A. MARTINEAU

Distributions et valeurs au bord de fonctions holomorphes

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1969, tome 8
« Réédition des conférences les plus demandées contenues dans les volumes épuisés », ,
exp. n° 4, p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1969__8__A4_0>

DISTRIBUTIONS ET VALEURS
AU BORD DE FONCTIONS HOLOMORPHES

Conférence de A. MARTINEAU (Montpellier)
donnée à Strasbourg en avril 1966 dans le cadre de la R. C. P. n° 25
rédigée par R. STORA (C. E. A. Gif sur Yvette)

Nous nous occuperons ici du genre de situations suivantes :

(1) On se donne une fonction f holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. Sous des conditions assez larges qui seront précisées dans la suite, sur f, Ω, $\partial\Omega$, on peut parler de valeur au bord de f sur $\partial\Omega$, au sens des distributions.

(2) f est remplacée par une forme éventuellement $\overline{d}$ - fermée à coefficients distributions, définie sur Ω.

(3) f est remplacée par un cocycle de Čech à valeurs fonctions holomorphes ou formes $\overline{d}$ fermées, d'un recouvrement par des ouverts pseudoconvexes Ω_i, d'un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$, et on cherchera à définir la valeur au bord $\partial\Omega$ de ce cocycle.

L'étude de ces situations est inspirée par le travail de Mikio Sato sur les hyperfonctions[1]. On va utiliser systématiquement les mécanismes de la cohomologie et identifier les valeurs au bord aux éléments de certains groupes de l'homologie de complexes fabriqués avec des formes différentielles à coefficients distributions, une part importante des résultats fondamentaux de la cohomologie étant préservée : suites exactes, théorème des recouvrements acycliques.

I - DISTRIBUTIONS PROLONGEABLES. [2]

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ identifié à $\mathbb{R}^{2n}$ pour sa structure de variété C^∞.

On dira qu'une distribution T, resp. une forme ω à coefficients distributions, définie sur Ω ($T \in \mathcal{D}'(\Omega)$) est prolongeable à $\mathbb{C}^n$, et on notera $T \in \mathcal{D}'_{\gamma loc}(\Omega)$, si elle est la restriction à l'ouvert Ω d'une distribution $\overline{T}$ (non unique), définie sur $\mathbb{C}^n$ ($\overline{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$). Tout $\overline{T}$ jouissant de cette propriété sera appelée prolongement de T. La notation $\mathcal{D}'_{\gamma loc}(\Omega)$ est liée au fait que la propriété est de nature locale :

$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est prolongeable si et seulement si pour tout Ω_o, ouvert borné appartenant à Ω, T/Ω_o est prolongeable [2]. (Utiliser une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement localement fini de $\mathbb{C}^n$ par des ouverts bornés).

De la même façon, on dira que $T \in \mathcal{S}'(\Omega)$ si T est prolongeable en distribution tempérée sur $\mathbb{C}^n$, ce qui est équivalent à dire que T est prolongeable par exemple dans $P(\mathbb{C}^n)$, le compactifié projectif de $\mathbb{C}^n$.

Lorsque Ω est un ouvert borné, on a les propriétés équivalentes suivantes :

a) $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est prolongeable à $\mathbb{C}^n$.

b) La distribution de l'ouvert $\Omega \cup \overset{\circ}{\complement\Omega}$ définie dans $\complement(\partial\Omega)$ par T dans Ω et par 0 dans $\overset{\circ}{\complement\Omega}$ est prolongeable à C^n.

c) Il existe une constante $c > 0$ et un entier m tels que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (de classe C^∞ à support compact dans Ω) on ait :

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \; \|\varphi\|_m$$

où

$$\|\varphi\|_m = \sup_{x \in \Omega} \sum_{k \leq m} |D^k \varphi(x)|$$

d) Il existe un monôme de dérivation D , et une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ (restriction d'une fonction continue dans un voisinage arbitraire de $\overline{\Omega}$) telle que [3] $T = Df$ dans Ω .

Preuve :

a → d : si T est prolongeable, soit Θ un prolongement . Au voisinage de $\overline{\Omega}$ il existe g continue et un monôme de dérivation D tels que $\Theta = Dg$ dans ce voisinage.

Soit f la restriction de g à $\overline{\Omega}$. On a $Df = T$ dans Ω .

d → b : La distribution égale à Df dans $\mathbb{C}^N$ prolonge la distribution donnée dans $\complement\partial\Omega$ par 0 dans $\complement\overline{\Omega}$ et par T dans Ω .

b → a : évident.

a↔c : En effet notons par $\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{C}^N)$ le sous espace de $\mathcal{D}(\mathbb{C}^N)$ muni de la topologie de la convergence uniforme des φ ainsi que de celle de toutes leurs dérivées, sur $\overline{\Omega}$. C'est un sous-espace vectoriel topologique de $\mathcal{D}(\mathbb{C}^N)$. Si T est prolongeable il existe $\Theta \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^N)$ de restriction T à $\mathcal{D}(\Omega)$. La distribution Θ a une restriction continue à $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la topologie induite par $\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{C}^N)$ donc a → c .

Réciproquement si c) est rempli, par Hahn Banach on peut prolonger T à $\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{C}^N)$ puis à $\mathcal{D}(\mathbb{C}^N)$.

C. q. f. d.

- Caractérisation de $\mathcal{S}'(\Omega)$, $\mathcal{D}'_{Y loc}(\Omega)$.

Nous allons montrer que si l'hypothèse (H) qui suit est satisfaite

1) $\mathcal{S}'(\Omega)$ est le dual de $\mathcal{S}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{C}^n)$, sous-espace de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^n)$, des fonctions C^∞ à décroissance rapide, à support dans $\overline{\Omega}$.

2) $\mathcal{D}'_{\gamma loc}(\Omega)$ est le dual du sous-espace fermé $\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{C}^n)$ de $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$, des fonctions C^∞ à support compact dans $\overline{\Omega}$.

(1) s'obtient à partir de 2) par passage de $\mathbb{C}^n$ à son compactifié projectif (réel ou complexe) par exemple).

(H) : $f \in \mathcal{D}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{C}^n) \rightarrow f = 0$ ainsi que ses dérivées dans $\complement\Omega$.

On va alors voir que le prolongement d'un $T \in \mathcal{D}'_{\gamma loc}(\Omega)$ à $\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{C}^n)$ est unique, de façon équivalente, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{C}^n)$ pour la topologie induite par ce dernier, héritée de $\mathcal{D}(\mathbb{C}^n)$:

En effet soit $T \in \mathcal{D}'_{\gamma loc}(\Omega)$, $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ deux prolongements de T à $\mathcal{D}'(\mathbb{C}^n)$, alors $\overline{T}_1$ et $\overline{T}_2$ ont même restriction à $\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{C}^n)$ car $T_1 - T_2$ a son support dans $\complement\Omega$ et par suite $<\overline{T}_1 - \overline{T}_2, f> = 0$ pour $f \in \mathcal{D}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{C}^n)$ en vertu de l'hypothèse H .

Comme réciproquement toute fonctionnelle linéaire continue sur $\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{C}^n)$ définit par restriction à $\mathcal{D}(\Omega)$ un élément de $\mathcal{D}'_{\gamma loc}(\Omega)$ on a bien

$$\mathcal{D}'_{\gamma loc}(\Omega) \simeq [\mathcal{D}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{C}^n)]$$

L'hypothèse (H) est vérifiée si $\complement\Omega = \overline{\mathring{\complement}\,\Omega}$

II - FONCTIONS A CROISSANCE LENTE -

On dira que $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ (C^∞ sur Ω) est à croissance lente dans Ω , s'il existe C , ρ , σ (positifs) tels que :

$$|f(x)| \leq C\, d(x, \partial\Omega)^{-\rho}\, (1 + |x|^2)^{\sigma}$$

pour tout $x \in \Omega$ et on notera $f \in \mathcal{E}_\gamma(\Omega)$ (si Ω est relativement compact on peut prendre $\sigma = 0$) .

On dira que $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ est localement à croissance lente dans Ω si pour tout ouvert U relativement compact $f/_{\Omega \cap U}$ est à croissance lente ; on écrira alors $f \in \mathcal{E}_{\gamma loc}(\Omega)$.

Alors si $T \in \mathcal{D}'_{\gamma loc}(\Omega)$, $f \in \mathcal{E}_{\gamma loc}(\Omega)$, $f\, T \in \mathcal{D}'_{\gamma loc}(\Omega)$:

si $T \in \mathcal{S}'(\Omega)$, $f \in \mathcal{E}_{\gamma}(\Omega)$, $f\, T \in \mathcal{S}'(\Omega)$

III - APPLICATION AUX CAS DES FONCTIONS HOLOMORPHES -

Pour que f holomorphe dans Ω soit prolongeable : $f \in \mathcal{D}'_{\gamma loc}(\Omega)$ - resp. $f \in \mathcal{S}'(\Omega)$ - il faut et il suffit que $f \in \mathcal{E}_{\gamma loc}(\Omega)$ - resp. $f \in \mathcal{E}_{\gamma}(\Omega)$.

Il en est alors de même de toutes ses dérivées partielles.

Esquisse de preuve :

On exprime f en un point à l'aide d'une intégrale de Cauchy et on applique le critère c) page 3 Cf. 5).

IV - VALEURS AUX BORDS DE FONCTIONS HOLOMORPHES

a) Valeur au bord : cas d'une hypersurface.

Soit f holomorphe dans Ω prolongeable comme distribution. Supposons $\partial\Omega$ suffisamment régulière (la régularité nécessaire au voisinage d'un point frontière dépend de l'ordre de croissance de f au voisinage de ce point) d'équation $\varphi = 0$ telle que $d\varphi \neq 0$ si $\varphi = 0$.

Soit $\bar{f}$ un prolongement de f nul en dehors de $\bar{\Omega}$ (il en existe au moins un si $f \in \mathcal{D}'_{\gamma loc}(\Omega)$) ; $\bar{d}\,\bar{f}$ est une $(0, 1)$ forme de support $\partial\Omega$; on peut donc écrire dans un voisinage Θ d'un point M de $\partial\Omega$

$$\omega = \sum_{h=0}^{N} \omega^h \, \delta^{[h]}(\varphi)$$

où les $\delta^{[h]}(\varphi)$ sont les distributions introduites par Gelfand et Shilov [4] et où les ω^h sont des 1 - formes à coefficients suffisamment réguliers définies sur Θ.

Ecrivons que $d\omega = 0$. Il vient

$$\sum_{h=0}^{N} \bar{d}\,\omega^h \,.\, \delta^{[h]}(\varphi) - \omega^h \,.\, \delta^{[h+1]}(\varphi) \wedge \bar{d}\,\varphi = 0$$

Soit

$$\sum_{h=-1}^{N} (\bar{d}\,\omega^{h+1} - \omega^h \wedge \bar{d}\,\varphi)\ \delta^{[h+1]}(\varphi) = 0$$

(avec $\omega^{-1} = 0$)

Ce système devient en notant la restriction d'une fonction g ou d'une forme $\tilde{\omega}$ à $\partial\Omega$ par $g/\partial\Omega$ ou $\tilde{\omega}/\partial\Omega$:

$$\bar{d}\,\omega^o{}_{/\partial\Omega} = 0$$

$$\begin{cases} (\bar{d}\,\omega^1 - \omega^o \wedge \bar{d}\,\varphi)_{/\partial\Omega} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi}(\bar{d}\,\omega^1 - \omega^o \wedge \bar{d}\,\varphi)_{/\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

. . . .

$$\begin{cases} (\bar{d}\,\omega^h - \omega^{h-1} \wedge \bar{d}\,\varphi)_{/\partial\Omega} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^h}{\partial\varphi^h}(\bar{d}\,\omega^h - \omega^{h-1} \wedge \bar{d}\,\varphi)_{/\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

. . . .

$$\begin{cases} \omega^N \wedge \bar{d}\,\varphi_{/\partial\Omega} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^N}{\partial\varphi^N}(\omega^N \wedge \bar{d}\,\varphi)_{/\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Les équations se simplifient si les ω^j sont choisies, dans un voisinage

Θ de $\partial\Omega$, indépendantes de φ :

$$\mathrm{I}\begin{cases}\bar{d}\,\omega^{o} = 0\\ \bar{d}\,\omega^{1} - \omega^{o}\wedge\bar{d}\varphi = 0\\ \vdots\\ \omega^{N}\wedge\bar{d}\varphi = 0\end{cases}$$

Il est alors possible de trouver des distributions $\chi_o \dots \chi_N$ suffisamment différentiables en φ telles que

$$\mathrm{II}\begin{cases}\omega^{N} = \chi_N\,\bar{d}\,\varphi\\ \vdots & 1 \le h \le N\\ \omega^{h-1} = \bar{d}\,\chi_h + \chi_{h-1}\,\bar{d}\varphi\end{cases}$$

par résolution itérée à partir de la dernière équation du système I.

La première équation de I donne

$$\bar{d}\,\chi_o \wedge \bar{d}\,\varphi = 0$$

et, en tenant compte du système II on obtient

$$\sum_{0}^{N} \omega^{h}\;\delta^{[h]}(\varphi) = \chi_o\,\delta(\varphi)\;\bar{d}\varphi + \sum_{1}^{N}\bar{d}\,(\chi_h\;\delta^{[h-1]}(\varphi)\;).$$

où χ_o satisfait aux conditions de Cauchy-Riemann tangentielles :

$$\frac{\partial\chi_o}{\partial\bar{z}_i} = \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_i}\quad(\,i=1\,,\dots,\,n)\,,$$

λ étant une distribution suffisamment différentiable en φ dans Θ .

Nous allons voir que χ_o est uniquement défini par f au voisinage d'un point frontière donné, φ étant donné, et, en conséquence, $\chi_{o/\partial\Omega}$ ne dépend que de f au voisinage de ce point.

Soit $T = \bar{\bar{f}} - \bar{f}$ la différence de prolongements de f, nuls en dehors de $\bar{\Omega}$. T à son support dans $\partial\Omega$ d'où , localement, $T = \sum_0^N T^h \delta^{[h]}(\varphi)$.

Dire que $\bar{d}\, T$ est cohomologue à $\chi_o \; \delta(\varphi)\, \bar{d}\varphi$, c'est dire qu'on a une identité du type $\chi_o \; \delta(\varphi)\, \bar{d}\varphi = \bar{d}(\sum_0^N \Theta^h \; \delta^{[h]^o}(\varphi))$, soit $\bar{d}\,\Theta^o = \chi_o\, \bar{d}\varphi$, $\bar{d}\,\Theta^1 + \Theta^o\, \bar{d}\varphi = 0 \ldots \bar{d}\,\Theta^h + \Theta^{h-1}\, \bar{d}\varphi = 0$, $\Theta^N \bar{d}\varphi = 0$, ce qui entraîne $\Theta^N = \Theta^{N-1} = \ldots = \Theta^o = 0$, et par conséquent $\chi_o = 0$

La globalisation de ce résultat se fait de la façon suivante : soit $\{\Omega_i\}$ un recouvrement de $\mathbb{C}^n$ par des ouverts relativement compacts ; $\varphi = 0$ l'équation globale de $\partial\Omega$; on a

$$\omega_{/\Omega_i} = 0 \text{ si } \Omega_i \cap \partial\Omega = 0$$

$$\omega_{/\Omega_i} \sim \chi_i \; \delta(\varphi) \; d\varphi \text{ si } \Omega_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$$

d'après le raisonnement précédent, χ_i se recollent avec χ_j dans $\Omega_i \cap \Omega_j$ si $\Omega_i \cap \Omega_j \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ de sorte que les $\chi_i \; \delta(\varphi)\, \bar{d}\varphi$ se recollent dans tout C^n suivant une distribution χ de support $\partial\Omega$; il en est de même pour π_i primitive à support dans $\Omega_i \cap \partial\Omega$ de $\omega_{/\Omega_j} - \chi_j \; \delta(\varphi)\, \bar{d}\varphi$; car $\bar{d}(\pi_i - \pi_j) = 0$ donc $\pi_i = \pi_j$ sur $\Omega_i \cap \Omega_j$, donc si π est la forme recollée $\omega - \chi = \bar{d}\pi$ c'est-à-dire que χ est $\bar{d}$ cohomologue à ω .

L'objet naturellement attaché à f par cette opération est la classe de 1 - formes $\bar{d}$ fermées à coefficients distribution à support dans $\partial\Omega$ modulo le $\bar{d}$ de distributions à support $\partial\Omega$. Nous noterons ce groupe $H^1_{\mathcal{D}',\partial\Omega}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ Nous avons vu que dans toute classe de $H^1_{\mathcal{D}',\partial\Omega}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ on peut trouver un élément de la forme $\chi_o \,.\, \delta(\varphi)\, \bar{d}\varphi$ où χ_o satisfait aux équations de Riemann tangentielles et est différentiable en φ . La question de savoir si tout élément de $H^1_{\mathcal{D}'\partial\Omega}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ provient d'une fonction f par la construction ci-dessus sera traitée dans ce qui suit, mais de toute façon s'il en est ainsi le représentant

$\chi_o\, \delta(\varphi)\, \bar{d}\, \varphi$ ne dépend que de f , et même χ_o ne dépend que de f , φ étant donné.

b) Valeur au bord : cas d'une intersection hypersurfaces.

On fait l'hypothèse que Ω est de la forme $\Omega_1 \cap \Omega_2$, $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ étant suffisamment réguliers et en position générale. Le procédé précédent s'applique de façon itérée : on prolonge f en une distribution $\bar{f}_1$ définie dans Ω_1 , à support $\bar{\Omega}_2 \cap \Omega_1$ et on forme $\omega_1 = \bar{d}\, \bar{f}_1$; sa classe dans $H^1_{\mathcal{D}', \partial\Omega_2 \cap \Omega_1}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ est prolongeable à $\partial\Omega_2 \cap \bar{\Omega}_1$; on en forme le $\bar{d}$ et on obtient un élément de $H^2_{\mathcal{D}', \partial\Omega_1 \cap \Omega_2}(\mathbb{C}^n\ \mathcal{O})$, ce groupe étant défini de la façon suivante :

Soit W une sous variété C^∞ d'une variété complexe V, Ω un ouvert de V ; on peut considérer le groupe $H^q_{\mathcal{D}', \Omega \cap W}(\Omega , \mathcal{O}^p)$ quotient des (p, q) formes à coefficients distributions définies dans Ω à support dans $\Omega \cap W$ et $\bar{d}$ fermées, modulo le $\bar{d}$ de (p, q-1) formes à coefficients du même type. On dira qu'un élément de $H^q_{\mathcal{D}', \Omega \cap W}(\Omega, \mathcal{O}^p)$ est prolongeable s'il admet un représentant prolongeable ; alors si $\partial\Omega \cap W$ est assez régulier on définit la valeur au bord de cet élément de la façon suivante : soit α un représentant prolongeable, $\bar{\alpha}$ un prolongement à support dans $\bar{\Omega} \cap W$; on prend la classe de $\bar{d}\,\bar{\alpha}$ dans $H^{q+1}_{\mathcal{D}', W \cap \partial\Omega}(V \mathcal{O}^p)$. Il s'agit d'une opération cohomologique de cobord.

Alors si f est définie dans $\Omega_o \cap \ldots \cap \Omega_k$ les Ω_i étant à frontières suffisamment régulières et en position générale on peut définir la valeur au bord de f sur $\partial\Omega_o \cap \ldots \cap \partial\Omega_k$ par itération successive : on prend la valeur au bord dans $\Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_k$ sur $\partial\Omega_o \cap \Omega_1 \cap \ldots \Omega_k$ puis la valeur au bord de celle-ci sur $\partial\Omega_o \cap \partial\Omega_1 \cap \Omega_2 \ldots \cap \Omega_k$ dans $\Omega_2 \cap \ldots \Omega_k$ et ainsi de suite, et on peut s'assurer que l'élément de $H^{k+1}_{\mathcal{D}', \partial\Omega_o \ldots \partial\Omega_k}(V , \mathcal{O}^p)$ ainsi obtenu ne dépend que de f et non des prolongements effectués.

c) Représentation canoniques de ces valeurs au bord.

On va supposer les $\partial\Omega_i$ en position générale définies globalement par $\varphi_j = \mathrm{Re}\, \psi_j = 0$ où ψ_j est holomorphe, $\bar{d}\varphi_o \wedge \ldots \wedge \bar{d}\varphi_k \neq 0$ en tout point de $\partial\Omega_o \cap \ldots \cap \partial\Omega_k$.

Alors , on a le

Théorème :

Si $q \leq k$ $H^q_{\mathscr{D}',\partial\Omega_o \cap \ldots \cap \partial\Omega_k}(V, \mathcal{O}^p) = 0$ et dans toute classe de $H^{k+1}_{\mathscr{D}',\partial\Omega_o \cap \ldots \cap \partial\Omega_k}(V, \mathcal{O}^p)$ il existe un représentant unique de la forme $\chi_{o\ldots k}\, \delta(\varphi_o) \ldots \delta(\varphi_k)\ \bar{d}\varphi_o \wedge \ldots \wedge \bar{d}\varphi_k$ $\chi_{o\ldots k}$ étant une distribution définie dans un voisinage de $\partial\Omega_o \cap \ldots \cap \partial\Omega_k$, fonction différentiable de $\varphi_o \ldots \varphi_k$, qui satisfait aux conditions de Riemann tangentielles $\bar{d}\chi_{o\ldots k} \wedge \bar{d}\varphi_o \wedge \ldots \bar{d}\varphi_k = 0$ et dont la restriction $\chi_{o\ldots k} / \partial\Omega_o \cap \ldots \cap \partial\Omega_k$ est caractéristique de cette classe.

Preuve :

C'est une généralisation du calcul précédent une fois qu'on a constaté que $H^{q-1}_{\mathscr{D}',\partial\Omega_o \cap \ldots \cap \partial\Omega_k \cap \omega}(\omega, \mathcal{O}^p) = 0$ pour tout ouvert ω de V entraîne que la relation d'équivalence de passage au quotient dans Z^q (l'ensemble des formes $\bar{d}$ fermées à support dans $\partial\Omega_o \cap \ldots \cap \partial\Omega_k$) qui définit $H^q_{\mathscr{D}',\partial\Omega_o \cap \ldots \cap \partial\Omega_k}(V, \mathcal{O}^p)$ est une relation de type local. On emploiealors une récurrence décrite en 5) .

d) Valeur au bord habituelle

Si f est holomorphe dans $\Omega_o \cap \ldots \cap \Omega_k$, sa valeur au bord relativement aux coordonnées $\varphi_o \ldots \varphi_k$ est $\chi_{o\ldots k}/\partial\Omega_o \cap \ldots \cap \partial\Omega_k$ décrite dans la formule précédente ; cette distribution coïncide avec la distribution donnée par un processus de passage à la limite employé usuellement : si on se place dans un voisinage Ω d'un point de $\partial\Omega_o \cap \ldots \cap \partial\Omega_k$ de sorte que pour $c_o \ldots c_k$ suffisamment petits $\{\varphi_j = c_j\}_{j=1\ldots k}$ définit une bonne variété $M(c_o \ldots c_k)$ dans $\Omega_o \cap \ldots \cap \Omega_k \cap \Omega$, et qu'on considère la forme de Gelfand-Shilov

$\omega(\varphi_o - c_o, \varphi_1 - c_1, \varphi_k - c_k)$ sur cette variété définie par $\omega(\varphi_o - c_o, \ldots \varphi_k - c_k)\, d\varphi_o \ldots d\varphi_k = dV$ mesure de Lebesgue sur $M(c_o \ldots c_k)$, on voit que la forme $f/_{M(c_o \ldots c_k)} \cdot \omega$ admet une limite au sens des distributions si f est prolongeable - et réciproquement si la limite est atteinte uniformément en c_j - cette limite étant obtenue par identification de $M(c_o \ldots c_k)$ avec $M(o, \ldots, o)$ au moyen de la famille des normales à $M(o, \ldots, o)$ définie par les coordonnées φ_j.

Il faut vérifier, c'est un point capital de la théorie, que cette méthode donne le même résultat que la méthode précédente. Et les deux définitions étant de nature locale il suffit de le voir dans le cas où f est continue jusqu'au bord, le cas général s'en déduisant par dérivation.

e) Valeur au bord pour un système de fonctions holomorphes.

L'objet qui s'introduira naturellement sera un cocycle de Čech ; la valeur au bord de ce cocycle sera définie en sorte qu'elle ne dépende pas de la classe de cohomologie de Čech du cocycle et même du changement de recouvrement. Ceci sera précisé plus loin dans un cas particulier.

V - PROBLEMES DE REPRESENTATION -

La définition des valeurs au bord pose les questions suivantes :

1) L'application $f \to \partial f$ est-elle surjective c'est-à-dire tout χ satisfaisant aux conditions de Riemann tangentielles est-il valeur au bord d'un f ?

2) L'application $f \to \partial f$ est-elle injective c'est-à-dire, si χ est nul, f est-il nul ? (c'est une variante abstraite d'un théorème de représentation intégrale).

On peut répondre par l'affirmative à ces questions dans des cas particuliers :

a) <u>Valeur au bord d'ordre 0.</u> (Martinelli)

On se donne f prolongeable : $f \in H^o_{\Upsilon loc}(\Omega, \mathcal{O})$

$$\bar{d}\,\bar{f} = \omega \pmod{\bar{d}\chi} : \omega \in H^1_{\mathcal{D}',\partial\Omega}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$$

dénotons par K les complexes de formes munis de la différnetielles $\bar{d}$; on a la suite exacte

$$0 \to K_{\mathcal{D}',\partial\Omega}(\mathbb{C}^n) \to K_{\mathcal{D}',\bar{\Omega}}(\mathbb{C}^n) \to K_{\Upsilon loc}(\Omega) \to 0$$

formes à coefficients distributions à support dans $\partial\Omega$	i. e à support dans $\bar{\Omega}$	formes définies sur Ω, à coefficients distributions prolongeables

D'où la suite exacte de groupes (de cohomologie des complexes K pour la différentielle $\bar{d}$)

$$0 \to \underbrace{H^o_{\mathcal{D}',\partial\Omega}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})}_{\text{résolution de } \mathcal{O} \quad \text{support}} \to \underbrace{H^o_{\mathcal{D}',\bar{\Omega}}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})} \to \underbrace{H^o_{\Upsilon loc}(\Omega, \mathcal{O})}$$

fonctions holomorphes à support $\partial\Omega$: 0	i. e à support $\bar{\Omega}$; 0 si $\bar{\Omega} \neq \mathbb{C}^n$	fonctions holomorphes dans Ω admettant une valeur au bord distribution

$$\xrightarrow{\partial} H^1_{\mathcal{D}',\partial\Omega}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) \to H^1_{\mathcal{D}',\bar{\Omega}}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$$

Par suite si $\underline{\bar{\Omega} \neq \mathbb{C}^n}$ on a l'injection :

$$\boxed{0 \to H^o_{\Upsilon loc}(\Omega, \mathcal{O}) \xrightarrow{i} H^1_{\mathcal{D}',\partial\Omega}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})}$$

i. e si deux fonctions ont même valeur au bord, elles coïncident [Remarquer que l'homomorphisme $\partial = i$ défini précédemment est bien le composé $f \to \bar{f} \to \bar{d}\,\bar{f}$].

Supposons maintenant que Ω soit relativement compact ; pour que le problème de représentation 1) soit résolu par l'affirmative, il suffit que $H^1_{o,1}\mathcal{D}'_{\bar{\Omega},\Omega}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) = 0$ i. e. $\forall\ \overset{(o,1)}{\bar{\omega}}$ de support $\bar{\Omega}$.·. $d\ \overset{(o,1)}{\bar{\omega}} = 0 \to \exists\ \varphi$:. $\bar{\omega} = \bar{d}\,\varphi$, avec φ à support dans $\bar{\Omega}$. Or on sait qu'on peut trouver φ définie dans $\mathbb{C}^n$, à support compact, pour $n \geq 2$, de sorte que $\overset{o,1}{\omega} = \Sigma\ A_j\, d\bar{z}_j = \bar{d}\varphi : \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_h} = A_h$ a une solution pourvu que $\frac{\partial A_h}{\partial\bar{z}_k} = \frac{\partial A_k}{\partial\bar{z}_h}$,

par exemple, $\varphi = \frac{1}{\pi}\ A_1 * (\frac{1}{z_1} \otimes \delta_{z_2} \ldots \otimes \delta_{z_n})$ qui a un sens puisque A_1 est à support compact.

En effet, $\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_1} = A_1 * (\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1}\ \frac{1}{\pi}\ z_1 \otimes \delta_{z_2} \otimes \ldots\ \delta_{z_n}) = A_1 * \delta = A_1$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}_h} = \frac{\partial A_1}{\partial\bar{z}_h}\ (\frac{1}{\pi} z_1 \otimes \ldots\ \delta_{z_n}) = \frac{\partial A_h}{\partial\bar{z}_1}\ (\frac{1}{\pi}\ \frac{1}{z_1} \otimes \ldots \delta_{z_n})$$

$$= A_h * (\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1}\ \frac{1}{\pi}\ \frac{1}{z_1} \otimes \ldots \otimes \delta_{z_n}) = A_h * \delta = A_h\ .$$

D'autre part le support de φ est l'ensemble des z tels qu'il existe z_1 de sorte que $(z_1 \ldots z_n) \in \Omega$; φ étant holomorphe en dehors de $\bar{\Omega}$ est nulle en dehors de cet ensemble, par prolongement analytique en $z_2 \ldots z_n$ si $|z_1|$ est assez grand on en déduit que φ est à support compact et primitive de $\overset{0,1}{\omega}$. Si de plus $\complement\,\Omega$ n'a pas de composante connexe compacte $\varphi /_{\complement\bar{\Omega}}$ nulle assez loin et holomorphe est nulle dans tout $\complement\,\bar{\Omega}$.

Donc, pour $n \geq 2$ dans les conditions énoncées sur Ω (Ω relativement compact, $\complement\,\Omega$ sans composante connexe compacte) la donnée sur $\partial\Omega$

suffisamment régulière ($\varphi = 0$) d'une distribution T satisfaisant aux conditions de Riemann tangentielles $\therefore$ $T\,\delta(\varphi)\,\bar{d}\varphi \in H^1_{\mathcal{D}'/\partial\Omega}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ implique l'existence d'une f holomorphe dans Ω, prolongeable, de valeur au bord T.

b) <u>Généralisation.</u>

On considère la suite de complexes suivante :

$$0 \to K_{\mathcal{D}', \partial\Omega_o \cap \partial\Omega_1 \ldots \cap \partial\Omega_k}(\mathbb{C}^n) \to K_{\mathcal{D}', \partial\Omega_o \cap \ldots \cap \partial\Omega_{k-1} \cap \bar{\Omega}_k}(\mathbb{C}^n) \to K_{\mathcal{D}'_{loc}, \partial\Omega_o \ldots \partial\Omega_{k-1} \cap \Omega_k}(\Omega_k) \to 0$$

formes à coefficients distribution à support dans $\partial\Omega_o \cap \ldots \cap \partial\Omega_k$ — i. e. à support dans $\partial\Omega_o \cap \ldots \partial\Omega_{k-1} \cap \bar{\Omega}_k$ — formes à support dans $\partial\Omega_o \cap \ldots \partial\Omega_{k-1} \cap \Omega_k$ prolongeables.

munis de l'opérateur d.

On en déduit une suite exacte de cohomologie :

$$\ldots \to H^q_{\mathcal{D}', \partial\Omega_o \cap \ldots \partial\Omega_{k-1} \cap \bar{\Omega}_k}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) \to H^q_{\gamma loc, \partial\Omega_o \cap \ldots \partial\Omega_{k-1} \cap \Omega_k}(\Omega_k, \mathcal{O}) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}_{\mathcal{D}', \partial\Omega_o \cap \ldots \partial\Omega_k}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$$

$$\to H^{q+1}_{\mathcal{D}', \partial\Omega_o \ldots \cap \partial\Omega_{k-1} \cap \bar{\Omega}_k}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) \to \ldots$$

La considération de ∂ n'est intéressante que si $q = k$.

L'injectivité résultera de

$$H^q_{\mathcal{D}', \partial\Omega_o \ldots \partial\Omega_{k-1} \cap \bar{\Omega}_k}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) = 0$$

et la surjectivité de $H^{q+1}_{\mathcal{D}', \partial\Omega_o \cap \ldots \partial\Omega_{k-1} \cap \bar{\Omega}_k}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) = 0$

Si $q = 1$ $n \geq 2$ et si $\complement(\partial\Omega_o \cap \overline{\Omega_1})$ n'a pas de composante connexe compacte, on voit que l'application ∂ est injective.

Or elle est aussi injective de

$$H^o_{\mathcal{D}', loc'}(\Omega_o \cap \Omega_1) \to H^1_{\mathcal{D}', \partial\Omega_1 \cap \Omega_o}(\Omega_o, \mathcal{E}) ;$$

donc dans cette situation on trouve que l'application de f définie dans $\Omega_o \cap \Omega_1$ et prolongeable sur sa valeur au bord d'ordre 2 définie sur $\partial\Omega_o \cap \partial\Omega_1$ est injective.
La surjectivité n'est en général pas assurée.

De même sous les hypothèses du théorème sur la représentation canonique, l'application $f \to \partial f(\partial\Omega_o \ldots \cap \partial\Omega_k)$ est injective mais en général il ne peut y avoir surjectivité.

c) <u>Représentation des distributions</u> :

Si T est une distribution $T(z, v, \zeta)$ sur $\Omega = (\Omega^o + i\mathbb{R}^n) \times \Omega_1 \times \Omega_2$, nous écrirons qu'elle est holomorphe en ζ si elle satisfait à l'équation $\bar{d}_\zeta T = 0$. La distribution $T(z, v, \zeta)$ sera dite distribution en z dépendant des paramètres v, ζ, de façon distribution en v, de façon holomorphe en ζ_o. Nous considérons le complexe des $\bar{d}$ formes distributions en z dépendant des paramètres v, ζ, distribution en v holomorphe en ζ.

Si Θ est un ouvert de $\Omega^o \times i\mathbb{R}^n$, on peut considérer les distributions définies dans Θ et prolongeables.

On a le

<u>Théorème</u>

$$H^p_{\underline{\mathcal{D}', \Omega_o}}(\Omega_o + i\mathbb{R}^n ; \mathcal{O}(\mathcal{O}^q(\mathcal{D}'(\Omega_1))(\Omega_2))) = 0$$

Si $p < n$

$$H^n_{\mathcal{D}', \Omega_o}(\Omega_o \times i\mathbb{R}^n ; \mathcal{O}(\quad) \simeq \mathcal{D}'(\Omega_o ; \mathcal{O}^q(\mathcal{D}'(\Omega_1)(\Omega_2)))$$

Le groupe H^p est le quotient des formes de type (0, p) en $d\bar{z}$ à coefficients dépendant des paramètres v, ζ, à support dans Ω_o, $\bar{d}_z$ fermées, modulo les $\bar{d}_z$ de formes (0, p-1) en $d\bar{z}$ à coefficients de même type.

La notation s'explique comme suit : les fonctions holomorphes dans un ouvert Ω, à valeurs dans espace vectoriel E sont notées $\mathcal{O}(E)(\Omega)$, et le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$ à valeur dans un espace vectoriel F se note naturellement $\mathcal{O}(F)$; le q-ième groupe de cohomologie à support dans un sous-ensemble fermé X dans $\Omega_o + i\mathbb{R}^n$, à valeur dans un faisceau $\mathcal{F}$ est noté $H^q_X(\mathbb{C}^n, \mathcal{F})$; nous rajoutons $\mathcal{D}'$ à coté de X puisqu'il ne s'agit pas d'un vrai groupe de cohomologie à support, et pour rappeler la nature de la résolution considérée.

Soit alors dans tout ce qui suit $\underset{\sim}{\mathcal{O}} = \mathcal{O}(\mathcal{O}^q(\mathcal{D}'(\Omega_1)(\Omega_2)))$. On a la suite exacte de complexes pour la différentielle $d_{\bar{z}}$

$$0 \to K_{\mathcal{D}',\Omega_o}(\Omega^o + i\mathbb{R}^n) \to K_{\mathcal{D}'}(\Omega^o + i\mathbb{R}^n) \to K_{\text{Yloc}}(\complement\,\Omega_o) \to 0$$

d'où

$$\to H^r_{\mathcal{D}',\Omega_o}(\Omega^o + i\mathbb{R}^n, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) \xrightarrow{1} \underbrace{H^r_{\mathcal{D}'}(\Omega^o + i\mathbb{R}^n, \underset{\sim}{\mathcal{O}})}_{\substack{\| \\ 0 \text{ par Dolbeaut généralisé}}} \xrightarrow{2} \cdots$$

$$\xrightarrow{2} H^r_{\text{Yloc}}(\complement\,\Omega^o, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) \xrightarrow{3} H^{r+1}_{\mathcal{D}',\Omega_o}(\Omega^o + i\mathbb{R}^n, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) \xrightarrow{3}$$

$$\xrightarrow{3} \underbrace{H^{r+1}_{\mathcal{D}'}(\Omega^o + i\mathbb{R}^n, \underset{\sim}{\mathcal{O}})}_{\substack{\| \\ 0 \text{ par Dolbeaut généralisé}}} \xrightarrow{4}$$

d'où $H^r_{\text{Yloc}}(\complement\,\Omega_o, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) \simeq H^{r+1}_{\mathcal{D}',\Omega_o}(\Omega^o + i\mathbb{R}^n, \underset{\sim}{\mathcal{O}})$

en particulier, $H^{n-1}_{\text{Yloc}}(\complement\,\Omega_o, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) \simeq \mathcal{D}'(\mathcal{O}^q(\mathcal{D}'(\Omega_1))(\Omega_2))(\Omega_o)$

$[\omega \in H^{n-1}_{\text{Yloc}} \to \bar{\omega}$ prolongement $\to \bar{\bar{d}}\,\bar{\omega}$ de support Ω_o

$\underset{\sim}{\bar{d}}\ T\delta\ d\bar{z}$ $\qquad T \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}^q(\mathcal{D}'(\Omega_1))(\Omega_2))(\Omega_o)]$.

Les éléments de $H^{n-1}_{\gamma loc}$ $(\complement\Omega_o, \underset{\sim}{\mathcal{O}})$ sont de plus "représentables" par des cocycles de Čech prolongeables d'un recouvrement de $\complement\Omega_o$ dans $\Omega_o + i\mathbb{R}^n$ par des ouverts pseudo convexes à frontières régulière et en position générale. Un tel cocycle est la donnée pour tout $(i_o \ldots i_{n-1})$ tel que l'ouvert $\Omega_{i_o \ldots i_{n-1}} = \Omega_{i_o} \cap \ldots \cap \Omega_{i_{n-1}}$ soit non vide d'un élément $f_{i_o \ldots i_{n-1}}$ de $\underset{\sim}{\mathcal{O}}$ $(\Omega_{i_o \ldots i_{n-1}})$ prolongeable, en tant que distribution dépendant des paramètres u, ζ, de façon holomorphe en ζ, distribution en u, à $\Omega_o + i\mathbb{R}^n$, les $f_{i_o \ldots i_{n-1}}$ étant de plus assujettis aux conditions :

i/ $(i_o \ldots i_{n-1}) \to f_{i_o \ldots i_{n-1}}$ est une fonction altérnée des indices

ii/ Si $\Omega_{i_o \ldots i_n} \neq \emptyset$ on a, dans cet ouvert

$$\sum_{h=0}^{n} (-1)^h f_{i_o \ldots \hat{i}_h \ldots i_n} = 0$$

Un $(n-1)$ cocycle est un $(n-1)$ cobord, s'il existe $\varphi_{j_o \ldots j_{n-2}}$ holomorphes du même genre, prolongeables, définis dans $\Omega_{j_o \ldots j_{n-2}}$ supposé non vide tels que

$$f_{i_o \ldots i_{n-1}} = \sum_k (-1)^k \psi_{i_o \ldots \hat{i}_k \ldots i_{n-1}}$$

Si on note par $\mathcal{R}$ la donnée des Ω_j et $H^{n-1}_{\gamma\, loc}$ $(\mathcal{R}, \mathcal{O})$ le quotient des n-1-cocycles prolongeables par les n-1 cobords prolongeables, l'isomorphisme classique de Leray repris dans les nouvelles hypotyèses conduit à un isomorphisme entre

$$H^{n-1}_{\gamma loc}(\mathcal{R}, \underset{\sim}{\mathcal{O}}) \text{ et } H^{n-1}_{\gamma loc}(\complement\Omega_o, \underset{\sim}{\mathcal{O}})$$

Pour définir la valeur au bord d'un cocycle on prend sa classe dans $H^{n-1}_{\gamma loc}$ $(\mathcal{R}, \underset{\sim}{\mathcal{O}})$ puis on lui applique cet isomorphisme, on le compose avec l'isomorphisme du cobord de $H^{n-1}_{\gamma loc}(\complement\Omega^{o}, \underset{\sim}{\theta})$ dans $H^{n}_{\mathcal{D}',\Omega_o}(\Omega_o + i\mathbb{R}^n, \theta)$ puis avec l'isomorphisme de ce dernier avec $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. La valeur au bord est définie en toute généralité et étend les définitions usuelles. L'existence de l'isomorphisme entre groupe de Čech et groupe défini par les formes distributions dépend du fait que la cohomologie (définie par les formes distributions à croissance localement lente dans un ouvert de Stein à frontière régulière ou d'une intersection finie de tels ouverts en position générale est nulle. Ce fait dépend des résultats de L. Hormänder, et peut être démontré pour des convexes (à frontière non nécessairement régulière) par une méthode de transformation de Fourier Borel .[5]

Enfin si $f \in H_{\gamma loc}(\Omega_{i_o \dots i_{n-1}})$ sa valeur au bord $\delta f_{i_o \dots i_{n-1}}$ existe au sens limite sur $\partial\Omega_{i_o} \cap \dots \cap \partial\Omega_{i_{n-1}}$

On peut montrer l'existence d'une fonction α :

$(i_o \dots i_{n-1}) \to \alpha(i_o \dots i_{n-1})$ à valeurs -1, 0, 1, alternée, indépendante de f à support fini concentré sur les $(i_o \dots i_{n-1})$ tels que

$|\partial\Omega_{i_o} \cap \dots \cap \partial\Omega_{i_{n-1}}| = |\mathbb{R}^n|$, telle que

$(2i)^n \; \Sigma \; \alpha(i_o \dots i_{n-1}) \; \delta f_{i_o \dots i_{n-1}} = \partial f$. Cf 5)

Une telle formule relie la valeur au bord "cohomologique" à la valeur au bord "usuelle".

De ces isomorphismes et de la dernière propriété invoquée on tire le "Théorème de l'Edge of the wedge"

<u>Si un cocycle de Čech localement à croissance lente a une valeur au bord usuelle nulle, c'est un cobord de Čech localement à croissance lente et réciproquement.</u>

Applications :

L'exploitation de ce résultat montre que si $f^{\pm}$ sont holomorphes dans $\Omega \cap \{\mathrm{Im}\, z \in \Gamma^{\pm}\}$ $\Gamma^{\pm}$ cônes convexes, Ω voisinage d'holomorphie de $\Omega^o \subset \mathbb{R}^n$, et ont même valeur au bord sur Ω^o elles se prolongent analytiquement l'une dans l'autre.

On a même un résultat plus général : [6] soient f_i holomorphes dans $\{\mathrm{Im}\, z \in \Gamma_i\}$, Γ_i cônes convexes, alors si la somme des valeurs au bord des f_i sur Ω_o est nulle, il existe des f_{ij} holomorphes dans $\{\mathrm{Im}\, z \in \Gamma_{ij}\}$ Γ_{ij} est enveloppe convexe de Γ_i et Γ_j, de sorte que dans $\{\mathrm{Im}\, z \in \Gamma_i\}$,

$$f_i = \sum_j f_{ij}$$

où on a posé par convention $f_{ij} - f_{ji}$.

Ce sont ces théorèmes qui sont appelés par les physiciens, théorèmes d' Edge of the Wedge.

d) La transformation de Fourier - Carleman.

Soient $v_o \dots v_k$ $k+1$ vecteur non nuls de $\mathbb{R}^n$
$\Gamma(v_o \dots v_k)$ l'enveloppe convexe des demi-droites engendrées par les v_i, lorsqu'elle est strictement convexe.

Soit $\Theta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_n)$; on peut écrire $\Theta = Df$ f continue à croissance lente ; posons

$$\int_{\Gamma(v_o \dots v_{n-1})} f(x)\ e^{-i<x,z>}\ dx = \varphi_{v_o \dots v_{n-1}}$$

L'intégrale converge dans l'intersection $T_{v_o \dots v_{n-1}}$ des tubes T_j de la forme $\mathbb{R}^n \times i\, P_{v_j}$ où P_{v_j} est le demi-espace ouvert polaire de la demi-droite définie par v_j. Si $T_{v_o \dots v_n} \neq \emptyset$, c'est à dire, si $\Gamma(v_o \dots v_n)$ est strictement convexe , on a

$$\sum_{h=0}^{n} (-1)^h \, 1_{\Gamma}(v_o \ldots \widehat{v_h} \ldots v_n) = 0$$

sauf au plus sur un ensemble de mesure nulle, où 1_Ω est la fonction caractéristique de Ω . Par suite, on a

$$\sum_{h=0}^{n} (-1)^h \varphi_{v_o \ldots \hat{v}_h \ldots v_n} = 0 \text{ dans } T_{v_o \ldots v_n}$$

Ainsi à f est attaché un cocycle du recouvrement de $\complement \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, par les demi-espaces P_{v_j} .

Par application de D , on en déduit un cocycle attaché à Θ :

$$\Theta_{v_o \ldots v_{n-1}} = \int D\,(f \,.\, 1_{\Gamma_{v_o \ldots v_{n-1}}})\, e^{-i\, \langle x, z \rangle} \, dz$$

$$= \mathcal{F} D \, \varphi_{v_o \ldots v_{n-1}}$$

Ce cocycle est prolongeable, plus précisément chaque $\Theta_{v_o \ldots v_{n-1}}$ est un élément de $\mathcal{S}'(P_{v_o} \cap \ldots \cap P_{v_{n-1}})$ donc de $H_\gamma(P_{v_o} \cap \ldots \cap P_{v_{n-1}})$.

Si on change de primitive pour Θ , le cocycle sera remplacé par un cocycle qui lui est cohomologue parmi les cocycles à croissance lente. Pour le voir il suffit de le voir pour f et g , où $f = \frac{d}{d\vec{u}}\, g$, $\frac{d}{d\vec{u}}$ étant un opérateur à coefficients constants, homogène, du premier ordre.

$$\frac{d}{d\vec{u}}\,(g.\, 1_{\Gamma(v_o \ldots v_{n-1})}) = 1_{\Gamma(v_o \ldots v_{n-1})}\, f + \frac{d}{d\vec{u}}(1_{\Gamma(v_o \ldots v_{n-1})}).\, g$$

et le deuxième terme est somme de couches $\alpha_{v_o \ldots \hat{v}_j \ldots v_{n-1}}$ portée par les faces $\Gamma(v_o \ldots \hat{v}_j \ldots v_{n-1})$ dépendant de façon alternée des indices.

Par suite si $\psi_{v_o \ldots v_{n-1}} = \int \frac{d}{d\vec{u}} \; g\, 1_{\Gamma(v_o \ldots v_{n-1})} \; e^{-i <x,z>} \, dx$

on a
$$\varphi_{v_o \ldots v_{n-1}} = \psi_{v_o \ldots v_{n-1}} + \Sigma (-1)^h \, \omega_{v_o \ldots \hat{v}_b \ldots v_{n-1}}$$

où $\omega_{v_o \ldots v_{n-2}} = \mathcal{F}\alpha_{v_o \ldots v_{n-2}}$ est alterné, prolongeable.

Donc φ et ψ diffèrent d'un cobord dont chaque composante est prolongeable en élément de $\mathcal{S}'$.

Supposons maintenant que Θ ait son support dans un cône strictement convexe Γ, et d'intérieur non vide. Alors il existe une primitive continue de Θ à support dans Γ. Pour cela, vu les hypothèses faites, on peut supposer que Γ contient, après choix convenable des coordonnées, le cône $x_1 \geq 0 \ldots x_n \geq 0$

Soit E une solution élémentaire, à support le cône des coordonnées positives, de $\dfrac{\partial nN}{\partial x_1^N \ldots \partial x_n^N}$, où N est assez grand ; alors $E * \Theta$ a son support dans Γ et est continue.

Dans ces conditions, si $\Gamma(v_o \ldots v_{n-1}) \supset \Gamma$, on a

$\varphi_{v_o \ldots v_{n-1}} = < \Theta , e^{-i\, x\, z} >$; Si $\Gamma(v_o \ldots v_{n-1}) \cap \Gamma = \emptyset$

on a $\varphi_{v_o \ldots v_{n-1}} = 0$. Si on dénote par T le tube $\mathbb{R}^n + i\,\Gamma^*$, ces propriétés se traduisent ainsi :

Si $T_{v_o \ldots v_{n-1}} \subset T$ la valeur de $\varphi_{v_o \ldots v_{n-1}}$ est constante donc ces composantes du cocycle se prolongent toutes les unes dans les autres dans T ;
Si $T_{v_o \ldots v_{n-1}} \cap - T \neq \emptyset$ la valeur de $\varphi_{v_o \ldots v_{n-1}}$ est nulle ; nous disons dans ces conditions que le cocycle a son support dans $\complement(-T)$.

Ce fait se généralise. Si un cocycle non nécessairement à croissance lente est à support dans $\mathcal{C}(-T)$ il lui correspond une fonction unique φ holomorphe dans le tube T et φ sera localement à croissance lente dans tout tube T' de la forme $\mathbb{R}^n + i\,\Gamma^{*'}$ où $\Gamma^{*'}$ est à base relativement compacte dans Γ^* si on est parti d'un cocycle localement à croissance lente.

Réciproquement, toute fonction φ peut-être définie par un cocycle. Si φ est à croissance lente dans tout tube T' le cocycle sera à croissance lente, si φ est localement à croissance lente le cocycle sera localement à croissance lente.

Cette situation se localise : soit Ω un ouvert d'holomorphie, $\Omega \cap \mathbb{R}^n = \Omega^o$. Soit un recouvrement de $\Omega - \Omega^o$ par des ouverts $\Omega^o + i\,P_{v_i} \cap \Omega$, tout n-cocycle ψ de ce recouvrement à support dans $\Omega \cap \mathcal{C}\,(\Omega^o - i\,\Gamma^*)$ définit une fonction φ holomorphe dans $\Omega \cap \Omega^o + i\,\Gamma^*$ et il y a correspondance biunivoque entre φ et la valeur au bord de ψ. Je n'ai pas étudié la réciproque dans le cas local.

Post - scriptum (A. Martineau)

Je remercie chaleureusement mon collègue STORA pour toute la peine qu'il à prise pour essayer de me comprendre. J'ai ainsi sous son influence pu éclairer quelques points obscurs de mes idées.

REFERENCES

[1] M. SATO. ref. cit dans 5).

[2] S. LOJASIEWICZ. Studia Mathematica T. XVIII - 1959 - p. 87.

[3] Comparer L. SCHWARTZ théorie des distributions Th. XXI

[4] I.M GELFAND. SHILOV Théorie des distributions T II - Dunod - Paris.

[5] A. MARTINEAU. Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes. Lisbonne 1964 (à paraître ?).

[6] A. MARTINEAU. C R Ac. Sci. t 263, 1966, Série A, p. 455.