André Lichnerowicz

Algèbres de Lie d'automorphismes infinitésimaux symplectiques

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1973, tome 19
« Conférences de : P. Lelong, A. Lichnerowicz, E. Lieb et C. Stanojevic », , exp. n° 2,
p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1973__19__A2_0>

ALGEBRES DE LIE D'AUTOMORPHISMES INFINITESIMAUX SYMPLECTIQUES

André LICHNEROWICZ

En 1909, Elie Cartan [1] déterminait ce qu'il nommait les "groupes infinis transitifs simples". Les algèbres de Lie correspondantes ont récemment fait l'objet de travaux concernant soit leur cohomologie (Gelfand et Fuks, Arnold, Rozenberg) dans le cas des variétés compactes, soit leur structure et leurs dérivations (Avez, Lichnerowicz, Takens) dans le cas général. Les quatre algèbres de Lie infinies classiques sont les suivantes.

1°) algèbre de Lie des champs de vecteurs d'une variété différentiable W.

2°) algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure unimodulaire (W, η), où η est une forme élément de volume

3°) algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure symplectique (W, F)

4°) algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux d'une structure de contact.

En ce qui concerne les dérivations, les résultats sont les suivants : dans les cas 1 (Takens [2]) et 4 (Lichnerowicz [3]) les dérivations sont toutes intérieures Dans les cas 2 (Lichnerowicz [4]) et 3 (Avez et Lichnerowicz [5]), les dérivations sont données par les crochets par les champs de vecteurs qui reproduisent η (resp. F) à un facteur constant près.

J'étudierai ici le cas des structures symplectiques qui est le plus riche et le plus intéressant du point de vue des applications à la physique mathématique. A partir de ce que je nomme des lemmes principaux différents, les résultats concernant les idéaux sont semblables pour les quatre algèbres envisagées.

I - Structure symplectique

1 - Notion de variété symplectique

a) Soit W une variété différentiable connexe, paracompacte, de dimension $2n$; TW (resp. $T^* W$) est le fibré tangent (resp cotangent). Tous les éléments introduits sont supposés C^∞. Une structure symplectique est définie sur W par une 2-forme F fermée telle que F^n soit partout $\neq 0$.

Nous notons $\{x^i\}$ (i, tout indice latin = 1,..., 2n) une carte locale de W de domaine U . On sait que W admet des atlas de cartes canoniques $\left\{x^{\alpha}, x^{\bar{\alpha}}\right\}$ $(\alpha = 1,\ldots, n \; ; \; \bar{\alpha} = \alpha + n)$ telles que :

(1-1) $$F\big|_U = \sum_{\alpha} dx^{\alpha} \wedge dx^{\bar{\alpha}}$$

La variété symplectique (W, F) admet l'élément de volume $\eta = F^n/n!$. On note N l'espace des fonctions $C^{\infty}(W\, ;\, R)$, N_o le sous-espace de N défini par les fonctions à supports compacts, N_1 le sous-espace de N_o défini par les fonctions u vérifiant :

(1-2) $$\int_W u\,\eta = 0$$

b) Soit $\mu : TW \to T^{*}W$ l'isomorphisme de fibrés défini par $X \to -i(X)\,F$, où $i(\;)$ désigne le produit intérieur. Cet isomorphisme s'étend naturellement aux fibrés tensoriels. Nous notons Λ l'opérateur sur les formes défini par $i(\mu^{-1}(F))$, $*$ l'adjonction symplectique sur les formes $(\alpha \to *\alpha = i(\mu^{-1}(\alpha))\,\eta)$ et δ l'opérateur de codifférentiation symplectique défini sur une p-forme par $\delta = (-1)^p *^{-1} d\, *$. On vérifie que pour toute 1-forme ξ :

(1-3) $$\Lambda d\xi = \delta\xi$$

c) Sur (W, F) il existe des structures presque kähleriennes $(W, F, \underline{g})$, où $\underline{g}$ est une métrique riemannienne ; $(W, F, \underline{g})$ est une variété presque kählerienne si $\mu^{-1}(\underline{g})$ coïncide avec le tenseur contravariant inverse de $\underline{g}$. La 2-forme fermée F est aussi cofermée pour la métrique $\underline{g}$: si δ_g est la codifférentiation métrique :

(1-4) $$\delta_g F = 0$$

Le second membre de (1-3) est en fait une divergence métrique : $\delta\xi = -\delta_g C\,\xi$, où C est l'opérateur de structure complexe sur les 1-formes défini par la structure presque kählerienne. Par suite si ξ est à support compact :

(1-5) $$\int_W \Lambda d\xi \,.\, \eta = 0$$

2 - <u>Transformations infinitésimales symplectiques</u>

a) Soit X, Y deux champs de vecteurs arbitraires. Si $\mathcal{L}(X)$ est l'opérateur de dérivation de Lie :

$$\mathcal{L}(X)F = d\,i(X)F = -d\mu(X) \tag{2-1}$$

On montre que :

$$\mu([X,Y]) = d\Lambda(\mu(X)\wedge\mu(Y)) - i(X)\mathcal{L}(Y)F + i(Y)\mathcal{L}(X)F \tag{2-2}$$

Une <u>transformation infinitésimale (t.i.) symplectique</u> est définie par un vecteur X tel que $\mathcal{L}(X)\,F = 0$, c'est-à-dire tel que la 1-forme $\mu(X)$ soit <u>fermée</u>. On note L l'algèbre de Lie des t.i. symplectiques. Pour $X, Y \in L$

$$\mu([X,Y]) = d\Lambda(\mu(X)\wedge\mu(Y)) \tag{2-3}$$

Soit L^* l'image par μ^{-1} de l'espace des 1-formes exactes. D'après (2-3) $[L, L] \subset L^*$. Si $X \in L$, $Y \in L^*$ (avec $\mu(Y) = dv$, $v \in N$)

$$\Lambda(\mu(X)\wedge dv) = \mathcal{L}(X)v = -\Lambda\, d(v\,\mu(X)) \tag{2-4}$$

b) Soit L_o le sous-espace de L défini par les vecteurs X à supports compacts ; L_o^* est le sous espace de L_o défini par les vecteurs $X = \mu^{-1}(du)$, où $u \in N_o$, L_1 est le sous-espace de L_o^* correspondant aux fonctions $u \in N_1$.

Des relations ci-dessus il résulte :

<u>Proposition 1</u> - <u>1°) L^* est un idéal de L tel que L/L^* soit abélien</u>

2°) <u>On a $[L, L_o] \subset L_o^*$. En particulier L_o et L_o^* sont des idéaux de L et L_o/L_o^* est abélien</u>

3°) <u>On a $[L, L_o^*] \subset L_1$, $[L^*, L_o] \subset L_1$. En particulier L_1 est un idéal de L.</u>

c) Soit $H^1(W, R)$(resp. $H_o^1(W ; R)$ le premier espace de cohomologie de W à supports fermés (resp. compacts) ; $b_1(W)$ et $b_1^o(W)$ sont les dimensions correspondantes ; $b_1(W)$ est le premier nombre de Betti pour l'homologie à supports compacts et $b_1^o(W)$ le premier nombre de Betti pour l'homologie à supports non restreints. Il résulte des théorèmes de G. de Rham :

<u>Proposition 2</u> - 1°) <u>L'espace L/L^* est isomorphe à l'espace de cohomologie $H^1(W;R)$ et dim $L/L^* = b_1(W)$</u>

2°) <u>L'espace L_o/L_o^* est isomorphe à l'espace de cohomologie $H_o^1(W;R)$ et</u>

$\underline{\dim L_o / L_o^* = b_1^o\ (W)}$

3 - Parenthèses de Poisson

a) Soit N/R l'espace des classes de fonction de N modulo les constantes additives ; nous notons $\pi : u \in N \to \bar{u} \in N/R$ l'application canonique de N sur N/R. Si $u \in N$, sa différentielle du ne dépend que de la classe $\bar{u}$ de u ; nous la notons éventuellement $d\bar{u}$. A chaque $X \in L^*$ correspond une 1-forme exacte $\mu(X) = du = d\bar{u}$, donc une classe $\bar{u}$ et inversement. Cet isomorphisme de L^* sur N/R induit sur N/R une structure d'algèbre de Lie définie de la manière suivante : si $\bar{u}, \bar{v} \in N/R$, il résulte de (2-3) que

$$w = \Lambda(d\bar{u} \wedge d\bar{v}) \tag{3-1}$$

définit une classe $\bar{w}$ qui est le crochet de $\bar{u}$ et $\bar{v}$.

A la fonction (3-1) on donne le nom de parenthèse de Poisson, par rapport à la structure symplectique de $\bar{u}$ et $\bar{v}$, ou de deux représentants u et v dans N. On note cette parenthèse $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ ou $\{u, v\}$. Ainsi

$$\{u,v\} = \{\bar{u}, \bar{v}\} = \Lambda(du \wedge dv) = \Lambda(d\bar{u} \wedge d\bar{v}) = \Lambda\, d(u\, dv) \tag{3-2}$$

b) On montre que la parenthèse de Poisson définit sur l'espace N une structure d'algèbre de Lie. Il résulte de (3-2) et (1-5) que $\{N, N_o\} \subset N_1$; ainsi N_o et N_1 sont des idéaux de N.

Si W est non compacte, à chaque élément X de L_o^* correspondant par $\mu(X) = du$ une fonction unique u de N_o. Ainsi L_o^* est isomorphe à N_o et L_1 à N_1.

Si W est compacte, $L_o = L$, $L_o^* = L^*$. Pour $X \in L^*$, $\mu(X) = d\bar{u}$ et la classe $\bar{u}$ contient un élément et un seul u de N_1. Ainsi $L_1 = L_o^* = L^*$ et L^* est isomorphe à N_1.

Dans les deux cas, si $X \in L_o^*$ nous posons $u = \sigma(X)$, où σ est l'isomorphisme $L_o^* \to N_o$ dans le cas non compact et l'isomorphisme $L_o^* \to N_1$ dans le cas compact

c) Cela posé, si $X, Y \in L_o^*$ (avec $u = \sigma(X)$, $v = \sigma(Y)$) on peut définir sur L_o une structure d'espace préhilbertien à partir du produit scalaire

(3-3) $$\langle X, Y \rangle = \int_W uv\eta$$

Si $Z \in L$ et $\mu(Z) = \xi$, on a :

$$\langle [Z,X], Y \rangle + \langle X, [Z,Y] \rangle = \int \Lambda \big((\xi \wedge du) v + (\xi \wedge dv) u \big) \eta = -\int_W \Lambda d(uv\xi) . \eta$$

où la 1-forme $uv\xi$ est à support compact. Ainsi

(3-4) $$\langle [Z,X], Y \rangle + \langle X, [Z,Y] \rangle = 0$$

Le produit scalaire $\langle X, Y \rangle$, défini sur l'idéal L_0^* de L est invariant par l'action de $ad(L)$.

4 - Algèbre de Lie admettant un produit scalaire invariant

a) Soit A une algèbre de Lie arbitraire (de dimension finie ou infinie) sur le corps des réels ; A est dite semi-simple si elle n'admet aucun idéal abélien $\neq \{0\}$; elle est dite réductive si elle est somme directe de son centre C et d'un idéal semi-simple. Nous considérons ici des algèbres A admettant un produit scalaire invariant par $ad(A)$. On établit aisément

Lemme - Soit A une algèbre de Lie admettant un produit scalaire invariant.

1°) Si I est un idéal de A, son centre est contenu dans le centre C de A

2°) En particulier tout idéal abélien de A est contenu dans C ; A est semi-simple si et seulement si $C = 0$

On en déduit

Théorème 1 - Soit A une algèbre de Lie admettant un produit scalaire invariant

1°) L'algèbre dérivée $A^{(1)}$ est semi-simple ; l'algèbre quotient A/C est semi-simple

2°) Si A est nilpotente ou résoluble, elle est abélienne.

En effet soit Γ le centre de $A^{(1)}$; d'après le lemme $\Gamma \subset C$ et si $X, X' \in A$, $c \in \Gamma$, on a $[c, X] = 0$ et d'après l'invariance du produit scalaire :

$$\langle [X,X'], c \rangle + \langle X', [X,c] \rangle = 0$$

Le second terme étant nul, c est orthogonal à $A^{(1)}$ donc à lui-même et $c = 0$. Ainsi $\Gamma = 0$; $A^{(1)}$ admettant un produit scalaire invariant induit par celui défini sur A, il résulte du lemme que $A^{(1)}$ est semi-simple. Un raisonnement analogue est valable pour A/C. Si A est somme directe de C et d'un idéal, celui-ci est semi-simple et A est réductive.

Si A est nilpotente, soit $A_{(p)}$ le premier terme nul de la série centrale descendante. Pour $p > 1$, on a pour $X, Y \in A$, $Z \in A_{(p-1)}$:

$$\langle [X,Y], Z \rangle + \langle Y, [X,Z] \rangle = 0 .$$

Le second terme est nul; $A_{(p-1)}$ est orthogonal à $A_{(1)}$ donc à lui-même et $A_{(p-1)}=0$. Ainsi $A_{(1)} = 0$ et A est abélienne. Raisonnement analogue si A est résoluble.

Théorème 2 - Soit A une algèbre de Lie admettant un produit scalaire invariant. Si C est de dimension finie, A est réductive.

Si C est de dimension finie, c'est un sous-espace complet de l'espace préhilbertien A. Il existe un orthocomplément B de C dans A, qui est invariant par $ad(A)$; B est donc un idéal et A est réductive.

b) Il résulte de notre étude que toute sous-algèbre A de L^*_0 admet un produit scalaire invariant par $ad(A)$. Les deux théorèmes précédents sont donc valables pour de telles algèbres. En particulier toute sous-algèbre de dimension finie de L^*_0 est réductive

II - Idéaux de L.

5 - Lemme principal

a) Le lemme suivant qui est une généralisation d'un résultat de Calabi [9] est un instrument important pour la suite

Lemme principal - Soit U, U' deux domaines contractiles de W, avec $\overline{U'} \subset U$. Donnons-nous $2n$ fonctions $w^{(i)} \in N_1$, à supports $S(w^{(i)}) \subset U$, telles que les $x^i = w^{(i)}|_{U'}$ définissent une carte locale de domaine U'. Si u est un élément de N_1 tel que $S(u) \subset U'$, il existe $2n$ fonctions $v_{(i)} \in N_1$, à supports $S(v_{(i)}) \subset U$, telles que l'on ait :

$$u = \sum_i \{ v_{(i)}, w^{(i)} \} \tag{5-1}$$

D'après (1-2), il existe une 1-forme ξ à support compact $S(\xi) \subset U'$ telle que $u = \delta \xi$. Introduisons une structure presque kählerienne subordonnée à la structure symplectique et dont ∇ est l'opérateur de dérivation covariante. Pour les coordonnées locales $\{x^i\}$ choisies sur U', on a :

$$u = \nabla_j (F^{ji} \xi_i)$$

En posant $\bar{v}_{(i)} = \xi_i$, on vérifie que

$$u = \sum_i \{\bar{v}_{(i)}, w^{(i)}\}$$

où $\bar{v}_{(i)} \in N_0$ est à support $S(\bar{v}_{(i)}) \subset U'$. Soit $K \subset U$ un compact tel que $S(w^{(i)}) \subset K$, $h \in N_0$ à support $S(h) \subset U-K$ et d'intégrale non nulle. En substituant aux $\bar{v}_{(i)}$ les fonctions $v_{(i)} = \bar{v}_{(i)} - c_i h$, on a pour un choix convenable des constantes c_i , $v_{(i)} \in N_1$ et $S(v_{(i)}) \subset U$. La considération des supports donne (5-1)

b) Si W est <u>non compacte</u> son $2n^e$ groupe de cohomologie réelle à supports non restreints est trivial. Si $u \in N$, il existe sur W une (2n-1)-forme Ψ telle que $u\eta = d\Psi$.

W étant <u>compacte ou non</u> , soit P l'espace des (2n-1)-formes de W à supports compacts. Si $u \in N_1$, il existe $\Psi \in P$ telle que $u\eta = d\Psi$. Si $X = \mu^{-1}(du) \in L_1$, on a :

$$S(X) \subset S(u) \subset S(\Psi)$$

Si $X \in L_1$, $Y \in L$, on a $\mu([X, Y]) = dw$ avec

$$w = \Lambda(du \wedge \mu(Y))$$

et w est associée à la forme $\hat{\Psi} = - *(u\,\mu(Y))$. En particulier

$$S(\hat{\Psi}) = S(u) \cap S(Y) \tag{5-2}$$

6 - <u>Idéaux dérivés</u>

a) Etudions les idéaux dérivés de L, L^* . Nous nous plaçons dans le cas non compact, mais les résultats sont encore valables dans le cas compact.

Introduisons un recouvrement $\{U_\nu\}_{\nu \in I}$ de W par des domaines contractiles vérifiant la condition suivante (Palais) : il existe une partition de I en une collection finie de sous-ensembles $I_\mu (\mu = 1, \dots, \ell)$ telle que, pour chaque μ, les domaines pour lesquels $\nu \in I_\mu$ soient deux à deux disjoints. Si $X \in L^*$, on a $\mu(X) = du$, $u \flat = d\Psi$. Soit $\{\varphi_\nu\}$ une partition différentiable de l'unité subordonnée au recouvrement et posons $\tau_\mu = \sum_{\nu \in I_\mu} \varphi_\nu$, $\Psi_\mu = \tau_\mu \Psi$, $u_\mu \flat = d\Psi_\mu$. Pour μ fixé, considérons les domaines $\{U_\nu\}_{\nu \in I_\mu}$ deux à deux disjoints. En appliquant à $u_\mu \big| U_\nu$ le lemme principal, on voit que u_μ est la somme des parenthèses de 2n couples $(v_{(i)}, w^{(i)})$ d'éléments de N, où $S(v_{(i)})$, $S(w^{(i)}) \subset \bigcup_{I_\mu} U_\nu$.

Si $X_\mu = \mu^{-1}(du_\mu)$, on a $X_\mu \in [L^*, L^*]$ et X, somme finie d'éléments de $[L^*$, appartient à $[L^*, L^*]$. On en déduit :

<u>Proposition - Les algèbres L et L^* admettent L^* pour idéal dérivé</u>.

b) On établit de manière analogue en raisonnant sur L_1,

<u>Proposition - Les algèbres L_o^* et L_1 admettent L_1 pour idéal dérivé. De plus</u>

$$L_1 = [L_1, L_o] = [L_o^*, L_o] = [L^*, L_o] = [L_1, L] = [L_o^*, L]$$

7 - <u>Fermés de nullité et idéaux canoniques correspondants</u>.

a) Soit M un sous-espace vectoriel de L. Le <u>fermé de nullité</u> $n(M)$ de M est l'ensemble fermé f des points x de W tels que $X(x) = 0$ pour tout $X \in M$; Cf est l'ouvert complémentaire. L'espace M est transitif en $x_o \in Cf$ si les valeurs en x_o de M engendrent l'espace tangent en x_o ; M est transitif sur un ouvert de Cf s'il est transitif en chaque point de l'ouvert ; L_1 (et L_o^*, L_o, L^*, L) sont transitifs sur W.

Etant donné un fermé f de W, considérons l'espace $I_c(f)$ des vecteurs $X \in L_1$ tels que $X = \mu^{-1}(-d\delta * \Psi)$, où $\Psi \in P$ est à support $S(\Psi) \subset Cf$. D'après (5-2), $I_c(f)$ est un idéal de L admettant f comme fermé de nullité ; $I_c(f)$ est dit l'idéal canonique associé à f. Pour $f = \emptyset$, on a $I_c(f) = L_1$.

b) On a le lemme suivant

<u>Lemme - Soit M [avec $n(M) = f$] un sous-espace de L invariant par $I_c(f)$. Le sous-espace $[M, I_c(f)]$ invariant par $I_c(f)$ est transitif sur Cf et admet f comme fermé de nullité</u>.

En effet si $x_o \in Cf$, il existe $X \in M$ tel que $X(x_o) \neq 0$. Si $Y \in I_c(f)(Y) = dv$, $v = -\delta * \Psi$, on a $\mu([X, Y]) = dw$, où $w = i(X)\, dv$. Soit $U \subset Cf$ un domaine contractile contenant x_o et sur lequel X ne s'annule pas. On peut choisir $v \in N_1$, avec $S(v) \subset U$, tel que $Z = [X, Y]$ prenne en x_o une valeur vectorielle arbitrairement donnée. On note que comme $S(v) \subset U$, on a $S(w) \subset U$.

<u>Théorème</u> - <u>Soit M [avec $n(M) = f$] un sous-espace de L invariant par $I_c(f)$. On a</u> :

$$I_c(f) \subset M \qquad\qquad [M, I_c(f)] = I_c(f)$$

<u>En particulier $M \neq \{0\}$ ne peut être de dimension finie</u>

Il suffit d'établir $[M, I_c(f)] = I_c(f)$. Choisissons en $x_o \in Cf$ une base $(Z_{(i)})_o$ de l'espace tangent. D'après le lemme précédent, il existe 2n éléments $Z_{(i)}$ $(\mu(Z_{(i)}) = dw^{(i)})$ de $[M, I_c(f)]$ prenant en x_o les valeurs $(Z_{(i)})_o$ et tels que les $S(w^{(i)}) \subset K$, où K est un compact $\subset U$. Il existe alors un domaine contractile U' (avec $x_o \in U'$, $\overline{U'} \subset U$) tel que les $x^i = w^{(i)}|_{U'}$ définissent une carte de domaine U' .

Si $u \in N_1$ est tel que $S(u) \subset U'$, il existe, d'après le lemme principal, 2n fonctions $v_{(i)} \in N_1$, avec $S(v_{(i)}) \subset U$, telles que

$$u = \sum_i \{v_{(i)}, w^{(i)}\} \qquad \text{ou} \qquad \mu^{-1}(du) = \sum_i [\mu^{-1}(dv_{(i)}), Z_{(i)}]$$

Comme $S(v_{(i)}) \subset U$, il existe une (2n-1)-forme $\Psi_{(i)}$ associée à $v_{(i)}$ vérifiant $S(\Psi_{(i)}) \subset U$ et $\mu^{-1}(dv_{(i)}) \in I_c(f)$. Ainsi $\mu^{-1}(du) \in [M, I_c(f)]$

Soit maintenant $X \in I_c(f)$; on a $X = \mu^{-1}(-d\,\delta * \Psi)$, $S(\Psi) \subset Cf$. En introduisant un recouvrement fini convenable d'un voisinage ouvert de $S(\Psi)$, on déduit du résultat précédent que $X \in [M, I_c(f)]$. Ainsi $I_c(f)$ étant un idéal de L :

$$I_c(f) \subset [M, I_c(f)] \subset I_c(f)$$

ce qui démontre le théorème.

8 - <u>Idéaux et idéaux canoniques - Semi-simplicité</u>.

a) Soit A une sous-algèbre de L <u>contenant L_1</u> . En prenant pour M un idéal I de A , on déduit du théorème précédent

<u>Corollaire 1</u> - <u>Si I</u> [<u>avec $n(I) = f$</u>] <u>est un idéal de A</u>.

$$I_c(f) \subset I \qquad\qquad [I, I_c(f)] = I_c(f)$$

En particulier $I \neq \{0\}$ n'est jamais de dimension finie

On voit aisément que des résultats semblables sont valables sur un idéal J d'un idéal I de A. En particulier si J (avec $n(J) = f'$) est abélien, on a $I_c(f') \subset J$ et

$$[J, I_c(f')] = I_c(f') = \{0\}$$

Ainsi $f' = W$ et $J = \{0\}$

Corollaire 2 - Tout idéal I d'une sous-algèbre A de L contenant L_1 est semi-simple. En particulier L, L^*, L_0, L^*_0, L_1 et tous leurs idéaux sont semi-simples

b) Soit $Z(I)$ le centralisateur dans A d'un idéal I de A. L'idéal $Z(I) \cap I$ de A est abélien et par suite :

(8-1)
$$Z(I) \cap I = \{0\}$$

On établit aisément, à partir du lemme précédent, que $Z(I)$ coïncide avec l'ensemble des éléments de A qui s'annulent en tout point de $\overline{Cf}$. On en déduit :

Théorème - Un idéal I non trivial de A n'admet jamais un idéal supplémentaire dans A

Si I admet un idéal supplémentaire, il résulte de (8-1) que celui-ci coïncide nécessairement avec $Z(I)$ et l'on a :

$$L_1 \subset A = I \oplus Z(I)$$

Comme chaque élément de A est alors nul sur $f \cap \overline{Cf}$, on a $f \cap \overline{Cf} = \emptyset$. Il résulte de la connexité de W qu'ou bien $f = \emptyset$ et $Z(I) = \{0\}$, $I = A$, ou bien $Cf = \emptyset$, $f = W$ et $I = \{0\}$.

III - DERIVATIONS.

9 - Transformations infinitésimales conformes symplectiques

a) X définit une t.i. conforme symplectique si $\mathcal{L}(X)F = a\,F$. Pour $n > 1$, a est nécessairement une constante. Nous notons L^c et appelons (par abus de langage pour $n = 1$) algèbre des t. i. conformes symplectiques, l'algèbre de Lie des champs de vecteurs X tels qu'il existe une constante K_X pour laquelle

(9-1) $$\mathcal{L}(X)F + K_X F = 0$$

Pour $X \in L^c$, $Y \in L$, (2.2) s'écrit

(9-2) $$\mu([X,Y]) = d\Lambda(\mu(X)\wedge\mu(Y)) + K_X\,\mu(Y)$$

$\mu(Y)$ étant fermée, $\mu([X, Y])$ est fermée et $[X, Y] \in L$. Il résulte de (9-2) que les algèbres L, L^*, L_o, L_o^*, L_1 sont des idéaux de L^c.

b) Si $X \in L^c$, (9-1) s'écrit :

$$K_X F = d\mu(X)$$

Si F n'est pas exacte (en particulier si W est compacte) $K_X = 0$ pour tout $X \in L^c$ et L^c coïncide avec L

Si F est exacte, $F = d_\mu(X_o)$ et $X_o \in L^c$ avec $K_{X_o} = 1$. L'espace L^c est la somme directe $L^c = L \oplus C_o$, où C_o est le sous-espace de dimension 1 engendré par X_o. En particulier dim. $L^c/L = 1$

De cette décomposition, il résulte $[L^c, L^c] \subset L$. D'autre part de (9-2) appliqué à X_o et à un élément arbitraire Y de L, il résulte, compte tenu de $L^* = [L,L]$ que $Y \in [L^c, L^c]$. Ainsi

Proposition. Si F est exacte, l'algèbre L^c admet L pour idéal dérivé.

10 - Caractère local des dérivations de L, L et N_1.

a) Au cours de cette section, nous nous proposons de déterminer les dérivations des différentes algèbres de Lie introduites. Une dérivation de l'algèbre de Lie L est une application linéaire

$D : L \to L$ telle que pour tout $Y, Z \in L$

(10-1) $$D[Y,Z] = [DY, Z] + [Y, DZ]$$

Mêmes définitions pour une dérivation D^* de L^*, $\mathcal{D}$ de $\mathcal{L}$, $\bar{\mathcal{D}}$ de N/R, $\mathcal{D}_1$ de N_1

Si D est une dérivation de L, soit U un ouvert de W tel que, pour $Y \in L$, on ait $Y|_U = 0$; si $x \in U$, on peut trouver $Z \in L_o^*$ à support $S(Z) \subset U$, tel que $Z(x)$ soit un vecteur arbitrairement donné en x. On a $[Y, Z] = 0$, donc

$D[Y, Z] = 0$; d'autre part $[Y, DZ]_U = 0$, donc d'après (10-1) $[DY, Z]_U = 0$ soit $[DY, Z] = 0$. Ainsi

$$d\Lambda(\mu(DY)\wedge\mu(Z)) = 0 \qquad \Lambda(\mu(DY)\wedge\mu(Z)) = C = \text{const.}$$

Le premier membre étant à intégrale nulle, on a $C = 0$; par suite $(D\,Y)(x) = 0$ donc $DY|_U = 0$. Le même raisonnement s'applique à L^*

<u>Proposition 1</u> - <u>Toute dérivation de L (resp. L^*) est un opérateur local</u>.

Pour des dérivations de N , N/R ou N_1 , on établit de même que pour $u \in N$, $\bar{u} \in N/R$, $u_1 \in N_1$:

$$S(d\mathcal{D}u) \subset S(du) \quad , \quad S(d\bar{\mathcal{D}}\bar{u}) \subset S(d\bar{u}) \quad , \quad S(d\mathcal{D}_1 u_1) \subset S(du_1)$$

ce qui n'établit pas le caractère local de ces dérivations. Nous verrons d'ailleurs que N peut admettre des dérivations non locales. En prenant $u = 1$, élément de N, on voit que $\mathcal{D}_1$ est une constante sur W.

b) Soit D une dérivation de L. Comme L^* est l'idéal dérivé de L , il résulte de (10-1) que si $X \in L^*$, alors $DX \in L^*$. La restriction à L^* d'une dérivation D de L est donc une dérivation D^* de L^*. Inversement soit D^* une dérivation de L^* ; si $Y \in L$ introduisons $Y^* \in L^*$ tel que $Y|_U = Y^*|_U$ sur un domaine U de W et posons $DY|_U = D^*Y^*|_U$. D'après le caractère local de D^*, on définit ainsi une dérivation D unique de L dont la restriction à L^* coïncide avec D^*. On obtient

<u>Proposition 2</u> - <u>L'espace des dérivations de L^* est l'espace des restrictions à L^* des dérivations de L . Il est isomorphe à l'espace des dérivations de L .</u>

c) Nous allons établir

<u>Proposition 3</u> - <u>Toute dérivation $\mathcal{D}_1$ de N_1 est un opérateur local</u>.

Soit U un domaine contractile. Si $u \in N_1$ est <u>à support dans U</u> , on peu trouver 2n couples $(v_{(i)}, w^{(i)})$ d'éléments de N_1 à supports dans U tels que $u = \sum \{v_{(i)}, w^{(i)}\}$. Il vient :

$$\mathcal{D}_1 u = \sum\{\mathcal{D}_1 v_{(i)}, w^{(i)}\} + \sum\{v_{(i)}, \mathcal{D}_1 w^{(i)}\} \tag{10-2}$$

On en déduit $S(\mathcal{D}_1 u) \subset U$.

Soit $u \in N_1$: il existe $\Psi \in P$, à support $S(\Psi) = K$, telle que $u\flat = d\Psi$. Introduisons un recouvrement fini $\{U_\nu\}$ par des domaines contractiles d'un voisinage ouvert de K et soit $\{\varphi_\nu\}$ une partition de l'unité subordonnée. Posons $\Psi_\nu = \varphi_\nu \Psi$, $u_\nu \flat = d\Psi_\nu$, où $u_\nu \in N_1$ et $S(u_\nu) \subset U_\nu$. On a

$$\mathcal{D}_1 u = \Sigma \mathcal{D}_1 u_\nu$$

et par suite $S(\mathcal{D}_1 u) \subset \cup U_\nu$. Ainsi $S(\mathcal{D}_1 u) \subset S(\Psi)$.

Soit V un domaine contractile tel que $u|_V = 0$; on a $d\Psi|_V = d(\Psi|_V) = 0$ et il existe sur V une $(2n-2)$-forme α_V telle que $\Psi|_V = d\alpha_V$. Donnons-nous une $(2n-2)$-forme β de W à support compact telle que $\beta|_V = \alpha_V$ et substituons à Ψ la forme $\bar{\Psi} = \Psi - d\beta$; on a $\bar{\Psi}|_V = 0$. Comme $S(\mathcal{D}_1 u) \subset S(\bar{\Psi})$, il vient $\mathcal{D}_1 u|_V = 0$. Ainsi $\mathcal{D}_1$ est un opérateur local.

d) Soit $\mathcal{D}$ une dérivation de N. Si $u \in N_1$ est à support dans un domaine contractile U, il vient d'après le lemme principal et (10-1) :

$$\mathcal{D}u = \Sigma\{\mathcal{D}v_{(i)}, w^{(i)}\} + \Sigma\{v_{(i)}, \mathcal{D}w^{(i)}\}$$

et $\mathcal{D}u \in N_1$. Ainsi la restriction à N_1 d'une dérivation $\mathcal{D}$ de N est une dérivation de N_1.

Inversement soit $\mathcal{D}_1$ une dérivation de N_1 ; si $u \in N$ introduisons $u_1 \in N_1$ telle que $u|_U = u_1|_U$ pour un domaine U et posons $\mathcal{D}u|_U = \mathcal{D}_1 u_1|_U$. D'après le caractère local de $\mathcal{D}_1$, on définit ainsi une dérivation $\mathcal{D}$ de N de caractère local dont la restriction à N_1 coïncide avec $\mathcal{D}_1$. Cette dérivation locale est unique.

Proposition 4 - L'espace des dérivations de N_1 est l'espace des restrictions à N_1 des dérivations de N. Il est isomorphe à l'espace des dérivations locales de N.

11 - Détermination des dérivations locales de N.

Le lemme suivant s'obtient par un calcul direct.

Lemme - Si $\mathcal{D}$ est une dérivation de N, on a pour tout $u, v \in N$:

$$\mathcal{D}\{u^2, v\} = \{\mathcal{D}u^2 - 2u\mathcal{D}u, v\} + 2u.\mathcal{D}\{u,v\} + 2\mathcal{D}u.\{u,v\} \tag{11-1}$$

Cela posé, soit $\mathcal{D}$ une dérivation locale de N pour laquelle nous posons $\mathcal{D}1 = K$. Soit u un élément de N et x un point où $(du)_x \neq 0$. On peut trouver une carte canonique $(x^\alpha, x^{\bar\alpha})$ de domaine U contenant x et telle que $x^1|_U = u|_U$. Pour $v = x^\alpha$ ou $v = x^{\bar\alpha}$ $(\bar\alpha \neq \bar 1)$, on a $\{u, v\}_U = 0$, $\{u^2, v\}_U = 0$. Pour $v = x^{\bar 1}$, on a $\{u, v\}_U = 1$, $\{u^2, v\}_U = 2u|_U$. On déduit de (11-1) appliquée à $v = x^\alpha$, $x^{\bar\alpha}$ que sur U :

$$\partial_1(\mathcal{D}u^2 - 2u\mathcal{D}u) = -2Ku \quad , \quad \partial_i(\mathcal{D}u^2 - 2u\mathcal{D}u) = 0 \text{ pour } i \neq 1$$

Ainsi $\left[d(\mathcal{D}u^2 - 2u\mathcal{D}u + Ku^2)\right]_x = 0$. Si A est l'ouvert défini par les points de W où $du \neq 0$, on a sur $\bar A$:

$$d(\mathcal{D}u^2 - 2u\mathcal{D}u + K.u^2) = 0 \tag{11-2}$$

Si CA possède des points intérieurs y, il existe un voisinage ouvert V de y tel que $du|_V = 0$, $du^2|_V = 0$, donc $d\mathcal{D}u|_V = 0$, $d\mathcal{D}u^2|_V = 0$. On voit que (11-2) est satisfaite sur W connexe et que par suite :

$$\mathcal{D}u^2 - 2u\mathcal{D}u + Ku^2 = C = \text{const.}$$

$\mathcal{D}$ étant de caractère local, en substituant à u une fonction $u' \in N$ qui coïncide avec u sur un ouvert et qui est nulle sur un autre ouvert, on a $C = 0$. Pour tout $u, v \in N$, il vient par polarité :

$$(\mathcal{D} - K)(uv) - u(\mathcal{D} - K)v - v(\mathcal{D} - K)u = 0$$

$\mathcal{D} - K$ définit donc un champ de vecteurs X de W et si $\mathcal{L}(X)$ est la dérivation de Lie correspondante, on a $\mathcal{D} = \mathcal{L}(X) + K$. Cela posé, on voit aisément que pour que $\mathcal{L}(X) + K$ soit une dérivation, il faut et il suffit que $\mathcal{L}(X)\Lambda = K\Lambda$, c'est-à dire $\mathcal{L}(X)F = -KF$. Ainsi X est une t. i. conforme symplectique

<u>Proposition - L'algèbre de Lie des dérivations locales de N est isomorphe à l'algèbre de Lie L^c des transformations infinitésimales conformes symplectiques de (W, F) par l'isomorphisme défini de la manière suivante : si $X \in L^c$, on a $\mathcal{L}(X)F + K_X F = 0$ et X donne la dérivation</u>

$$\mathcal{D}_X = \mathcal{L}(X) + K_X$$

D'après la proposition 4 du § 10, nous avons ainsi déterminé les dérivations de N_1.

12 - Détermination des dérivations de L^*, L et L^c.

a) Soit $\mathcal{D}$ une dérivation de N. A partir de $\mathcal{D}$, on définit par $\bar{\mathcal{D}}\bar{u} = \overline{\mathcal{D} u}$ une dérivation $\bar{\mathcal{D}}$ de N/R telle que $\bar{\mathcal{D}} \circ \pi = \pi \circ \mathcal{D}$.

Soit $\bar{\mathcal{D}}$ une dérivation de N/R. Cherchons une application linéaire $\mathcal{D}_1 : N_1 \to N_1$ telle que $d\mathcal{D}_1 u_1 = d\bar{\mathcal{D}}\bar{u}_1$ pour tout $u_1 \in N_1$. Une telle application est nécessairement unique, car $\mathcal{D}_1 u_1 = C$ n'appartient à N_1 que pour $C = 0$; d'autre part $\bar{\mathcal{D}}$ étant une dérivation, on a $\mathcal{D}_1 \{u_1, v_1\} - \{\mathcal{D}_1 u_1, v_1\} - \{u_1, \mathcal{D}_1 v_1\} = C_1$; le permier nombre appartenant à N_1, on a $C_1 = 0$ et $\mathcal{D}_1$ est nécessairement une dérivation de N_1.

Soit U un domaine contractile. Si $u \in N_1$ est à support dans U, on pose par définition

$$\mathcal{D}_1 u = \sum \{\bar{\mathcal{D}}\, \bar{v}_{(i)}, \bar{w}^{(i)}\} + \sum \{\bar{v}_{(i)}, \bar{\mathcal{D}}\, \bar{w}^{(i)}\} \in \bar{\mathcal{D}}\, \bar{u}$$

Ainsi $\mathcal{D}_1 u \in N_1$, $S(\mathcal{D}_1 u) \subset U$ et $d\mathcal{D}_1 u = d\bar{\mathcal{D}}\bar{u}$.

Soit $u \in N_1$. Avec le même recouvrement qu'au §10c, posons $\mathcal{D}_1 u = \sum \mathcal{D}_1 u_\nu$, où les $\mathcal{D}_1 u_\nu$ sont définis comme ci-dessus ; $\mathcal{D}_1 u \in N_1$ et $d\mathcal{D}_1 u = \sum d\bar{\mathcal{D}}\bar{u}_\nu = d\bar{\mathcal{D}}\bar{u}$.

b) La dérivation $\mathcal{D}_1$ de N_1 ainsi construite est la restriction à N_1 d'une dérivation locale $\mathcal{D}$ de N. Si $u \in N$, introduisons $u_1 \in N_1$ telle que $u_1|_U = u|_U$ sur un domaine U. On a

$$d\mathcal{D}u\Big|_U = d\mathcal{D}_1 u_1\Big|_U = d\bar{\mathcal{D}}\,\bar{u}_1\Big|_U = d\bar{\mathcal{D}}\,\bar{u}\Big|_U$$

d'après le caractère local de $d\bar{\mathcal{D}}$. Ainsi $\overline{\mathcal{D} u} = \bar{\mathcal{D}}\bar{u}$ et $\mathcal{D}$ est telle que $\pi \circ \mathcal{D} = \bar{\mathcal{D}} \circ \pi$. La dérivation locale de N jouissant de cette propriété est unique.

Ainsi, d'après la proposition du § 11, toute dérivation de N/R est donnée par $\bar{\mathcal{D}}_X = \mathcal{L}(X) + K_X$, où $X \in L^c$. On en déduit immédiatement d'après la proposition 2 du § 10

Théorème - Toute dérivation de L^* (resp. L) est une transformation infinitésimale conforme symplectique $Y \to [X, Y]$, où $X \in L^c$

c) Si F est exacte, on a $[L^c, L^c] = L$. On en déduit que la restriction à L d'une dérivation D^c de L^c est une dérivation $D = \mathcal{L}(X)$ (avec $X \in L^c$) de L. On peut en déduire que D^c est une dérivation intérieure. Ainsi dans tous les cas

Théorème - Toute dérivation de l'algèbre de Lie L^c est intérieure.

13 - Cohomologie de L^c, L, L^*.

Pour la cohomologie de l'algèbre de Lie L à valeurs dans L, au sens de Chevalley-Eilenberg, l'espace des 1-cochaines fermées coïncide avec celui des dérivations, celui des 1-cochaines exactes avec celui des dérivations intérieures. Des résultats précédents on déduit

Théorème - L'espace de cohomologie $H^1(L^c)$ est nul. L'espace de cohomologie $H^1(L)$ est isomorphe à L^c/L, l'espace de cohomologie $H^1(L^*)$ à L^c/L^*. Si F n'est pas exacte (en particulier si W est compacte) $\dim H^1(L) = 0$, $\dim H^1(L^*) = b_1(W)$. Si F est exacte, on a $\dim H^1(L) = 1$, $\dim H^1(L^*) = b_1(W) + 1$, où $b_1(W)$ est le premier nombre de Betti pour l'homologie à supports compacts.

14 - Dérivations de N.

La situation est différente selon que W est compacte ou non.

a) En introduisant un recouvrement de Palais identique à celui du § 6, on démontre par un raisonnement analogue à celui du § 10, c concernant $\mathcal{D}_1$ que toute dérivation $\mathcal{D}$ de N est locale dans le cas non compact.

Théorème - Si W est non compacte, toute dérivation de N est locale et est donnée par $\mathcal{L}(X) + K_X$, où $X \in L^c$. L'espace de cohomologie $H^1(N)$ est isomorphe à L^c/L^* et à même dimension que $H^1(L^*)$

b) Dans le cas compact tout élément u de N admet la décomposition unique

$$u = u_1 + V^{-1} \cdot \int_W u\,\eta$$

où V est le volume de W et où u_1 est élément de N_1.

On déduit des résultats précédents

Théorème - Si W est compacte, toute dérivation de N est donnée par :

$$\mathcal{D}u = \mathcal{L}(X)\,u + V^{-1} \cdot \mathcal{D}1 \cdot \int_W u\,\eta \qquad (u \in N)$$

où X L et $\mathcal{D}\ell \in R$. On a $\dim H^1(N) = b_1(w) + 1$

On notera que N admet dans ce cas des dérivations non locales.

B I B L I O G R A P H I E

[1] E CARTAN Ann. Scient. Ec. Normale 26, 1909, p 93-161

[2] F. TAKENS Derivations of vectorfields I.R.M.A. Strasbourg, miméographié juin 1972

[3] A. LICHNEROWICZ Comptes rendus Acad. Sc. Paris 275, 1972, p 709-714

[4] A. LICHNEROWICZ Comptes rendus Acad. Sc. Paris, 3 Janvier 1973 .

[5] A. AVEZ et A. LICHNEROWICZ Comptes rendus Acad. Sc. Paris 275, 1972, p 113-118

[6] A. LICHNEROWICZ Comptes rendus Acad. Sc. Paris 274, 1972, p1494-1498, 275, 1972 p 825-829

[7] I.M. GELFAND et D.B. FUKS Funct. Anal. 4, 1970, p10-25

[8] B.I. ROZENFELD Funct Anal. 5, 1971, p84-85

[9] E. CALABI On the group of automorphisms of a symplectic manifold. Global Analysis Princeton Univ. Press p 1-26, 1971

[10] V. ARNOLD Funct. Anal. 3, 1969, p 77-79