R. Gérard
A. H. M. Levelt

Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes d'équations différentielles linéaires

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1972, tome 14
« Conférences de J. Bros, P. Schapira et W. Thirring et un texte de R. Gérard et A.H.M. Levelt », , exp. n° 4, p. 1-35

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1972__14__A4_0>

INVARIANTS
MESURANT L'IRREGULARITE EN UN POINT SINGULIER
DES
SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

par

R. GÉRARD
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
STRASBOURG, FRANCE

A.H.M. LEVELT
Mathematisch Instituut
der Katholieke Universiteit
Toernooiveld
NIJMEGEN, PAYS-BAS

Une partie des résultats de cet article a été obtenue pendant un séjour du second auteur à l'Institut de Recherche Mathé - matique Avancée de Strasbourg (Juin 1971)

1972

PLAN

§ 0 . INTRODUCTION.

Si $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont des fonctions méromorphes au voisinage de l'origine de C , il est bien connu que l'équation différentielle

$$\frac{d^n y}{dz^n} + a_{n-1}(z) \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \ldots + a_0(z) y = 0$$

a une singularité régulière à l'origine si et seulement si, pour tout i, a_i a un pôle d'ordre inférieur ou égal à $n-i$. Un critère aussi simple ([3], Chap. 4; [5], appendice B et chap. 6; [7],[10]) n'est pas connu pour les systèmes différentiels

$$(1) \qquad \frac{dy}{dz} = A(z) y$$

où $A(z)$ est une matrice carrée d'ordre n de fonctions méromorphes au voisinage de l'origine et y un vecteur colonne à n éléments. Un système (1) peut se mettre sous la forme

$$S(p) \; : \; z^p \frac{dy}{dz} = B(z) y \qquad p \geq 1$$

où cette fois $B(z)$ est une matrice holomorphe au voisinage de l'origine de C .

L'origine est un point singulier régulier pour un système $S(p)$, si toute solution est à croissance modérée au voisinage de l'origine ([4], [8] et [7] et [10]). Ceci est le cas lorsque $p = 1$ mais cela est également possible pour $p \neq 1$. Tout système ayant une singularité régulière à l'origine se ramène à un système $S(1)$ par une transformation de la forme

$$y = T(z) w$$

où $T(z)$ est une matrice carrée d'ordre n de fonctions holomorphes au voisinage de l'origine dont le déterminant n'est pas identiquement nul ([6]) .

Par une telle transformation le système (1) devient :

$$(1') \qquad \frac{dw}{dz} = (T^{-1} AT - T^{-1} \frac{dT}{dz})w .$$

Il est parfois important de pouvoir reconnaître si un système $S(p)$ a une singularité régulière ou non sans avoir, à utiliser la condition de croissance qu'il est difficile d'appliquer en pratique. Plusieurs critères ont été donnés ; rappelons-les brièvement.

Critère de W.B. JURKAT et D.A. LUTZ [7].-Au système (1), Jurkat et Lutz associent la suite de matrices (G_k) définie par la formule de récurrence

$$G_1 = A \quad , \quad G_{k+1} = \frac{d}{dz} G_k + G_k A \qquad\qquad (k=1,2,\ldots).$$

Si on note q_k l'ordre polaire de l'origine pour la matrice G_k alors on a équivalence entre les deux propriétés :

α) le système (1) a une singularité régulière à l'origine.

β) $q_k \leq k + (n-1)(p-1)$ pour tout $k = n, n+1, \ldots, (n-1)(2n(p-1)-1)$

Critère de J. Moser [14].- Au système (1), Moser associe le nombre rationnel

$$m(A) = p - 1 + \frac{r}{n} \geq 0$$

où

$$A = \frac{B(z)}{z^p} \quad \text{et} \quad r = \text{rang } B(0)$$

et considère le nombre

$$\mu = \operatorname*{Inf}_T m(T^{-1} AT - T^{-1} \frac{dT}{dz}) .$$

Alors l'origine est un point singulier régulier si et seulement si $\mu \leq 1$.

Moser donne des transformations T assez simples permettant de diminuer le nombre $m(A)$, et une estimation du nombre de transformations successives à exécuter pour atteindre le nombre μ .

Critère de N. Katz ([4] p. 45 et 50, le présent article § 5).

C'est le langage des connexions linéaires qui est utilisé. Katz associe à tout système (1) un nombre rationnel r dont la nullité est équivalente à la régularité du point singulier.

Critère de B. Malgrange [12]. Malgrange remarque que tout système (1) peut se ramener à une équation différentielle. (utiliser un vecteur cyclique, voir ci-dessous). Dans ce cas il considère l'opérateur différentiel

$$D = \sum_{p=0}^{n} a_p \frac{d^p}{dz^p} \quad ,$$

et montre que $D : \mathbb{C}[[z]] \to \mathbb{C}[[z]]$ ainsi que $D : \mathbb{C}\{z\} \to \mathbb{C}\{z\}$ sont des opérateurs à indice dont les indices sont notés respectivement $\chi(D,\mathbb{C}[[z]])$ et $\chi(D,\mathbb{C}\{z\})$. Et la condition $i(D) = \chi(D,\mathbb{C}[[z]]) - \chi(D,\mathbb{C}\{z\}) = 0$ caractérise les points singuliers réguliers.

Un autre problème important est la construction d'une transformation T qui mette un système (1) avec une singularité régulière à l'origine sous une forme S(1) . Ce problème qui se pose, par exemple lorsqu'on veut calculer la monodromie des solutions d'un système (1), a récemment attiré l'attention en rapport avec l'étude des singularités isolées des hypersurfaces ([2], [4], [13]), il est résolu en principe dans les articles de Lutz et Moser.

Dans le même ordre d'idées se situe un théorème de Lutz énonçant une propriété de stabilité des singularités régulières ([9] , Théorème 1). Il s'agit de déterminer les perturbations qu'admet un système et qui respectent le "caractère singularité régulière".

Dans l'étude des singularités d'équations différentielles, il semble naturel d'introduire des grandeurs mesurant le degré de complication de la singularité. On pourrait, par exemple, penser au nombre p , si on a mis le système (1) sous la forme $S(p)$ avec $B(0) \neq 0$. Puisque p change déjà par des transformations aussi simples que celles qui sont définies plus haut, cela n'a pas beaucoup de sens. Dans cet article l'ordre d'une singularité sera la valeur minimale de p lorsqu'on applique toutes les transformations T possibles. Si ℓ est l'ordre de la singularité nous définissons une suite de nombres positifs $\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_{\ell-1}$, les invariants associés au système (1) . Dans la littérature, on trouve d'autres invariants, le nombre μ, de Moser le nombre rationnel de N. Katz ([4], Chap. II, Théorème 1.9 ;[5], Appendice B.4) ainsi que l'indice $i(D)$ de B. Malgrange ([12]).

Les présents auteurs se sont inspirés du travail de N. Katz et P. Deligne ([4]). On parle plutôt de "connexions" que de systèmes d'équations différentielles linéaires. Ce langage apparaît très approprié pour traiter les problèmes considérés plus haut. Les notions nécessaires sont introduites au § 1 avec leur traduction en termes d'équations différentielles. Dans le § 2 nous définissons les invariants et nous démontrons leurs propriétés essentielles. L'idée fondamentale est l'étude de "domaine + image modulo domaine" d'un opérateur différentiel singulier. Tout cela est d'une extrême simplicité. Le § 3 est de nature plus technique ; on y calcule les invariants ρ_i lorsqu'on a un vecteur cyclique (c'est-à-dire le cas où le système considéré a la forme d'un système associé à une équation différentielle ordinaire d'ordre n). Ensuite, dans le § 4, utilisant les résultats du § 3, on démontre un théorème de base (théorème 4.2) qui a pour conséquences di-directes les résultats de Jurkat et de Lutz généralisés au cas des singularités de tout ordre.

On dispose alors d'une méthode de calcul de cet ordre pour un système donné.

Enfin, au § 5, on compare les invariants ρ_1 et r (Katz). Ces deux invariants ne se déduisent pas l'un de l'autre ; mais on a l'inégalité $\frac{1}{n}\rho_1 \leq r \leq \rho_1$.

Un problème non résolu dans cet article est celui du calcul des nombres ρ_i pour un système donné ; remarquons que l'on ne sait pas plus le faire pour r à moins d'avoir un vecteur cyclique.

D'autre part, il reste à faire une étude plus poussée des rapports qui existent entre les divers invariants, ℓ, o_i, μ et r .

§ 1 . RAPPELS ALGEBRIQUES. NOTATIONS ET DEFINITIONS.

Pour plus de détails concernant les notions introduites dans ce paragraphe, on pourra consulter [1] et [4] .

A) RAPPELS

a) Anneau de valuation discrète.

Une valuation discrète sur un corps K est une application ν de K sur $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ ayant les propriétés suivantes :

$$\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y) \qquad \text{pour tout } x \in K \text{ et } y \in K$$

$$\nu(x+y) \geq \inf\{\nu(x), \nu(y)\} \qquad \text{pour tout } x \in K \text{ et } y \in K$$

$$\nu(0) = \infty \text{ et } \nu(1) = 0 .$$

Alors

1°) $A = \{x \in K | \nu(x) \geq 0\}$ est un sous-anneau local de K appelé l'anneau de la valuation ν .

2°) $\mathfrak{M}(A) = \{x \in A | \ (x) > 0\}$ est l'idéal maximal de A (idéal de la valuation).

3°) $A^* = A - \mathfrak{M}(A)$ est l'ensemble des éléments inversibles de A .

Un anneau local intègre A distinct de son corps des fractions est un anneau d'une valuation discrète s'il existe une valuation discrète sur son corps des fractions tel que A soit l'anneau de cette valuation.

Si A est l'anneau d'une valuation discrète ν sur son corps des fractions K , on appelle uniformisante de ν , tout élément $t \in K$ tel que $\nu(t) = 1$.

Alors pour tout $x \in K - \{0\}$, il existe :

a) un entier $n \in Z$

b) un élément $u \in A^*$ tels que $x = ut^n$.

b) Réseau

Soient A un anneau de valuation discrète et K son corps des fractions, V un espace vectoriel de dimension finie sur K.

Un réseau de V est par définition un sous A-module de type fini de V engendrant V comme K-espace vectoriel. Un tel sous-module est automatiquement libre de rang n, égal à la dimension de V sur K.

Une propriété de réseaux que nous utiliserons dans la suite est la suivante :

Si M et M' sont deux réseaux de V, alors il existe deux ente entiers q et q' tels que :

$$M \subset t^{-q'} M'$$
$$M' \subset t^{-q} M$$

B) NOTATIONS ET DEFINITIONS.

Les données utilisées dans cet article sont :

$\mathcal{O}$: un anneau d'une valuation discrète

K : le corps des fractions de $\mathcal{O}$

v : la valuation sur K.

$\underline{\mathfrak{m}}$: l'idéal de la valuation

Ω : un $\mathcal{O}$-module libre de rang un.

$d : \mathcal{O} \to \Omega$: une dérivation

t : une uniformisante de la valuation v telle que dt engendre Ω (on suppose l'existence d'une telle uniformisante ce qui n'est pas très restrictif).

V : espace vectoriel de dimension n sur K.

Nous noterons :

$\check{\Omega}$ $= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Omega, \mathcal{O})$ (dual de Ω)

Ω_K $= K \otimes_{\mathcal{O}} \Omega$

$\check{\Omega}_K$ $= K \otimes_{\mathcal{O}} \check{\Omega}$ (K-dual de Ω_K)

On se servira souvent de la formule suivante

$$\nu\left(\frac{df}{dt}\right) \geq \nu(f) - 1$$

où f est un élément de K et $\frac{df}{dt}$ l'élément de K défini par $df = \frac{df}{dt} \cdot dt$.
La formule se démontre en écrivant $f = ut^n$, $u \in \mathcal{O}^*$. On a alors

$$\frac{df}{dt} = \frac{du}{dt} t^n + u\, nt^{n-1}$$

où $\frac{du}{dt} \in \mathcal{O}$. Par conséquent

$$\nu\left(\frac{df}{dt}\right) \geq \inf \left\{\nu\left(\frac{du}{dt} t^n\right),\ \nu(unt^{n-1})\right\} \geq n-1 .$$

Une connexion linéaire sur V est par définition une application additive

$$\nabla : V \longrightarrow \Omega_K \otimes_K V$$

satisfaisant à l'identité de Leibniz

$$\nabla(fv) = df \otimes v + f \nabla v \quad \text{pour tout} \quad f \in K \text{ et } v \in V .$$

Pour tout $\tau \in \check{\Omega}_K$ nous noterons :

$$\begin{aligned} \partial_\tau \ : \ K &\longrightarrow K \\ f &\longmapsto \langle df, \tau \rangle \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \nabla_\tau \ : \ V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto \langle \nabla v, \tau \rangle \end{aligned}$$

On vérifie aisément que :

- ∂_τ est une dérivation de K
- et que pour tout $f \in K$ et $v \in V$

$$\nabla_\tau(fv) = \partial_\tau(f)v + f\, \nabla_\tau v \qquad \text{(Leibniz)}$$

$$\nabla_{f\tau}(v) = f\, \nabla_\tau(v) .$$

Un vecteur v de V est dit cyclique pour ∇_τ si le système

$$(v, \nabla_\tau v, \nabla_\tau^2 v, \ldots, \nabla_\tau^{n-1} v)$$

est libre sur K.

Si K est de caractéristique zéro, il existe pour tout $\tau \neq 0$ et tout ∇ un vecteur cyclique ([4],chap.II,lemme 1.3 [8]). Le choix d'une base de V, identifie, pour tout $\tau \in \check{\Omega}_K$, l'application ∇_τ à un opérateur différentiel sur K^n. En effet : soit $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de V ; alors pour tout i on a :

$$\nabla_\tau(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \quad \text{avec} \quad a_{ji} \in K \text{ pour tout couple } (i,j).$$

Si $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i ,$$

et

$$\nabla_\tau v = \sum_{i=1}^{n} [(\partial_\tau v^i) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v^j] e_i \quad .$$

Donc avec ce choix de base, on déduit l'application

$$(\nabla_\tau)_{(e)} : K^n \longrightarrow K^n$$

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v^n \end{pmatrix} \longmapsto (\partial_\tau + A) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v^n \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(K)$ (matrices carrées d'ordre n à coefficients dans le corps K) ; cette matrice sera notée Mat $(\nabla_\tau, (e))$. On se servira d'une notation analogue pour les applications K-linéaires E de V ; par $\mathrm{Mat}(E,(e))$ on entendra la matrice de E par rapport à la base (e). D'autre part, le choix d'une base (e) dans V identifie ∇ à une application.

$$\begin{pmatrix} v' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v^n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} dv^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dv^n \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} v^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v^n \end{pmatrix},$$

où A est une matrice à éléments dans Ω_K. Cette matrice sera notée $\mathrm{Mat}(\nabla,(e))$.

Si (e') est une autre base de V et S la matrice de passage de la base (e) à la base (e')

$$(e') = (e)S$$

alors :

$$(\nabla_\tau)_{(e')}: \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v^n \end{pmatrix} \longmapsto (\partial_\tau + S^{-1}AS + S^{-1}\partial_\tau S) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v^n \end{pmatrix}$$

DEFINITION 1.- Soit $\tau \in \check{\Omega}_K$. La connexion linéaire ∇ est dite τ-régulière s'il existe une base (e) de V telle que

$$\mathrm{Mat}\,(\nabla_\tau,(e) \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathcal{O})$$

Une connexion ∇ sera dite de Fuchs si elle est $t\,\frac{d}{dt}$ - régulière.

§ 2. LES INVARIANTS.

Les notations sont celles des paragraphes qui précèdent.

LEMME 2.1.- Pour tout réseau Λ de V et tout $\tau \in \check{\Omega}$

$$\mathcal{F}^1_\tau(\Lambda) = \Lambda + \nabla_\tau(\Lambda)$$

est également un réseau de V.

Il est évident que $\mathcal{F}^1_\tau(\Lambda)$ est un sous-groupe additif du groupe abélien V^+. Pour montrer que c'est un sous $\mathcal{O}$-module de V il suffit de vérifier que :

$$\forall f \in \mathcal{O} \text{ , } \forall v \in V \text{ ; } f\ \nabla_\tau(v) \in \mathcal{F}^1_\tau(\Lambda).$$

Or ceci résulte de la formule de Leibniz :

$$f\ \nabla_\tau(v) = \nabla_\tau(f\,v) - (\partial_\tau f)\ v$$

et de

$$\nabla_\tau(fv) \in \nabla_\tau(v) \text{ ; } \partial_\tau f \in \mathcal{O} \quad \text{si} \quad f \in \mathcal{O}$$

Si $(e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$ est un système de générateurs du $\mathcal{O}$-module Λ alors $(e_1, e_2, \ldots, e_n\ ,\ \nabla_\tau e_1, \nabla_\tau e_2, \ldots, \nabla_\tau e_n)$, est un système de générateurs du $\mathcal{O}$-module $\mathcal{F}^1_\tau(\Lambda)$. Donc $\mathcal{F}^1_\tau(\Lambda)$ est un sous $\mathcal{O}$-module de type fini de V contenant un réseau ; c'est donc un réseau de V.

Remarque 2.1. Le réseau $\mathcal{F}^1_\tau(\Lambda)$ ne change pas si on remplace τ par $g\tau$ où $g \in \mathcal{O}^*$ car $\nabla_{g\tau} = g\ \nabla_\tau$. On a donc

$$\mathcal{F}^1_{g\tau}(\Lambda) = \mathcal{F}^1_\tau(\Lambda)$$

Il en est de même pour $\mathcal{F}^m_{g\tau}(\Lambda) = \mathcal{F}^m_\tau(\Lambda)$ $(m=0,1,\ldots)$, voir corollaire 2.1.

COROLLAIRE 2.1.- Pour tout $m \geq 0$

$$\mathcal{F}^m_\tau(\Lambda) = \Lambda + \nabla_\tau\ (\Lambda) + \nabla^2_\tau(\Lambda) + \ldots + \nabla^m_\tau(\Lambda)$$

est un réseau de V et on a :

$$\mathcal{F}^0_\tau(\Lambda) = \Lambda \subset \mathcal{F}^1_\tau(\Lambda) \subset \ldots \subset \mathcal{F}^{m-1}_\tau(\Lambda) \subset \mathcal{F}^m_\tau(\Lambda) \subset \ldots$$

Ce corollaire résulte du lemme 1 et de la formule :

$$\nabla_\tau(\Lambda + \nabla_\tau(\Lambda) + \ldots + \nabla^p_\tau(\Lambda)) = \nabla_\tau(\Lambda) + \nabla^2_\tau(\Lambda) + \ldots + \nabla^{p+1}_\tau(\Lambda) .$$

LEMME 2.2.- <u>Pour tout entier</u> $m \geq 0$, <u>le</u> $\mathcal{O}$-<u>module quotient</u>

$$Q^m_\tau(\Lambda) = \mathcal{F}^{m+1}_\tau(\Lambda) / \mathcal{F}^m_\tau(\Lambda)$$

<u>est de longueur finie. De plus</u> ∇_τ <u>induit un homomorphisme surjectif</u> $\bar{\nabla}_\tau$ <u>du</u> $\mathcal{O}$-<u>module</u> $Q^m_\tau(\Lambda)$ <u>sur le</u> $\mathcal{O}$-<u>module</u> $Q^{m+1}_\tau(\Lambda)$.

La première partie de ce lemme est triviale car $Q^m_\tau(\Lambda)$ est le quotient d'un réseau par un sous-réseau. Si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de Λ, alors pour tout $m \geq 0$ $(\nabla^i_\tau(e_j))$ $(1 \leq j \leq n, 0 \leq i \leq m)$ engendrent $\mathcal{F}^m_\tau(\Lambda)$; donc $Q^m_\tau(\Lambda)$ est engendré par les images des vecteurs $\nabla^{m+1}_\tau(e_j)$ $(1 \leq j \leq n)$ par l'application quotient

$$q_m : \mathcal{F}^{m+1}_\tau(\Lambda) \to Q^m_\tau(\Lambda) .$$

Pour tout m, la restriction de ∇_τ à $\mathcal{F}^m_\tau(\Lambda)$ est une application additive de $\mathcal{F}^m_\tau(\Lambda)$ dans $\mathcal{F}^{m+1}_\tau$, elle induit donc une application additive

$$\bar{\nabla}_\tau : Q^m_\tau(\Lambda) \to Q^{m+1}_\tau(\Lambda) .$$

Montrons que $\bar{\nabla}_\tau$ est $\mathcal{O}$-linéaire. Un élément quelconque de $Q^m_\tau(\Lambda)$ est représenté dans $\mathcal{F}^{m+1}_\tau(\Lambda)$ par un élément de la forme $\nabla^{m+1}_\tau(\lambda)$ où $\lambda \in \Lambda$. Or, pour tout $f \in \mathcal{O}$

$$\nabla_\tau(f\,\nabla^{m+1}_\tau(\lambda)) = \partial_\tau f\ \nabla^{m+1}_\tau(\lambda) + f\ \nabla^{m+2}_\tau(\lambda) .$$

Comme $\partial_\tau f \in \mathcal{O}$ nous avons

$$\nabla_\tau(f\,\nabla^{m+1}_\tau(\lambda)) - f\ \nabla^{m+2}_\tau(\lambda) \in \mathcal{F}^{m+1}_\tau(\Lambda)$$

ce qui prouve que

$$\bar{\nabla}_\tau(f\alpha) = f\ \bar{\nabla}_\tau(\alpha) \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in Q^m_\tau(\Lambda)$$

et exprime que pour tout $m \geq 0$

$$\bar{\nabla}_\tau : Q^m_\tau(\Lambda) \longrightarrow Q^{m+1}_\tau(\Lambda)$$

est $\mathcal{O}$-linéaire.

Pour tout $m \geq 0$, $\bar{\nabla}_\tau(Q_\tau^m(\Lambda))$ contient les images dans $Q_\tau^{m+1}(\Lambda)$ des vecteurs $\nabla_\tau^{m+2}(e_j)$ $(1 \leq j \leq n)$ et ces images engendrent $Q_\tau^{m+1}(\Lambda)$ donc $\bar{\nabla}_\tau$ est surjective. Ce qui prouve le lemme.

COROLLAIRE 2.2.- <u>Il existe un entier</u> $m_o \geq 0$ <u>tel que pour</u> $m \geq m_o$

$$\bar{\nabla}_\tau : Q_\tau^m(\Lambda) \longrightarrow Q_\tau^{m+1}(\Lambda)$$

<u>soit un isomorphisme</u>.

Ceci résulte de :

1°) pour tout $m \geq 0$

$$\bar{\nabla}_\tau : Q_\tau^m(\Lambda) \longrightarrow Q_\tau^{m+1}(\Lambda) \text{ est surjectif.}$$

2°) pour tout $m \geq 0$,

$$Q_\tau^m(\Lambda) \text{ est de longueur finie.}$$

Désignons par $Q_\tau^\infty(\Lambda)$ la limite inductive du système $\{Q_\tau^m(\Lambda), \bar{\nabla}_\tau\}_m$ et par $t^{\epsilon_\tau^1(\Lambda)}, t^{\epsilon_\tau^2(\Lambda)}, \ldots, t^{\epsilon_\tau^n(\Lambda)}$ les diviseurs élémentaires de $Q_\tau^\infty(\Lambda)$. On a

$$0 \leq \epsilon_\tau^1(\Lambda) \leq \epsilon_\tau^2(\Lambda) \leq \ldots \leq \epsilon_\tau^n(\Lambda),$$

et on pose

$$\rho_\tau(\Lambda) = \ell(Q_\tau^\infty(\Lambda)) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_\tau^i(\Lambda) ,$$

où $\ell(Q_\tau^\infty(\Lambda))$ désigne la longueur du A-module $Q_\tau^\infty(\Lambda)$.

PROPOSITION 2.1.- <u>Si</u> $\tau = t^r \frac{d}{dt}$ <u>avec</u> $r \geq 1$ <u>alors</u> $\rho_\tau(\Lambda)$ <u>ne dépend pas du choix du réseau</u> Λ <u>de</u> V .

Si Λ et Λ' sont deux réseaux de V alors il existe deux entiers positifs q et q' tels que :

$$\Lambda' \subset t^{-q}\Lambda$$

et

$$\Lambda \subset t^{-q'}\Lambda' .$$

Pour démontrer la proposition 2, il suffit de prouver que :

a) $\rho_\tau(t^{-q}M) = \rho_\tau(M)$ pour tout réseau M de V

b) si M et M' sont deux réseaux de V tels que $M \subset M'$ alors

$$\rho_\tau(M) \leq \rho_\tau(M')$$

<u>Démonstration de</u> a).

Nous avons pour tout $m \geq 0$:

$$t^{-q}\mathcal{F}_\tau^m(M) = \mathcal{F}_\tau^m(t^{-q}M)$$

en effet cette relation est triviale pour $m=0$. Si on la suppose vraie pour tout entier $p \leq m$, sa validité pour $p = m+1$ résulte de la formule

$$\nabla_\tau^{m+1}(t^{-q}v) - t^{-q}\nabla_\tau(v) \in t^{-q}(M + \nabla_\tau(M) + \ldots + \nabla_\tau^m(M)) \quad \text{pour tout} \quad v \in M$$

qui est une conséquence immédiate de l'application itérée de la formule de Leibniz et de l'hypothèse $\tau = t^r \frac{d}{dt}$ avec $r \geq 1$.

<u>Démonstration de</u> b).

Si $M \subset M'$ nous avons pour entier $p \geq 0$

$$\nabla_\tau^p(M) \subset \nabla_\tau^p(M')$$

donc pour tout $m \geq 0$

$$\mathcal{F}_\tau^m(M) \subset \mathcal{F}_\tau^m(M')$$

Le noyau de l'homomorphisme

$$\mathcal{F}_\tau^m(M)/_M \longrightarrow \mathcal{F}_\tau^m(M')/_{M'}$$

induit par l'injection de $\mathcal{F}_\tau^m(M)$ dans $\mathcal{F}_\tau^m(M')$ est contenu dans $M+M'/_M$, il est donc de longueur bornée comme fonction de m. Les suites :

$$\ell(\mathcal{F}_\tau^m(M)/_M) - m\,\rho_\tau(M)$$

$$\ell(\mathcal{F}_\tau^m(M')/_{M'}) - m\,\rho_\tau(M')$$

sont également bornées. On en déduit immédiatement que :

$$\rho_\tau(M) \leq \rho_\tau(M')$$

ce qui prouve la proposition 2.1.

__Remarque__ 2.2.- Si r est un entier positif ou nul et si τ et τ' appartiennent à $\underline{\mathfrak{m}}^{r}\check{\Omega} - \underline{\mathfrak{m}}^{r+1}\check{\Omega}$, alors $\rho_\tau(\Lambda) = \rho_{\tau'}(\Lambda)$ et $\epsilon^i_\tau(\Lambda) = \epsilon^i_{\tau'}(\Lambda)$ pour tout réseau Λ de V, en effet dans ce cas $\tau' = g\tau$ ou $g \in \mathcal{O}^*$ et la remarque 2.1 entraîne ce résultat.

Dans la suite de cet article si $\tau = t^r \frac{d}{dt}$ (t uniformisante arbitraire) avec $r \geq 1$, on remplacera l'indice τ par l'indice r. On écrira donc $Q^m_r(\Lambda)$, $\mathfrak{F}^m_r(\Lambda)$, ρ_r, $\epsilon^i_r(\Lambda)$ etc....à la place de $Q^m_\tau(\Lambda)$, $\mathfrak{F}^m_\tau(\Lambda)$, ρ_τ, $\epsilon^i_\tau(\Lambda)$ etc...

PROPOSITION 2.2- __Il existe un entier positif__ r __tel que__ $\rho_r = 0$. __Et si__

$$\ell = \operatorname{Inf}\{r \in \mathbb{N}^+ \mid \rho_r = 0\} .$$

__On a__

$$\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_{\ell-1} > 0$$

(respectivement rien si $\ell = 1$).

__Démonstration__ : Pour tout réseau Λ de V, $\Lambda + \nabla_{\tau_0}(\Lambda)$ est un réseau ($\tau_0 = \frac{d}{dt}$) , il existe donc un entier $r > 0$ tel que

$$t^r(\Lambda + \nabla_{\tau_0}(\Lambda)) \subset \Lambda .$$

Comme

$$\nabla_r = t^r \nabla_{\tau_0}$$

on a

$$\nabla_r(\Lambda) \subset \Lambda ,$$

ce qui implique que $\mathfrak{F}^m_r(\Lambda) = \Lambda$ pour tout $m \geq 0$ donc $\rho_r = 0$.

Pour démontrer la deuxième partie de la proposition il suffit de prouver que $\rho_p > 0$ entraîne $\rho_{p+1} < \rho_p$. Il existe un réseau Λ de V tel que

$$\rho_p = \ell(\Lambda + \nabla_p(\Lambda))/_{\Lambda}$$

(Prendre $\Lambda = \mathfrak{F}^m_p(M)$ pour un réseau M arbitraire, m grand et corollaire 2.2. Montrons que $\Lambda + \nabla_{p+1}(\Lambda)$ est strictement inclus dans $\Lambda + \nabla_p(\Lambda)$ (l'inclusion simple et évidente). Pour cela supposons que l'on a :

$$\Lambda + \nabla_{p+1}(\Lambda) = \Lambda + \nabla_p(\Lambda)$$

On a alors

$$\Lambda + \nabla_p(\Lambda) \subset t(\Lambda + \nabla_p(\Lambda)) + \Lambda$$

et le lemme de Nakayama entraîne

$$\Lambda + \nabla_p(\Lambda) = \Lambda$$

qui a pour conséquence $\rho_p = 0$ ce qui contredit l'hypothèse ci-dessus. On a donc :

$$\ell(\Lambda + \nabla_{p+1}(\Lambda)/_{\Lambda}) < \rho_p .$$

Comme le membre de gauche majore ρ_{p+1} on a $\rho_{p+1} < \rho_p$ ce qui achève la démonstration.

DEFINITION 2.1.- On appelle ordre de la singularité de ∇ l'entier positif ℓ de la proposition 2.2. Les entiers $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\ell-1}$ sont les invariants de ∇. L'entier ρ_1 est aussi appelé l'invariant de Fuchs de ∇. Les nombres $\epsilon_r^i(\Lambda)$ $(r = 1,2,\ldots,\ell-1 ;\ i=1,2,\ldots,n)$ sont appelés les invariants de ∇ associés à Λ.

§ 3 . CALCUL DE ρ_r .

Pour simplifier l'écriture nous noterons T l'opérateur ∇_r. Dans ce paragraphe $\tau = t^r \frac{d}{dt}$ $(r \geq 1)$

THEOREME 3.1.- Pour tout vecteur cyclique $v \in V$ on a :

$$\rho_r = \mathrm{Sup}(0, \nu_0)$$

où

$$\nu_0 = \sup_{0 \leq i \leq n-1} (-\nu(a_i))$$

et les a_i les éléments de K donnés par la formule

$$T^n v = \sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i v .$$

Ce théorème est trivial lorsque ν_0 est négatif ou nul. En effet, dans ce cas

$\nu(a_i) \geq 0$ pour tout $i = 0,1,2,\dots,n-1$ donc $a_i \in \mathcal{O}$. Désignons par Λ le réseau engendré par $v, Tv, T^2v, \dots, T^{n-1}v$ alors $\mathcal{F}_r^{m+1}$ est engendré par $v, Tv,$ $v, Tv, \dots, T^{m+n}v$. Mais si pour tout i, on a $a_i \in \mathcal{O}$, on voit que pour tout m

$$\mathcal{F}_r^m(\Lambda) = \Lambda$$

donc

$$\rho_r = 0 .$$

Et le théorème est démontré dans le cas $\nu_0 \leq 0$; pour le démontrer dans le cas $\nu_0 > 0$ nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME 3.1.- <u>Si</u>

$$k = \mathrm{Sup.}\{i \mid 0 \leq i \leq n-1 \quad , \quad v(a_i) = -v_0\}$$

<u>alors, pour tout entier</u> $m \geq 0$: <u>il existe</u>

$a_m)$ $\qquad b_0, b_1, \dots, b_{k-1}, b_{k+m+1}, \dots, b_{n+m} \in \mathcal{O}$ <u>tels que</u> :

$$(A_m) \qquad T^k v = b_0 v + \dots + b_{k-1} T^{k-1} v + b_{k+m+1} T^{k+m+1} v + \dots + b_{n+m} T^{n+m} v ,$$

<u>avec</u>

$$\nu(b_i) > 0 \quad \underline{\text{si}} \quad i \geq k+m+1$$

$$\nu(b_{n+m}) \geq \nu_0 \ (\underline{\text{l'égalité n'ayant lieu que pour}}\ m=0)$$

$b_m)$ $\quad c_0, c_1, \dots, c_{k-1}, c_{k+m+1}, \dots, c_{n+m} \in \mathcal{O}$ <u>vérifiant</u> :

$$(B_m) \qquad T^{k+m} v = c_0 v + \dots + c_{k-1} T^{k-1} v + c_{k+m+1} T^{k+m+1} v + \dots + c_{n+m} T^{n+m} v ,$$

<u>avec</u>

$$\nu(c_i) > 0 \quad \text{si} \quad i \geq k+m+1 ,$$

$$\text{et } \nu(c_{n+m}) = \nu_0 \quad .$$

<u>Preuve du lemme</u>. Par récurrence sur l'entier m. Nous avons :

$$T^n v = \sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i v$$

donc

$$T^k v = -a_k^{-1} a_o v - a_k^{-1} a_1 Tv - \dots - a_k^{-1} a_{k-1} T^{k-1} v - a_k^{-1} a_{k+1} T^{k+1} v - \dots - a_k^{-1} a_{n-1} T^{n-1} v + $$
$$+ a_k^{-1} T^n v .$$

D'après les propriétés d'une valuation, nous avons pour tout i

$$\begin{aligned} \nu(-a_k^{-1} a_i) &= \nu(a_k^{-1} a_i)) = \nu(a_k^{-1}) + \nu(a_i) \\ &= -\nu(a_k) + \nu(a_i) \\ &= \nu_o + \nu(a_i) . \end{aligned}$$

Donc

$\nu(-a_k^{-1} a_i) \geq 0$ pour tout i qui exprime que $-a_k^{-1} a_i \in \mathfrak{O}$.

D'autre part

$$\nu(-a_k^{-1} a_i) > 0 \quad \text{si} \quad i \geq k+1 ,$$

et

$$\nu(a_k^{-1}) = -\nu(a_k) = \nu_o .$$

Ces inégalités démontrent le lemme ci-dessus dans le cas $m = 0$.

Supposons donc que ce lemme est vrai pour tout entier $p \leq m$ et montrons qu'il est encore vrai pour $p = m+1$. Comme (B_m) est vrai on a :

$$\begin{aligned} T^{k+m+1} v &= T(T^{k+m} v) \\ &= T(c_o v + c_1 Tv + \dots + c_{k-1} T^{k-1} v + c_{k+m+1} T^{k+m+1} v + c_{n+m} T^{n+m} v). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} T^{k+m+1} v &= T(c_o v) + T(c_1 T v) + \dots + T(c_{k-1} T^{k-1} v) + T(c_{k+m+1} T^{k+m+1} v) + \dots + T(c_{n+m} T^{n+m} v) \\ &= (\partial_r c_o) v + (c_o + \partial_r c_1) Tv + \dots + (c_{k-2} + \partial_r c_{k-1}) T^{k-1} v + c_{k-1} T^k v + \\ &\quad (\partial_r c_{k+m+1}) T^{k+m+1} v + (c_{k+m+1} + \partial_r c_{k+m+2}) T^{k+m+2} \dots + (c_{n+m-1} + \partial_r c_{n+m}) T^{n+m} v + \\ &\quad + c_{n+m} T^{n+m+1} v . \end{aligned}$$

Comme (A_m) est vrai on a :

$$T^k v = b_o v + \dots + b_{k-1} T^{k-1} v + b_{k+m+1} T^{k+m+1} v + \dots + b_{n+m} T^{n+m} v ,$$

et en substituant dans la formule ci-dessus :

$$T^{k+m+1}v = (\partial_r c_o + c_{k-1}b_o)v + (c_o + \partial_r c_1 + c_{k-1}b_1)Tv + \dots +$$

$$+ (c_{k-2} + \partial_r c_{k-1} + c_{k-1}b_{k-1})T^{k-1}v + (\partial_r c_{k+m+1} + c_{k-1}b_{k+m+1})T^{k+m+1}v$$

$$+ (c_{k+m+1} + \partial_r c_{k+m+2} + c_{k-1}b_{k+m+2})T^{k+m+2}v + \dots + (c_{n+m-1} + \partial_r c_{n+m} + c_{k-1}b_{n+m})T^{n+m}v +$$

$$+ c_{n+m}T^{n+m+1}v .$$

Par suite :

$$(1-(\partial_r c_{k+m+1} + c_{k-1}b_{k+m+1}))T^{k+m+1}v = (\partial_r c_o + c_{k-1}b_o)v + \dots + c_{n+m}T^{n+m+1}v .$$

Montrons que l'élément

$$a = 1 - (\partial_r c_{k+m+1} + c_{k-1}b_{k+m+1})$$

est inversible dans $\mathfrak{O}$. Pour cela il suffit de vérifier que :

$$\nu(1-a) > 0 .$$

On a

$$\nu(\partial_r c_{k+m+1} + c_{k-1}b_{k+m+1}) \geq \text{Inf.}\{\nu(\partial_r c_{k+m+1}), \nu(c_{k-1}) + \nu(b_{k+m+1})\}$$

et

$$\nu(\partial_r c_{k+m+1}) \geq \nu(c_{k+m+1}) \quad (\text{car} \quad r \geq 1).$$

Donc

$$\nu(1-a) \geq \text{Inf.}\{\nu(c_{k+m+1}), \nu(c_{k-1}) + \nu(b_{k+m+1})\} .$$

D'après les hypothèses

$$\nu(c_{k+m+1}) > 0$$

$$\nu(b_{k+m+1}) > 0 ,$$

et

$$\nu(c_{k-1}) \geq 0$$

donc

$$\nu(1-a) > 0 .$$

L'élément a est donc inversible dans $\mathfrak{O}$ et nous avons :

$$T^{k+m+1}v = d_o v + d_1 Tv + \dots + d_{k-1}T^{k-1}v + d_{k+m+2}T^{k+m+2}v + \dots + d_{n+m+1}T^{n+m+1}v ,$$ où

$$d_o = a^{-1}(\partial_r c_o + c_{k-1} b_o)$$

$$d_i = a^{-1}(c_{i-1} + \partial_r c_i + c_{k-1} b_i)$$

$$(i = 1,2,\dots,k-1,\ k+m+2,\dots,n+m)$$

$$d_{n+m+1} = a^{-1} c_{n+m}\ .$$

Mais :

α) $d_i \in \mathcal{O}$ pour toutes les valeurs de i ;

β) $$\begin{aligned} \nu(d_{n+m+1}) &= \nu(a^{-1} c_{n+m}) \\ &= \nu(c_{n+m}) = \nu_0 \quad (\text{car } \nu(a^{-1}) = -\nu(a) = 0), \end{aligned}$$

γ) pour tout i vérifiant $k+m+2 \leq i \leq m+n$

$$\begin{aligned} \nu(d_i) &= \nu(a^{-1}(c_{i-1} + \partial_r c_i + c_{k-1} b_i)) \\ &= \nu(c_{i-1} + \partial_r c_i + c_{k-1} b_i) \\ &\geq \operatorname{Inf.}\{\nu(c_{i-1}), \nu(c_i)\ , \nu(c_{k-1}) + \nu(b_i)\}\ , \\ &> 0, \end{aligned}$$

car

$$\nu(c_{i-1}) > 0, \quad \nu(c_i) > 0$$

$$\nu(c_{k-1}) \geq 0, \quad \nu(b_i) > 0$$

pour toutes les valeurs de i considérées.

Nous venons ainsi de démontrer que si $a_m)$ et $b_m)$ sont vraies alors $b_{m+1})$ est vraie .

Dans la formule (A_m), remplaçons $T^{k+m+1}v$ par ce qui nous est donné par la formule (B_{m+1}) .

Il vient :

$$T^k v = e_o v + \dots + e_{k-1} T^{k-1} v + e_{k+m+2} T^{k+m+2} v + \dots + e_{n+m+1} T^{n+m+1} v$$

avec

$$e_i = b_i + b_{k+m+1} d_i \qquad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq n+m$$

et

$$e_{n+m+1} = b_{k+m+1} \cdot d_{n+m+1}\ .$$

On vérifie alors immédiatement :

α) $e_i \in \mathcal{O}$ pour tout i ,

β) si $i \geq k+m+2$

$$\nu(e_i) \geq \mathrm{Inf.}\{\nu(b_i), \nu(b_{k+m+1}) + \nu(d_i)\}$$
$$> 0$$

γ)
$$\begin{aligned} \nu(e_{n+m+1}) &= \nu(b_{k+m+1}) + \nu(d_{n+m+1}) \\ &= \nu(b_{k+m+1}) + \nu_o \\ &> \nu_o \quad (\text{car } \nu(b_{k+m+1}) > 0) \end{aligned}$$

Donc a_m) et b_{m+1}) entraînent a_{m+1}), ce qui achève la démonstration du lemme 3.1.

LEMME 3.2.- <u>Pour tout entier</u> $m \geq 0$, <u>le réseau</u> $\mathcal{F}_r^m(\Lambda)$ <u>est engendré par</u> $v, Tv, \ldots, T^{k-1}v, T^{k+m}v, \ldots, T^{n+m-1}v$.

<u>Démonstration</u> : $\mathcal{F}_r^o(\Lambda) = \Lambda$ est engendré par $v, Tv, \ldots, T^{n-1}v$. Supposons que $\mathcal{F}_r^m(\Lambda)$ est engendré par les vecteurs :

$$v, Tv, \ldots, T^{k-1}v, T^{k+m}v, \ldots, T^{n+m-1}v$$

et montrons que $\mathcal{F}_r^{m+1}(\Lambda)$ est engendré par la suite de vecteurs obtenue en remplaçant dans la suite ci-dessus m par $m+1$.

Comme

$$\mathcal{F}_r^{m+1}(\Lambda) = \mathcal{F}_r^m(\Lambda) + T(\mathcal{F}_r^m(\Lambda)) ,$$

ce réseau est engendré par les vecteurs :

$$v, Tv, T^2v, \ldots, T^{k-1}v, T^kv, T^{k+m}v, T^{k+m+1}v, \ldots, T^{n+m}v .$$

Mais le lemme 3.1, montre que les vecteurs T^kv et $T^{k+m}v$ s'expriment comme combinaison linéaire des autres vecteurs écrits ci-dessus. Ce qui prouve le lemme 3.2.

<u>Démonstration du théorème</u> 3.1.

Le $\mathcal{O}$-module $Q_r^0(\Lambda) = \Lambda + T(\Lambda)/_{\Lambda}$ est engendré par la classe de T^nv, c'est donc un $\mathcal{O}$-module cyclique.

D'autre part :

$$t^{\nu_0}T^n v = \sum_{i=0}^{n-1} t^{\nu_0} a_i T^i v$$

avec

$$\nu(t^{\nu_0}\ a_i) = \nu_0 + \nu(a_i) \geq 0 \ .$$

Ce qui exprime que pour tout i

$$t^{\nu_0}\ a_i \in \mathcal{O}$$

c'est-à-dire

$$t^{\nu_0}T^n v \in \Lambda \ .$$

La longueur de $Q_r^0\ (\Lambda)$ est donc au plus ν_0. Comme les homomorphismes

$$\bar{T} : Q_r^m(\Lambda) \to Q_r^{m+1}(\Lambda)$$

induits par T sont tous surjectifs ; la longueur de $Q_r^m(\Lambda)$ est, pour tout m, majorée par ν_0. En d'autres termes :

$$\ell(Q_r^{\infty}(\Lambda)) = \rho_r \leq \nu_0 \ .$$

Supposons que $\rho_r < 0$.

Le $\mathcal{O}$-module cyclique $Q_r^m\ (\Lambda)$ est engendré par la classe du vecteur $T^{n+m}(v)$ et, pour m assez grand, il est annulé par $t^{\nu_0 - 1}$ donc :

$$t^{\nu_0 - 1}\ T_v^{m+n} \in \mathcal{F}_\tau^m(\Lambda)$$

La propriété b_m) du lemme 3.1. donne après avoir multiplié la formule (B_m) par t^{-1} :

$$-t^{-1}c_{n+m}T^{n+m}v = t^{-1}c_0 v + \ldots + t^{-1}c_{k-1}T^{k-1}v - t^{-1}T^{k+m}v + t^{-1}c_{k+m+1}T^{k+m+1}v + \ldots$$
$$+ t^{-1}c_{n+m-1}T^{n+m-1}v \ .$$

Or

$$\nu(t^{-1}c_{n+m}) = -1 + \nu_0 \geq 0$$

donc
$$-t^{-1}c_{n+m}T^{n+m}v = zt^{\nu_0 - 1}\ T^{n+m}v$$

avec $z \in \mathcal{O}$ ce qui exprime que

$$t^{-1}c_{n+m}T^{n+m}v \in \mathfrak{F}_{\nu}^{m}(\Lambda) \ .$$

Comme le réseau $\mathfrak{F}_{\nu}^{m}(\Lambda)$ est engendré par les n vecteurs $v, Tv, T^2v, \dots, T^{k-1}v$, $T^{k+m}v, \dots, T^{n+m-1}v$; la formule ci-dessus donne une contradiction car le premier membre est un vecteur de $\mathfrak{F}_{\tau}^{m}(\Lambda)$ alors que dans le second membre le coefficient de $T^{k+m}v$ n'est pas un élément de $\mathfrak{O}$. Nous avons donc $\rho_\tau = \nu_0$.

§ 4 . RÉGULARITÉ, STABILITÉ, THÉORÈMES DE W.B. JURKAT ET D.A. LUTZ.

A) RÉGULARITE.

Avec les notations et données du § 1, on a :

THÉORÈME 4.1.- Soit $\tau \in \check{\Omega}$, $\tau = \tau_r$ $(r \geq 1)$. La connexion ∇ est τ-régulière pour, si et seulement si

$$\rho_\tau = 0 \ .$$

Démonstration : Supposons que ∇ est régulière relativement à τ, il existe donc une base $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de V telle que

$$\mathrm{Mat}(\nabla_\tau(e)) \in \mathfrak{M}_{n\mathrm{x}n}(\mathfrak{O}) \ .$$

Si Λ est le réseau de V engendré par (e) on a évidemment $\nabla_\tau(\Lambda) \subset \Lambda$, ce qui entraîne que pour tout $m \geq 0$, $Q_\tau^{m}(\Lambda) = \{0\}$ et donc $\rho_\tau = 0$. Réciproquement, si $\rho_\tau = 0$. Pour tout réseau Λ de V il existe un entier m_0 tel que $Q_\tau^{m}(\Lambda) = \{0\}$ pour tout $m \geq m_0$. Notons alors Λ' le réseau $\mathfrak{F}_{\tau}^{m_0}(\Lambda)$ et $(e') = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ une base de Λ'. Comme $Q_\tau^{m_0}(\Lambda) = 0$ on a $\nabla_\tau(\Lambda') \subset \Lambda'$ ce qui montre que

$$\mathrm{Mat}\ (\nabla_\tau, (e')) \in \mathfrak{M}_{n\mathrm{x}n}(\mathfrak{O}) \ .$$

Dans la suite, à la place de dire que ∇ est τ-régulière nous dirons ∇ est r-régulière.

COROLLAIRE 4.1.- Pour tout entier $\ell > 0$ les trois conditions suivantes sont équivalentes :

i) ∇ est ℓ-régulière,

ii) ∇ a une singularité d'ordre inférieur ou égal à ℓ .

iii) il existe une base $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de V telle que :

$$\mathrm{Mat}(\nabla_\ell, (e)) \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathcal{O})$$

COROLLAIRE 4.2.- Une connexion ∇ sur V est dite de Fuchs si et seulement si elle est un-régulière c'est-à-dire si son invariant de Fuchs ρ_1 est nul.

Dans toute la suite de ce paragraphe on se donne une connexion singulière ∇ .

THEOREME 4.2.- Si la singularité de ∇ est d'ordre ℓ alors pour tout réseau Λ de V .

$$Q_\ell^m(\Lambda) = 0 \quad \text{pour tout} \quad m \geq n-1 .$$

La démonstration de ce théorème résulte du théorème 3.1 et du

LEMME 4.1.- Soient r un entier supérieur ou égal à un, V' un sous-espace vectoriel de V stable par ∇_r . Si $\rho_r = 0$ alors l'invariant ρ'_r de la restriction ∇'_r de ∇_r à V' est également nul.

Preuve : Comme $\rho_r = 0$ il existe un réseau Λ de V tel que $\nabla_r(\Lambda) \subset \Lambda$ (cf. démonstration du théorème 4.1). Or $\Lambda' = \Lambda \cap V'$ est un réseau de V' vérifiant $\nabla'_r(\Lambda') \subset \Lambda'$. En effet, soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de V telle que $(e_1, e_2, \ldots, e_i)$ soit une base de V' . Désignons par M le réseau de V engendré par $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, il existe un entier positif ou nul q tel que $t^q M \subset \Lambda$. Alors $(t^q e_1, t^q e_2, \ldots, t^q e_i)$ est une base de V' contenue dans Λ' , de plus pour tout $h = 1, 2, \ldots, i$;

$$\nabla'_r(t^q e_h) = q\ t^{r-1}(t^q e_h) + t^q \nabla'_r(e_h) .$$

Comme $\nabla'_r(e_h) \in V'$ pour tout h , on a $\nabla'_r(V') \subset V'$. D'autre part $\nabla_r(\Lambda) \subset \Lambda$, d'où $\nabla'_r(\Lambda') = \nabla'_r(\Lambda \cap V') \subset \Lambda \cap V' = \Lambda$ et donc $\rho'_r = 0$.

<u>Démonstration du théorème</u> 4.2.

Nous avons $\rho_\ell = 0$, d'après les propriétés des $\mathfrak{O}$-modules $Q_\ell^m(\Lambda)$, il suffit de prouver que $Q_\ell^{n-1}(\Lambda) = 0$. C'est-à-dire qu'il suffit de montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un entier h $(1 \leq h \leq n)$ tel que $\nabla_\ell^h(\lambda) \in \mathcal{F}_\ell^{h-1}(\Lambda)$; en effet on aura alors $\nabla_\ell^n(\lambda) \in \mathcal{F}_\ell^{n-1}(\Lambda)$ et donc $\nabla_\ell^n(\Lambda) \subset \mathcal{F}_\ell^{n-1}(\Lambda)$, c'est-à-dire que $Q_\ell^{n-1}(\Lambda) = 0$.

Pour tout $\lambda \in \Lambda - \{0\}$, désignons par h le plus grand entier i tel que $\lambda, \nabla_\ell(\lambda), \ldots, \nabla_\ell^{i-1}(\lambda)$ soient linéairement indépendants sur K. On a évidemment $1 \leq h \leq n$.

Soit V' le sous-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs λ, $\nabla_\ell(\lambda), \ldots, \nabla_\ell^{h-1}(\lambda)$. D'après le lemme 4.1, l'invariant ρ'_ℓ de la restriction ∇'_ℓ de ∇_ℓ à V' (stable par ∇_ℓ) est nul. D'autre part

$$\nabla'^h_\ell(\lambda) = \sum_{i=0}^{h-1} a_i \nabla'^i_\ell \lambda ,$$

et le théorème 3.1 donne :

$$\rho'_\ell = \operatorname{Sup}\ (0, \operatorname{Sup}_{0 \leq i \leq h-1} (-\nu(a_i))) .$$

Comme $\rho'_\ell = 0$, on a $a_i \in \mathfrak{O}$ pour tout i, ce qui prouve que $\nabla_\ell^h(\lambda) \in \mathcal{F}_\ell^{h-1}(\Lambda)$ et le théorème 4.2 est démontré.

Pour déduire un certain nombre de conséquences du théorème 4.2 nous utiliserons encore le :

LEMME 4.2.- <u>Soient</u> Λ <u>et</u> M <u>deux réseaux de</u> V <u>tels que</u> $\Lambda \subset M$, $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ <u>une base de</u> M. <u>Si</u> $p \leq n$ (entier) <u>et si</u> $g_1, g_2, \ldots, g_p$ <u>sont</u> p <u>éléments de</u> Λ <u>alors</u> $(f_1 + tg_1, f_2 + tg_2, \ldots, f_p + tg_p, f_{p+2}, \ldots, f_n)$ <u>est encore une base de</u> M.

Ce lemme se démontre par récurrence sur l'entier p.

Il suffit de prouver que si $g_1 \in \Lambda$ alors $(f_1 + tg_1, f_2, \ldots, f_n)$ est encore une base de M. Comme $\Lambda \subset M$, il existe $a_i \in \mathfrak{O}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ tels que :

$$g_1 = a_1f_1 + a_2f_2 + \dots + a_nf_n$$

d'où

$$f_1 + tg_1 = (1+ta_1)f_1 + ta_2f_2 + \dots + ta_nf_n \; .$$

Pour tout $i = 1,2,\dots,n$; $ta_i \in \mathcal{O}$ et $1+ta_1$ est inversible dans $\mathcal{O}$, ce qui implique le résultat énoncé.

Nous supposerons maintenant que $\mathcal{O}$ contient un corps de représentants, c'est-à-dire qu'il existe un sous-corps k de $\mathcal{O}$ tel que l'application résiduelle induise un isomorphisme de k sur $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$.

Remarque 4.1. Dans ce cas pour tout couple d'entiers n et h $(h \geq 0)$ et tout élément a de $t^n\mathcal{O}$ on a :

$$a = \sum_{i=n}^{n+h} c_i t^i + b \quad \text{avec} \quad c_i \in k \quad \text{et} \quad b \in t^{n+h+1}\mathcal{O} \; .$$

Remarque 4.2.- Dans la pratique $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x\}$ ou $\mathcal{O} = \mathbb{C}[[x]]$ et il existe un corps des représentants dont les éléments sont même des constantes, c'est-à-dire annulés par la dérivation d .

THEOREME 4.3.- Si : 1°) la singularité de ∇ est d'ordre ℓ ,

2°) il existe un entier non négatif q et une base (e) de V tels que :

$$\mathrm{Mat}(\nabla_\ell, (e)) \in t^{-q}\mathfrak{M}_{n\times n}(\mathcal{O}) \; .$$

Alors il existe une base $(e') = (e)S$ de V telle que :

a) $\mathrm{Mat}(\nabla_\ell, (e')) \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathcal{O})$

b) les éléments de la matrice de passage S soient des polynômes en t^{-1} de degré inférieur ou égal à $(n-1)q$ à coefficients dans le corps des représentants k .

Démonstration : Soient Λ le réseau engendré par $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et M le réseau $\mathfrak{I}_\ell^{n-1}(\Lambda)$. On sait que $\nabla_\ell(M) \subset M$ (cf. théorème 4.2.). Comme

$$\mathrm{Mat}(\nabla_\ell,(e)) \in t^{-q}\,\mathfrak{M}_{n\times n}(\Theta)\ .$$

On a

$$\nabla_\ell(\Lambda) \subset t^{-q}\Lambda$$

par un procédé de récurrence immédiat on en déduit que pour tout $p \geq 0$

$$\nabla_\ell^p(\Lambda) \subset t^{-pq}\Lambda\ .$$

En utilisant ce résultat et en remarquant que pour tout couple d'entier m_1 et m_2 tels que $m_1 \geq m_2$ on a

$$t^{-m_2}\Lambda \subset t^{-m_1}\Lambda\ ;$$

nous obtenons :

$$M = \mathcal{F}_\ell^{n-1}(\Lambda) \subset t^{-(n-1)q}\,\Lambda\ .$$

Soit $(f) = (f_1,f_2,\dots,f_n)$ une base de M , nous avons

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j \qquad \text{avec} \quad a_{ji} \in t^{-(n-1)q}\,\Theta\ .$$

A l'aide de la remarque 4.1, on peut écrire pour tout couple (i,j)

$$a_{ji} = s_{ji} + b_{ji}$$

où $b_{ji} \in \underline{\mathfrak{m}}$ et où s_{ji} est un polynôme en t^{-1} de degré inférieur ou égal à $(n-1)q$.

Posons pour tout i :

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ji}e_j\ ,$$

il vient

$$e'_i = f_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ji}e_j\ .$$

Comme pour tout i et tout j , $b_{ji} \in \underline{\mathfrak{m}}$, il existe $g_i \in \Lambda$ tel que

$$-\sum_{j=1}^{n} b_{ji}e_j = tg_i\ .$$

Le lemme 4.2 entraîne alors que $(e') = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une base de M et comme $\nabla_\ell(M) \subset M$ le théorème 4.3 est démontré.

B) STABILITE ET THEOREMES DE W.B. JURKAT ET D.A. LUTZ.

Si $\nabla : V \to \Omega_K \otimes_K V$ est une connexion linéaire sur V et $P : V \to \Omega_K \otimes_K V$ est une application K-linéaire alors $\nabla' = \nabla + P$ est une connexion linéaire sur V ; de plus toute connexion linéaire sur V est de cette forme.

Dans ce paragraphe nous allons interprêter P comme perturbation de ∇, et nous allons chercher des conditions pour que ∇ et $\nabla + P$ aient une singularité de même ordre. Nous abordons le problème de la stabilité de l'ordre de la singularité par perturbation.

THEOREME 4.4.- Soient ∇ une connexion linéaire d'ordre ℓ sur V.

P une application K-linéaire de V dans $\Omega_K \otimes_K V$.

S'il existe une base $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de V telle que :

$$\mathrm{Mat}(\nabla, (e)) \in t^{-q} \mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{O}) \qquad (q > 0)$$

$$\mathrm{Mat}(P, (e)) \in t^{-q-n(\ell-q)} \mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{O}) .$$

Alors $\nabla' = \nabla + P$ a une singularité d'ordre inférieure ou égale à ℓ .

Démonstration : Le corollaire 4.1. entraîne que $q \geq \ell$.

. Désignons par Λ le réseau engendré par (e) et par M le réseau $\mathcal{F}_\ell^{n-1}(\Lambda)$. Comme Λ est ℓ-régulière on a

$$\nabla_\ell(M) \subset M .$$

De plus

$$\mathrm{Mat}(\nabla, (e)) \in t^{-q} \mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{O})$$

entraîne que

$$\mathrm{Mat}(\nabla_\ell, (e)) \in t^{\ell-q} \mathcal{M}_{n\times n}(\mathcal{O})$$

donc (démonstration du théorème 4.3)

$$M \subset t^{(n-1)(\ell-q)} \Lambda \ .$$

Notons P_ℓ l'application composée

$$V \xrightarrow{\ P\ } \Omega_K \otimes_K V \xrightarrow{<\cdot\, , t^\ell \frac{d}{dt}>} V$$

$$v \longmapsto P_\ell(v) = < P(v), t^\ell \frac{d}{dt} > \ .$$

On a donc

$$\mathrm{Mat}(P_\ell, (e)) \in t^{(n-1)(q-\ell)} \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathcal{O}) \ ,$$

ce qui implique en utilisant

$$M \subset t^{(n-1)(q-\ell)} \Lambda$$

que

$$P_\ell(M) \subset M$$

Donc

$$\nabla'_\ell(M) = (\nabla_\ell + P_\ell)(M) \subset M$$

c'est-à-dire que l'ordre de la singularité de ∇' est inférieure ou égale à ℓ .

COROLLAIRE 4.3.- <u>S'il existe une base</u> (e) <u>de</u> V <u>telle que</u>

$$\mathrm{Mat}(\nabla, (e)) \in t^{-q} \mathfrak{M}_{n\times n}(\Omega) \qquad (q > 0)$$

$$\mathrm{Mat}(P, (e)) \in t^{-q-n(1-q)} \mathfrak{M}_{n\times n}(\Omega)$$

<u>alors les singularités de</u> ∇ <u>et de</u> $\nabla + P$ <u>sont de même ordre.</u>

<u>Démonstration</u> : Soit ℓ (resp. ℓ') l'ordre de la singularité de ∇ (resp. $\nabla' = \nabla + P$) . Comme $\ell \geq 1$ on a :

$$-q-n(\ell-q) \leq -q-n(1-q) \ ,$$

donc

$$\mathrm{Mat}(P, (e)) \in t^{-q-n(\ell-q)} \mathfrak{M}_{n\times n}(\Omega)$$

de même

$$\mathrm{Mat}(P, (e)) \in t^{-q-n(\ell'-q)} \mathfrak{M}_{n\times n}(\Omega) \ .$$

Le théorème ci-dessus appliqué à ∇ et $\nabla + P$ entraîne

$$\ell' \leq \ell$$

et appliqué à ∇' et $\nabla' - P$ il donne

$$\ell \leq \ell'$$

d'où le résultat.

Donnons nous une base (e) de V, celle-ci permet d'identifier V a K^n que nous identifierons à $\mathfrak{M}_{n\times 1}(K)$. Sous ces hypothèses le réseau engendré par (e) est $\mathcal{O}^n$.

Pour toute matrice $A = (e_{ij}) \in \mathfrak{M}_{r\times s}(K)$ posons :

$$\nu(A) = \operatorname*{Inf}_{ij} \nu(a_{ij}) .$$

Si ∇ est une connexion linéaire sur V et ℓ un entier supérieur ou égal à un, on a dans la base (e) de V :

$$\nabla_\ell = \partial_\ell + A$$

où $A \in t^{-q}\mathfrak{M}_{n\times n}(\mathcal{O})$ pour un certain entier $q \geq 0$.

LEMME 4.3.- <u>Si</u> $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ <u>désignent les colonnes de la matrice</u> A <u>alors pour tout</u> $m \geq 0$ <u>les vecteurs</u> $(\nabla_\ell^{m-1}(a_1), \nabla_\ell^{m-1}(a_2), \ldots, \nabla_\ell^{m-1}(a_n))$ <u>engendrent le réseau</u> $\mathcal{F}_\ell^m(\mathcal{O}^n)$ <u>modulo le réseau</u> $\mathcal{F}_\ell^{m-1}(\mathcal{O}^n)$.

Ce lemme est une conséquence immédiate de l'égalité

$$\nabla_\ell = \partial_\ell + A ,$$

qui entraîne que les colonnes de A engendrent le réseau $\mathcal{F}_\ell^1(\mathcal{O}^n)$ modulo $\mathcal{O}^n$;

THEOREME 4.5.- <u>Posons</u>

$$A_0^\ell = I$$

$$A_m^\ell = \partial_\ell A_{m-1}^\ell + A\, A_{m-1}^\ell \qquad (m \geq 1)$$

<u>Alors</u> :

a) <u>Si</u> ∇ <u>a une singularité d'ordre inférieur ou égale à</u> ℓ <u>on a pour</u>

tout m :

$$\nu(A_m^{\ell}) \geq -(n-1)q .$$

b) Si

$$\nu(A_m^{\ell}) \geq -(n-1)q \text{ pour } m = n, n+1, \ldots, (n-1)nq + 1 .$$

∇ a une singularité d'ordre inférieur ou égal à ℓ .

Démonstration :

Le lemme 4.3 ainsi que la définition des A_m^{ℓ} nous donne immédiatement

$$A_m^{\ell} = (\nabla_{\ell}^{m-1}(a_1), \nabla_{\ell}^{m-1}(a_2), \ldots, \nabla_{\ell}^{m-1}(a_n))$$

donc les colonnes de A_m^{ℓ} engendrent $\mathcal{F}_{\ell}^{m}(\mathcal{O}^n)$ modulo $\mathcal{F}_{\ell}^{m-1}(\mathcal{O}^n)$. D'autre part, la croissance de la suite de réseaux $\mathcal{F}_{\ell}^{m}(\mathcal{O}^n))$.

Comme $A \in t^{-q}\mathfrak{M}_{n\times n}(\mathcal{O})$ on a (démonstration du théorème 4.3) pour tout m :

$$\mathcal{F}_{\ell}^{m}(\mathcal{O}^n) \subset t^{-mq}\, \mathcal{O}^n$$

donc

$$\nu(\mathcal{F}_{\ell}^{m}(\mathcal{O}^n)) \geq -mq .$$

Preuve de a).

Si ∇ à une singularité d'ordre ℓ on sait que

$$Q_{\ell}^{m}(\mathcal{O}^n) = 0 \quad \text{pour tout} \quad m \geq n-1 ,$$

donc

$\mathcal{F}_{\ell}^{n-1}(\mathcal{O}^n) = \mathcal{F}_{\ell}^{m}(\mathcal{O}^n)$ pour tout $m \geq n-1$. Ce qui donne pour tout $m \geq n-1$ $\nu(A_m^{\ell}) \geq \nu(\mathcal{F}_{\ell}^{n-1}(\mathcal{O}^n)) \geq -(n-1)q$.

Donc on a a) lorsque $m \geq n-1$, mais pour $m < n-1$ elle résulte trivialement de

$$\nu(\mathcal{F}_{\ell}^{m}(\mathcal{O}^n) \geq -mq .$$

Preuve de b).

Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que l'ordre de la singularité de ∇ est supérieure strictement à ℓ ; alors pour tout m

$$Q_\ell^m(\mathcal{O}^n) \neq 0 \quad \text{donc} \quad \operatorname{long}(Q_\ell^m(\mathcal{O}^n)) \geq 1$$

et

$$\operatorname{long}(\mathcal{F}_\ell^m(\mathcal{O}^n)/\mathcal{O}^n) \geq m \ .$$

Pour tout m les colonnes de $A_0^\ell,\dots,A_1^\ell,\dots,A_m^\ell$ engendrent $\mathcal{F}_\ell^m(\mathcal{O}^n)$, donc si $m = m_0 = (n-1)nq+1$ on tire de

$$\nu(A_m^\ell) \geq -(n-1)q \qquad n \leq m \leq m_0$$

et de la relation évidente $\nu(A_m^\ell) \geq -(n-1)q$ pour $0 \leq m \leq n-1$ que

$$\mathcal{F}_\ell^{m_0}(\mathcal{O}^n) \subset t^{-(n-1)q}\,\mathcal{O}^n$$

d'où la contradiction

$$m_0 \leq \operatorname{long}(\mathcal{F}_\ell^{m_0}(\mathcal{O}^n)/\mathcal{O}^n) \leq (n-1)nq = m_0 - 1 \ .$$

C). CONCLUSIONS DE CE PARAGRAPHE. INTERET PRATIQUE.

Les théorèmes 4.3 , 4.4 transcrits dans le langage des systèmes différentiels sont des généralisations de résultats obtenus par D.A. Lutz ([10], [11] et [7]). Le théorème 4.5 est une généralisation aux singularités d'ordre quelconque du théorème 5 de Jurkat et Lutz ([7] page 480) et même appliqué au cas régulier il donne un résultat meilleur. Pour bien comprendre tous ces résultats les auteurs du présent article ont préféré remplacer $\frac{d}{dt}$ par $t^\ell \frac{d}{dt}$ $(\ell \geq 1)$.

Les théorèmes de ce paragraphe ont un intérêt pratique évident pour le calcul de l'ordre d'une singularité d'un système différentiel. Avant d'expliciter ce calcul, remarquons que le corollaire 4.3 s'exprime également de la manière suivante : si dans une base (e) de V on a

$$\mathrm{Mat}(\nabla_{\ell},(e)) \in t^{-q+\ell}\,\mathfrak{M}_{n\times n}(\mathcal{O})$$

et

$$\mathrm{Mat}(P_{\ell},(e)) \in t^{nq-q-n+\ell}\mathfrak{M}_{n\times n}(\mathcal{O})$$

alors si ∇ à une singularité d'ordre ℓ il en est de même de $\nabla + P$. Considérons un système différentiel

$$(1)\quad \frac{dy}{dt} = -A(t)y \qquad \text{avec} \quad A(t) \in t^{-q}\,\mathfrak{M}_{n\times n}(\mathcal{O}) \qquad (q \geq 1)$$

où $\mathcal{O}$ est l'anneau des séries convergentes ou des séries formelles à coefficients complexes. On se propose de calculer l'ordre ℓ de la singularité. On sait que $\ell \leq q$. Pour tout $r(1 \leq r \leq q)$, considérons la connexion linéaire ∇ définie par

$$\nabla = d + t^{-r}A(t)dt$$

dans la base canonique (c) de l'espace vectoriel $V = K^n$.

Nous avons

$$\nabla_r = t^r \frac{d}{dt} + A(t) = \partial_r + A(t)$$

et

$$\mathrm{Mat}\,(\nabla_r,(c)) = A(t) \in t^{-q}\mathfrak{M}_{n\times n}(\mathcal{O}) .$$

Pour voir si le système (1) a une singularité d'ordre r, on peut le remplacer par

$$(1^*)\qquad \frac{dy}{dt} = -A^{*,r}(t)y .$$

où $A^{*,r}$ est obtenu à partir de A en supprimant dans A les termes d'ordre supérieur ou égal à $t^{(n-1)(q+r)-n+r}$, (corollaire 4.3) donc :

$$A^{*,r}(t) = \sum_{i=0}^{(n-1)(q+r)-n+r-1} B_i^r\, t^i ,$$

les B_i^r étant des matrices constantes car ici le corps des représentants est annulé par d.

On va appliquer le théorème 4.5, on sait que $1 \leq q$. On commence par regarder si la singularité est d'ordre q pour ceci, on prend $r = q$ et s'il existe m $(n \leq m \leq (n-1)nq+1)$, tel que

$$\nu(A_m^{*,q}) < -(n-1)q ,$$

on a $\ell = q$.

Dans le cas contraire $\ell < q$ et on recommence avec $r = q - 1$. Le nombre d'opérations à exécuter pour déterminer l'ordre est limité par une borne N que l'on pourrait expliciter et qui ne dépend que de n et q .

Supposons enfin, que la connexion ∇ (où le système (1)) a une singularité d'ordre ℓ , si on cherche une base $(e') = (e)S$ de $V = K^n$ telle que $\mathrm{Mat}(\nabla_\ell, (e')) \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathcal{O})$ on peut se restreindre à des matrices de passage assez simples grâce au théorème 4.3. De manière plus précise, on cherche S polynôme en $\frac{1}{t}$ de degré inférieur ou égal à $(n-1)q$ à coefficients matriciels tel que

$$S^{-1}AS + S^{-1}\partial_\ell S \in t^{-\ell}\mathfrak{M}_{n\times n}(\mathcal{O}) .$$

Ce qui ramène à résoudre un nombre fini d'équations algébriques pour déterminer S .

Le lecteur notera le rôle-clef joué par le théorème 4.2 dans les problèmes qui ont été abordés dans ce paragraphe.

§ 5 . COMPARAISON DE ρ_1 AU NOMBRE RATIONNEL DE N. KATZ ET A L'IRREGULARITE DE B. MALGRANGE.

A). COMPARAISON DE ρ_1 AU NOMBRE RATIONNEL DE N. KATZ.

Avec les définitions, notations et hypothèses du § 1, rappelons les résultats de N. Katz ([4], p. 45) concernant l'irrégularité d'une connexion linéaire sur V dans le cas $\tau = t\frac{d}{dt}$. Pour tout réseau M de V l'application :

$$\nu_M : V \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$$

définie par

$$\nu_M(x) = \mathrm{Sup}\ \{k \mid k \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\} \text{ et } x \in \underline{\mathfrak{M}}^k M\}$$

($\underline{\mathfrak{M}}$ idéal de la valuation ν)

est une valuation sur l'espace vectoriel V . C'est-à-dire que cette application possède les propriétés suivantes :

pour tout $x \in V$, $y \in V$ et $\lambda \in K$

$$\nu_M(x+y) \geq \inf\{\nu_M(x), \nu_M(y)\}$$
$$\nu_M(\lambda x) = \nu(\lambda) + \nu_M(x)$$
$$\nu_M(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in M$$
$$\nu_M(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0 .$$

De plus si M' est un autre réseau de V , on démontre sans difficulté qu'il existe un entier N tel que

$$(1) \qquad |\nu_M(x) - \nu_{M'}(x)| \leq N$$

pour tout $x \in V$.

THEOREME DE N. KATZ.- Il existe un nombre rationnel $r \geq 0$ tel que :

Quels que soient le réseau M de V et la base $(e) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de V , il existe une constante C telle que pour tout $i \geq 0$

$$(2) \qquad \left| \sup_{\substack{1 \leq k \leq n \\ j \leq i}} \{-\nu_M(\nabla^j e_k)\} - ri \right| \leq C$$

Le nombre rationnel r mesure également l'irrégularité de la connexion ∇ pour $\tau = t \frac{d}{dt}$. Nous entendons par là que : pour que la connexion ∇ soit de Fuchs il faut et il suffit que $r = 0$.

Il est donc naturel de comparer l'invariant entier ρ_1 au nombre de N. Katz.

Soient M et Λ deux réseaux de V , posons

$$-\nu_M(\Lambda) = \sup_{1 \leq i \leq n} (-\nu_M(\lambda_i)) ,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des vecteurs engendrant le réseau Λ . En fait, $\nu_M(\Lambda)$ est indépendant du choix de $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, car on a $\nu_M(\Lambda) = \inf_{\lambda \in \Lambda} (\nu_M(\lambda))$,.

Remarque. Dans le théorème de Katz on peut se restreindre à un réseau M fixé, grâce à l'inégalité (1). Nous noterons donc simplement ν la valuation de V associée à un tel M fixé.

THEOREME 5.1.- Pour toute connexion ∇ sur V , il existe un entier $\rho_1^i \geq 0$ et un nombre rationnel $r \geq 0$, vérifiant la propriété suivante :

Quel que soit le réseau Λ de V , il existe deux constantes C_1, C_2 tels que pour tout $i \geq 0$

a) $|\text{long }(\mathcal{F}_1^i(\Lambda)/_\Lambda) - \rho_1^i \,| \leq C_1$,

b) $|\nu(\mathcal{F}_1^i(\Lambda)) + ri\,| \leq C_2$.

Démonstration : Soient $(e) = (e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base de l'espace vectoriel V et Λ le réseau engendré par (e). D'après le théorème de Katz on a :

$$|\nu(\mathcal{F}_1^i(\Lambda)) + ri| \leq C_2$$

car les vecteurs $\nabla_1^j(e_h)$ $1 \leq h \leq n$, $j \leq i$ engendrent le réseau

$$\mathcal{F}_1^i(\Lambda) = \Lambda + \nabla_1(\Lambda) + \dots + \nabla_1^i(\Lambda) .$$

Mais on a aussi pour tout i

$$\text{long}(\mathcal{F}_1^i(\Lambda)/_\Lambda = \sum_{1 \leq j \leq i} \text{long}(\mathcal{F}_1^i(\Lambda)/_{\mathcal{F}_1^{j-1}(\Lambda)})$$

et pour tout j supérieur à un nombre m_o assez grand

$$\text{long}(\mathcal{F}_1^j(\Lambda) / \mathcal{F}_1^{j-1}(\Lambda)) = \rho_1 .$$

Donc il existe une constante C_1 telle que :

$$\left|\mathrm{long}(\mathcal{F}_1^i(\Lambda)_{/\Lambda}) - \rho_1 i\right| \leq C_1$$

Les inégalités a) et b) ne se déduisent pas directement l'une de l'autre cependant on a :

PROPOSITION 5.1.-
$$\frac{\rho_1}{n} \leq r \leq \rho_1$$

On peut vérifier ces deux inégalités de deux manières différentes.

1°) Si v est un vecteur cyclique pour ∇ on a ([4], prop. 1.10 p. 48) :

$$r = \mathrm{Sup}\{0, \underset{0\leq i\leq n-1}{\mathrm{Sup}} \left(-\frac{\nu(a_i)}{n-i}\right)\}$$

avec
$$\nabla_1^n v = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \nabla_1^i v .$$

alors en utilisant le théorème 3.1 qui dit que :

$$\rho_1 = \mathrm{Sup}\{0, \underset{0\leq i\leq n-1}{\mathrm{Sup}} (-\nu(a_i))\}$$

on obtient aisément les inégalités ci-dessus.

2°) Prenons $\nu = \nu_\Lambda$ ou Λ est le réseau considéré ci-dessus. Alors si

$$\Lambda' = \mathcal{F}_1^i(\Lambda)$$

et si $t^{\mu_1}, t^{\mu_2}, \ldots, t^{\mu_n}$ sont les diviseurs élémentaires de Λ'/Λ , il existe une base $(e_1'.e_2', \ldots, e_n')$ de Λ tels que $(t^{-\mu_1}e', t^{-\mu_2}e_2', \ldots, t^{-\mu_n}e_n')$ soit une base de Λ' d'où

$$-\nu(\Lambda') = \underset{1\leq i\leq n}{\mathrm{Sup}} \mu_i$$

et
$$\mathrm{long}(\Lambda'_{/\Lambda}) = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$$

donc
$$\frac{1}{n}\,\mathrm{long}(\Lambda'_{/\Lambda}) \leq -\nu(\Lambda') \leq \mathrm{long}(\Lambda'_{/\Lambda}) ,$$

et le théorème 5.1. entraîne les inégalités indiquées.

B) COMPARAISON DE ρ_1 A L'IRREGULARITE DEFINIE PAR B. MALGRANGE.

Rappelons la définition de l'irrégularité de B. Malgrange [12]. A l'aide d'un vecteur cyclique on se ramène au cas d'une équation différentielle. Considérons donc l'opérateur différentiel

$$D = \sum_0^n a_p \frac{d^p}{dz^p}$$

avec $a_n \neq 0$ et $a_i \in \mathbb{C}\{z\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Les deux opérateurs :

$$D : \mathbb{C}[[z]] \longrightarrow \mathbb{C}[[z]] \; .$$

$$D : \mathbb{C}\{z\} \longrightarrow \mathbb{C}\{z\} \; ,$$

sont à indice et ont respectivement pour indice

$$\chi(D, \mathbb{C}[[z]]) = \sup_p \, [p - \nu(a_p)]$$

$$\chi(D, \mathbb{C}\{z\}) = n - \nu(a_n) \; .$$

L'irrégularité de D est par définition l'entier

$$i(D) = \chi(D, \mathbb{C}[[z]] - \chi(D, \mathbb{C}\{z\}) = \sup_p \, [\nu(a_n) - n - (\nu(a_p) - p)].$$

La considération de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}\{z\} \longrightarrow \mathbb{C}[[z]] \longrightarrow \mathbb{C}[[z]]/\mathbb{C}\{z\} \longrightarrow 0$$

entraîne

$$i(D) = \dim \operatorname{Ker} \, (D, \mathbb{C}[[z]]/\mathbb{C}\{z\}) \; ,$$

donc $i(D) \geq 0$.

La condition $i(D) = 0$ caractérise la régularité.

PROPOSITION.- <u>Pour tout système différentiel</u>

$$(1) \qquad \frac{dy}{dz} = A(z)y \;. \qquad A(z) \in t^{-q}\, \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{C}\{z\})$$

<u>on a</u> $\rho_1 = i(D)$.

Posons $\theta = z = \frac{d}{dz}$. Soit v un vecteur cyclique pour ∇_θ , on a donc

$$\nabla_\theta^n v = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \nabla_\theta^i v \;.$$

Dans la base $(e) = (v, \nabla_\theta^1 v, \ldots, \nabla_\theta^{n-1} v)$ on a

$$\mathrm{Mat}(\nabla_\theta, (e)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & b_0 \\ 1 & 0 & & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\; 0 & 1 & b_{n-1} \end{pmatrix}$$

et l'étude du système (1) est équivalente à l'étude de l'équation différentielle

$$\theta^n y = \sum_{i=0}^{n-1} b_i\, \theta^i y \quad ,$$

et alors si $D = \theta^n - \sum_{i=0}^{n-1} b_i \theta^i$

$$i(D) = \operatorname*{Sup}_p \left[-[(\nu(b_p) + p) - p]\right],$$

or

$$\rho_1 = \mathrm{Sup}[0, \operatorname*{Sup}_p [-\nu(b_p)]],$$

ce qui entraîne $\rho_1 = i(D)$ car

$$\operatorname*{Sup}_p [-\nu(b_p)] = i(D) \geq 0 \;.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI N. Algèbre commutative.
Chap. 5,6,7 . Hermann.

[2] BRIESKORN E. Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen.
Manuscripta Math. 2 (1970) p. 103-161.

[3] CODDINGTON E.A., LEVINSON N.
Theory of ordinary differential equations.
Mc. Graw-Hill Book Compagny. Inc. (1955).

[4] DELIGNE P. Equations différentielles à points singuliers réguliers.
Lecture Notes in Mathematics 163 . Springer-Verlag 1970.

[5] HILLE E. Lectures on ordinary differential equations.
Addison-Wesley Publishing Compagny.

[6] HORN J. Zur Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen II,
Math. Annalen, 40 (1892), p. 527-550.

[7] JURKAT W.B. and LUTZ D.A.
On the order of solutions of analytic linear differential equations.
Proc. London Math. Soc. 3 (1971), p. 465-482.

[8] LEVELT A.H.M. Hypergeometric functions.
Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. A, 64 (1961), p. 361-403.

[9] LOEWY A. Uber einen Fundamentalsatz für Matrizen oder lineare homogene Differentialsysteme.
Sitzungsberichte Heidelb. Wissenschaften. Abt. A, 5. Abhandlung (1918).

[10] LUTZ D.A. Some characterizations of systems of linear differential equations having regular singular solutions.
Trans. A.M.S. 126 (1967), p. 427-441.

[11] LUTZ D.A. Perturbations of matrix differential equations in the neighborhood of an irregular singular point. Funkcial. Ekvac. 13 n° 2 (1970), p. 97-107.

[12] MALGRANGE B. Remarques sur les points singuliers des équations différentielles. C.R. Acad. Sc. Paris t. 273 (1971), Série A, p. 1136.

[13] MILNOR J. Singular points of complex hypersurfaces. Ann. of Math. Studies. Princeton University Press. Princeton University Press (1968).

[14] MOSER J. The order of a singularity in Fuch's theory. Math. Zeitschrift 72 (1960), p. 379-398.