R. Gérard

Les systèmes de Pfaff du type de Fuchs sur les espaces projectifs complexes

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1970, tome 11
« Conférences de H. Epstein et V. Glaser, R. Gérard, J.J. Loeffel et A. Martin, P. Schapira », , exp. n° 2, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1970__11__A2_0>

LES SYSTEMES DE PFAFF DU TYPE DE FUCHS SUR LES ESPACES PROJECTIFS COMPLEXES

par

R. GERARD

Institut de Recherche Mathématique Avancée (STRASBOURG)

-- o --

INTRODUCTION

Dans cet exposé nous allons donner une idée

1°) de l'intérêt que présente l'étude des systèmes de Pfaff du type de Fuchs sur les espaces projectifs complexes.

2°) des problèmes qui se posent encore à propos de ces systèmes.

Nous noterons :

- $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ l'espace projectif complexe de dimension n, quotient de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ par le groupe $\mathbb{C}^*$ des homothéties de centre 0.

- $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ la projection canonique.

- $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ un système de coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$

- $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{A}_i$ une sous-variété algébrique de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ dont les composantes irréductibles $\mathcal{A}_i$ sont supposées sans singularite (on verra que certains des résultats obtenus restent valables dans le cas contraire).

- $P_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = 0$ l'équation irréductible de $\mathcal{A}_i$, où P_i est un polynôme homogène de degré n_i.

- $\Omega^{q\times q}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathcal{A})$ l'ensemble des formes de Pfaff à valeurs matricielles de la forme

$$\sum_{i=1}^{p} \mathcal{A}_i \frac{dP_i}{P_i}$$

où les A_i $(i=1,2,\ldots,P)$ sont des $q\times q$-matrices constantes liées par la relation

$$\sum_{i=1}^{P} (\text{degré } P_i)\, A_i = 0$$

<u>DEFINITION.</u> <u>Un système de Pfaff d'ordre</u> q

$$df = \omega f \ .$$

<u>est dit de Fuchs sur</u> $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ <u>si</u>

1°) $\omega \in \Omega^{q\times q}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathcal{A})$

2°) <u>il est complètement intégrable</u>.

On trouvera une étude détaillée de ces systèmes sur une variété analytique complexe de dimension finie dans [1] .

Des exemples simples de tels systèmes sont donnés par les fonctions hypergéométriques complètes (pour un aperçu sur ces fonctions voir [3]. Par exemple la fonction d'Appell $F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x',y)$ est donnée par un système sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ de la forme (cf [1] p. 400) $df = (\sum_{i=1}^{3} A_i \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i=}^{3} B_i \frac{du_i}{u_i})f.$

où a) $u_1 = x_2 - x_3$, $u_2 = x_3 - x_1$, $u_3 = x_1 - x_2$.

b) les A_i , B_i sont des matrices d'ordre 3 liées par un certain nombre de relations exprimant la complète intégrabilité du système considéré .

Les résultats qui seront exposés dans la suite ont été obtenus en commun avec A.H.M. Levelt de l'Université de Nimègue et sont en voie de publication. Les problèmes que nous avons abordés sont les suivants :

1°) Classification des systèmes de Fuchs sur les espaces projectifs complexes, et ceci sur un cas particulier, ce problème se ramène d'ailleurs immédiatement à un problème assez difficile d'algèbre linéaire.

2°) L'étude de l'analogie existant entre l'ensemble des relations de complète intégrabilité d'un système de Fuchs admettant $\mathcal{A} = \bigcup^{P} \mathcal{A}_i$ pour support singulier et l'ensemble des relations qui existe entre un système de générateur du groupe $\pi_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) - \mathcal{A})$.

§ 1 .- Quelques propriétés des systèmes de Fuchs sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

Soient M un point de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{A}_{i_M^1}, \mathcal{A}_{i_M^2}, \ldots, \mathcal{A}_{i_M^{q(M)}}$, les $q(M)$ composantes irréductibles de $\mathcal{A}$ passant par M.

DEFINITION 1.- Les composantes irréductibles $(\mathcal{A}_i)_{1 \leq i \leq q}$ de $\mathcal{A}$ sont en position générale si pour tout $M \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

1°) $q(M) \leq n$

2°) $(dP_{i_M^1} \wedge dP_{i_M^2} \wedge \ldots \wedge dP_{i_M^{q(M)}})(M) \neq 0$.

DEFINITION 2.- Un diviseur $\mathcal{A}$ de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est dit générique si ses composantes irréductibles sont sans singularité et en position générale.

Une fonction holomorphe sur le revêtement universel $\mathcal{R}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})-\mathcal{A})$ de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})-\mathcal{A}$ est dite élémentaire si elle s'exprime comme polynôme à coefficients constants en

1°) les fonctions $(\log P_i)_{1 \leq i \leq q}$

2°) des fonctions de la forme $\prod_{i=1}^{q} P_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$

DEFINITION 3.- Un sous-espace vectoriel E de dimension finie P de fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) - \mathcal{A})$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^P$ est dit élémentaire s'il est engendré par des fonctions élémentaires.

THEOREME 1.- Pour tout système de Fuchs dont l'ensemble singulier est générique, l'espace vectoriel des solutions est élémentaire.

DEFINITION 4.- Un diviseur $\mathcal{A}'$ de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est dit plus simple qu'un diviseur $\mathcal{A}$, si

1°) $\mathcal{A}' \neq \mathcal{A}$

2°) $\mathcal{A}$ est réunion d'un certain nombre de composantes irréductibles de $\mathcal{A}'$.

DEFINITION 5.- On dit qu'il y a réduction du diviseur singulier $\mathcal{A}$ d'un système de Fuchs

(1) $df = \omega f$

si par un changement de fonctions du type $f = Hg$ où H est une matrice holomorphe élémentaire et irréductible sur $\mathcal{R}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) - \mathcal{A})$, le système (1) se transforme en un système (1') dont le diviseur singulier $\mathcal{A}'$ est plus simple que $\mathcal{A}$.

THEOREME 2.- Si une composante irréductible $\mathcal{A}_{j_o}$ du diviseur singulier de (1) est en position générale par rapport aux autres et si les valeurs propres de $\operatorname{Res} \omega/_{j_o} = A_{j_o}$ sont toutes distinctes , alors l'espace vectoriel des solutions de (1) est élémentaire.

CONCLUSION.- Les systèmes de Fuchs sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ qui méritent une étude plus approfondie sont donc ceux dont le diviseur n'est pas "générique".

Dans le prochain paragraphe, nous allons étudier une première famille intéressante de systèmes de Fuchs dont le diviseur singulier n'est pas générique, un exemple de tel système est donné par la fonction hypergéométrique $F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma\,;x,y)$.

§ 2.- Un exemple de classification d'une classe particulière de systèmes de Fuchs sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

A la fonction $F_1\,(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)$ est associé le système de Fuchs ([1], p. 402)

$$df = \left(\sum_{i=1}^{3} A_i \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{du_i}{u_i}\right) f \text{ , où}$$

a) $u_1 = x_2 - x_3$, $u_2 = x_3 - x_1$, $u_3 = x_1 - x_2$.

b)
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\gamma+\beta' & 0 \\ 0 & -\beta' & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 1-\gamma+\beta \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \alpha\beta & \alpha+\beta & \beta \\ \alpha\beta' & \beta' & \alpha+\beta' \end{pmatrix} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\beta' & -\beta' & \gamma-\alpha-\beta'-1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha\beta & \gamma-\alpha-\beta-1 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta' & \beta \\ 0 & \beta' & -\beta \end{pmatrix}$$

L'ensemble de ces 6 matrices données dans l'ordre $(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$ sera appelé dans la suite le "sextuple hypergéométrique".

Désignons par $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{3} (\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_i)$ le sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ défini par les équations :

$$\mathcal{A}_i : x_i = 0 \qquad i = 1,2,3$$

$$\mathcal{B}_i : u_i = 0 \qquad i = 1,2,3 .$$

Le problème que nous nous proposons de résoudre est celui de la classification des systèmes de Pfaff du type de Fuchs complètement intégrable dont le diviseur singulier est $\mathcal{A}$. Un tel système s'écrit :

$$(1) \quad df = \omega f \quad \text{où} \quad \omega = \sum_{i=1}^{3} A_i \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{du_i}{u_i} \quad \text{avec}$$

$$\sum_{i=1}^{3} (A_i + B_i) = 0 .$$

Les A_i, B_i sont des matrices d'ordre 3.

Posons $B = B_1 + B_2 + B_3$ et

$C_i = A_j + A_h + B_i$ où (i,j,h) est une permutation de l'ensemble $\{1,2,3\}$.

La condition de complète intégrabilité du système (1) s'écrit :

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} (\mathrm{I}_1) & [A_i, B_i] = 0 \qquad i = 1,2,3 \\ (\mathrm{I}_2) & [C_i, A_j] = [C_i, A_h] = [C_i, B_i] = 0 \quad \text{pour toute permutation} \\ & (i,j,h) \text{ de } \{1,2,3\} . \\ (\mathrm{I}_3) & [B, B_i] = 0 \qquad i=1,2,3 \end{cases}$$

à laquelle il faut ajouter la relation

$$\sum_{i=1}^{3} (A_i + B_i) = 0$$

Il est facile de voir que le problème énoncé ci-dessus consiste en la classification des sextuples ordonnés $(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$ de transformations linéaires d'un espace vectoriel V de dimension 3 sur $\mathbb{C}$.

Pour toute transformation σ de l'ensemble $\{1,2,3\}$ posons

$\sigma(A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3) = (A_{\sigma(1)},A_{\sigma(2)},A_{\sigma(3)},B_{\sigma(1)},B_{\sigma(2)},B_{\sigma(3)})$ et désignons par τ_{12}, τ_{13}, τ_{23} et ν les transformations définies par :

$$\tau_{12}(A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3) = (B_1,B_2,A_3,A_1,A_2,B_3)$$

$$\tau_{23}(A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3) = (A_1,B_2,B_3,B_1,A_2,A_3)$$

$$\tau_{31}(A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3) = (B_1,A_2,B_3,A_1,B_2,A_3)$$

$$\nu\ (A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3) = (C_1,C_2,C_3,B_1,B_2,B_3)$$

Les transformations σ, τ_{12}, τ_{23}, τ_{31} et ν engendrent un groupe G d'ordre 120. Les relations (I) et (S) sont invariantes par G.

DEFINITION 6.- Un sextuple $H = (A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3)$ est dit décomposable si V est somme directe de deux sous-espaces vectoriels V_1 et V_2 non réduits à $\{0\}$ et invariants par les transformations linéaires A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3.

DEFINITION 2.- On dit que le sextuple H est presque décomposable s'il existe des transformations linéaires N_1,N_2,N_3,M_1,M_2,M_3 de V vérifiant :

1) Pour tout i, N_i et M_i sont nilpotentes et $\sum_{i=1}^{3} (N_i + M_i) = 0$

2) Toutes les N_i et M_j commutent et chacune commute avec les éléments du sextuple H.

3) V est somme directe de sous-espaces non réduits à $\{0\}$ invariants par les endomorphismes $A_i - N_i$ $(i=1,2,3)$ et $B_j - M_j$ $(j=1,2,3)$.

DEFINITION 3.- Le sextuple H est dit élémentaire si

1) il est presque décomposable.

2) V est somme directe de sous-espaces de dimension 1 invariants par les endomorphismes $(A_i - N_i)$ $(i=1,2,3)$ et $B_j - M_j$ $(j=1,2,3)$.

Remarques :

1 - Pour que le sextuple H soit décomposable (resp. presque décompo-

sable, élémentaire) il faut et il suffit qu'un de ses transformés par G soit décomposable (resp. presque décomposable, élémentaire).

2 - Le sextuple $(A_1-N_1, A_2-N_2, A_3-N_3, B_1-M_1, B_1-M_2, B_3-M_3)$ vérifie les conditions (I) et (S).

3 - Si le sextuple H est élémentaire alors tous les éléments de H sont deux à deux permutables.

4 - Si les éléments du sextuple H sont deux à deux permutables, alors H est élémentaire.

Ce résultat est un corollaire immédiat de la proposition 11, p. 121 de l'ouvrage Algèbre chap. VI, VII de N. Bourbaki.

Considérons le système de Fuchs associé au sextuple $H=(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$

$$(1)\quad df = \left(\sum_{i=1}^{3} A_i \frac{dx_i}{x_i} + \sum_{i=1}^{3} B_i \frac{du_i}{u_i} \right) f$$

alors

1 - Dire que le sextuple H est décomposable est équivalent à dire que le système (1) se décompose.

2 - Dire que le sextuple H est presque décomposable est équivalent à dire que la transformation

$$f = \left(\prod_{i=1}^{3} x_i^{N_i} \right) \times \left(\prod_{i=1}^{3} u_i^{M_i} \right) g$$

transforme le système (1) en un système décomposable.

3 - Si le sextuple H est élémentaire, les solutions de (1) sont élémentaires.

Nous dirons qu'un endomorphisme X de V $(\dim_{\mathbb{C}} V = 3)$ possède la propriété (R) s'il existe $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{rang}(X-\xi I) = 1$.

Nous avons alors le résultat suivant :

<u>THEOREME</u>.- <u>Si le sextuple</u> $H=(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3)$ <u>n'est pas élémentaire et vérifie les conditions</u> (I) <u>et</u> (S) <u>et</u> (R) <u>alors ou bien</u>

a) H <u>est décomposable</u>

b) H est semblable au sextuple hypergéométrique.

La démonstration de ce théorème est assez longue et ne nécessite que des considérations d'algèbre linéaire.

§ 3.- Analogie entre les conditions de complète intégrabilité d'un système de Fuchs et le groupe fondamental du diviseur associé.

Nous allons pour des raisons de simplicité nous limiter au cas des systèmes de Fuchs sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Soit $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{q} \mathcal{A}_i$ un diviseur de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, nous supposerons que les composantes irréductibles de $\mathcal{A}$ sont sans singularité (la comparaison s'étend d'ailleurs aisément au cas où les $\mathcal{A}_i$ possèdent des singularités).

a) les $\mathcal{A}_i$ sont en position générale (i.e. $\mathcal{A}_i$ est générique).

Soit n_i l'ordre de $\mathcal{A}_i$ alors d'après un théorème de Zariski ([3] et [4]) nous savons que le groupe $\pi_1(\mathbb{P}_2(\mathbb{C}) - \mathcal{A})$ est abélien et à q générateurs lié par la relation :

$$\prod_{i=1}^{q} g_i^{n_i} = 1 .$$

Cette dernière relation exprime que nous sommes sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ et le caractère abélien résulte de la position relative des composantes irréductibles $\mathcal{A}_i$ de $\mathcal{A}$.

Considérons maintenant un système de Fuchs complètement intégrable

$$(1) \quad df = \omega f . \quad \text{où} \quad \omega = \sum_{i=1}^{q} A_i \frac{dP_i}{P_i}$$

$P_i = 0$ $(i=1,2,\ldots,q)$ étant une équation irréductible en coordonnées homogènes de la composante irréductible $\mathcal{A}_i$ de $\mathcal{A}$.

On suppose ce système générique, cela signifie en particulier que l'ordre des matrices A_i est assez élevé et que les seules relations qui existent entre ces matrices sont la relation

$$(S) \quad \sum_{i=1}^{q} (\text{degré } P_i)\, A_i = 0$$

et les conditions de complète intégrabilité. On vérifie facilement dans ce cas particulier que la position relative des $\mathcal{A}_i$ entraîne que ces conditions sont uniquement :

(I) $\qquad [A_i, A_j] = 0 \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,q \\ j = 1,2,\ldots,q \,. \end{array}$

Et l'analogie entre les relations (S) et (I) et les relations liant les générateurs de $\pi_1(\mathbb{P}_2(\mathbb{C}) - \mathcal{A})$ est évidente.

b) Cas général.

Les composantes irréductibles de $\mathcal{A}$ ne sont plus en position générale. Il existe (cf. [1]) .

- une variété analytique complexe V de dimension 2
- un sous-ensemble analytique $\mathcal{A}' = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{A}'_i$ de V $(r \geq q)$ dont les composantes irréductibles sont en position générale.
- une application analytique $\sigma : V \to \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ qui est un isomorphisme analytique de $V - \mathcal{A}'$ sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C}) - \mathcal{A}$, tel que

$$\sigma^* = \Omega^{p\times p}(\mathbb{P}_2(\mathbb{C}), \mathcal{A}) \to \Omega^{q\times q}(V, \mathcal{A}') \text{ soit un isomorphisme.}$$

(pour la démonstration de $\Omega^{q\times q}(V, \mathcal{A}')$et la démonstration de ce résultat voir [1]).

Les deux groupes $\pi_1(\mathbb{P}_2(\mathbb{C}) - \mathcal{A})$ et $\pi_1(V - \mathcal{A}')$ sont évidemment isomorphes.

A chaque composante irréductible $\mathcal{A}'_i$ de $\mathcal{A}'$ correspond un générateur h_i du groupe $\pi_1(\mathbb{P}_2(\mathbb{C}) - \mathcal{A})$. Un certain nombre de ces générateurs proviennent des composantes irréductibles $\mathcal{A}_j$ de $\mathcal{A}$ nous les noterons $g_j (j=1,2,\ldots,q)$. Nous avons toujours la relation

$$\prod_{j=1}^{q} g_j^{(\text{degré } \mathcal{A}_j)} = 1 \,.$$

mais il y a d'autres relations provenant de la position relative des $\mathcal{A}'_i$ donc des $\mathcal{A}_i$.

Chaque générateur h_i s'exprime évidemment en fonction des générateurs g_j $(j=1,2,\ldots,q)$.

Les composantes irréductibles de $\mathcal{A}'$ étant en position générale, les relations qui existent entre les générateurs h_i sont des relations de commutation du type suivant. Si $\mathcal{A}'_{i_0} \cap \mathcal{A}'_{j_0} \neq \emptyset$ alors

$$h_{i_0} \circ h_{j_0} = h_{j_0} \, h_{i_0}$$

Ceci exprime seulement la commutation de certains générateurs et n'entraîne donc pas la commutativité du groupe $\pi_1(\mathbb{P}_2(\mathbb{C}) - \mathcal{A})$. Nous allons voir maintenant que les conditions de complète intégrabilité du système (1) $df = \omega f$ sont de même nature.

Considérons le système

(1*) $df = {}^*\omega f$ image réciproque de (1) par σ.

La condition de complète intégrabilité de (1) $(\omega \cap \omega = 0)$ est équivalente à la condition de complète intégrabilité de (1*) $(\omega^* \cap \omega^* = 0)$. On démontre aisément :

PROPOSITION.- La condition ${}^*\omega \cap {}^*\omega = 0$ éest équivalente à

$$[\text{Rés } {}^*\omega |\, \mathcal{A}'_i \,,\, \text{Rés } {}^*\omega |\, \mathcal{A}'_j] = 0$$

pour tous les couples (i,j) tels que

$$\mathcal{A}'_i \cap \mathcal{A}'_j \neq \emptyset \;.$$

Donc les conditions de complète intégrabilité de (1*) donc de (1) sont des relations de commutation sur les résidus de ${}^*\omega$, et ces résidus s'expriment simplement en fonction des matrices coefficients du système (1) (cf. [1], p. 380).

L'analogie entre les relations liant des générateurs de $\pi_1(V - \mathcal{A}')$ et les relations de complète intégrabilité réside donc dans le fait que l'un et l'autre de ces groupes de relations provient de la position relative des composantes irréductibles de $\mathcal{A}'$ et dans l'un et l'autre des cas, ces relations ont des relations de commutation.

ooo O ooo

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. GERARD — *Théorie de Fuchs sur une variété analytique complexe.* J.Math. Pures et Appl. 47 (1968), p. 321-404.

[2] J. APPELL et J. KAMPE DE FERIET. *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques.* Paris (1926). Gauthier-Villars.

[3] J.P. SERRE — *Revêtements ramifiés du plan projectif.* Séminaire Bourbaki (1959-60).

[4] O. ZARISKI — *Algebraic surfaces.* New-York. Chelsea publishing Company (1948) (Ergebnisse der Mathematik Band 3,5).

--oooOooo--