text{ impliquent } \ u\, e^{\nu\varphi} \in M.$$

Soit N le sous-module de M dont les élements sont les

$$\sum_{j \in J} u_j \left(e^{\nu \varphi_j} - e^{\nu_0 \varphi_j}\right) \quad (j : \text{fini} \ ; \ u_j \in M ; \varphi_j \in R) .$$

Nous nommons <u>restriction</u> de M <u>à</u> ν_0 le quotient :

$$M \to M / N = M^{\circ} ;$$

M° est un module sur l'algèbre F° ; puisque $N = \bar{N}$, la notion d'<u>éléments conjugués</u> de M° est induite par celle d'éléments imaginaires conjugués de M.

<u>Exemple</u> 3.1. - Si $M = F$, alors $M^{\circ} = F^{\circ}$.

<u>Exemple</u> 3.2. - Notons $\frac{1}{|\nu|^s} F$, ... les images de F, ... par le multiplication :

$$C \ni \tilde{f} \to \frac{1}{|\nu|^s} \tilde{f} \in C \quad (s \in R_+) .$$

Si $M = \frac{1}{|\nu|^s} F$, alors $M^{\circ} = \frac{1}{|\nu|^s} F^{\circ}$.

<u>Définition</u> 3.5. - <u>Le produit scalaire</u> $(.\,|\,.)$. - Soient V et V' deux

variétés lagrangiennes de Z ; soit M un sous-module de C (Déf. 3.4) tel que

$$(3.8) \qquad (\forall\ \check{U} \in F_o(\check{V}),\ \check{U}' \in F_o(\check{V}')) \quad (\check{U} \mid \check{U}') \in M .$$

Quels que soient

$$U \in F_o(V) , \quad U' \in F_o(V') ,$$

il existe, vu le lemme 3.1 ,

$$\check{U} \in F_o(\check{V}) , \check{U}' \in F_o(\check{V}') \text{ tels que } U = \sum_{\gamma \in \pi_1[V]} \gamma\, \check{U} , U' = \sum_{\gamma' \in \pi_1[V']} \gamma'\, \check{U}' .$$

Par définition, <u>le produit scalaire de</u> U et U' <u>est</u> :

$$(3.9) \qquad (U \mid U') = (\check{U} \mid \check{U}')^{\circ} , \text{ restriction de } (\check{U} \mid \check{U}') \in M \text{ à } \nu_o ;$$

ce produit scalaire est donc <u>à valeurs dans</u> M°.

Cette définition à un sens, vu le

LEMME 3.2 . - $(\check{U} \mid \check{U}')^{\circ}$ ne dépend que de U , U' .

<u>Preuve</u> . - Soit une décomposition de l'unité (Déf. 1.4) :

$$\sum_j b_j^* \circ b_j = 1 ;$$

on a :

$$(\check{U} \mid \check{U}') = \sum_j (b_j \check{U} \mid b_j \check{U}') ;$$

il suffit donc de prouver que $(b_j \check{U} \mid b_j \check{U}')^{\circ}$ ne dépend que de

$$\sum_{\gamma \in \pi_1[V]} \gamma\, b_j \check{U} = b_j U \quad \text{et} \quad \sum_{\gamma' \in \pi_1[V']} \gamma'\, b_j \check{U}' = b_j U' .$$

Vu le théorème 1.2, il suffit donc de prouver le lemme quand les conditions suivantes sont toutes deux vérifiées :

i) il existe un 2 - repère R tel que :

$$\check{U}_R \in F_o(\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R , R) , \check{U}'_R \in F_o(\check{V}' \setminus \check{\Sigma}'_R , R) ;$$

ii) il existe deux parties ouvertes, simplement connexes ,

ω de V et ω' de V' que R_X projette injectivement dans X et qui contiennent les supports de U et U' :

$$\mathrm{Supp}\ U \subset \omega \subset V \ ; \ \mathrm{Supp}\ U' \subset \omega' \subset V'.$$

La partie de $\check{V}$ qui se projette sur ω a pour composantes connexes les ouverts de $\check{V}$:

$$\gamma\, \check{\omega}\ , \text{ où } \gamma \in \pi_1\,[V] \quad \text{(cf. preuve du lemme 3.1)}$$

Etant donné $x \in \mathrm{Supp}\ U$, nous notons :

z le point unique de ω tel que $R_X\, z = x$;

$\check{z}$ le point unique de $\check{\omega}$ se projetant sur V en z.

Vu la définition 2.3, vu, au Ch. II, § 1, (1.9) et déf 5, on a :

$$(3.10) \qquad (\check{U} \mid \check{U}') = \int_X^{\sim} (\Pi_R\, \check{U}_R)\,(\nu, x)\ .\ \overline{(\Pi_R\, \check{U}'_R)\,(\nu, x)}\ d^{\ell} x\ ;$$

par définition (Ch II, § 1, théor. 2.1), si $x \in \mathrm{Supp}\,(\Pi_R\, \check{U}_R) = \mathrm{Supp}\ U$:

$$(\Pi_R\, \check{U}_R)\,(\nu, x) = \sum_{\gamma \in \pi_1[V]} \check{U}_R\,(\nu, \gamma^{-1} \check{z})\ ,$$

c'est-à-dire, vu (3.2) :

$$(\Pi_R\, \check{U}_R)\,(\nu, x) = \sum_{\gamma \in \pi_1[V]} e^{(\nu_o - \nu)\, c_\gamma}\ \gamma\, \check{U}_R(\nu, \check{z})\ ;$$

portons dans (3.10) cette expression de $\Pi_R\, \check{U}_R$ et l'expression analogue de $\Pi_R\, \check{U}'_R$; nous obtenons la formule :

$$(3.11) \qquad (\check{U} \mid \check{U}') = \int_X^{\sim} U_R\,(\nu, \check{z})\ .\ \overline{U'_R\,(\nu, \check{z}')}\ d^{\ell} x \qquad \text{mod. } N\ .$$

sous les hypothèses i) et ii), en employant la définition 3.4 de N et (3.7).

Cette formule (3.11) prouve le lemme 3.2 et sert à prouver le théorème suivant, dont le 1°) est évident :

THEOREME 3.2 . - (Produit scalaire) . - 1°) Soient V et V' deux variétés lagrangiennes de Z . Le produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ est une fonction sesquilinéaire sur F° des couples , U et U', de fonctions lagrangiennes sur V et V' .

$(U \mid U')$ est défini quand $\operatorname{Supp} U \cap \operatorname{Supp} U'$ est compact ;

$(U \mid U') \in M^\circ$, module sur F° dépendant de V et V' ;

$(U \mid U')$ ne dépend que de l'allure de U et U' au voisinage de $\operatorname{Supp} U \cap \operatorname{Supp} U'$;

$(U \mid U') = 0$ quand $\operatorname{Supp} U \cap \operatorname{Supp} U' = \emptyset$;

$(U \mid U')$ et $(U' \mid U)$ sont conjugués ;

$(a\, U \mid U') = (U \mid a^* U')$ quand a et a^* sont des opérateurs lagrangiens adjoints .

2°) Supposons $V = V'$. Alors :

$(U \mid U') \in F^\circ$ (algèbre des nombres formels de phase nulle) ;

$$0 \leq (U \mid U) \text{ , l'égalité impliquant } U = 0 \text{ ;} \tag{3.12}$$

la norme de U :

$$0 \leq \| U \| = (U \mid U)^{\frac{1}{2}} \in F^\circ \tag{3.13}$$

vérifie l'inégalité du triangle et celle de Schwarz :

$$\|U + U'\| \leq \|U\| + \|U'\| \quad , \quad |(U \mid U')| \leq \|U\| . \|U'\| \text{ , dans } F^\circ \text{ ;}$$

si les égalités sont atteintes, alors U et U' sont proportionnelles : ou bien $U = 0$, ou bien il existe $\alpha \in F^\circ$ tel que $U' = \alpha\, U$. Notons :

$$U_R^\circ(\nu , z) = \alpha_{R,0}(\check{z})\, e^{\nu_0 \varphi_R(\check{z})} \mod \frac{1}{\nu} \text{ ,} \tag{3.14}$$

$$= \left(\frac{\eta}{d^\ell x}\right)^{1/2} \beta_0(\check{z})\, e^{\nu_0 \varphi_R(\check{z})} \mod \frac{1}{\nu} \text{ ,} \tag{3.15}$$

$\check{z}$ désignant l'un quelconque des points de $\check{V}$ se projetant en z sur V ; (3.15) suppose $\check{V}$ muni d'une 2 - orientation qui définit l'indice de Maslov $m_R(\check{z})$ et $\arg d^\ell x$ (Ch. I , § 3 , coroll. 3) ; l'amplitude lagrangienne β_0 est indépendante du choix de R , mais dépend du choix de η , mesure régulière de V telle que arg $\eta = 0$. Alors, des notations analogues étant employées pour U' et x désignant $R_X z$,

$$\alpha_{R,0}(\check{z})\,\overline{\alpha'_{R,0}(\check{z})}\,d^{\ell}x = \beta_o(\check{z})\,\overline{\beta'_o(\check{z})}\,\eta \tag{3.16}$$

est une forme différentielle régulière sur V , indépendante de R et

$$(U \mid U') = \int_V \alpha_{R,0}(\check{z})\,\overline{\alpha'_{R,0}(\check{z})}\,d^{\ell}x = \int \beta_o(\check{z})\,\overline{\beta'_o(\check{z})}\,\eta \mod \frac{1}{\nu} . \tag{3.17}$$

3°) Supposons V et V' transverses . Alors :

$$\nu^{\ell/2}(U \mid U') \in F^o ;$$

$$\left(\frac{|\nu|}{2\pi i}\right)^{\ell/2}(U \mid U') =$$

$$= \sum_{z \in V \cap V'} [\mathrm{Hess}(\varphi - \varphi')]^{-1/2}\,\alpha_{R,0}(\check{z})\,\overline{\alpha'_{R,0}(\check{z}')}\,e^{\nu_o[\varphi_R(\check{z}) - \varphi_R(\check{z}')]} \mod \frac{1}{\nu} \tag{3.18}$$

$$= \sum_{z \in V \cap V'} \left|\frac{\eta_o \wedge \eta_o}{d^{2\ell}z}\right|^{1/2} \beta_o(\check{z})\,\overline{\beta'_o(\check{z}')}\,e^{\nu_o[\psi(\check{z}) - \psi'(\check{z}')] - \frac{\pi}{2} i\, m(\lambda'_4, \lambda_4)} \mod \frac{1}{\nu} ; \tag{3.19}$$

dans (3.18) φ et φ' sont définies près de Rz par

$$\varphi(x) = \varphi_R(\check{R}_X^{-1} x \cap \check{V}) , \quad \varphi'(x) = \varphi'_R(\check{R}_X^{-1} x \cap \check{V}') ;$$

$$\mathrm{Hess}(\varphi - \varphi') = \{ \mathrm{Hess}_x [\varphi(x) - \varphi'(x)] \}_{x = R_X z} ;$$

dans (3.19) : ψ est la phase lagrangienne de V ;

$\lambda_4 \in \Lambda_4(Z)$ est le plan lagrangien 2-orienté tangent à $\check{V}$ en $\check{z}$;

m est l'indice de Maslov défini mod 4 (Ch I , §3, n° 3) ;

$\eta_o \wedge \eta'_o$ et $d^{2\ell}z$ sont les mesures de Z définies par (5.11) et (5.15) (Ch. II , §1) .

Preuve de (3.16). - La formule (5.9) du Ch II, § 1.

Preuve de (3.17). - L'emploi d'une décomposition de l'unité $\sum_j b_j^* \circ b_j = 1$ suffisamment fine montre qu'il suffit de prouver (3.17) sous les hypothèses i) ii) qu'emploie la preuve du lemme 3.2 et qui impliquent (3.11). Puisque $V = V'$, cette formule (3.11) s'écrit

$$(3.20) \qquad (U \mid U') = \int_X U_R^\circ(\nu, \check{z}) \overline{U'^\circ_R(\nu, \check{z})} \, d^\ell x \in F^\circ$$

et prouve donc (3.17).

Preuve de (3.12). - L'emploi de la même décomposition de l'unité montre qu'il suffit de prouver (3.12) dans ce cas où (3.20) vaut ; (3.12) est alors évident, ainsi que la précision suivante : si $U \neq 0$, alors :

$$(U \mid U) = \sum_{r=2s}^{\infty} \frac{\alpha_r}{\nu^r} \quad \text{où} \quad s \in N, \ \alpha_{2s} > 0 .$$

Preuve de (3.13). - La formule précédente et le 2°) du théorème 2.3, Chap. II, § 1.

Preuve de l'inégalité de Schwarz. - Soient U et U' non proportionnels ; il existe donc $\alpha \in F^\circ$ et $s \in \mathbb{N}$ tels que

$$U = \alpha U' + \frac{1}{\nu^s} U'' ,$$

les amplitudes lagrangiennes $\beta'_\circ$ et $\beta''_\circ$ de U' et U'' n'étant pas proportionnelles; un calcul classique donne

$$\|U\|^2 . \|U'\|^2 - |(U \mid U')|^2 = \frac{1}{|\nu|^{2s}} [\|U'\|^2 . \|U''\|^2 - |(U' \mid U'')|^2] .$$

Il suffit donc de prouver que le second membre est > 0 dans F°. Autrement dit, il suffit de prouver que U et U' satisfont à l'inégalité stricte de Schwarz, quand leurs amplitudes lagrangiennes $\beta_\circ$ et $\beta'_\circ$ ne sont pas proportionnelles ; on a alors, vu (3.17) :

$$\|U\|^2 . \|U'\|^2 - |(U \mid U')|^2 = \int_V |\beta_\circ(z)|^2 \eta . \int_V |\beta'_\circ(z)|^2 \eta - \left|\int_V \beta_\circ(z) \beta'_\circ(z) \eta\right|^2 \quad \mathrm{mod} \ \frac{1}{\nu}$$

donc, d'après l'inégalité de Schwarz classique :

$$\| U \|^2 . \| U' \|^2 - |(U \mid U')|^2 = \alpha_o \mod \frac{1}{\nu} \quad \text{où} \quad 0 < \alpha_o \in \mathbf{R} ,$$

donc, vu le théorème 2.3 du Chap. II , § 1 :

$$| (U \mid U') | < \| U \| . \| U' \| .$$

<u>Preuve de l'inégalité du triangle</u> . - L'inégalité de Schwarz.

<u>Preuve de</u> 3°) . - Une décomposition de l'unité montre qu'il suffit de traiter le cas où $(U \mid U')$ a l'expression (3.11) . Alors (3.18) résulte du 3°) du théorème 5.1 (Chap. II, § 1) et (3.19) du théorème 5.3 (Chap. II , § 1) .

<u>Note</u> 3 . - En l'absence de l'hypothèse i) (cf. Preuve du lemme 3.2) l'intégrale figurant au second membre de (3.20) diverge (Cf. Théorème 2.2 , structure des fonctions lagrangiennes). <u>La définition</u> 3.5 <u>de</u> $(. \mid .)$ <u>donne donc un sens à cette intégrale divergente</u> .

4 . LE GROUPE $Sp_2(Z)$ des automorphismes de la géométrie 2 - symplectique de Z (cf. Chap I , § 3 , n° 4) transforme évidemment les opérateurs lagrangiens en opérateurs lagrangiens ; les images par ce groupe des fonctions lagrangiennes sont des fonctions lagrangiennes ; ce groupe laisse invariant le produit scalaire.

§ 3. Systèmes lagrangiens homogènes à une inconnue.

0 . SOMMAIRE. - L'existence de l'inverse a^{-1} d'un opérateur lagrangien a, sous les hypothèses qu'énonce le théorème 1.1 du § 2 , montre que les systèmes lagrangiens homogènes à une (§ 3) ou plusieurs (§ 4) inconnues sont ceux dont l'étude n'est pas banale. Ces § 3 et § 4 amorcent cette étude; les chapitres III et IV la concluront dans deux cas spéciaux : l'équation de Schrödinger ; l'équation de Dirac, qui est un système à deux inconnues.

1 . LES VARIETES LAGRANGIENNES SUR LEQUELLES SONT DEFINIES LES SOLUTIONS LAGRANGIENNES DE $a\ U = 0$. - Soit a l'opérateur lagrangien associé à la fonction formelle

$$a^o : \Omega \to F^o \quad (\Omega \text{ partie ouverte de } Z),$$

valant en z :

$$a^o(\nu, z) = \sum_{r \in N} \frac{1}{\nu^r} a^o_r(z) .$$

THEOREME 1 . <u>Le support d'une solution</u> U <u>de l'équation</u> $a\ U = 0$ <u>est une variété lagrangienne</u> V <u>sur laquelle</u> $a^o_o = 0$.

<u>Preuve</u> . - Soit un point de V où $a^o_o \neq 0$; remplaçons Ω par un voisinage de ce point sur lequel $a^o_o \neq 0$; alors a^{-1} existe sur Ω et $a\ U = 0$ implique donc $U = 0$ sur Ω .

<u>Nous supposerons</u> que a^o_o <u>est à valeurs réelles</u> et que la partie de Ω où $a^o_o = 0$ est une <u>hypersurface régulière</u>, W, d'équation :

$$W : H(z) = 0 \quad , \quad H_z \neq 0 .$$

V est donc une sous-variété de W telle que :

$$\dim V = \ell \quad ; \quad d\,[\, z\,,dz\,] = 0 \quad \text{sur} \quad V.$$

V s'étudie en appliquant à la forme de Pfaff $[\, z\,,dz\,]$ la théorie d'E. Cartan des formes différentielles [5].

2. RAPPEL DE LA THEORIE D' E. CARTAN [5] DES FORMES DE PFAFF . - Rappelons d'abord des résultats bien connus, exposés en particulier par le traité de Mme Y. Choquet-Bruhat [6] .

Soit ω une forme différentielle définie sur Z , qui, au cours de ce n° 2, pourra être une variété quelconque, indéfiniment différentiable et de dimension finie. E. Cartan exprime localement ω au moyen d'un nombre minimal de fonctions

$$f_1\,,\ldots\,,\,f_n : Z \to R\ ;$$

le nombre n de ces fonctions est appelé rang de ω ; ces fonctions sont les intégrales premières (indépendantes et en nombre maximal) d'un système complètement intégrable d'équations de Pfaff, appelé système caractéristique de ω ; E. Cartan explicite ce système.

Autrement dit : ce sytème caractéristique équivaut à

$$d f_1 = \ldots = d f_n = 0\ ;$$

il existe une forme différentielle $\bar{\omega}$ telle que

$$\omega\,(z\,,dz) = \bar{\omega}\,(f\,(z)\,,\,d f\,(z)),\ \text{où}\ \ f = (f_1\,,\ldots\,,\,f_n)\ .$$

Soit ω une forme de Pfaff définie sur Z (c'est-à-dire une forme différentielle de degré 1 en les différentielles) ; le système caractéristique de $d\omega$ s'écrit, en notant i_ξ le produit intérieur [6] par un vecteur ξ de Z :

(2.1) $$(\forall\ \xi) \qquad i_\xi\, d\,\omega\ (z\,,dz) = 0\ ;$$

le rang de $d\omega$ est pair ; notons-le $2n$; soit localement

$$f = (f_1\,,\ldots\,,\,f_{2n})$$

$2n$ intégrales premières indépendantes de (2.1) ; il existe donc une forme différentielle $\bar{\omega}'$ telle que

$$d\omega(z, dz) = \bar{\omega}'(f(z), df(z)) :$$

évidemment $d\bar{\omega}' = 0$; donc, localement : $\bar{\omega}' = d\bar{\omega}$; autrement dit : il existe localement une forme de Pfaff $\bar{\omega}$, à $2n$ variables, et une fonction f_o telles que

$$\omega(z, dz) = df_o(z) + \bar{\omega}(f(z), df(z)) \quad \text{où} \quad f = (f_1, \ldots, f_{2n}) . \tag{2.2}$$

Le rang de ω est évidemment $2n$ ou $2n+1$ suivant que f_o est fonction composée de $f = (f_1, \ldots, f_{2n})$ ou non ; dans le premier cas, on peut choisir $\bar{\omega}$ tel que $f_o = 0$.

Enonçons des compléments moins connus qu'E. Cartan [5] (Chap. XII, Les équations qui admettent un invariant intégral relatif) a apportés à ce résultat et rappelons leurs démonstrations.

LEMME 2 . - Soit ω une forme de Pfaff ; soit $2n$ le rang de $d\omega$; il existe localement, sur Z, $2n+1$ fonctions numériques $f_o, \ldots, f_{2n}$ telles que

$$\omega(z, dz) = df_o(z) + \sum_{j=1}^{n} f_{2j-1}(z)\, df_{2j}(z) ; \tag{2.3}$$

$f_1, \ldots, f_{2n}$ sont $2n$ intégrales premières indépendantes du système caractéristique de $d\omega$.

Note 2.1. $f_1, \ldots, f_{2n}$ n'est pas un système arbitraire d'intégrales premières de ce système caractéristique : voir la note 2.2 .

Preuve . - Soit f_2 une intégrale première du système caractéristique de $d\omega$; la restriction de $d\omega$ aux hypersurfaces $f_2 = \text{const.}$ est de rang pair $< 2n$, donc de rang $\leq 2(n-1)$. Soit f_4 une intégrale première du système caractéristique de cette restriction ;... ; la restriction de $d\omega$ aux variétés

$$f_2 = \text{const.}, \ldots, f_{2j} = \text{const.}$$

est de rang $\leq 2(n-j)$ et est donc nulle pour une valeur J de j telle que $J \leq n$. Autrement dit :

$$d\omega = 0 \text{ sur les variétés } f_2 = \text{const.}, \ldots, f_{2J} = \text{const.}$$

Il existe donc une fonction f_o telle que

$$\omega = d f_0 \mod (d f_2 , \dots , d f_{2J}) ,$$

c'est-à-dire telle que :

$$\omega = d f_0 + \sum_{j=1}^{J} f_{2j-1} \, d f_{2j} .$$

Or $d\omega$ est de rang $2n$; donc : $J = n$; $f_1 , \dots , f_{2n}$ sont $2n$ intégrales premières indépendantes du système caractéristique de ω.

E. Cartan a complété ce lemme en employant comme suit la notion de parenthèse de Poisson.

Définition 2. - Soit ω une forme Pfaff, mise sous la forme (2.3) . Soient g et g' deux intégrales premières du sytème caractéristique de $d\omega$; ce sont donc des fonctions composées :

$$z \mapsto g(z) = G[f_1(z), \dots, f_{2n}(z)] ; \quad z \mapsto g'(z) = G'[f_1(z), \dots, f_{2n}(z)] ;$$

il existe donc une fonction composée du même type, appelée parenthèse de Poisson de g et g' , notée (g, g') , telle que

$$(2.4) \qquad n (d\omega)^{n-1} \wedge dg \wedge dg' = (g, g') (d\omega)^n ;$$

cette parenthèse

$$(g, g') = -(g', g) ,$$

qui est donc bilinéaire et indépendante du choix de $f = \{ f_1, \dots, f_{2n} \}$, a l'expression suivante, qui emploie un tel choix :

$$(2.5) \qquad (g, g')(z) = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial G}{\partial f_{2j-1}} \frac{\partial G'}{\partial f_{2j}} - \frac{\partial G'}{\partial f_{2j-1}} \frac{\partial G}{\partial f_{2j}} \right]_{f = f(z)} ;$$

on en déduit que tout triplet g, g', g'' de telles intégrales premières vérifie l'identité de Jacobi :

$$(g, (g', g'')) + (g', (g'', g)) + (g'', (g, g')) = 0 .$$

g et g' sont dits en involution quand $(g, g') = 0$.

Note 2.2. - Dans l'expression (2.3) de ω , vu (2.4), les couples f_j , f_k $(1 \leq j \leq k)$ sont en involution, à l'exception des couples f_{2j-1} , f_{2j} ;

ceux-ci vérifient :

$$\overset{1}{(f_{2j-1}, f_{2j})} = 1 .$$

<u>Note</u> 2.3 . - Soient $g_1, \dots, g_q$ des intégrales premières indépendantes du système caractéristique de $d\omega$; la restriction de ω à une variété

$$g_1 = \text{const.}, \dots, g_q = \text{const.}$$

réduit le rang de $d\omega$ d'un nombre pair, qu'E. Cartan [5], Chap. XII, n° 124, a explicité : c'est $2(q-r)$, si toutes les parenthèses de Poisson (g_j, g_k) $(j, k \in \{1, \dots, q\})$ sont fonctions composées de $g_1, \dots, g_q$ et si $2r$ est le rang, sur cette variété, de la forme extérieure

$$\sum_{j,k} (g_j, g_k)\ \xi_j \wedge \xi_k$$

des variables $\xi_1, \dots, \xi_q$.

D'où, en particulier $(q = n, r = 0)$, le théorème suivant, qui éclairera le début de l'étude de l'équation de Schrödinger et permettra d'établir le théorème 3.1, qui éclaire lui aussi cette étude.

THEOREME 2 . - <u>Soit</u> ω <u>une forme de Pfaff ; soit</u> $2n$ <u>le rang de</u> $d\omega$.
1) <u>Le système caractéristique de</u> $d\omega$ <u>possède localement des</u> n-uples $\{f_2, f_4, \dots, f_{2n}\}$ <u>d'intégrales premières indépendantes, en involution deux à deux.</u>
2) <u>Etant donné l'un de ces</u> n-uples, <u>une quadrature donne localement</u> $n+1$ <u>fonctions</u> $f_0, f_1, f_3, \dots, f_{2n-1}$ <u>telles que</u> ω <u>ait l'expression</u> (2.3) ; $f_1, f_2, f_3, \dots f_{2n}$ <u>sont des intégrales premières indépendantes du système caractéristique de</u> $d\omega$.

<u>Preuve de 1°)</u>. - Le lemme 2 et la note 2.2.

<u>Preuve de 2°)</u>. - Par hypothèse

$$df_2 \wedge df_4 \wedge \dots \wedge df_{2n} \neq 0; \qquad (\forall j, k) \qquad (d\omega)^{n-1} \wedge df_{2j} \wedge df_{2k} = 0 ;$$

autrement dit, il existe des formes différentielles Θ_j telles que

$$(d\omega)^{n-1} = \sum_{j=1}^{n} \Theta_j \wedge df_2 \wedge \dots \widehat{df_{2j}} \dots \wedge df_{2n} ;$$

($\widehat{\ }$ supprime ce qu'il coiffe) ; cette relation exprime l'existence de formes différentielles θ_j telles que

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \theta_j \wedge df_{2j} ;$$

c'est-à-dire la condition

$$d\omega = 0 \quad \text{mod.} \ (df_2, \dots, df_{2n})$$

c'est-à-dire l'existence d'une fonction f_o telle que

$$\omega = df_o \ \text{pour} \ f_2 = \text{const.} , \dots , f_{2n} = \text{const.}$$

c'est-à-dire l'existence de $n+1$ fonctions f_o, f_1, f_3, f_{2n-1} vérifiant (2.3) .

3. VARIETES LAGRANGIENNES DE L'ESPACE SYMPLECTIQUE Z ET DE SES HYPERSURFACES.-

Notons :

$$\omega(z, dz) = \tfrac{1}{2}[z, dz] , \tag{3.1}$$

c'est-à-dire, dans un repère R :

$$\omega(z, dz) = \tfrac{1}{2}\langle p, dx\rangle - \tfrac{1}{2}\langle dp, x\rangle = \langle p, dx\rangle - \tfrac{1}{2} d\langle p, x\rangle , \text{ où } Rz = (x, p) ; \tag{3.2}$$

$d\omega$ est évidemment de rang 2ℓ : son système caractéristique est $dz = 0$.

<u>Les variétés lagrangiennes</u> V <u>de</u> Z , qui sont les variétés de dimension ℓ sur lesquelles $d\omega = 0$, <u>sont les variétés d'équations locales</u>, hors du contour apparent Σ_R de V :

$$p = \varphi_{R,x}(x) , \tag{3.3}$$

où φ_R est la phase de V dans R ; φ_R est une fonction arbitraire quand V est arbitraire.

Etant donné $x \in V$, on peut choisir R tel que $x \notin \Sigma_R$ et employer les équations locales (3.3) au voisinage de x .

Mais, si l'on veut employer un seul repère, on devra préciser comme suit le résultat précédent.

x^j et p_j désigneront des coordonnées duales de x et p.

LEMME 3.1. - Les variétés lagrangiennes de Z , dont la projection par $R_X : z \to x$ est une variété de X de dimension $k \leq \ell$ et d'équations

(3.4) $$x^j = F_j\,(x^1,\dots,x^k) \qquad (k+1 \leq j \leq \ell)\ ,$$

sont les variétés V d'équations locales (3.4) et

(3.5) $$p_i = \frac{\partial \varphi_R(x^1,\dots,x^k)}{\partial x^i} - \sum_{j=k+1}^{\ell} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}\, p_j \quad (1 \leq i \leq k)\ ,$$

où φ_R est la phase de V dans R et où $x^1, \dots x^k, p_{k+1}, \dots, p_\ell$ sont des coordonnées locales de V ; φ_R est une fonction arbitraire de $x^1, \dots, x^k$ quand V est arbitraire.

Si $k = \ell$, les équations de V se réduisent à (3.3).

Si $k = 0$, V est un plan :

$$x = \text{const.}\ ,\ p \ \text{arbitraire} \ ;\ \varphi_R = \text{const.}$$

Preuve. -

$$d< p,\, dx> \ = \sum_{i=1}^{k} (dp_i + \sum_{j=k+1}^{\ell} \frac{\partial F_j}{\partial x^i}\, dp_j) \wedge d\,x^i$$

$$= d \sum_{i=1}^{k} (p_i + \sum_{j=k+1}^{\ell} \frac{\partial F_j}{\partial x^i}\, p_j)\, d\,x^i.$$

La condition $d\omega = 0$ sur V est donc l'existence sur V d'une fonction φ_R de $(x^1,\dots,x^k)$ vérifiant (3.5). La condition $\dim V = \ell$, est que $(x^1,\dots,x^k, p_{k+1},\dots, p_\ell)$ soient indépendantes sur V .

Notations. - Etant donné une fonction $f : Z \to R$ et un repère R, f_R désigne la fonction $Z(\ell) \to R$ telle que : $f_R\,(x\,,p) = f(z)$ pour $Rz = (x\,,p)$, c'est-à-dire $f_R \circ R = f$.

W est une hypersurface de Z d'équation

(3.6) $$W : H\,(z) = 0 \ \ ,\ H_z \neq 0\ .$$

ω_W et f_W sont les restrictions de ω et f à W .

LEMME 3.2 . - (E. Cartan) . - $d\,\omega_W$ est de rang $2\ell - 2$; son <u>système caractéristique</u> est le <u>système d'Hamilton</u> :

$$(3.7) \qquad (\forall j, k \in \{1, \ldots, \ell\}) \frac{d\,x^j}{H_{R,p_j}(x,p)} = - \frac{d\,p_k}{H_{R,x^k}(x,p)} \quad \text{sur } W,$$

où le vecteur $(H_{R,p}; - H_{R,x})$ est évidemment tangent à W.

<u>Preuve</u> . - La condition

$$(3.8) \qquad (d\omega_W)^{\ell-1} \wedge d\,f_W = 0 \quad \text{sur } W$$

s'écrit :

$$\frac{(d\omega)^{\ell-1} \wedge df \wedge dH}{(d\omega)^{\ell}} = 0 \quad \text{sur } W \;;$$

vu (2.4) et (2.5) , où l'on choisit $f_{2j-1} = p_j$, $f_{2j} = x^j$ pour identifier (2.3) et (3.2), cette condition (3.8) s'écrit donc :

$$(3.9) \qquad \sum_{j=1}^{\ell} (f_{R,p_j} H_{R,x^j} - H_{R,p_j} f_{R,x^j}) = 0 \quad \text{pour } H_R = 0 \;;$$

elle n'est pas vérifiée identiquement ; donc $(d\,\omega_W)^{\ell-1} \neq 0$; or $(d\,\omega_W)^{\ell} = 0$;

donc le rang de $d\omega_W$ est $2(\ell - 1)$ et les relations équivalentes (3.8) et (3.9) expriment que f_W est intégrale première du système caractéristique de $d\,\omega_W$; ce système est donc le système d'Hamilton (3.7) .

<u>Note</u> 3.1. - Nous emploierons, sur W, comme coordonnées locales, $2\ell - 2$ intégrales premières indépendantes du système d'Hamilton (3.7) et une fonction t telle que (3.7) s'écrive :

$$(3.10) \qquad d\,x = H_{R,p}(x,p)\,d\,t \;, \quad d\,p = - H_{R,x}(x,p)\,d\,t\,.$$

<u>Définition</u> 3.1. - Etant donnée une fonction $g : Z \to R$, définissons, en z , $g_z \in Z$ par

$$(3.11) \qquad d\,g = [d\,z\,,\, g_z\,] \;;$$

autrement dit :

(3.12) $$R\,g_z = (g_{R,p}, -g_{R,x})\,;$$

le système d'Hamilton (3.10) s'écrit donc :

(3.13) $$d\,z = H_z\,d\,t\;;$$

vu (2.5), où l'on choisit $f_{2j-1} = p_j$, $f_{2j} = x^j$ pour identifier (2.3) et (3.2), la parenthèse de Poisson de g et g' est :

(3.14) $$(g, g') = \langle g'_{R,x}, g_{R,p}\rangle - \langle g_{R,x}, g'_{R,p}\rangle = [g_z, g'_z]\,.$$

Le vecteur $\varkappa = H_z$ de W est appelé vecteur caractéristique ; les courbes de W tangentes à ce vecteur en chaque point de W, c'est-à-dire solutions du système d'Hamilton (3,7) sont appelées courbes caractéristiques.

Voici le théorème classique qui explicite les variétés lagrangiennes de V, c'est-à-dire la résolution de l'équation non linéaire du premier ordre, dont l'inconnue est une fonction φ :

$$H_R(x, \varphi_x) = 0\,.$$

THEOREME 3.1 - 1) Le système d'Hamilton (3.7) possède des $(\ell-1)$ - uples

$$h_1, \dots, h_{\ell-1}$$

d'intégrales premières indépendantes, deux à deux en involution, c'est-à-dire telles que :

(3.15) $$(\forall j, k \in \{1, \dots, \ell-1\}) \qquad (d\,\omega)^{\ell-2} \wedge d\,h_j \wedge d\,h_k = 0 \quad \text{sur } W\,.$$

Etant donné l'un de ces $(\ell-1)$ - uples, une quadrature définit localement ℓ fonctions

$$g_0, g_1, \dots, g_{\ell-1}$$

telles que :

(3.16) $$\omega = d\,g_0 + \sum_{j=1}^{\ell-1} g_j\;d\,h_j \quad \text{sur } W\,.$$

$g_1, \dots g_{\ell-1}, h_1, \dots, h_{\ell-1}$ constituent $2(\ell-1)$ intégrales premières indépendantes du système d'Hamilton (3.7). Si t est défini par (3.10),

(3.17) $$t, h_1, \dots, h_{\ell-1}, g_1, \dots, g_{\ell-1}$$

constituent des coordonnées locales de W ; g_o est une fonction de ces coordonnées.

2) Les variétés lagrangiennes V de W sont les variétés de V qui localement:

i) sont fibrées par des courbes caractéristiques :

$$t \text{ arbitraire} \; ; \; h_1 = \text{const} , \dots, h_{\ell-1} = \text{const} , g_1 = \text{const} , \dots, g_{\ell-1} = \text{const}.$$

ii) ont pour base B de cette fibration les variétés lagrangiennes de l'espace $Z(\ell-1)$ de coordonnées

(3.18) $$x' = (h_1 , \dots, h_{\ell-1}) , \; p' = (g_1 , \dots, g_{\ell-1}) .$$

3) Si les coordonnées locales (3.17) sont employées sur W, les équations locales d'une variété lagrangienne V de W sont les suivantes, après avoir convenablement permuté les indices $(1,\dots,\ell-1)$, choisi $k \in \{o,\dots,\ell-1\}$ et choisi $\ell-k$ fonctions numériques réelles $F_o , F_{k+1} ,\dots, F_{\ell-1}$ de k variables :

(3.19) $$V : \begin{cases} h_j = F_j (h_1,\dots, h_k) & (k+1 \leq j \leq \ell-1) \\ g_i = \dfrac{\partial F_o (h_1 ,\dots, h_k)}{\partial h_i} - \displaystyle\sum_{j=k+1}^{\ell-1} \dfrac{\partial F_j}{\partial h_i} g_j & (1 \leq i \leq k) \; ; \end{cases}$$

$t , h_1 ,\dots, h_k , g_{k+1} , \dots , g_{\ell-1}$ sont des coordonnées locales de V . La phase lagrangienne de V vaut:

(3.20) $$\psi (t , h_1 , \dots , h_k , g_{k+1} , \dots g_{\ell-1}) =$$
$$g_o (t , h_1 , \dots , h_k , g_{k+1} ,\dots g_{\ell-1}) + F_o (h_1 ,\dots , h_k).$$

Si $k = \ell-1$, le sytème (3.19) signifie :

(3.21) $$g_i = \frac{\partial F_o (h_1,\dots, h_{\ell-1})}{\partial h_i} \quad (1\leq i \leq \ell-1) .$$

Si $k = 0$, il signifie :

(3.22) $$h = \text{const.} \; , \; g \text{ arbitraire} \; ; \; F_o = \text{const.}$$

Preuve de 1°) . - Le théorème 2 et le lemme 3.2.

Preuve de 2°) . - La condition que $d\omega = 0$ sur V , équivaut, vu (3.16) à la suivante : l'application

$$V \ni z \mapsto (h_1 , \ldots , h_{\ell-1} ; g_1 , \ldots , g_{\ell-1}) \in Z(\ell-1) \tag{3.23}$$

applique V sur une variété B de $Z(\ell-1)$, vérifiant $\sum_j dh_j \wedge dg_j = 0$; B est donc de dimension $\leq \ell - 1$. Pour que $\dim V = \ell$, il faut et suffit que :

i) $\dim B = \ell - 1$, c'est-à-dire : B est lagrangienne ;

ii) (3.23) applique une courbe caractéristique de V sur chaque point de B .

Preuve du 3°) . - Le lemme 3.1 , où l'on remplace

$$Z \quad , \quad x , p \quad , \qquad V , \; d\varphi_R = \langle p , dx \rangle \; \text{ sur } V$$

par

$$Z(\ell-1) \; , \; x' , p' [\text{cf } (3.18)] \; , \; B \; , \; dF_0 = \sum_{j=1}^{\ell-1} g_j \, dh_j \; \text{ sur } B ,$$

en sorte que (3.16) donne :

$$\omega = dg_0 + dF_0 \quad \text{sur } V ; \quad \text{or } \omega = d\psi .$$

Le n° 4 va employer la

Définition 3.2 . - Etant donnée une variété lagrangienne V de W, nommons mesure de V invariante toute mesure régulière η de V invariante par le vecteur caractéristique $\varkappa$ de W ; c'est-à-dire : toute forme différentielle η , définie sur V, homogène de degré ℓ en les différentielles et annulée par la dérivation de Lie [6] $\mathcal{L}_\varkappa$ dans la direction de $\varkappa$:

$$\mathcal{L}_\varkappa \eta = 0 ; \tag{3.24}$$

c'est-à-dire, puisque par définition

$$\mathcal{L}_\varkappa \eta = i_\varkappa d\eta + di_\varkappa \eta \quad \text{et} \quad d\eta = 0 ,$$

telle que :

$$d(i_\varkappa \eta) = 0 . \tag{3.25}$$

THEOREME 3.2. - 1°) Employons sur $V - \sum_R$ la coordonnée locale $x = R_X z$; la condition que

$$(3.26) \qquad \eta\,(z\,,\,dz) = \chi_R(x)\; d^{\ell} x \qquad\qquad (\chi_R : V \setminus \sum_R \to R)$$

<u>est une mesure de</u> V <u>invariante s'écrit</u> :

$$(3.27) \qquad < \frac{\partial}{\partial x}\;,\; \chi_R\,(x)\; H_{R,p}\,(x\,,\,\varphi_{R\,,\,x}) > \; = 0\;.$$

Vu (3.10), <u>elle signifie que ; le long des caractéristiques engendrant</u> V ,

$$(3.28) \qquad \frac{d\,\chi_R}{d\,t} + \sum_j \frac{\partial\, H_{R\,,\,p_j}\,(x\,,\,\varphi_{R\,,\,x})}{\partial\, x^j}\;\; \chi_R = 0\;;$$

<u>c'est-à-dire, plus explicitement</u> :

$$(3.29) \qquad \frac{d\,\chi_R}{d\,t} + \Big[\sum_{j=1}^{\ell} H_{R\,,\,x^j p_j}(x,p) + \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{\ell} H_{R,p_j p_k}(x,p)\,\varphi_{R\,,\,x^j x^k}\Big]_{p=\varphi_{R,x}} \chi_R = 0\,.$$

2°) <u>Employons sur</u> V <u>les coordonnées locales</u> (3.17) ; <u>la condition que</u>

$$(3.30) \qquad \eta = \tau\,(t\,,\,h\,,\,g)\,dt \;\wedge\, d^{\ell-1} h \wedge d^{\ell-1} g \qquad\qquad (\tau : V \to R)$$

<u>est une mesure de</u> V <u>invariante s'énonce</u> :

(3.31) <u>la fonction</u> τ <u>est indépendante de</u> t . .

<u>Preuve de 1°)</u> . - Dans les coordonnées choisies, les composantes de $\varkappa$ sont :

$$d\,x = H_{R\,,\,p}\,(x\,,\,\varphi_{R\,x})\;;$$

(3.27) exprime (3.25) .

<u>Preuve de 2°)</u>. - Dans les coordonnées choisies, les composantes de $\varkappa$ sont :

$$(d\,t\,,\; d\,h\,,\; d\,g) = (1\,,\,0\,,\,0)\;\;;$$

(3.31) exprime (3.25) .

4. CALCUL DE $a\,U$. - Explicitons la définition d'un opérateur lagrangien, c'est-à-dire la formule (6.6) du Chap.II, § 1.

Notations 4 . - Soit a un opérateur lagrangien, associé à une fonction formelle

$$a^{\circ}(\nu,.) = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}\, a_r^{o}\,(.)$$

définie sur $\Omega \subset Z$. Soit W une hypersurface de Ω d'équation

$$W : H(z) = 0 \quad , \quad H_z \neq 0 \quad .$$

Soit V une variété lagrangienne de W ; soit φ_R sa phase dans un repère R ; soit une fonction indéfiniment différentiable

$$\alpha : V \setminus \Sigma_R \to \mathbb{C} \quad ;$$

$x = R_X z$ servira de coordonnée locale sur $V \setminus \Sigma_R$.

Soit $\eta = \chi_R d^{\ell} x$ une mesure de V invariante (n° 3).

THEORÈME 4 . - 1°) On a :

$$a_R^{+}(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})\,[\alpha(x)e^{\nu\varphi_R(x)}] = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}\, e^{\nu\varphi_R(x)}\, L_r(x,\frac{\partial}{\partial x})\,\alpha(x) \quad , \tag{4.1}$$

où L_r est un opérateur différentiel d'ordre $\leq r$, dépendant de a, V et R .

$$L_o(x) = a_o^{o}(x,\varphi_{R,x}) \quad . \tag{4.2}$$

2°) Si $a^{o} = H$, alors :

$$L_o = 0 \ ; \ L_1(x,\frac{\partial}{\partial x})\,\alpha = \chi_R^{\frac{1}{2}}\, \frac{d}{dt}(\alpha\, \chi_R^{-\frac{1}{2}}) \quad , \tag{4.3}$$

$\frac{d}{dt}$ étant la dérivée le long des courbes caractéristiques de W , [cf.(3.10)], c'est-à-dire la dérivée de Lie $\mathcal{L}_{\varkappa}$.

3°) Plus généralement, supposons que a_o^{o} s'annule n fois sur W :

$$1 \leq n \leq \infty \quad ;$$

il existe alors un nombre m , entier ou infini, tel que :

$$1 \leq m \leq n \quad ,$$

$$L_o = L_1 = \ldots = L_{m-1} = 0 \quad ,$$

$$L_m(x,\frac{\partial}{\partial x})\,\alpha(x) = \chi_R^{\frac{1}{2}}\, M(z,\frac{d}{dt})(\alpha\, \chi_R^{-\frac{1}{2}}) \text{ si } m \neq \infty \quad ; \tag{4.4}$$

l'opérateur différentiel M dépend de a et W, est indépendant de V et R ; il n'est pas identiquement nul sur W ; son ordre est $\leq m$, l'égalité n'étant atteinte que si $m = n$.

En général $m = 1$. Si $n > 1$, L_1 est donc en général la multiplication par une fonction non nulle.

4°) Si $a^o = H$ et si H_R est un polynome en p, de degré s, de partie principale $H_R^{(s)}$, alors :

$$L_r = 0 \quad \text{pour} \quad r > s \;,$$

(4.5)

$$L_s(x,p) = e^{\frac{1}{2} < \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial p} >} H_R^{(s)}(x,p) \;.$$

Si $s = 2$, les formules (4.3) et (4.5) explicitent donc a.

Preuve de 1°). - La formule (6.6) du Chap. II § 1 s'explicite comme suit :

$$(4.6) \qquad a_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})[\alpha(x)\, e^{\nu\,\varphi_R(x)}] = \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}\, e^{\nu\,\varphi_R(x)}\, \ell_r(\nu,x,\frac{\partial}{\partial x})\,\alpha(x) \;,$$

où ℓ_r est l'opérateur différentiel d'ordre r, fonction formelle de ν :

$$(4.7) \qquad \ell_r(\nu,x,\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{k=o}^{r} \frac{1}{k!} \sum_{I,J_o,\dots J_k} \frac{2^{-|I|}}{I!J_o!\dots J_k!}$$

$$a^o_{R,x^I p^{I+J_o+\dots+J_k}}(\nu,x,\varphi_{R,x})\,\varphi_{R,x^{J_1}}\dots\varphi_{R,x^{J_k}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{J_o}$$

la somme $\sum_{I,J_o,\dots,J_k}$ étant étendue à l'ensemble des $(k+2)$ - uples $I,J_o,\dots,J_k$ de ℓ-indices vérifiant la condition :

$$(4.8) \qquad |I| + |J_o| + \dots + |J_k| - k = r \;, \quad 2 \leq |J_1|,\dots, 2 \leq |J_k| \;;$$

cette condition implique évidemment : $k \leq r$, $|J_o| \leq r$.

Ces formules (4.6) et (4.7) impliquent évidemment (4.2) et (4.1), où L_r est indépendant de ν, alors que ℓ_r en dépend.

Preuve de 2°) . - (4.2) donne $L_o = 0$. On a $L_r = \ell_r$;
la condition (4.8) signifie pour $r = 1$:

ou : $k = 0$, $|I| = 0$, $|J_o| = 1$;

ou : $k = 0$, $|I| = 1$, $|J_o| = 0$;

ou : $k = 1$, $|I| = 0$, $|J_o| = 0$, $|J_1| = 2$;

donc :

$$L_1(x,\frac{\partial}{\partial x}) = < \frac{\partial\alpha}{\partial x} , H_{R,p}(x,\varphi_{Rx}) >$$

$$+ \frac{1}{2} \Big[\sum_{j=1}^{\ell} H_{R,x^j p_j}(x,p) + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} H_{R,p_j p_k}(x,p)\, \varphi_{R,x^j x^k} \Big]_{p=\varphi_{R,x}} \alpha \quad ;$$

cette relation équivaut à $(4.3)_2$, vu (3.10) et (3.29).

Preuve de 3°) .- Soit $k \in \mathbb{N}$; il existe une fonction ${}^o b^o : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que :

$$a_o^o = {}^o b^o \, . \, H^{n_o} \quad ,$$

où : $n_o = n$ et ${}^o b^o$ n'est pas identiquement nul sur W , si $n \neq \infty$;

$n_o = k+1$ et ${}^o b^o = 0$ sur W , si $n = \infty$.

Puisque

$$a^o \circ b^o = a^o \, . \, b^o \mod \frac{1}{\nu} \quad [\text{cf. Ch II, § 2, (1.5)}] \quad ,$$

il existe un opérateur lagrangien c tel que :

$$a_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) - {}^o b_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) \circ [H_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})]^{n_o} = \frac{1}{\nu}\, c_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) \quad ;$$

si c_o^o ne s'annule pas sur W , notons ${}^1 b^o = c^o$, $n_1 = 0$;

si c_o^o s'annule sur W , appliquons à c le raisonnement qui vient d'être appliqué à a ;

poursuivons par récurrence ; nous obtenons <u>une décomposition du type De Paris</u> [7] :

$$a_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{j=0}^{h} \frac{1}{\nu^j}\, {}^j b_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) \circ [H_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})]^{n_j} \mod. \frac{1}{\nu^{k+1}}$$

où : $$h \leqq k \quad ; \quad n_j \geqq 0 \quad ;$$

$$n_j = k+1 \quad \text{quand} \quad {}^j b^o = 0 \quad \text{sur} \quad W \quad .$$

Vu le 1°) du théorème,

$$(4.9) \qquad [H_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})]^{n_j} \; [\alpha(x)\, e^{\nu\,\varphi_R(x)}] = 0 \quad \text{mod.} \ \frac{1}{\nu^{n_j}} \quad ;$$

notons :

$$m(k) = \operatorname*{Inf}_{j\in\{0,\dots,k\}} (j + n_j) \quad ;$$

si $m(k) > k$, on a donc :

$$a_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) \; [\alpha(x)\, e^{\nu\,\varphi_R(x)}] = 0 \quad \text{mod.} \ \frac{1}{\nu^{k+1}} \quad .$$

Si $m(k) > k$ pour tout k , on a donc :

$$(\forall r) \quad L_r = 0 \quad ;$$

le théorème vaut avec $m = \infty$.

Sinon, nous choisissons k tel que :

$$m(k) \leqq k \quad ;$$

nous définissons $m = m(k)$; nous notons J l'ensemble des j tels que :

$$j + n_j = m \quad .$$

Vu 1°) , ${}^j b_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})$ est mod. $\frac{1}{\nu}$ la multiplication par la fonction ${}^j b^o$;

la décomposition de De Paris donne donc, vu (4.9) :

$$a_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}) \; [\alpha(x)\, e^{\nu\,\varphi_R(x)}] =$$

$$\sum_{j\in J} \frac{1}{\nu j}\, {}^j b^o(z) \; [H_R^+(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x})]^{m-j} \; [\alpha(x)\, e^{\nu\,\varphi_R(x)}] \ \text{mod} \ \frac{1}{\nu^{m+1}}$$

où : $$1 \leqq m \leqq n \quad ;$$

J est fini, non vide ; $0 \in J$ si et seulement si $m = n$;

${}^j b^o$ n'est pas nul sur W .

Vu $(4.3)_2$, les relations (4.4) valent donc, avec :

$$L_m\alpha = \sum_{j\in J} {}^jb^o(z)\, \chi_R^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{dt}\right)^{m-j} (\alpha\chi_R^{-\frac{1}{2}}) \quad ;$$

L_m n'est pas nul ; son ordre est $\leqq m$; cet ordre est m si et seulement si $m = n$.

En général c_o^o ne s'annule pas sur W , donc $n_1 = 0$, $m(k) = 1$, $m = 1$

Preuve de 4°) . - $a^o = H$; donc $\ell_r = L_r$; vu (4.7) où $a^o = H$, on peut compléter la condition (4.8) par la relation :

$$|I| + |J_o| + \ldots + |J_k| = k + r \leqq s \quad .$$

Si $r > s$, elle ne peut être satisfaite ; donc $L_r = 0$.

Si $r = s$, elle exige $k = 0$, (4.8) devient

$$|I| + |J_o| = s$$

et (4.7) s'écrit donc :

$$L_s(x,p) = \sum_I \frac{2^{-|I|}}{I!} H^{(s)}_{R,\, x^I p^I}(x,p) \quad ,$$

la somme étant étendue à l'ensemble des ℓ-indices I tels que :

$$|I| \leqq s \quad ;$$

autrement dit :

$$L_s(x,p) = \sum_{j=0}^{s} \frac{2^{-j}}{j!} \left< \frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial p} \right>^j H_R^s(x,p) \quad ,$$

où l'on peut remplacer $\sum\limits_{j=0}^{s}$ par $\sum\limits_{j=0}^{\infty}$, ce qui donne (4.5).

5. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION LAGRANGIENNE $a\,U = 0$. -

Vu le théorème 1 , les solutions de cette équation sont définies sur des sous-variétés lagrangiennes V de la variété d'équation $a_o^o = 0$.

Notations 5 . - Nous supposons que cette équation

$$a_o^o = 0$$

définit une hypersurface de Z ; soit W l'une de ses parties régulières. Soit

$$U_R = \sum_r \frac{1}{\nu^r} \alpha_{R,r} e^{\nu \varphi_R}$$

l'expression dans un repère R d'une solution U définie sur une variété lagrangienne V de W . Nous employons les notations 4 .

Vu le théorème 4.1 , la condition que $a\,U = 0$ sur $V \setminus \Sigma_R$ s'écrit $(\forall r \in \mathbb{N})$:

$$(5.1)_r \qquad M(z,\frac{d}{dt})\,[\chi_R^{-\frac{1}{2}}(x)\,\alpha_{R,r}(x)] + \chi_R^{-\frac{1}{2}} \sum_{s=1}^{r} L_{m+s}(x,\frac{\partial}{\partial x})\,\alpha_{R,r-s}(x) = 0 \quad ;$$

la première de ces équations s'écrit :

$$(5.1)_o \qquad M(z,\frac{d}{dt})\,\beta(z) = 0 \ , \qquad \text{où} \qquad \beta(z) = \chi_R^{-\frac{1}{2}}(x)\,\alpha_{R,o}(x)$$

est l'amplitude lagrangienne de U ; elle est indépendante de R .

Le théorème 2.2 du Chap II, § 2 complète comme suit ces équations (5.1) :

$$(5.2) \qquad \chi_R^{-3r-1/2}\,\alpha_{R,r} \text{ est indéfiniment différentiable sur } \Sigma_R \ ;$$

rappelons que $\chi_R^{-1} = 0$ sur Σ_R .

<u>Note</u> 5.1 . - Si le nombre de fois que a_o^o s'annule sur W est $n > 1$, alors, <u>en général</u>, l'opérateur M est le produit par une fonction $M : W \to \mathbb{C}$ non nulle ; les équations (5.1) impliquent donc que le support de U est une sous-variété lagrangienne de la variété de Z d'équations :

$$H(z) = M(z) = 0 \ .$$

L'étude de ce cas exige que les n° 3 et 4 soient généralisés : il faut construire les sous-variétés lagrangiennes V d'une variété donnée W de Z quand la codimension de W est > 1 ; il faut expliciter $a\,U$, quand U est défini sur une telle variété lagrangienne V . Nous n'étudierons pas ce cas et l'excluons.

Montrons comment les conditions (5.1) et (5.2) permettent de <u>résoudre l'équation</u> $a\,U = 0$ <u>en employant un seul repère</u> R .

LEMME 5 . - Soit K un arc d'une caractéristique engendrant V ; supposons que l'ordre de M est > 0 et que le coefficient principal de M ne s'annule pas sur K .

1°) Soit $z' \in K$; soit U' une solution de l'équation lagrangienne $a\,U' = 0$, définie au voisinage de z' dans V .

Il existe alors un voisinage de K dans V sur lequel l'équation $a\,U = 0$ possède une unique solution U telle que $U = U'$ au voisinage de z' .

2°) Soit R un repère tel que Σ_R soit transverse à K et que χ_R^{-1} ne s'annule pas une infinité de fois sur $K \cap \Sigma_R$; pour que U_R soit au voisinage de K l'expression dans R d'une solution lagrangienne U de l'équation $a\,U = 0$, il faut et suffit que U_R vérifie (5.1) et (5.2).

Preuve ; notations . - V_K est un voisinage de K du type :

$$V_K = B \times I \quad (B : \text{boule } |b| \leq 1 \text{ de } \mathbb{R}^{\ell-1} \ ; \ I : \text{segment } |t| \leq \text{const. de } \mathbb{R}) \ ;$$

les segments $b \times I$ sont des caractéristiques ;

$0 \times I$ est la caractéristique donnée K ; $z' = (0,0)$;

$\bigcup_j I_j = I$ est un recouvrement fini de I ; $V_j = B \times I_j$; j est entier.

Preuve de 1°) . - Faisons un choix des V_K et V_j ayant les propriétés suivantes :

U' est défini sur V_o ;

à chaque V_j est associé un repère R_j tel que : $V_j \cap \Sigma_{R_j} = \emptyset$

I_j est le segment $j - 1 \leq t \leq j + 1$.

Si U a été défini sur $V_o \cup V_1 \cup \dots \cup V_{j-1}$ $(j > 0)$, alors l'emploi de (5.1) dans le repère R_j permet de prolonger à V_j successivement les définitions de $\alpha_{R_j,0}, \dots, \alpha_{R_j,r}, \dots, U_{R_j}$, U ; ces prolongements sont uniques.

Preuve de 2°) . - L'expression U_R d'une fonction lagrangienne U définie au voisinage de K vérifie (5.1) et (5.2). Il s'agit de prouver la réciproque.

Soient un repère R , un voisinage V_K de K et une fonction formelle

$$(5.3) \qquad U_R = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \alpha_{R,r}\, e^{\nu \varphi_R}$$

définie sur $V_K \setminus \Sigma_R \cap V_K$, vérifiant (5.1) et (5.2).

Il s'agit de prouver que U_R est, au voisinage de K , l'expression dans R d'une fonction lagrangienne.

Soit $z' \in K$; vu 1°) , il existe une unique fonction lagrangienne U définie au voisinage de K , dont l'expression dans R est U_R au voisinage de z' ; il s'agit de prouver que cette expression est U_R au voisinage de K .

Puisque cette expression vérifie, comme U_R , (5.1) et (5.2) , il suffit de prouver le théorème d'unicité que voici : si la fonction formelle (5.3) est nulle au voisinage d'un point de K , alors elle est nulle au voisinage de K .

Choisissons des V_K et V_j ayant les propriétés suivantes :

$U_R = 0$ sur V_o ;

I_j est le segment : $j - 1 \leqq t \leqq j$;

$V_K \cap \Sigma_R = \bigcup_j B_j$, où $B_j = I_j \cap I_{j+1} = B \times j$.

Supposons prouvé que :

$$U_R = 0 \text{ sur } V_o \cup V_1 \cup \ldots \cup (V_j \setminus B_j) \ (j > 0) \quad ;$$

vu (5.2) , $\chi^{-1/2}\alpha_{R,r}$ possède sur B_j une infinité de dérivées, toutes nulles ; (5.1) donne donc successivement :

$$\alpha_{R,0} = 0 \ , \ \alpha_{R,1} = 0 \ , \ \ldots \ , \ \alpha_{R,r} = 0 \ , \ \ldots \ , \ U_R = 0 \text{ sur } V_{j+1} \setminus B_{j+1} \ .$$

<u>Ce lemme énonce de surprenantes propriétés des opérateurs différentiels</u> M <u>et</u> L_r ; mais nous ne retiendrons que la conséquence suivante du 2°) de ce lemme :

THÉORÈME 5 . - <u>Soit</u> V <u>une variété lagrangienne de l'hypersurface</u> W , <u>où</u> $a_o^o = 0$. <u>Soit</u> R <u>un repère. Soit</u> $\mathfrak{y} = \chi_R \ d^\ell x$ <u>une mesure invariante de</u> V ; <u>supposons que</u> χ_R^{-1} <u>ne s'annule pas une infinité de fois sur</u> Σ_R ; <u>supposons</u> Σ_R <u>transverse aux caractéristiques de</u> W <u>qui engendrent</u> V . <u>Alors, pour que</u>

$$\check{U}_R = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \alpha_{R,r} \ e^{\nu \varphi_R}$$

<u>soit l'expression dans</u> R <u>d'une solution lagrangienne</u> $\check{U}$ <u>définie sur le revêtement universel</u> $\check{V}$ <u>de</u> V , <u>il faut et suffit que</u> $\check{U}_R$ <u>vérifie</u> (5.1) <u>et</u> (5.2).

<u>Note</u> 5.2 . - Le lemme 5 et le théorème 5 s'appliquent évidemment aux solutions $\check{U}$, définies mod $\frac{1}{\nu^s}$ sur $\check{V}$, de l'équation

$$a\,\check{U} = 0 \quad \text{mod.} \ \frac{1}{\nu^{m+s}} \quad (s \in \dot{\mathbb{N}}) \ .$$

6. SOLUTIONS À AMPLITUDE LAGRANGIENNE POSITIVE DE L'ÉQUATION LAGRANGIENNE $a\,U = 0 \mod 1/\nu^2$: QUANTIFICATION DE MASLOV. - Définition 6.1 . - Nommons hamiltonien toute fonction indéfiniment différentiable

$$H : \Omega \to \mathbb{R} \qquad (\Omega : \text{partie ouverte de } Z)$$

telle que $H_z \neq 0$ sur l'hypersurface W d'équation :

$$W : H(z) = 0 \quad .$$

On sait qu'en mécanique classique le système d'Hamilton (3.7) régit le mouvement des particules et plus généralement, celui des mécanismes holonomes.

Soit a l'opérateur lagrangien associé à un hamiltonien H ; il est donc auto-adjoint (§ 1 , n° 6) ; la résolution de l'équation

$$a\,\check{U} = 0 \mod 1/\nu^2$$

est la recherche des variétés lagrangiennes de W possédant une mesure invariante, que nous supposerons choisie > 0 .

En effet l'équation $(5.1)_o$ s'écrit, vu (4.3) :

$$\frac{d\beta}{dt} = 0$$

et signifie donc ceci : l'amplitude lagrangienne de $\check{U}$ est constante sur chacune des caractéristiques engendrant V ; autrement dit : $\beta\eta$ est invariante.

Nous lui imposerons d'être $\geqq 0$; autrement dit, nous imposerons à l'amplitude lagrangienne β de $\check{U}$ la condition

$$(6.1) \qquad \beta \geqq 0 \quad .$$

(Rappelons que c'est le cas en physique, où l'amplitude doit varier plus lentement que $e^{\nu\varphi_R}$) .

La définition 3.2 (Chap.II, § 2) des fonctions lagrangiennes sur V exige la donnée d'un nombre imaginaire pur ν_o , que le chapitre III notera :

$$(6.2) \qquad \nu_o = \frac{i}{\hbar} \quad , \qquad (\hbar > 0) \quad ,$$

car la physique quantique choisit $2\pi\hbar$ égal à la constante de Planck.

Puisque

$$\alpha_{R,o} = \beta\left(\frac{\eta}{d^\ell x}\right)^{1/2} \quad , \quad \text{où } \beta \geqq 0 \quad ,$$

la condition que $\check{U}$ soit lagrangien sur V mod. $\frac{1}{\nu}$ se réduit à celle-ci :

$$(\frac{\Pi}{d^{\ell}x})^{1/2}\, e^{\nu_o \varphi_R}$$

est défini (c'est-à-dire : uniforme) sur V ; vu les définitions de $(d^{\ell}x)^{1/2}$ et $\Pi^{1/2}$ (Chap. I, § 3, Coroll. 3 ; Chap II, § 2, Théor. 2.2), cette condition est la suivante :

<u>Définition</u> 6.2 . - Une variété lagrangienne V vérifie <u>la condition quantique de Maslov</u> quand la fonction

$$\frac{\nu_o}{2\pi i}\,\varphi_R - \frac{1}{4}\, m_R \qquad , \text{ où } \nu_o = i/\hbar \ ,$$

est définie mod. 1 sur V ; cette condition est indépendante du choix du repère R .

<u>Note</u> 6 . - Si V est orientée, au sens euclidien, alors m_R est défini mod. 2 sur V ; la condition quantique de Maslov impose alors à chaque période

$\frac{1}{2} \oint_{\gamma} [z,dz]$ de ψ , c'est-à-dire à chaque période $\oint_{\gamma} < p,dx >$ de φ_R.

d'avoir, mod. $2\pi\hbar$ l'une des deux valeurs : 0, $\pi\hbar$.

Si V était 2-orientée, m_R serait défini sur V mod. 4 et cette condition imposerait à φ_R et ψ d'être définis sur V mod. $2\pi\hbar$; ce ne sera pas le cas dans les applications que donne le Chap. III.

Nous venons de prouver ceci :

THÉORÈME 6.-1°) <u>Soit</u> a <u>l'opérateur associé à un hamiltonien</u> H . <u>La condition qu'une solution lagrangienne</u> U , <u>à amplitude lagrangienne</u> $\geqq 0$, <u>de l'équation</u>

$$(6.3) \qquad a\,U = 0 \qquad \text{mod. } 1/\nu^2$$

<u>puisse être définie</u>, mod. $1/\nu$, <u>sur une variété</u> V <u>est que</u> V <u>possède simultanément les trois propriétés suivantes</u> :

i) V <u>est une variété lagrangienne de l'hypersurface</u> $W : H(z) = 0$;

ii) V <u>possède une mesure invariante</u> (par le vecteur caractéristique de H) ;

iii) V <u>satisfait la condition quantique de Maslov</u>.

2°) <u>La donnée de</u> V , <u>possédant ces trois propriétés, définit</u> U <u>à un facteur constant près si et seulement si la mesure invariante de</u> V <u>est unique</u> ; <u>c'est-à-dire si toute fonction indéfiniment différentiable sur</u> V <u>et constante sur chacune des caractéristiques engendrant</u> V <u>est constante sur</u> V .

Le § 2 du Chap. III, appliquera ce théorème .

7 . SOLUTION DE CERTAINS SYSTÈMES LAGRANGIENS À UNE INCONNUE . - Les théorèmes 7.1 et 7.2 précisent le théorème 6 ; ils sont respectivement appliqués par le § 1 et le § 3 du chap. III.

THEOREME 7.1 . - Soient $a^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, \ell)$ les opérateurs lagrangiens associés à ℓ hamitoniens :

$$H^{(j)} : \Omega \to R \qquad (\Omega : \text{partie ouverte de } Z) \quad ,$$

indépendants et DEUX A DEUX EN INVOLUTION ; c'est-à-dire tels que :

(7.1) $dH^{(1)} \wedge \ldots \wedge dH^{(\ell)} \neq 0$; $(\forall j,k) : (d\omega)^{\ell-2} \wedge dH^{(j)} \wedge dH^{(k)} = 0$, où $\omega = \frac{1}{2}[z,dz]$.

1°) La condition que le système :

$$a^{(1)}U = \ldots = a^{(\ell)}U = 0 \quad \bmod 1/\nu^2 \tag{7.2}$$

possède une solution lagrangienne U définie, mod. $1/\nu$, sur la variété connexe V est que V vérifie simultanément les deux propriétés suivantes :

i) V est une composante connexe de la variété de Z d'équations :

$$V : H^{(1)}(z) = \ldots = H^{(\ell)}(z) = 0 \quad , \tag{7.3}$$

variété qui est lagrangienne ;

ii) V satisfait la condition quantique de Maslov (défin. 6.2).

L'amplitude lagrangienne de U est alors constante, quand on choisit pour mesure de V

$$\eta = \frac{d^{2\ell}z}{dH^{(1)} \wedge \ldots \wedge dH^{(\ell)}} \qquad \text{(Cf. Note 7) ;} \tag{7.4}$$

V choisi, U est donc défini à un facteur numérique constant près.

2°) Les dérivées de Lie $\mathcal{L}_{\kappa^j}$ suivant les vecteurs caractéristiques κ^j des $H^{(j)}$ commutent ; si V est compact, V est donc un tore, dont le groupe des translations est engendré par les transformations infinitésimales $\mathcal{L}_{\kappa^j}$.

Note 7 . - Rappelons que $d^{2\ell}z$ est défini par (5.15), Chap.II, § 1 ; (7.4) signifie que η est la restriction à V de toute forme η_Z de Z telle que

$$dH^{(1)} \wedge \ldots \wedge dH^{(\ell)} \wedge \eta_Z = d^{2\ell}z \quad ;$$

η est évidemment indépendant du choix de η_Z ; η est invariante par chaque κ^j .

Preuve de 1°) - D'après le théorème 1 , le support de U appartient à l'une des composantes connexes V de la variété d'équations (6.6).

Réciproquement, soit V l'une de ces composantes ; $d\omega$ est de rang 2ℓ , car son système caractéristique est $dz = 0$; vu le théorème 2 (E. Cartan), il existe localement des fonctions $g_o, \ldots, g_\ell$ telles que :

$$\omega = dg_o + \sum_{j=1}^{\ell} g_j \, dH^{(j)} \quad ;$$

la restriction ω_V de ω à V vérifie donc :

$$d\omega_V = 0 \quad ;$$

or : $\dim V = \ell$; V est donc une variété lagrangienne.

Ce résultat pourrait d'ailleurs être déduit du théorème 3.1, 3°), (3.22).

Soit R un repère de Z ; soit $(x,p) = Rz$; la condition que $H^{(j)}$ et $H^{(k)}$ sont en involution s'énonce :

$$< \frac{\partial H^{(j)}}{\partial x} , \frac{\partial H^{(k)}}{\partial p} > - < \frac{\partial H^{(k)}}{\partial x} , \frac{\partial H^{(j)}}{\partial p} > = 0 \quad ;$$

c'est-à-dire :

(7.5) $$\mathcal{L}_{\varkappa^j} H^{(k)} = 0 \quad ,$$

en notant $\mathcal{L}_{\varkappa^j}$ la dérivée de Lie suivant la direction caractéristique de $H^{(j)}$:

$$\varkappa^j = \left(\frac{\partial H^{(j)}}{\partial p} , - \frac{\partial H^{(j)}}{\partial x} \right) \quad .$$

De (7.5) résulte :

$$\mathcal{L}_{\varkappa^j} dH^{(k)} = 0 \quad ;$$

d'autre part la définition de la dérivée de Lie donne :

$$\mathcal{L}_{\varkappa^j} d^{2\ell} z = 0 \quad ;$$

d'où, vu la définition (7.4) de η :

(V_j) : $$\mathcal{L}_{\varkappa^j} \eta = 0 \quad .$$

Vu le théorème 4 2°), la condition qu'une fonction lagrangienne $\check{U}$ définie sur $\check{V}$ vérifie :

$$a^{(1)}\check{U} = \dots = a^{(\ell)}\check{U} = 0 \qquad \text{mod. } 1/\nu^2$$

est donc que son amplitude lagrangienne β vérifie

$$(V_j) : \qquad \mathcal{L}_{\varkappa^j}\,\beta = 0 \ ;$$

puisque les $H^{(j)}$ sont indépendants, c'est-à-dire vérifient $(7.1)_1$, cette condition s'énonce :

$$\beta \text{ est constant sur } V \ .$$

La condition que la fonction $\check{U}$ soit, mod. $1/\nu$, lagrangienne sur V équivaut donc, vu le n° 6, à la condition quantique de Maslov.

<u>Preuve de</u> 2°). - Vu le chap. II, § 2, (1.1) , le commutateur de $a^{(j)}$ et $(a^{(k)}$:

$$[a^{(j)}\ ,\ a^{(k)}] = a^{(j)} \circ a^{(k)} - a^{(k)} \circ a^{(j)} \ ,$$

est l'opérateur associé à la fonction formelle :

$$-2\left\{\operatorname{sh}\frac{1}{2\nu}\left[\frac{\partial}{\partial z}\ ,\ \frac{\partial}{\partial z'}\right] H^{(j)}(z)\ H^{k}(z')\right\}_{z\,=\,z'} \ ;$$

la condition que $H^{(j)}$ et $H^{(k)}$ sont en involution est que cette fonction formelle est nulle mod. $1/\nu^2$; c'est une fonction impaire de ν ; elle est donc nulle mod. $1/\nu^3$; d'où :

$$(7.6) \qquad [a^{(j)}\ ,\ a^{(k)}] = 0 \qquad \text{mod. } 1/\nu^3 \ ;$$

or, vu le théorème 4 2°) ,

$$(\forall\alpha) : a_R^{(j)}\,(\alpha\, e^{\nu\varphi_R}) = \frac{1}{\nu}\, e^{\nu\varphi_R}\ \chi_R^{1/2}\ \mathcal{L}_{\varkappa^j}\,(\alpha\,\chi_R^{-1/2}) \qquad \text{mod. } 1/\nu^2 \ ;$$

donc

$$[a_R^{(j)}\ ,\ a_R^{(k)}](\alpha\, e^{\nu\varphi_R}) = \frac{1}{\nu^2}\, e^{\nu\varphi_R}\ \chi_R^{1/2}[\mathcal{L}_{\varkappa^j}\,,\mathcal{L}_{\varkappa^k}](\alpha\,\chi_R^{-1/2}) \qquad \text{mod. } 1/\nu^3 \ ;$$

donc, vu (7.6)

$$[\mathcal{L}_{\varkappa^j}\,,\mathcal{L}_{\varkappa^k}] = 0 \ ;$$

les transformations infinitésimales $\mathcal{L}_{\varkappa^1}, \dots, \mathcal{L}_{\varkappa^\ell}$ engendrent donc un groupe abélien d'homéomorphismes de V , si V est compact ; d'où 2°).

Complétons ce théorème 7.1 :

THEOREME 7.2 . - Soient ℓ opérateurs lagrangiens $a^{(j)}$ $(j = 1,\dots,\ell)$, COMMUTANT L'UN A L'AUTRE et égaux, mod. $\frac{1}{\nu^2}$, aux opérateurs associés à ℓ hamiltoniens $H^{(j)}$ indépendants [c'est-à-dire : vérifiant $(7.1)_1$] ; ces hamiltoniens sont donc en involution [c'est-à-dire : vérifient $(7.1)_2$]. Posons le problème : définir sur une variété connexe V, mod. $1/\nu^{r+1}$, une solution lagrangienne U du système :

$$(7.7)_r \qquad a^{(1)}U = \dots = a^{(\ell)}U = 0 \quad \text{mod } 1/\nu^{r+2} \quad (r \geqq 1) .$$

Supposons vérifiées les conditions, i) et ii) dont le théorème 7.1 prouve la nécessité ; alors ce problème a une solution U si et seulement si, en outre, les deux conditions suivantes sont simultanément vérifiées :

iii) une solution de $(7.7)_{r-1}$ existe sur V ; (nous la supposerons explicitée) ;

iv) une fonction $\check{V} \to \mathbb{C}$, que définissent l'intégration d'une forme de Pfaff définie et fermée sur $V \setminus \Sigma_R$ et la condition d'avoir des singularités polaires sur Σ_R, est une fonction $V \to \mathbb{C}$; (la connaissance de cette fonction résout explicitement le problème).

Quand i) ii) iii) iv) sont vérifiées, alors, sur V, la solution U de $(7,7)_r$ est définie à un facteur près, qui est un nombre formel de phase nulle.

Préliminaire à la preuve . - Soit R un repère de Z ; soit V vérifiant i) ; énonçons comme suit le théorème 4 1°) 2°) : soit $\beta : V \setminus \Sigma_R \to \mathbb{C}$;

$$(7.8) \qquad a_R^{(j)+}\left(\nu,x,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\chi_R^{1/2}(x)\,\beta(x)\,e^{\nu\varphi_R(x)}\right) =$$

$$\chi_R^{1/2}(x)\,e^{\nu\varphi_R(x)}\sum_{r\in\mathbb{N}}\frac{1}{\nu^r}\,M_r^j\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)\beta(x) ,$$

où M_r^j est un opérateur différentiel d'ordre $\leq r$, dépendant de $a^{(j)}$ et V ;

$$M_0^j = 0 \,;\; M_1^j = \mathcal{L}_{\varkappa^j} .$$

L'hypothèse que les opérateurs $a^{(j)}$ commutent s'énonce :

$$(7.9) \qquad (\forall r)\ \sum_{s=0}^{r}\,[M_{s+1}^j \,,\, M_{r-s+1}^k] = 0$$

Preuve. - Soit U une fonction lagrangienne, définie sur V, d'amplitude lagrangienne $\beta_o = 1$; notons son expression dans le repère R :

$$U_R(\nu,x) = \chi_R^{1/2}\, e^{\nu\varphi_R(x)} \sum_{r\in\mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}\, \beta_r(x) \quad ,$$

où : $\beta_o = 1$, $\beta_r : V\setminus\Sigma_R \to \mathbb{C}$.

Supposons que U est donné mod. $\frac{1}{\nu^r}$ et vérifie $(7.7)_{r-1}$:

$\beta_o,\dots,\beta_{r-1}$ sont donnés et, vu (7.8); vérifient :

$$(7.10) \qquad \sum_{t=1}^{s} M_t^j\, \beta_{s-t} = 0 \quad \text{pour} \quad j = 1,\dots,\ell \quad , \quad s = 1,\dots,r \quad .$$

La condition que U vérifie $(7.7)_r$ est que :

$$(7.11) \quad (\forall j) \qquad \sum_{s=1}^{r+1} M_s^j\, \beta_{r+1-s} = 0 \quad ;$$

cette condition est un système de ℓ équations, qui définit $(\forall_j)\ M_1^j\,\beta_r$, c'est-à-dire : $(\forall j)\,\mathcal{L}_{\varkappa^j}\,\beta_r$; c'est-à-dire $d\beta$, en fonction de $\beta_o,\dots,\beta_{r-1}$; la condition d'intégrabilité locale de ce système, c'est-à-dire la condition que l'expression de $d\beta$ qu'il donne soit une forme de Pfaff fermée, s'énonce, puisque les $M_1^j = \mathcal{L}_{\varkappa^j}$ commutent :

$$(\forall j,k) \qquad M_1^j\circ \sum_{s=2}^{r+1} M_s^k\,\beta_{r+1-s} - M_1^k\circ \sum_{s=2}^{r+1} M_s^j\,\beta_{r+1-s} = 0$$

c'est-à-dire, en remplaçant s par $s+1$:

$$(7.12) \qquad \sum_{s=1}^{r} [M_1^j , M_{s+1}^k]\,\beta_{r-s} + \sum_{s=1}^{r} [M_{s+1}^j , M_1^k]\,\beta_{r-s} +$$

$$\sum_{s=1}^{r} (M_{s+1}^k\circ M_1^j - M_{s+1}^j\circ M_1^k)\,\beta_{r-s} = 0 \quad .$$

Or (7.10), où l'on remplace t et s par $t+1$ et $r-s+1$, implique :

$$\sum_{s=1}^{r} M_{s+1}^k\circ M_1^j\,\beta_{r-s} + \sum_{s,t} M_{s+1}^k\circ M_{t+1}^j\,\beta_{r-s-t} = 0 \quad ,$$

où $\sum\limits_{s,t}$ signifie $\sum\limits_{s=1}^{r-1}\ \sum\limits_{t=1}^{r-s}$; autrement dit, cette somme est étendue à l'ensemble des couples d'entiers (s,t) tels que :

$$1 \leqq s \ , \ 1 \leqq t \ , \ s+t \leqq r \ ;$$

autrement dit, (7.10) implique :

$$\sum_{s=1}^{r} M^k_{s+1} \circ M^j_1 \beta_{r-s} + \sum_{s=2}^{r} \sum_{t=1}^{s-1} M^k_{s-t+1} \circ M^j_{t+1} \beta_{r-s} = 0$$

et de même :

$$\sum_{s=1}^{r} M^j_{s+1} \circ M^k_1 \beta_{r-s} + \sum_{s=2}^{r} \sum_{t=1}^{s-1} M^j_{t+1} \circ M^k_{s-t+1} \beta_{r-s} = 0 \ .$$

La condition d'intégrabilité locale (7.12) s'écrit donc :

$$\sum_{s=1}^{r} \sum_{t=0}^{s} [M^j_{t+1} \ , \ M^k_{s-t+1}] \ \beta_{r-s} = 0 \ ;$$

elle est donc vérifiée, vu l'hypothèse de commutativité (7.9).

Le système (7.11) définit donc une fonction

$$\beta_r : \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \to C \ ,$$

à l'addition près d'une fonction localement constante sur $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$. Avec ce choix de β_r , U_R est localement, sur $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$, l'expression dans R d'une solution lagrangienne de $(7.7)_r$.

Vu le lemme 5, 1°), qui vaut mod. $1/\nu^{r+2}$, il existe donc une solution lagrangienne de $(7.7)_2$ sur $\check{V}$, dont l'expression dans R est $U_{\check{R}}$, à l'addition près à β_r d'une fonction constante sur chaque composante de $\check{V} \setminus \check{\Sigma}_R$; vu le théorème 5, l'addition à β_r de l'une de ces fonctions fait que $\chi_R^{-3r} \beta_r$ est indéfiniment différentiable sur $\check{V}$; β_r est donc alors défini à l'addition près d'une fonction constante sur V , c'est-à-dire d'un multiple de β_o .

Vu l'hypothèse ii) la condition de Maslov est vérifiée ; vu le n° 6, pour que U soit lagrangienne sur V mod. $1/\nu^{r+1}$ il est nécessaire et suffisant que β_r soit une fonction : $V \to \mathbf{C}$. D'où le théorème.

CONCLUSION . - V.P. Maslov [10] nomme "asymptotiques" les "solutions définies mod. $1/\nu$" étudiées n° 6 et 7. Elles n'ont pourtant aucune raison d'être égales mod. $1/\nu$ à une solution lagrangienne U de l'équation $a\,U = 0$ (cf. théorème 7.2 et chap. III, § 3) ; et une expression U_R d'une telle solution U n'a aucune raison d'être le développement asymptotique d'une solution de l'opérateur différentiel ou pseudo-différentiel que a_R peut définir formellement : les exemples traités au chap. III le montrent.

Le caractère le plus évident de cette analyse lagrangienne, suggérée par l'étude de V.P. Maslov [10], est son originalité propre.

Elle est formelle ; du point de vue physique, c'est donc aux grandeurs non observables de la physique quantique qu'il n'est pas absurde de l'appliquer.

§ 4. SYSTEMES LAGRANGIENS HOMOGENES A PLUSIEURS INCONNUES.

Généralisons les résultats les plus simples du § 3 : ses théorèmes 4,5,6 et 7.1.

1. CALCUL DE $\sum_{m=1}^{\mu} a_n^m \; U_m$. - Etendons un résultat de [8], n° 8, en explicitant sa preuve ; nous généraliserons ainsi le théorème 4 du § 3 .

Notations 1. - Soit a une $\mu \times \mu$ matrice, dont les éléments a_n^m $(m, n = 1, \dots, \mu)$ sont des opérateurs lagrangiens, associés à des fonctions formelles de phases nulles, éléments d'une matrice

$$\overset{\circ}{a} = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} \overset{\circ}{a}_r, \text{ où } \overset{\circ}{a}_r : \Omega \to \mathbb{C}^{\mu^2} .$$

Soit W une hypersurface de Ω, d'équation

$$W : H(z) = 0 , \quad \text{où} \quad H_z \neq 0 \quad \text{sur} \quad W .$$

Soit V une variété lagrangienne de W ; soit φ_R sa phase dans un repère R ; notons

(1.1) $$b(x, p) = \overset{\circ}{a}_{\circ}(z), \quad c(x, p) = \overset{\circ}{a}_1(z) \quad \text{pour} \quad (x, p) = Rz ;$$

Soit $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\mu\}$ un vecteur, dont les composantes sont des fonctions indéfiniment différentiables

$$\alpha_m : V \setminus \Sigma_R \to \mathbb{C} ;$$

x servira de coordonnée locale sur $V \setminus \sum_R$.

Soit $m = \chi_R \, d^\ell x$ une mesure de V invariante (§ 3, n° 3) .

THEOREME 1 . - 1) <u>On a</u> :

(1.2) $$a_R^+ \left(\nu, x, \frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[\alpha(x) \, e^{\nu \varphi_R(x)} \right] = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r} e^{\nu \varphi_R(x)} L_r\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \alpha(x) ,$$

où L_r est une $\mu \times \mu$ matrice, dont les éléments sont des opérateurs différentiels d'ordre $\leq r$, dépendant de V, a et R.

(1.3) $$L_o(x) = b(x, \varphi_{R,x}) .$$

2°) Supposons dét $b = H$. Il existe deux μ- vecteurs non nuls, f et g, fonctions de $(x, p) \in W$ tels que :

(1.4) $$b\, f = 0 , \quad {}^t b\, g = 0 , \quad \text{c'est-à-dire} : \sum_{m=1}^{\mu} b_n^m f_m = 0 , \sum_{n=1}^{\mu} g^n b_n^m = 0 ;$$

choisissons-les, ce qui est possible, tels que sur W :

$f_m g^n$ soit le mineur de b_n^m dans la matrice b,

c'est-à-dire tels que :

(1.5) $$dH = \sum_{m,n} f_m g^n \, db_n^m \qquad \text{mod. } H .$$

Notons

$$\langle g, u\rangle = \sum_{n=1}^{\mu} g^n u_n \quad \text{pour tout vecteur } u = (u_1, \ldots, u_\mu) .$$

Evidemment, vu (1.3) et (1.4) :

(1.6) $$\langle g(x, \varphi_{R,x}), L_o(x)\, \alpha(x)\rangle = 0 .$$

Cette formule est complétée par la suivante, où γ est une fonction arbitraire : $V \setminus \Sigma_R \to \mathbb{C}$ et où $\frac{d}{dt}$ est la dérivée le long des courbes caractéristiques de W c'est-à-dire la dérivée de Lie $\mathcal{L}_{\varkappa}$:

(1.7) $$\langle g(x, \varphi_{R,x}), L_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)[\gamma(x)\, f(x, \varphi_{R,x})]\rangle =$$

$$\chi_R^{1/2} \frac{d}{dt}(\gamma\, \chi_R^{-1/2}) + J(x, \varphi_{R,x})\, \gamma(x) ,$$

où $J(x, p)$ est défini sur W par la formule :

(1.8) $$J = -\tfrac{1}{2} \sum_{m,n} [(g^n, b_n^m) f_m + b_n^m (g^n, f_m) + g^n (b_n^m, f_m)] + \sum_{m,n} g^n c_n^m f_m$$

dans laquelle $(.\,,\,.)$ désigne la parenthèse de Poisson, définie par (3.14) , § 3

Voici des propriétés de J , évidentes sauf la première :

Note 1.1 . - J ne dépend que de $b\,,c$ et des restrictions de f et g à W.

Note 1.2 . - La multiplication de f par $h : W \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ multiplie g par h^{-1} et ajoute $\frac{1}{h}\,\frac{dh}{dt}$ à J .

Note 1.3 . - Si la matrice b est symétrique et la matrice c antisymétrique, alors $J = 0$, car on peut choisir $f = g$.

Note 1.4. - Supposons les matrices b et ic self-adjointes ; c'est en particulier le cas quand la matrice a est self-adjointe, c'est-à-dire quand

$$(\forall : m\,,n) \qquad a_n^m = (a_m^n)^* \;;$$

alors les valeurs de J sont imaginaires pures, car on peut choisir $g = \bar{f}$.

Preuve du théorème . - 1°) résulte du théorème 4, § 3 . Pour prouver 2°), notons :

$$a = a_R\,,\ \varphi = \varphi_R(x)\,,\ b_n^m = b_n^m(x\,,\varphi_x)\,,\ b_{nx}^m = \left.\frac{\partial b_n^m(x\,,p)}{\partial x}\right|_{p=\varphi_x}\,,\ \text{etc.}$$

en sorte que, x^i et p_j étant les composantes de x et p $(i\,,j = 1,\ldots,\ell)$:

$$(1.9) \qquad \frac{\partial b_n^m}{\partial x^i} = b_{nx^i}^m + \sum_{j=1}^{\ell} b_{np_j}^m\, \varphi_{x^i x^j}\,.$$

Vu la définition (6.3) - (6.6), § 1 , de a^+ :

$$a_n^{+m}\left(\nu, x\,,\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right)[\,\alpha_m e^{\nu\varphi}\,] = e^{\nu\varphi} b_n^m(x\,,\varphi_x)\,\alpha_m +$$

$$\frac{e^{\nu\varphi}}{\nu}\left[\sum_j b_{np_j}^m \frac{\partial\alpha_m}{\partial x^j} + \left(\tfrac{1}{2}\sum_{i,j} b_{np_ip_j}^m\,\varphi_{x^ix^j} + \tfrac{1}{2}\sum_j b_{nx^jp_j}^m + c_n^m\right)\alpha_m\right] \bmod. \frac{1}{\nu^2}\;;$$

d'où, vu (1.9) et la définition (1.2) de L_1 :

$$<g\,,\,L_1\left(x\,,\frac{\partial}{\partial x}\right)\alpha> =$$

$$\sum_{j,m,n} g^n b^m_{n\,p_j} \frac{\partial \alpha_m}{\partial x^j} + \sum_{m,n} g^n \left(\tfrac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} b^m_{n\,p_j} + c^m_n\right) \alpha_m ;$$

d'où, en choisissant $\alpha_m = \gamma f_m$, vu (1.5) :

$$< g , L_1 (\gamma f) > = \sum_j H_{p_j} \frac{\partial \gamma}{\partial x^j} +$$

$$\left[\tfrac{1}{2} \sum_{j,m,n} g^n b^m_{n\,p_j} \frac{\partial f_m}{\partial x^j} + \tfrac{1}{2} \sum_{j,m,n} g^n \frac{\partial}{\partial x^j} (b^m_{n\,p_j} f_m) + \sum_{m,n} g^n c^m_n f_n \right] \gamma ;$$

donc, vu (1.5) et la définition de $\frac{d}{dt}$ sur W :

(1.10) $$< g , L_1 (\gamma f) > = \frac{d\gamma}{dt} + \tfrac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} (H_{p_j}) \gamma + J \gamma ,$$

où

(1.11) $$J = \tfrac{1}{2} \sum_{j,m,n} g^n b^m_{n\,p_j} \frac{\partial f_m}{\partial x^j} - \tfrac{1}{2} \sum_{j,m,n} \frac{\partial g^n}{\partial x^j} b^m_{n\,p_j} f_m + \sum_{m,n} g^n c^m_n f_m .$$

Or, vu (3.28) § 3 :

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} (H_{p_j}) = - \frac{1}{\chi_R} \frac{d \chi_R}{dt} ;$$

(1.10) équivaut donc à (1.7). D'autre part, vu (1.4) :

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_n g^n b^m_n \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_m b^m_n f_m \right) = 0 ;$$

(1.11) peut donc s'écrire :

$$J = \frac{1}{2}\sum_{j,m,n} \begin{vmatrix} f_m & -b_n^m & g^n \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x^j} & \dfrac{\partial b_n^m}{\partial x^j} & \dfrac{\partial g^n}{\partial x^j} \\ f_{m\,p_j} & b^m_{n\,p_j} & g^n_{p_j} \end{vmatrix} + \sum_{m,n} g^n c_n^m f_m ,$$

c'est-à-dire, vu (1.9) :

$$(1.12) \quad J = \frac{1}{2}\sum_{j,m,n} \begin{vmatrix} f_m & -b_n^m & g^n \\ f_{m\,x^j} & b^m_{n\,x^j} & g^n_{p_j} \\ f_{m\,p_j} & b^m_{n\,p_j} & g^n_{p_j} \end{vmatrix} + \sum_{m,n} g^n c_n^m f_m ,$$

car

$$\sum_{i,j,m,n} \begin{vmatrix} f_m & -b_n^m & g^n \\ f_{m\,p_i} & b^m_{n\,p_i} & g^n_{p_i} \\ f_{m\,p_j} & b^m_{n\,p_j} & g^n_{p_j} \end{vmatrix} \varphi_{x^i x^j} = 0 ,$$

puisque le déterminant ci-dessus est une fonction anti-symétrique de (i , j). Or (1.12) équivaut évidemment à (1.8).

<u>Preuve de la Note</u> 1.1. - (1.8) s'écrit :

$$J = -\frac{1}{2}\sum_{m,n} \left[(g^n, b_n^m f_n) + g^n (b_n^m , f_m) \right] + \sum_{m,n} g^n c_n^m f_m ;$$

or, vu (1.4), il existe des fonctions régulières F_n telles que :

$$\sum_m b_n^m \ f_m = H \ F_n \ ;$$

donc, sur W où $H = 0$:

$$J = -\tfrac{1}{2} \left[\sum_n F_n \frac{dg^n}{dt} + \sum_{m,n} g^n \ (b_n^m \ , \ f_m) \right] + \sum_{m,n} g^n \ b_n^m \ f_m \ ;$$

donc J ne dépend que de b, c, f et de la restriction de g à W .

2. RESOLUTION DU SYSTEME LAGRANGIEN $a \ U = 0$, QUAND LES ZEROS DE det $\overset{\circ}{a}_o$ SONT SIMPLES .- Alors le n° 5 du § 3 s'étend aisément .

Notations 2 . - Conservons les notations 1. Vu le théorème 1 1°), les solutions du système

$$\sum_{m=1}^{\mu} a_n^m \ U_m = 0 \tag{2.1}$$

sont définies sur les variétés lagrangiennes V de l'hypersurface W d'équation

(2.2) $W : H = 0$, où $H = \text{dét. } b$; (par hypothèse : $H_z \neq 0$ sur W.)

Soit

$$U_R = \sum_r \frac{1}{\nu^r} \ \alpha_{R,r} \ e^{\nu \varphi_R}$$

l'expression, dans un repère R , d'une solution

$$U = (U_1 , \ldots , U_\mu)$$

du système (2.1) , qui s'écrira :

$$a \ U = 0 \ ;$$

les U_m sont des fonctions lagrangiennes définies sur $V \subset W$; les $\alpha_{R,r}$ sont des fonctions : $V \setminus \sum \to C^\mu$. Vu le théorème 1, la condition $a \ U = 0$ sur $V \setminus \sum_R$ s'écrit : $(\forall \ r \in \mathbb{N})$

$$L_o \ (x) \ \alpha_{R,r}(x) + \sum_{s=1}^{r} L_s \ (x , \frac{\partial}{\partial x}) \ \alpha_{R, r-s}(x) = 0 \ ; \tag{2.3$_r$}$$

vu (1.6) , elle implique :

$$(2.4)_r \qquad < g\,(x\,,\varphi_{R\,,\,x})\ ,\sum_{s=1}^{r} L_s\,(x\,,\frac{\partial}{\partial x})\,\alpha_{R,r-s}\,(x) > = 0\,.$$

Notons M_o l'une des matrices $V \to C^{\mu\times\mu}$ telles que la relation

$$L_o\,(x)\,\alpha\,(x) = \alpha'\,(x)\,,\ \text{où}\ < g\,(x\,,\varphi_{R\,,\,x})\ ,\alpha'\,(x)> = 0\,,\ [\alpha\,(x),\alpha'(x)\in\mathbb{C}^{\mu}]$$

équivaut à l'existence de $\gamma : V \setminus \sum_R \to C$ tel que :

$$\alpha\,(x) + \gamma\,(x)\ f\,(x\,,\varphi_{R\,,\,x}) = M_o\,(x)\ \alpha'\,(x)\ ;$$

sous la condition $(2.4)_r$, l'équation $(2.3)_r$ s'écrit donc :

$$(2.5)_r \qquad \alpha_{R\,,\,r}\,(x) + \gamma_{R\,,\,r}(x)\,f\,(x\,,\varphi_{R\,,\,x}) + \sum_{s=1}^{r} M_o\,(x)\,L_s\,(x\,,\frac{\partial}{\partial x})\,\alpha_{R\,,\,r-s}\,(x) = 0$$

et, vu (1.7) , l'équation $(2.4)_{r+1}$ s'écrit :

$$(2.6)_r\ \frac{d}{dt}(\gamma_{R,r}\,\chi_R^{-1/2}) + \mathbf{J}\,\gamma_{R,r}\,\chi_R^{-\frac{1}{2}} + < g(x,\varphi_{R,x}),\sum_{s=1}^{r} L_{s+1}\,(x,\frac{\partial}{\partial x})\,\alpha_{R,r-s}\,(x) > \chi_R^{-1/2} = 0\ .$$

Le théorème 2.2 du § 2 complète comme suit ces équations $(2.5)_r$ et $(2.6)_r$ $(r\in\mathbb{N})$:

$(2.7)_r$ $\alpha_{R,r}\ \chi_R^{-3r-1/2}$ et donc $\gamma_{R,r}\ \chi_R^{-3r-1/2}$ est indéfiniment différentiable sur $\sum_R$; rappelons que $\chi_R^{-1} = 0$ sur $\sum_R$.

Le lemme 5 du § 3 s'étend aisément : il montre que <u>les conditions</u> $(2.5)_r$, $(2.6)_r$ <u>et</u> $(2.7)_r$ <u>permettent de résoudre le sytème</u> a U = 0 <u>en employant un seul repère</u> R ; plus précisément (cf. § 3 , théorèmes 5 et 6) :

THEOREME 2.1 . - <u>Soit</u> $\check{V}$ <u>une variété lagrangienne de l'hypersurface</u> W <u>définie par</u> (2.2) ; <u>soit</u> V <u>son revêtement universel</u>. <u>Soit</u> R <u>un repère</u> .

Soit $\eta = \chi_R\, d^\ell x$ une mesure invariante de V ; supposons que χ_R^{-1} ne s'annule pas une infinité de fois sur Σ_R ; supposons Σ_R transverse aux caractéristiques de W qui engendrent V. Alors, pour que

$$U_R = \sum_{r \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu^r}\, \alpha_{R,r}\, e^{\nu \varphi_R}$$

soit l'expression dans R_p d'une solution lagrangienne $U = (U_1, \dots, U_\mu)$, définie sur $\check{V}$ [ou sur V], du sytème $a\,U = 0$, il faut et suffit que $(\forall r \in \mathbb{N})$ les vecteurs $\alpha_{R,r} : \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \to C^\mu$ et les fonctions $\gamma_{R,r} : \check{V} \setminus \check{\Sigma}_R \to C$ vérifient les conditions :

$(2.5)_r$, $(2.6)_r$, $(2.7)_r$ [et que $\gamma_{R,r}\, e^{\nu_o \varphi_R} : V \setminus \Sigma_R \to C$].

Note 2. - Ce théorème s'applique aux solutions, définies mod. $\frac{1}{\nu^{s+1}}$, à l'addition près de $\frac{\alpha}{\nu^s} f\, e^{\nu\varphi_R}$, où $\alpha\, e^{\nu_o \varphi_R} : \check{V} \to C^\mu$ [ou $V \to C^\mu$], du système :

$$a\,U = 0 \mod \frac{1}{\nu^{s+1}} .$$

Evidemment :

THEOREME 2.2. (Réduction mod. $\frac{1}{\nu^2}$ d'un système à une équation). - Conservons les hypothèses du théorème 1. 2°), qui définit H et J. L'existence sur $V \subset W$ [ou sur $\check{V}$] d'une solution du système lagrangien

$$(2.1)_2 \qquad a\,U = 0 \mod \frac{1}{\nu^2}, \quad \text{c'est-à-dire : } \sum_m a_n^m\, U_m = 0 \mod \frac{1}{\nu^2},$$

équivaut à l'existence sur V [ou $\check{V}$] d'une solution de l'équation lagrangienne

$$(2.8) \qquad a'\, U' = 0 \mod \frac{1}{\nu^2},$$

où a' est l'opérateur lagrangien associé à la fonction formelle

$$H + \frac{1}{\nu} J .$$

A toute solution U du système $(2.1)_2$ correspond une solution U' de l'équation (2.8) telle que :

$$U = U'\, f \mod \frac{1}{\nu} .$$

Le chapitre IV emploiera, dans le cas particulier de l'équation de Dirac, un théorème de réduction analogue au précédent.

3. UN SYSTEME LAGRANGIEN PARTICULIER $a\,U = 0$, POUR LEQUEL LES ZEROS DE dét. a_o^o SONT MULTIPLES. - Le chapitre IV emploiera l'extension suivante du théorème 7.1 du § 3. (Le théorème 7.2 de ce § 3 admet une extension analogue).

THEOREME 3. - Soient $a^{(k)}$ $(k=1,\dots,\ell)$ des $\mu\times\mu$ - matrices dont les éléments sont des opérateurs lagrangiens ; supposons $a^{(k)}$ associé mod $\frac{1}{\nu^2}$ à la matrice

$$H^{(k)}\,E + \frac{1}{\nu}\,J^{(k)},$$

où E est la $\mu\times\mu$- matrice unité, $H^{(k)} : \Omega \to C$ et $J^{(k)}$ est une $\mu\times\mu$ matrice : $\Omega \to \mathbf{C}^{\mu^2}$. Notons V la variété d'équation

$$V : H^{(1)}(z) = \dots = H^{(\ell)}(z) = 0 . \tag{3.1}$$

Supposons que les $a^{(k)}$ commutent mod. $\frac{1}{\nu^3}$ et que

$$dH^{(1)}\wedge\dots\wedge dH^{(\ell)} \neq 0 \quad \text{au voisinage de } V.$$

Alors :

1°) Les hamiltoniens $H^{(k)}$ sont deux à deux en involution : V est une variété lagrangienne ; sa mesure

$$\eta = \frac{d^{2\ell}z}{dH^{(1)}\wedge\dots\wedge dH^{(\ell)}}\Big|_V$$

est $(\forall k)$ invariante par le vecteur caractéristique $\varkappa^{(k)}$ de $H^{(k)}$, qui est tangent à V. Si V est compact, V est donc un tore, dont les transformations infinitésimales $\mathcal{L}_{\varkappa^{(k)}}$ engendrent le groupe des translations.

2°) Soit $U = (U_1, \dots, U_\mu)$ un vecteur, dont les composantes U_m sont des fonctions lagrangiennes ; pour qu'il vérifie le sytème lagrangien

(3.2) $$(\forall k) \quad a^{(k)} U = 0 \quad \text{mod.} \ \frac{1}{\nu^2} ,$$

il faut et suffit que U soit défini sur V et que les amplitudes lagrangiennes $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_\mu)$ de ses composantes vérifient le système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre :

(3.3) $$(H^{(k)}, \beta) + J^{(k)} \beta = 0 \ \text{ où } (H^{(k)}, \beta) = \mathcal{L}_{\varkappa^{(k)}} \beta$$

et où $(.\,,\,.)$ est la parenthèse de Poisson (3.14) du § 3 ; ce système équivaut à un sytème de Pfaff complètement intégrable

(3.4) $d\beta = \omega \beta$, c'est-à-dire $d\beta_n = \sum_m \omega_n^m \beta_m$, où les éléments ω_n^m de la $\mu \times \mu$ matrice ω sont des formes de Pfaff définies sur V ; β doit vérifier, outre (3.3), la « condition quantique » :

(3.5) $$\left(\frac{\eta}{d^\ell x} \right)^{\frac{1}{2}} \beta \, e^{\nu_o \varphi_R} : V \setminus \Sigma_R \to C^\mu .$$

Note 3 . - La condition que (3.3) est complétement intégrable s'énonce :

(3.6) $d\omega = \omega \wedge \omega$, où $\omega \wedge \omega$ est la matrice d'éléments $\sum_{h=1}^{\mu} \omega_n^h \wedge \omega_h^m$;

elle est donc vérifiée ; elle équivaut à :

(3.7) $(\forall i, k) \quad (H^{(i)}, J^{(k)}) - (H^{(k)}, J^{(i)}) + J^{(i)} J^{(k)} - J^{(k)} J^{(i)} = 0$, où $(H^{(i)}, H^{(k)}) = 0$, en notant, dans un repère arbitraire R :

$$(H^{(i)}, J^{(k)}) = \sum_{j=1}^{\ell} H^{(i)}_{p_j} J^{(k)}_{x^j} - \sum_{j=1}^{\ell} H^{(i)}_{x^j} J^{(k)}_{p_j} .$$

(3.6) ou (3.7) équivaut à la commutatibilité des $a^{(j)}$ mod. $\frac{1}{\nu^3}$.

Preuve de 1°) . - Soient U_m $(m = 1, \dots, \mu)$ des fonctions lagrangiennes définies sur V , d'amplitudes lagrangiennes β_m ; soit $U = (U_1, \dots, U_\mu)$,

$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$. Vu le théorème 4 du § 3 :

(3.8) $$a_R^{+(k)}\left(\nu, x, \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial x}\right) U = \frac{1}{\nu}\, \chi_R^{1/2}\, e^{\nu \varphi_R}\, L^{(k)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \beta \mod. \frac{1}{\nu^2} ,$$

où $L^{(k)}$ est une $\mu \times \mu$ matrice, dont les éléments sont des opérateurs différentiels d'ordre 1 ; la partie principale de $L^{(k)}$ est $\mathcal{L}_{\varkappa^{(k)}} E$, $\mathcal{L}_{\varkappa^{(k)}}$ étant la dérivée de Lie suivant le vecteur caractéristique $\varkappa^{(k)}$ de $H^{(k)}$ et E la $\mu \times \mu$ matrice unité. Par hypothèse, les $a^{(k)}$ commutent mod. $\frac{1}{\nu^3}$; donc les $L^{(k)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ commutent ; leurs parties principales $\mathcal{L}_{\varkappa^{(k)}}$ commutent donc ; les $\varkappa^{(k)}$ sont donc tangents à la variété V d'équation (3.1) .

D'où 1°) (Cf la preuve du théorème 7.1 1°) , § 3 .)

<u>Preuve de 2°)</u> . - Le système (3.2) équivaut, vu (3.8), au système :

(3.9) $$(\forall k) \quad L^{(k)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \beta = 0 ;$$

puisque les $\mathcal{L}_{\varkappa^{(k)}}$ commutent, on peut trouver sur V des coordonnées locales $t_1, \ldots, t_\ell$ telles que

(3.10) $$\mathcal{L}_{\varkappa^{(k)}} = \frac{\partial}{\partial t_k} ;$$

vu le théorème 4 du n° 3 :

(3.11) $$L^{(k)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t_k} + J^{(k)} ;$$

le système (3.9) , d'inconnue $\beta : \check{V} \to C^k$ devant vérifier (3.5), équivaut donc au système de Pfaff sur $\check{V}$:

$$d\beta + \omega \beta = 0 ,$$

où

$$\omega = \sum_{k=1}^{\ell} J^{(k)}\, d t_k$$

est une $\mu \times \mu$ matrice, dont les éléments sont des formes de Pfaff. Puisque les $a^{(k)}$ commutent, les $L^{(k)}$ définis par (3.8) commutent, ce qui s'énonce, vu (3.11) :

$$\frac{\partial J^{(k)}}{\partial t_i} - \frac{\partial J^{(i)}}{\partial t_k} + J^{(i)} J^{(k)} - J^{(k)} J^{(i)} = 0 , \tag{3.13}$$

ou encore, vu (3.6) : $d\omega = \omega \wedge \omega$. C'est la condition d'intégrabilité complète du système (3.4) ; vu (3.13) et (3.10) cette condition est aussi exprimée par (3.7).