JEAN LERAY

Complément à la théorie d'Arnold de l'indice de Maslov

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1973, tome 18
« Conférences de : J. Leray, J.P. Ramis, R. Seiler, J.M. Souriau et A. Voros », , exp. nº 2, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1973__18__A2_0>

COMPLÉMENT A LA THÉORIE D'ARNOLD
DE L'INDICE DE MASLOV*

par Jean LERAY

Nous avons récemment proposé une justification [4] de la règle suivant laquelle Maslov [1], [3] prolonge les solutions asymptotiques des équations aux dérivées partielles au-delà des singularités qu'elles présentent ; cette règle, qui fait apparaître des conditions "quantiques", emploie un indice, qui fut introduit par Maslov [1], puis défini et étudié en termes de géométrie symplectique par Arnold [2], [3] ; notre justification de cette règle emploie des propriétés de cet indice que ne mentionnent ni Maslov, ni Arnold : voir le n° 2 du § 2 de [4]. Nous nous proposons d'énoncer ces propriétés et d'esquisser leurs preuves, que nous expliciterons ailleurs [5] ; à cet effet, le § 2 emploie une "fonction de Maslov" que le § 3 construit aisément à l'aide de "l'indice de Maslov", dont il rappelle la définition.

§ 1. Relation avec la théorie des solutions asymptotiques.

Pour construire, sur $X = \mathbb{R}^\ell$, une solution asymptotique d'une équation aux dérivées partielles, Maslov emploie l'espace P dual de X et, dans l'espace $Z = X \oplus P = \mathbb{R}^{2\ell}$, une variété $\mathcal{V}$, de dimension ℓ, sur le revêtement simplement connexe $\check{\mathcal{V}}$ de laquelle il définit une fonction numérique réelle, nommée phase, par l'intégration de la forme différentielle :

$$d\varphi = \sum_{j=1}^{\ell} p_j \, dx_j$$

($x_1, \ldots, x_\ell$ coordonnées de X ; $p_1, \ldots, p_\ell$ coordonnées duales de P).
Cette définition exige que

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{\ell} dp_j \wedge dx_j = 0 \quad \text{sur } \mathcal{V} \quad ;$$

on exprime cette condition en disant que la variété $\mathcal{V}$ est lagrangienne.

Pour construire, suivant la règle de Maslov, une solution asymptotique, il convient d'employer deux fonctions à valeurs entières :

$$(2) \qquad \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{Z} \quad , \qquad \check{\mathcal{V}} \times \check{\mathcal{V}} \to \mathbb{Z} \quad ;$$

*) A paraître dans Convegno di Geometrica simplettica e Fisica matematica ; Istituto Nazionale di Alta Matematica Roma, 1973.

la première est donc une fonction d'un triplet de points de $\mathcal{V}$; la seconde est une fonction d'un couple de points de $\check{\mathcal{V}}$.

Pour les définir, notons Λ l'ensemble des sous-espaces vectoriels λ de Z ayant la dimension ℓ et vérifiant (1), c'est-à-dire lagrangiens ; Λ est une variété, nommée <u>grassmannienne lagrangienne</u> de Z ; la loi associant à chaque point de $\mathcal{V}$ la direction de son ℓ-plan tangent définit deux applications :

(3) $$\mathcal{V} \to \Lambda \quad , \quad \check{\mathcal{V}} \to \check{\Lambda} .$$

Les deux fonctions (2) seront définies par les compositions

(4) $$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \Lambda \times \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z} \quad , \quad \check{\mathcal{V}} \times \check{\mathcal{V}} \to \check{\Lambda} \times \check{\Lambda} \to \mathbb{Z} ,$$

des applications (3) et de deux fonctions

$$\Lambda \times \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z} \quad , \quad \check{\Lambda} \times \check{\Lambda} \to \mathbb{Z} ,$$

dont nous allons exposer les définitions et les propriétés.

La valeur de la forme extérieure

$$\sum_j dp_j \wedge dx_j$$

sur un couple (z,z') de vecteurs de Z sera notée $[z,z']$; c'est une fonction numérique réelle, bilinéaire, <u>antisymétrique</u> et de <u>rang maximum</u> :

(5) $$[z,z'] = -[z',z] ;$$

(6) si z est tel que $(\forall\, z' \in Z)$ $[z,z'] = 0$, alors $z = 0$.

Autrement dit $[z,z']$ est une forme symplectique ; sa donnée munit Z <u>d'une structure symplectique</u>.

§ 2. <u>Enoncé des résultats</u> ; <u>les fonctions de Maslov</u>.

1. NOTATIONS.- Soit $Z = \mathbb{R}^{2\ell}$ <u>un espace vectoriel muni d'une structure symplectique</u>, c'est-à-dire d'une fonction numérique réelle de deux vecteurs de Z , qui soit antisymétrique et de rang maximum (c'est-à-dire qui vérifie (5) et (6)).

Nous nommons <u>espaces lagrangiens</u> les sous-espaces de Z sur lesquels cette forme s'annule identiquement ; il est aisé d'établir les propriétés suivantes :

<u>leur dimension</u> maximum est ℓ ;

l'ensemble Λ des ℓ-plans lagrangiens de Z est une variété : la <u>grassmannienne lagrangienne</u> ;

deux ℓ-plans lagrangiens sont en général transverses ;

si X et P sont deux ℓ-plans lagrangiens transverses, alors

$$[p,x] = -[x,p] \qquad (x\in X\ ,\ p\in P)$$

définit une <u>dualité de</u> X <u>et</u> P , dont le signe change quand on permute X et P.

2. L'INERTIE D'UN TRIPLET DE ℓ-PLANS LAGRANGIENS, DEUX A DEUX TRANSVERSES.- Soient λ, λ' et λ'' trois ℓ-plans lagrangiens, deux à deux transverses ; puisque $\dim Z = 2\ell$,

$$Z = \lambda \oplus \lambda' = \lambda' \oplus \lambda'' = \lambda'' \oplus \lambda\ ;$$

les relations

$$z\in\lambda\ ,\ z'\in\lambda'\ ,\ z''\in\lambda''\ ,\quad z + z' + z'' = 0 \tag{2.1}$$

définissent donc trois isomorphismes

$$\begin{aligned} &\lambda \ni z \mapsto z' = S_{\lambda\lambda'\lambda''}z \in \lambda' \\ &\lambda' \ni z' \mapsto z'' = S_{\lambda'\lambda''\lambda}z' \in \lambda'' \\ &\lambda'' \ni z'' \to z = S_{\lambda''\lambda\lambda'}z'' \in \lambda \end{aligned} \tag{2.2}$$

dont le produit est l'identité ; $-S_{\lambda\lambda'\lambda''}$ est la projection de λ sur λ' parallèlement à λ''.

La relation (2.1) implique

$$[z,z'] = [z',z''] = [z'',z]\ , \tag{2.3}$$

car $[z,z'] = [-z' -z'',z'] = [z',z'']$.

Si les deux triplets z, z', z'' et w, w', w'' vérifient (2.1), nous avons

$$[z,w'] = [w,z']\ ,$$

car

$$[z,w'] + [z',w] = [z + z',\ w + w'] = 0\ ,$$

vu que

$$[z,w] = [z',w'] = [z'',w''] = 0\ ;$$

l'application

$$S_{\lambda\lambda'\lambda''} : \lambda \to \lambda'$$

est donc sa propre transposée dans la dualité de λ et λ' qu'induit la structure symplectique ; la forme Q de $z\in\lambda$:

$$Q(z) = [z, S_{\lambda\lambda'\lambda''}z] = [z, z']$$

a donc pour forme polaire

$$Q(z,w) = [z, S_{\lambda\lambda'\lambda''}w] = [z, w'] = [w, z'] \quad ;$$

définissons de même les formes quadratiques Q' de $z' \in \lambda'$ et Q'' de $z'' \in \lambda''$:

$$Q'(z') = [z', S_{\lambda'\lambda''\lambda}z'] \ , \quad Q''(z'') = [z'', S_{\lambda''\lambda\lambda'}z''] \ ;$$

les applications linéaires (2.2) transforment les unes en les autres ces trois formes, qui sont de rang ℓ et ont le même indice d'inertie[1] ; cet indice est nommé <u>inertie du triplet</u> $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ et noté :

(2.6) $\quad \mathrm{Inert}(\lambda,\lambda',\lambda'') = \mathrm{Inert}(\lambda',\lambda'',\lambda) = \mathrm{Inert}(\lambda'',\lambda,\lambda') = \ell - \mathrm{Inert}(\lambda',\lambda,\lambda'') = \ldots$

Inert(...) <u>est</u> donc <u>une fonction à valeurs entières d'un triplet de</u> <u>ℓ-plans lagrangiens</u> ; elle n'est momentanément définie que pour les triplets de plans <u>2 à 2 transverses</u> ; sous cette hypothèse, elle est <u>localement constante</u>[2] et Inert(...) $- \ell/2$ est <u>anti-symétrique</u>.

3. LA FONCTION DE MASLOV D'UN COUPLE TRANSVERSE.- Notons $\check{\Lambda}$ le revêtement simplement connexe de la grassmannienne lagrangienne de Λ , $\check{\lambda}$, $\check{\lambda}'$, $\check{\lambda}''$ des points de $\check{\Lambda}$ et λ, λ', λ'' leurs projections sur Λ . Le § 3 établira l'existence d'<u>une fonction à valeurs entières</u>, M, <u>d'un couple</u> $(\check{\lambda}, \check{\lambda}')$, <u>définie quand ce couple est transverse</u>[3], <u>localement constante et possédant la propriété suivante</u> :

(3.1) $\quad \mathrm{Inert}(\lambda,\lambda',\lambda'') = M(\check{\lambda},\check{\lambda}') - M(\check{\lambda},\check{\lambda}'') + M(\check{\lambda}',\check{\lambda}'')$.

Voici trois propositions aisées :

PROPOSITION 3.1.- La fonction M est unique.

<u>Preuve</u>.- La différence M_o de deux fonctions ayant les propriétés de M a la propriété :

---

1) Rappelons que, si les L_j sont les fonctions linéaires indépendantes, i est l'indice d'inertie de

$$- \sum_{j=1}^{i} L_j^2 + \sum_{j=i+1}^{\ell} L_j^2 \ .$$

2) c'est-à-dire : constante sur chaque composante connexe de son domaine de définition.

3) c'est-à-dire tel que (λ, λ') soit un couple de ℓ-plans transverses de Z .

$$(3.2) \qquad M_o(\check\lambda,\check\lambda') = M_o(\check\lambda,\check\lambda'') - M_o(\check\lambda',\check\lambda'') \quad ;$$

elle est donc localement constante quand λ et λ' ne sont pas transverses à λ'', qui est arbitraire ; elle est donc constante ; vu (3.2), elle est donc nulle.

PROPOSITION 3.2.- La fonction M vérifie la relation

$$(3.3) \qquad M(\check\lambda,\check\lambda') + M(\check\lambda',\check\lambda) = \ell \; ;$$

autrement dit la fonction $M(\ldots) - \frac{\ell}{2}$ est antisymétrique.

<u>Preuve</u>.- Dans (2.6)

$$\mathrm{Inert}(\lambda,\lambda',\lambda'') + \mathrm{Inert}(\lambda',\lambda,\lambda'') = \ell$$

on substitue à Inert. son expression (3.1).

PROPOSITION 3.3.- Notons g un élément du groupe d'homotopie de Λ ; évidemment $g : \check\Lambda \to \check\Lambda$ et l'on a, vu l'unicité de M :

$$M(g\check\lambda,g\check\lambda') = M(\check\lambda,\check\lambda') \; .$$

<u>Note</u>.- La relation (3.1) implique que, si λ, λ', λ'' et λ''' sont deux à deux transverses, alors

$$(3.4) \quad \mathrm{Inert}(\lambda,\lambda',\lambda'') - \mathrm{Inert}(\lambda,\lambda',\lambda''') + \mathrm{Inert}(\lambda,\lambda'',\lambda''') - \mathrm{Inert}(\lambda',\lambda'',\lambda''') = 0 \; .$$

Pour vérifier (3.1), il suffirait donc[1] de choisir

$$M(\lambda,\lambda') = \mathrm{Inert}(\lambda,\lambda',\lambda_o) \; , \qquad \lambda_o \text{ étant fixe,}$$

si l'on renonçait aux conditions que M est défini pour tout couple transverse et est localement constant.

4. L'INERTIE D'UN TRIPLET QUELCONQUE DE ℓ-PLANS LAGRANGIENS.- Soit λ, λ', λ'' trois ℓ-plans lagrangiens quelconques de Z ; l'espace

$$Z_* = (\lambda+\lambda') \cap (\lambda'+\lambda'') \cap (\lambda''+\lambda)/(\lambda \cap \lambda' + \lambda' \cap \lambda'' + \lambda'' \cap \lambda)$$

est de dimension $2\ell_*$, où

$$\ell_* = \ell - \dim \lambda \cap \lambda' - \dim \lambda' \cap \lambda'' - \dim \lambda'' \cap \lambda + \dim \lambda \cap \lambda' \cap \lambda'' \; :$$

la structure symplectique de Z induit une structure symplectique de Z_* ; les images λ_*, λ'_*, λ''_* sont deux à deux transverses ; donc $\mathrm{Inert}(\lambda_*,\lambda'_*,\lambda''_*)$ est défini ; nous définirons

$$\mathrm{Inert}(\lambda,\lambda',\lambda'') = \mathrm{Inert}(\lambda_*,\lambda'_*,\lambda''_*) \; .$$

---

1) Cf. : les cochaînes d'Alexander.

Evidemment

(4.1) $\mathrm{Inert}(\lambda,\lambda',\lambda'') = \mathrm{Inert}(\lambda',\lambda'',\lambda) = \mathrm{Inert}(\lambda'',\lambda,\lambda') = \ell_* - \mathrm{Inert}(\lambda',\lambda,\lambda'') = \dots$

5. LA FONCTION DE MASLOV D'UN COUPLE QUELCONQUE.- On peut prouver ceci : si λ est transverse à λ' et à λ'', alors la relation

$$\mathrm{Inert}(\lambda,\lambda',\lambda'') = M(\check\lambda',\check\lambda'') - M(\check\lambda,\check\lambda'') + M(\check\lambda,\check\lambda')$$

définit une fonction à valeurs entières

$$(\check\lambda',\check\lambda'') \longmapsto M(\check\lambda',\check\lambda''),$$

qui est évidemment la fonction de Maslov, quand λ' et λ'' sont transverses. Nous la nommerons encore <u>fonction de Maslov</u> ; voici ses propriétés :

M <u>est constant sur chaque partie connexe de</u> $\check\Lambda \times \check\Lambda$ <u>où</u> $\dim(\lambda' \cap \lambda'')$ <u>est constant</u>.

Supposons $\lambda \cap \lambda' \cap \lambda'' = 0$ (ce qui équivaut à $\lambda + \lambda' + \lambda'' = Z$) ; alors

(5.1) $\mathrm{Inert}(\lambda,\lambda',\lambda'') = M(\check\lambda,\check\lambda') - M(\check\lambda,\check\lambda'') - \dim(\lambda \cap \lambda'') + M(\check\lambda',\check\lambda'')$.

(5.2) $$M(\check\lambda,\check\lambda') + M(\check\lambda',\check\lambda) = \ell - \dim(\lambda \cap \lambda').$$

M vérifie la proposition 3.3.

6. LES FORMULES ESSENTIELLES A LA DÉFINITION DES SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES : [4], § 2, n°2.- Cette définition suppose Z donné comme somme directe de deux de ses plans lagrangiens, X et P :

$$Z = X \oplus P ;$$

la structure symplectique de Z est définie par une dualité de X et P : la valeur de $p \in P$ en $x \in X$ est

$$[p,x] = -[x,p] \in \mathbb{R}.$$

Nous utilisons dans X et P des coordonnées duales :

$$x = (x_1,\dots,x_\ell) \in X \quad , \quad p = (p_1,\dots,p_\ell) \in P ;$$

$$[p,x] = -[x,p] = \sum_{j=1}^{\ell} p_j x_j .$$

Etant donné

$$\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_\ell) \in \mathbb{R}^\ell,$$

notons $\lambda(\alpha)$ le ℓ-plan lagrangien de Z d'équations

$$(6.1)\qquad \lambda(\alpha) : \frac{x_j}{\cos \alpha_j} = \frac{p_j}{\sin \alpha_j} \qquad \text{pour } j = 1,\dots,\ell \ ;$$

soit $\check{\lambda}(\alpha)$ un élément de $\check{\Lambda}$, se projetant en $\lambda(\alpha)$ et dépendant continûment de α ; la définition de l'indice de Maslov de plans transverses ou non (n° 4) donne

$$(6.2)\qquad M(\check{\lambda}(\alpha),\check{\lambda}(\beta)) = -\sum_j{}'\left[\frac{\alpha_j - \beta_j}{\pi}\right] ;$$

la somme Σ' est étendue à l'ensemble des j tels que $\frac{\alpha_j-\beta_j}{\pi}$ <u>n'est pas entier</u>; $[\tau]$ est la partie entière de τ, c'est-à-dire le plus grand entier $\leqq \tau$.

Notons $L = \{1,\dots,\ell\}$, K et H des parties de L , $K^* = L\backslash K$ et H^* leurs complémentaires. Quand

$$\alpha_j = \pi/2 \quad \text{pour } j\in K \quad , \qquad \alpha_j = 0 \quad \text{pour } j\in K^* \ ,$$

alors $\check{\lambda}(\alpha)$ est noté $\check{\lambda}_K$; λ_K est donc le plan lagrangien :

$$(6.3)\qquad \lambda_K : x_j = 0 \quad \text{pour } j\in K \quad , \quad p_j = 0 \quad \text{pour } j\in K^* \ ;$$

par exemple[1] :

$$X = \lambda_\emptyset \quad , \quad P = \lambda_L \ .$$

Notons

$$|K \cap H| = \text{Card } K \cap H \ ;$$

la formule (6.2) donne

$$(6.4)\qquad M(\lambda_K,\lambda_H) = |K^* \cap H| \ .$$

Choisissons λ transverse à λ_K et λ_H ; [4] § 2 n°1 note

$$(6.5)\qquad n_H^K(\lambda) = \text{Inert}(\lambda_K,\lambda_H,\lambda) - |K^* \cap H| \ ,$$

$$(6.6)\qquad n_K(\check{\lambda}) = M(\lambda_K,\check{\lambda}).$$

Les formules (4.1), (5.1) et (6.4) donnent la <u>formule essentielle</u> de [4] (voir (2.1), § 2) :

$$(6.7)\qquad n_H^K(\lambda) = -n_K^H(\lambda) = n_H(\check{\lambda}) - n_K(\check{\lambda}) \ .$$

1) Signalons que [ ] § 2, n° 1 emploie

$$T_K = Z/\lambda_K \ .$$

<u>Note</u>.- Dans [4], $\mathrm{Inert}(\lambda_K,\lambda_H,\lambda)$ est noté $\mathrm{Inert}_H^K(\lambda)$ et sa définition est énoncée sous sa forme explicite que voici.

<u>Définition explicite de</u> $\mathrm{Inert}(\lambda_K,\lambda_H,\lambda)$.- Le n° 4 définit

$$\mathrm{Inert}(\lambda_K,\lambda_H,\lambda) = \mathrm{Inert}\,(\lambda'_*,\lambda''_*,\lambda_*) \tag{6.8}$$

λ'_*, λ''_*, λ_* étant les images de λ_K, λ_H et $\lambda \cap (\lambda_K+\lambda_H)$ dans l'espace

$$Z_* = (\lambda_K+\lambda_H)/\lambda_K \cap \lambda_H\ , \tag{6.9}$$

muni de la structure symplectique induite par celle de Z. Vu (6.3), les équations de $\lambda_K+\lambda_H$ et $\lambda_K \cap \lambda_H$ dans Z sont :

$$\lambda_K+\lambda_H : x_j = 0 \text{ pour } j \in K\cap H \ ; \ p_j = 0 \text{ pour } j \in K^*\cap H^*\ ,$$

$$\lambda_K\cap\lambda_H : x_j = 0 \text{ pour } j \in K\cup H = L\backslash K^*\cap H^*\ ; \ p_j = 0 \text{ pour } j \in L\backslash K\cap H\ ;$$

nous pouvons donc choisir pour coordonnées de Z_* les

x_j et p_j tels que $j \in L\backslash K\cap H\backslash K^*\cap H^* = (K\cap H^*) \cup (K^*\cap H)$.

Rappelons que les coordonnées de Z ont été choisies telles que

$$[z',z''] = \sum_j (p'_j x''_j - p''_j x'_j) \qquad (z' = x'+p',\ z'' = x''+p'',\ x' \text{ et } x'' \in X,\ p' \text{ et } p'' \in P)\ ;$$

si z' et $z'' \in \lambda_K+\lambda_H$, cette formule devient :

$$[z',z''] = \sum_{j\in(K\cap H^*)\cup(K^*\cap H)} (p'_j x''_j - p''_j x'_j)\ , \tag{6.10}$$

$[z',z'']$ ne dépend donc que des images z'_* et z''_* de z' et z'' dans Z_* et définit la structure symplectique de Z_* :

$$[z'_*,z''_*] = [z',z'']\ . \tag{6.11}$$

Les images λ'_* et λ''_* de λ_K et λ_H dans Z_* ont pour équations :

$$\lambda'_* : x_j = 0 \text{ pour } j \in K\cap H^*\ ,\ p_j = 0 \text{ pour } j \in K^*\cap H\ ;$$

$$\lambda''_* : x_j = 0 \text{ pour } j \in K^*\cap H\ ,,\ p_j = 0 \text{ pour } j \in K\cap H^*\ .$$

Soit z_* un point arbitraire de Z_* ; $Z_* = \lambda'_* \oplus \lambda''_*$; notons

$$z_* = z'_* + z''_* \text{ où } z'_* \in \lambda'_*\ ,\ z''_* = \lambda''_*\ ;$$

l'expression précédente de $[z'_*,z''_*]$ devient

$$[z'_*,z''_*] = \sum_{j\in K\cap H^*} p_j\, x_j - \sum_{j\in K^*\cap H} p_j\, x_j\ ,$$

car $p_j = p'_j$ et $x_j = x''_j$ pour $j \in K \cap H^*$; $p_j = p''_j$ et $x_j = x'_j$ pour $j \in K^* \cap H$. $\mathrm{Inert}(\lambda'_*, \lambda''_*, \lambda_*)$ est l'indice d'inertie de la restriction de cette forme quadratique à λ_* . Vu (6.8) nous obtenons donc la définition explicite suivante, qu'emploie [4] :

$\mathrm{Inert}(\lambda_K, \lambda_H, \lambda)$ <u>est l'indice d'inertie de la restriction à la partie de</u> λ <u>où</u>

$$x_j = 0 \quad \text{pour} \quad j \in K \cap H \quad , \quad p_j = 0 \quad \text{pour} \quad j = K^* \cap H^*$$

de la forme quadratique de z $(z = x+p,\ x \in X,\ p \in P)$:

$$\sum_{j \in K \cap H^*} p_j\, x_j - \sum_{j \in K^* \cap H} p_j\, x_j \quad .$$

§ 3. <u>Esquisse des preuves</u> : <u>l'indice de Maslov</u>.

1. LES STRUCTURES HERMITIENNES COMPATIBLES AVEC UNE STRUCTURE SYMPLECTIQUE.- Supposons $\mathbb{C}^\ell$ muni d'une structure hermitienne ; c'est-à-dire supposons définie une forme sesqui-linéaire de z et $z' \in \mathbb{C}^\ell$ telle que

$$\overline{(z|z')} = (\bar{z}|\bar{z}') = (z'|z) \ ; \ (z|z) > 0 \quad \text{si} \quad z \neq 0$$

alors

$$\mathrm{Im}(z|z') = [z,z'] \tag{1.1}$$

définit évidemment sur $\mathbb{C}^\ell$ une structure symplectique ; elle est dite <u>associée</u> à la structure hermitienne.

Réciproquement, soit Z l'espace $\mathbb{R}^{2\ell}$, muni de la structure symplectique $[z,z']$; choisissons arbitrairement dans Z deux ℓ-plans lagrangiens transverses, X et P ;

$$[p,x] = -[x,p]$$

définit une dualité entre X et P ; soit une bijection

$$I : X \to P$$

identique à sa transposée et telle que

$$[x,Ix] > 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in X \quad (x \neq 0) \ ;$$

dans un système de coordonnées duales de X et P , sa matrice est réelle, symétrique, définie positive ; l'ensemble de ces bijections I est donc un cône convexe ; il est donc <u>connexe</u>.

Soit $z \in Z$; $z = x+p$ où $x \in X$, $p \in P$; définissons

$$Iz = Ix - I^{-1}p \ ; \ (z|z') = [Iz,z'] + i[z,z'] \ ; \tag{1.2}$$

$-I^2$ est l'identité ; I définit donc une structure complexe de Z ; $(.|.)$ définit une structure hermitienne compatible avec cette structure complexe ; la structure symplectique associée est la structure symplectique donnée, ce qu'on exprime en disant que les structures hermitiennes construites ci-dessus sont compatibles avec cette structure symplectique.

On voit aisément que la construction précédente donne l'ensemble des structures hermitiennes compatibles avec la structure symplectique donnée et que cet ensemble est connexe.

Nous allons employer l'une quelconque de ces structures hermitiennes à définir l'indice de Maslov, qui sera manifestement invariant par homotopie ; puisque l'ensemble de ces structures hermitiennes est connexe, cet indice sera donc indépendant du choix de la structure hermitienne : l'indice de Maslov ne dépendra que de la structure symplectique.

2. L'IMMERSION $\mathcal{U}$ DE Λ DANS LE GROUPE UNITAIRE $\mathbf{U}$.- Soit $Z = \mathbb{C}^\ell$, muni d'une structure hermitienne ; la condition qu'un ℓ-plan λ de Z soit lagrangien équivaut, vu (1.1), à chacune des conditions suivantes :

$(z|z')$ est réel sur λ ;

la restriction à λ de la structure hermitienne de Z est une structure euclidienne ;

λ contient un repère ortho-normé, qui est à la fois repère euclidien de λ et hermitien de Z .

Or les transformations unitaires U de Z transforment les uns en les autres ces repères ; le groupe unitaire $\mathbf{U}$ transforme donc transitivement les uns en les autres les ℓ-plans lagrangiens de Z (Arnold [2]). Or la partie réelle X de Z est l'un de ces plans ; tout autre de ces plans λ a donc l'expression

$$\lambda = U X , \quad \text{où} \quad U \in \mathbf{U} ; \tag{2.1}$$

λ étant donné, U est défini au produit près à droite par une transformation orthogonale ; W

$$W = U \bar{U}^{-1} \tag{2.2}$$

est indépendant de cette transformation orthogonale ; W est une transformation

---

1) Ce repère se compose de ℓ vecteurs ; λ (resp. Z) est l'ensemble de leurs combinaisons linéaires réelles (resp. complexes).

unitaire, égale à sa transposée :

(2.3) $W^* = \bar{W} = W^{-1}$ (W^* : adjoint de W ; $\bar{W}$: imaginaire conjuguée);

les vecteurs $z \in \lambda$ sont les vecteurs tels que :

(2.4) $$z = W\,\bar{z}\ .$$

L'application

(2.5) $$\mathcal{U} : \lambda \longmapsto W = \mathcal{U}(\lambda)$$

est donc une injection

$$\mathcal{U} : \Lambda \to \mathbf{U}\ .$$

Les conditions suivantes sont équivalentes en notant

$$W = \mathcal{U}(\lambda) \quad , \quad W' \in \mathcal{U}(\lambda') :$$

λ et λ' ne sont pas transverses ;
Il existe un vecteur z de Z tel que

$$z = W\,\bar{z} = W'\bar{z}\ ;$$
$$1 \in \mathrm{sp}(W'^{-1}W)\ ;$$
$$1 \in \mathrm{sp}(W'\,W^{-1}):$$

(sp désigne le spectre d'un opérateur).

<u>Note</u> 1.- Soient $X = \mathrm{Re}(X)$, $P = \mathrm{Im}(X)$, E la matrice identique de $\mathbf{U}$; évidemment

$$\mathcal{U}(X) = E \quad , \quad \mathcal{U}(P) = -E\ .$$

<u>Note</u> 2.- Soit $\mathbf{O}$ le groupe orthogonal à ℓ variables : Arnold déduit de ce qui précède que Λ est l'espace homogène

$$\Lambda = \mathbf{U}/\mathbf{O}\ ;$$

en précisant cette proposition, <u>Arnold</u> [2] obtient les groupes d'homotopie et d'homologie de dimension 1 de Λ :

$$H_1(\Lambda) \simeq \pi_1(\Lambda) \simeq Z\ .$$

3.- RELATION ENTRE INERTIE ET SPECTRE.- Notons $I = i$ et, pour $z \in Z$:

$$z = x + iy \quad , \quad \text{où} \quad x \text{ et } y \in X = \mathrm{Re}(Z)\ .$$

Soit λ un ℓ-plan lagrangien <u>transverse</u> à P , c'est-à-dire tel que

$$-1 \notin \mathrm{sp}(W) \quad , \quad \text{où} \quad W = \mathcal{U}(\lambda)\ .$$

Vu (2.4), la condition

$$z \in \lambda$$

s'énonce :

(3.1) $$y = S\,x \quad , \quad \text{où} \quad S = i\,\frac{E-W}{E+W} \quad ;$$

la matrice de S est réelle et symétrique, vu (2.3).

La formule (3.1), qui joue un rôle essentiel chez Arnold [2], permet de comparer notre procédé au sien, qui n'emploie pas l'injection $\mathcal{U}$. Cette formule (3.1) permet aussi de donner une preuve aisée, mais sommaire, de la relation fondamentale (3.1) du § 2 ; la voici.

Quand λ est transverse à X, la définition d' $\mathrm{Inert}(X,P,\lambda)$ que donne le n° 2 du § 2 s'énonce comme suit :

$\mathrm{Inert}(X,P,\lambda)$ est l'indice d'inertie de la forme quadratique de x valant en x : (x,Sx).

Autrement dit :

$\mathrm{Inert}(X,P,\lambda)$ est le nombre de points de $\mathrm{sp}(S)$ appartenant à la demi-droite $\mathbb{R}_-$: $s < 0$.

Or $\mathrm{sp}\,W$ est l'image de $\mathrm{sp}(S)$ par l'application

(3.2) $$\mathbb{R} \ni s \longmapsto w = \frac{1+is}{1-is} \in S^1 \ ,$$

S^1 étant le cercle de $\mathbb{C}$: $|w| = 1$, qui a l'orientation $\frac{1}{i}\frac{dw}{w} > 0$; (3.2) applique $\mathbb{R}_-$ sur l'arc σ de S^1 :

$$\sigma \ : \ |w| = 1 \quad , \quad \mathrm{Im}(w) < 0 \quad ;$$

orientons-le, comme S^1 : de -1 vers $+1$; notons KI l'indice de Kronecker[1]; nous avons donc

(3.3) $$\mathrm{Inert}(X,P,\lambda) = KI(\sigma, \mathrm{sp}\,\lambda)$$

en définissant

$$\mathrm{sp}\,\lambda = \mathrm{sp}\,\mathcal{U}(\lambda) \ .$$

Quand λ décrit un arc orienté γ de Λ , d'origine λ_0 et d'extrémité λ_1 , dont tous les points λ sont <u>transverses à</u> P , $\mathrm{sp}\,\lambda$ engendre une chaîne[2]

1) KI est le nombre des points d'intersection, comptés avec les ordres de multiplicités positifs ou négatifs usuels en topologie algébrique.

2) au sens de la topologie algébrique.

sp γ de S^1 ; vu (3.3)

(3.4) $$\mathrm{Inert}(X,P,\lambda_1) - \mathrm{Inert}(X,P,\lambda_o) = KI(\sigma,\partial\ \mathrm{sp}\ \gamma) \qquad (\partial : \text{bord}) ;$$

or, si σ et τ sont deux chaînes de S^1

$$KI(\sigma,\partial\tau) + KI(\tau,\partial\sigma) = 0 ;$$

d'autre part

$$KI(\mathrm{sp}\ \gamma,-1) = 0 ,$$

puisque $-1 \notin \mathrm{sp}\ \gamma$; la formule (3.4) s'écrit donc

(3.5) $$\mathrm{Inert}(X,P,\lambda_1) - \mathrm{Inert}(X,P,\lambda_o) = -KI(\mathrm{sp}\ \gamma,1) .$$

4. L'INDICE DE MASLOV permet d'énoncer cette formule en termes de géométrie symplectique.

Etant donné un arc orienté γ de U , dont les extrémités n'ont pas la valeur propre 1, nous nommons <u>indice</u> de γ l'entier

(4.1) $$n(\gamma) = KI(\mathrm{sp}\ \gamma,1) ;$$

n est évidemment une fonction additive, ne dépendant que de la classe d'homotopie de γ .

Etant donné un arc Γ de $\Lambda \times \Lambda$, d'origine (λ_o',λ_o) et d'extrémité (λ_1',λ_1), quand (λ',λ) décrit Γ , alors $W'^{-1} W$ décrit un arc γ de U ; ($W = \mathcal{U}(\lambda)$, $W' = \mathcal{U}(\lambda')$); <u>l'indice de Maslov de</u> Γ est par définition

(4.2) $$m(\Gamma) = n(\gamma) ;$$

m est donc une fonction additive, à valeurs entières, définie quand λ_j' et λ_j sont transverses pour $j = 0$ et $j = 1$. L'indice m est <u>invariant par homotopie</u> ; il dépend donc de la structure symplectique de Z , sans dépendre du choix que font les n° 2 et 3 d'une structure complexe de Z , compatible avec cette structure symplectique.

La formule (3.5) donne donc :

(4.3) $$\mathrm{Inert}(\lambda',\lambda'',\lambda_1) - \mathrm{Inert}(\lambda',\lambda'',\lambda_o) = -m(\Gamma) ,$$

si Γ est un arc d'origine (λ',λ_o) et d'extrémité (λ',λ_1) sur lequel λ' reste fixe et λ <u>reste transverse à</u> λ''.

5. LA FONCTION DE MASLOV.- Donnons-nous deux points $(\check{\mu}',\check{\mu})$ et $(\check{\lambda}',\check{\lambda})$ de $\check{\Lambda}\times\check{\Lambda}$; $\check{\mu}'$ et $\check{\mu}$ seront choisis fixes et transverses ; soit $\check{\Gamma}$ un arc d'origine $(\check{\mu}',\check{\mu})$ et d'extrémité $(\check{\lambda}',\check{\lambda})$; sa projection Γ sur $\Lambda\times\Lambda$ a donc une classe d'homotopie ne dépendant que de $(\check{\mu}',\check{\mu})$ et $(\check{\lambda}',\check{\lambda})$; la <u>fonction de Maslov</u> M est la fonction de $(\check{\lambda}',\check{\lambda})$ définie par la formule

(5.1) $$M(\check{\lambda}',\check{\lambda}) = m(\Gamma) + c$$

c étant une constante, dont la valeur sera choisie ultérieurement ; donc, pour le moment, M <u>est une fonction de</u> $(\check{\lambda}',\check{\lambda})$, <u>à valeurs entières</u>, <u>définie quand</u> $\check{\lambda}'$ <u>et</u> $\check{\lambda}$ <u>sont transverses et localement constante</u>. (Le n° 5 du § 1 annonce que la définition de M sera étendue, par d'autres procédés, aux $(\check{\lambda}',\check{\lambda})$ non transverses).

La formule (4.3) s'énonce :

(5.2) $$\mathrm{Inert}(\lambda',\lambda'',\lambda_1) - \mathrm{Inert}(\lambda',\lambda'',\lambda_o) = -M(\check{\lambda}',\check{\lambda}_1) + M(\check{\lambda}',\check{\lambda}_o)$$

quand on peut joindre $\check{\lambda}_o$ à $\check{\lambda}_1$ par un arc γ de $\check{\Lambda}$ dont chaque point $\check{\lambda}$ soit transverses à $\check{\lambda}''$; donc

(5.3) $$M(\check{\lambda}'',\check{\lambda}_o) = M(\check{\lambda}'',\check{\lambda}_1) .$$

Puisque

$$\mathrm{Inert}(\lambda',\lambda'',\lambda) + \mathrm{Inert}(\lambda'',\lambda',\lambda) = \ell ,$$

il résulte de (5.2) et (5.3) que, si l'on peut joindre $\check{\lambda}_o$ à $\check{\lambda}_1$ par un arc de $\check{\Lambda}$ dont chaque point $\check{\lambda}$ soit transverse à λ', alors

(5.4) $$\mathrm{Inert}(\lambda',\lambda'',\lambda_1) - \mathrm{Inert}(\lambda',\lambda'',\lambda_o) = M(\check{\lambda}'',\check{\lambda}_1) - M(\check{\lambda}'',\check{\lambda}_o) ;$$

(5.5) $$M(\check{\lambda}',\check{\lambda}_o) = M(\check{\lambda}',\check{\lambda}_1) .$$

Supposons λ', λ'', λ_j deux à deux transverses ($j = 0$ et $j = 1$) ; on peut toujours joindre $\check{\lambda}_o$ à $\check{\lambda}_1$ par un arc dont chaque point $\check{\lambda}$ est transverse soit à $\check{\lambda}'$ soit à $\check{\lambda}''$; (nous ne prouverons pas ici cette propriété banale, dont [5] évitera l'emploi) ; des relations (5.2), (5.3), (5.4), (5.5) résulte donc :

$$\mathrm{Inert}(\lambda',\lambda'',\lambda_1) - \mathrm{Inert}(\lambda',\lambda'',\lambda_o) = M(\check{\lambda}'',\check{\lambda}_1) - M(\check{\lambda}'',\check{\lambda}_o) - M(\check{\lambda}',\check{\lambda}_1) + M(\check{\lambda}',\check{\lambda}_o) ;$$

d'où l'existence d'une fonction N telle que

(5.6) $$\mathrm{Inert}(\lambda',\lambda'',\lambda) = M(\check{\lambda}'',\check{\lambda}) - M(\check{\lambda}',\check{\lambda}) + N(\check{\lambda}',\check{\lambda}'') ,$$

si λ, λ', λ'' sont deux à deux transverses ; puisque

$$\mathrm{Inert}(\lambda',\lambda'',\lambda) = \mathrm{Inert}(\lambda,\lambda',\lambda'') ,$$

on a :

(5.7) $$N(\check{\lambda}',\check{\lambda}'') = M(\check{\lambda}',\check{\lambda}'') + c' ,$$

c' étant une constante ; nous pouvons évidemment choisir la constante c de (5.1) telle que

(5.8) $$c' = 0 ;$$

les formules (5.6), (5.7) et (5.8) prouvent la formule fondamentale (3.1).

6. UN PROCÉDÉ DE CALCUL DE L'INDICE DE MASLOV.- Le théorème qui suit énonce la définition primitive de l'indice de Maslov ; il permet de le calculer aisément dans le cas où la variété lagrangienne $\mathcal{V}$ est définie par un problème régulier du calcul des variations et de l'identifier alors à l'indice de Morse.

THÉORÈME.- Dans $\Lambda \times \Lambda$ soit Γ un arc différentiable, de paramètre t, coupant transversalement en un seul point, de paramètre 0, l'hypersurface que constitue l'ensemble des points (λ',λ) tels que λ' et λ ne soient pas transverses. Soit $(\lambda'(t),\lambda(t))$ le point de Γ de paramètre t ; soient $z'(t)$ et $z(t)$ deux vecteurs différentiables de $\lambda'(t)$ et $\lambda(t)$, tels que

$$z'(0) = z(0) \neq 0 ;$$

soient $z'_t(t)$ et $z_t(t)$ les dérivées de $z'(t)$ et $z(t)$ par rapport à t. Je dis que

(6.1) $$m(\Gamma) = \text{signe}[z_t(0)-z'_t(0),z(0)] .$$

Preuve.- Notons $W(t) = \mathcal{U}(\lambda(t))$, $W'(t) = \mathcal{U}(\lambda'(t))$; par hypothèse

$$W'(0)W^{-1}(0) \text{ a une valeur propre égale à } 1 ;$$

pour t voisin de 0, $W'(t)W^{-1}(t)$ a donc une valeur propre $\rho(t)$ voisine de 1 ; évidemment

(6.2) $$m(\Gamma) = -\text{signe Im } \rho_t(0) .$$

Soit $w(t)$ le vecteur propre correspondant à $\rho(t)$:

(6.3) $$\rho(t)w(t) = W'(t)W^{-1}(t)w(t) ;$$

d'où

$$\rho(t)\|w(t)\|^2 = (W'(t)W^{-1}(t)w(t),w(t)) ;$$

donc, vu (1.1) :

$$\|w(t)\|^2 \text{ Im } \rho(t) = [W'(t)W^{-1}(t)w(t),w(t)]$$

et, puisque $\rho(0) = 1$:

(6.4) $$\|w\|^2 \operatorname{Im} \rho_t = \frac{d}{dt}[W'W^{-1}w,w] \quad \text{pour} \quad t = 0 ;$$

or, vu (6.3), où $\rho(0) = 1$:

$$[W'W^{-1}w,w_t] = [w,w_t] \quad \text{pour} \quad t = 0$$

et, vu que W et W' sont unitaires $(W^* = W^{-1})$:

$$[W'W^{-1}w_t,w] = [w_t,WW'^{-1}w] = [w_t,w] \quad \text{pour} \quad t = 0 \quad ;$$

l'expression (6.4) d' $\operatorname{Im} d\rho/dt$ s'écrit donc :

$$\|w\|^2 \operatorname{Im} \rho_t = [W'_tW^{-1}w,w] - [W'W^{-1}W_tW^{-1}w,w] \quad \text{pour} \quad t = 0 ,$$

c'est-à-dire, vu (6.3), où $\rho(0) = 1$, et vu que W et W' sont unitaires :

(6.5) $$\|w\|^2 \operatorname{Im} \rho_t = [W'_tW^{-1}w,w] - [W_tW^{-1}w,w] \quad \text{pour} \quad t = 0 .$$

Les vecteurs z et z' vérifient

(6.6) $$z(t) = W(t)\,\overline{z(t)} \quad , \quad z'(t) = W'(t)\,\overline{z'(t)} \quad , \quad z(0) = z'(0) \neq 0 ;$$

$z(0)$ est donc vecteur propre de $W'(0)W^{-1}(0)$:

$$z(0) = c^{te}\, w(0) ;$$

précisons que z (resp.w) est défini au produit près par un nombre réel (resp. complexe).

La relation (6.5) donne, vu (6.6)

(6.7) $$\|z\|^2 \operatorname{Im} \rho_t = [W'_t\bar{z}',z] - [W_t\bar{z},z] \quad \text{pour} \quad t = 0 ;$$

or (6.6) donne par différenciation

$$W_t\bar{z} = z_t - W\bar{z}_t \quad , \quad W'_t\bar{z}' = z'_t - W'\bar{z}'_t \quad ;$$

d'où, puisque W est unitaire :

$$[W_t\bar{z},z] = [z_t,z] - [\bar{z}_t,W^{-1}z] = [z_t,z] - [\bar{z}_t,\bar{z}] = 2[z_t,z]$$

donc (6.7) s'écrit

$$\|z\|^2 \operatorname{Im} \rho_t = -2[z_t - z'_t,z] \quad \text{pour} \quad t = 0 ;$$

d'où (6.1), vu (6.2).

7. QUOTIENT DE Z PAR UN r-PLAN LAGRANGIEN.- Le théorème précédent (n° 6) a pour conséquence aisée le suivant, qui permet de définir la fonction de Maslov d'un couple quelconque de ℓ-plans lagrangiens (§ 3, n° 5) :

THÉORÈME.- Soient Y et Q deux ℓ-plans lagrangiens de Z non transverses. La structure symplectique de Z induit une structure symplectique sur l'espace

$$Z_* = (Y+Q)/Y \cap Q \qquad \text{(cf. § 1, fin du n° 6)} ,$$

dont nous noterons la dimension $2\ell_*$.

Si $\lambda \in \Lambda$ est un ℓ-plan lagrangien de Z, alors l'image $\lambda_* \in \Lambda_*$ dans Z_* de λ (plus précisément de $\lambda \cap (Y+Q)$) est un ℓ_*-plan lagrangien. Soit Γ un arc de $\Lambda \times \Lambda$, engendré par un point (Y,λ) ; soit Γ_* sa projection sur $\Lambda_* \times \Lambda_*$. Soit m_* l'indice de Maslov attaché à Z_* ; on a :

$$m_*(\Gamma_*) = m(\Gamma) .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] V.P. MASLOV, Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques (en russe, M.G.N., Moscou, 1965).

[2] V.I. ARNOLD, Une classe caractéristique intervenant dans les conditions de quantification, Analyse fonctionnelle (en russe), 1, 1967, p. 1-14

[3] Traduction de [1], de [2] et d'un article de V.C. Bouslaev par J. Lascoux et R. Seneor, Dunod, 1972.

[4] J. LERAY, Solutions asymptotiques des équations aux dérivées partielles (une adaptation du Traité de V.P. Maslov), Convegno internazionale Metodi valutativi nella fisica matematica ; Roma, 1972.

[5] A paraître d'abord dans le Séminaire du Collège de France sur les Equations aux dérivées partielles.