PIERRE LELONG

Propriétés métriques des ensembles analytiques complexes

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1969, tome 8
« Réédition des conférences les plus demandées contenues dans les volumes épuisés », ,
exp. nº 3, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1969__8__A3_0>

I I

OPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES ENSEMBLES ANALYTIQUES COMPLEXES

par
Pierre LELONG

---

1 . Introduction .

La notion "d'aire" des ensembles analytiques complexes est maintenant clairement établie . Elle découle de l'existence de l'intégrale d'une forme différentielle sur un tel ensemble . Ceci devient la base d'une méthode d'étude des propriétés métriques des ensembles analytiques complexes . A son tour l'étude de celles-ci fait apparaître une classe particulière d'opérateurs linéaires : les courants (ou formes différentielles généralisées) qui sont à la fois positifs (au sens rappelé plus loin) et fermés . En termes plus abstraits, il s'agit là d'une application de la catégorie des ensembles analytiques complexes dans celle des courants positifs fermés . Pour la recherche c'est, semble-t-il, un point de vue nouveau et efficace ; des théorèmes de prolongement difficiles, tels que celui de Remmert-Stein, et une conjoncture importante de W. Stoll ont été démontrés récemment par E. Bishop par cette méthode ; d'autre part, une famille bornée d'ensembles analytiques est une famille normale, résultat à comparer avec le théorème classique de P. Montel sur les fonctions holomorphes .

Il m'a donc paru utile de faire connaître aux physiciens de notre Recherche Coopéeative n° 25 du C.N.R.S. ces travaux récents ; ils y retrouveront sans peine des notions géométriques "concrètes" mais nullement assurées dans leur généralité, telle la notion "d'aire" appliquée à des êtres qui ne sont plus des variétés (la méthode exposée ici a été récemment étendue aux ensembles analytiques réels et semi-analytiques par M. Herrera). L'appareil mathématique utilisé concernant les opérateurs linéaires (mesures, distributions) est classique ; un minimum a été rappelé concernant les ensembles analytiques pour lesquels on pourra aussi consulter [3], [5] et [7].

2. Rappelons qu'un ensemble A est dit un ensemble analytique complexe sur une variété analytique M^n s'il est fermé et si tout point $x \in A$ possède un voisinage U_x dans lequel A est l'ensemble des zéros communs à des fonctions holomorphes dans U_x. Un tel ensemble n'a pas en général une structure de variété ; on appelle <u>ordinaire</u> un point $x \in A$ tel que A ait au voisinage de x une structure de variété régulièrement plongée dans C^n et ceci revient à dire qu'il existe U_x de manière que $A \cap U_x$ s'envoie par une application analytique complexe biunivoque F définie dans U_x sur un ouvert d'une certaine variété linéaire L^p : la dimension complexe p de celle-ci est dite la dimension de A en x. Les points non ordinaires forment un sous-ensemble analytique de dimension complexe $p' < p$, si A est de dimension complexe p en tous ses points (on dit alors que A est de dimension <u>pure</u> p), ce que nous supposerons dans la suite.

Un ensemble analytique n'est pas une variété ; il n'est pas évident qu'on puisse y pratiquer certaines opérations de l'analyse, par exemple l'intégration comme on le fait sur celles-ci. On ne sait encore comment on pourrait y faire de la géométrie différentielle.

3. Soit A un ensemble analytique complexe de dimension pure p défini dans un domaine Ω de C^n : on note $\mathcal{D}_{p,p}(\Omega)$ l'espace des formes différentielles à coefficients (C^∞), à support compact, de type (p,p) par rapport aux différentielles dz_k, $d\bar{z}_k$.

On va définir :

$$(1) \qquad t(\varphi) = \int_A \varphi$$

comme un opérateur linéaire. Si A' est l'ensemble (fermé) des points non ordinaires de A et $\Omega' = \Omega - A'$,

$$t_o(\varphi) = \int_A \varphi$$

est défini sur le sous-espace $\mathcal{D}(\Omega')$ et la méthode qui a fourni la solution est une méthode de <u>prolongement d'opérateur</u> de $\mathcal{D}(\Omega')$ à $\mathcal{D}(\Omega)$.

4 . <u>Courants positifs et courants positifs fermés</u> . L'opérateur $t_o(\varphi)$ est [et l'opérateur $t(\varphi)$ sera] un "courant" (au sens de Rham) , appelé encore "forme différentielle généralisée" ou forme différentielle à coefficients - distributions par d'autres auteurs , [9] . En l'espèce, elle s'écrira

$$t = \sum_{(i)(j)} t_{i_1 \cdot\cdot i_{n-p}\, j_1 \cdot\cdot j_{n-p}} dz_{i_1} \wedge \cdot\cdot \wedge dz_{i_{n-p}} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdot\cdot \wedge d\bar{z}_{j_{n-p}}$$

et, si τ_n désigne la forme invariante "élément de volume" de C^n, $\tau_n = \frac{\beta^n}{n\,!}$

$$\beta = \frac{i}{2} \sum dz_k \wedge d\bar{z}_k = \frac{i}{2}\, d_z d_{\bar{z}} \|z\|^2 \ ,$$

alors l'application : $t_{(i)(j)} \longrightarrow T_{(i)(j)} = t_{(i)(j)}\, \tau_n$

associe canoniquement aux coefficients de t des distributions $T_{(i)(j)}$.

D'autre part, à une variété linéaire L^p , <u>nous associons canoniquement une forme différentielle $\omega(L^p)$</u> définie de la manière suivante : on considère une transformation unitaire appliquant $C^p(z_1, .., z_p)$ sur L^p , qui est alors défini par $z'_{p+j} = 0$, $j = 1, \ldots, n-p$. On pose

$$\omega(L^p) = \frac{\beta^p}{p\,!}(dz') = \left(\frac{i}{2}\right)^p (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \sum \alpha^{(s)}\, \bar{\alpha}^{(t)}\, dz_{s_1} \wedge \cdot\cdot \wedge dz_{s_p} \wedge d\bar{z}_{t_1} \,\cdot\cdot\, d\bar{z}_{t_p}$$

où $\alpha^{(s)} = \|a^s_j\|_{\substack{s = 1, \ldots, p \\ j \in (s)}}$ si $L^p = [z_j \,;\, z_j = \sum a^s_j z'_s \,;\, 1 \leq j \leq n \ , \ 1 \leq s \leq p]$

(a^s_j) étant une transformation unitaire . On vérifie que

$$L^p \longrightarrow \omega(L^p)$$

est une application injective des sous-espaces L^p de C^n dans l'espace des formes différentielles ; on a pour l'adjointe $^{*}\omega(L^p) = \omega(L^{n-p})$, L^{n-p} étant le sous-espace orthogonal complémentaire .

Définition . Un courant t est dit positif si :

a) il est de type (q,q) , $0 \leq q \leq n$,

b) pour tout L^{n-q} , $\sigma[t, L^{n-q}] = t \wedge \omega(L^{n-q})$

est une distribution positive .

Ceci entraîne que $\sigma(t, L^{n-q})$ soit une mesure positive .

Propriétés . Notons les propriétés suivantes :

1) L'application $t \to \sigma[t, L^{n-q}]$ est injective . En fait sur la grassmanienne complexe au voisinage de tout L_o^{n-q} donné , on peut trouver des L_s^{n-q} (en nombre $N = (C_n^q)^2$) de manière que les coefficients $t_{(i)(j)}$ de t s'expriment comme combinaisons linéaires des $\sigma_s = \sigma[t, L^{n-q}]$; un tel système sera dit régulier .

2) En conséquence un courant positif a la continuité des mesures (continuité d'ordre zéro) ; les $T_{(i)(j)}$ associées au $t_{(i)(j)}$ sont des mesures complexes ; donc t s'étend à l'espace $C^o_{q,q}$ des formes différentielles à coefficients continus de type (q,q) .

3) Soit T_+^p le cône des courants positifs de type (p,p) (on dira de degré p ou de dimension n-p) . Soit Φ_+^p le cône de ceux qui sont représentés par des formes à coefficients continus . Si $t \in T_+^p$ et $\varphi \in \Phi_+^1$, $t_1 = t \wedge \varphi \in T_+^{p+1}$. En particulier les formes β , β^p , $\omega(L^q)$ sont positives .
De même la forme $i\, d_z\, d_{\bar z}\, V$, si V est une fonction plurisousharmonique .

De même ,

$$\alpha_\zeta = \frac{i}{2} \, d_z \, d_{\bar z} \, \log \| z - \zeta \| \; ,$$

et ses puissances extérieures α_ζ^p , pour $z \neq \zeta$ (α_ζ est la forme associée à la métrique de l'espace projectif des L^1 issus de ζ) .

4) Si t est positif , de dimension p , ($t \in T_+^{n-p}$) ,

$$\sigma = \frac{1}{p\,!} \, t \wedge \beta^p \quad , \quad \nu = \pi^{-p} t \wedge \alpha_\zeta^p$$

sont des mesures positives . On vérifie que dans un ouvert G , $\|\sigma\|_G = \int_G \sigma$ donne une norme pour $t \in T_+^{n-p}$ équivalente à la norme classique définie par

$$N(t, G) = \sup | t(\varphi) | \, , \quad \varphi \in \mathcal{D}_{p,p}(G) \quad , \|\varphi\| = \sup | \varphi_{(i)(j)} | \leq 1 \; .$$

De même, $N'(t,G) = \sup \| t \wedge \omega(L^p) \|_G$ pour les L^p d'un système régulier.

5) Si de plus t est <u>fermé</u> c'est-à-dire

$$bt(\varphi) = t(d\varphi) = 0 \quad ,$$

on a la propriété suivante qui intervient d'une manière essentielle dans les démonstrations concernant les propriétés métriques des ensembles analytiques .

Soient $B_1 = B(\zeta , r_1)$, $B_2 = B(\zeta , r_2)$ $0 < r_1 < r_2$

deux boules concentriques de centre ζ . On a :

$$0 < \int_{B_2 - B_1} \nu = p\,!\, \pi^{-p} \left[\frac{\sigma(r_2)}{r_2^{2p}} - \frac{\sigma(r_1)}{r_1^{2p}} \right] .$$

D'où résulte : <u>pour un courant positif t de dimension p , $\sigma(r) \; r^{-2p}$ est une fonction croissante de</u> r , et la limite

$$\nu(\zeta , 0) = \lim_{x=0} \; p\,!\, \pi^{-p} \sigma(r) \, r^{-2p}$$

existe, ce qui prolonge la mesure ν de $D - \zeta$ à ζ par addition d'une mesure positive ponctuelle en ζ.

5. <u>Le courant d'intégration</u> sur un ensemble analytique complexe. On établit

<u>Théorème</u>. L'opérateur $t(\varphi) = \int_A \varphi$.

défini par prolongement (simple extension) de $\mathcal{D}_{pp}(\Omega - A')$ à $\mathcal{D}_{pp}(\Omega)$ existe et est unique. Il possède les trois propriétés :

a) c'est le seul prolongement de $t_o(\varphi)$ qui ait une norme nulle sur A' (extension simple),

b) il est fermé,

c) il est positif.

La démonstration repose essentiellement sur un "théorème de Stockes dans les structures différentiables" (cf. [7]) qui dit entre autres : si un courant fermé a la continuité d'ordre zéro dans $D - E$ (E ensemble fermé), pour qu'il s'étende de $D - E$ à D, il faut et il suffit qu'il existe une famille de fonctions une fois dérivables $\alpha_t(x)$, vérifiant $\alpha_t(x) \geqslant 0$, $\alpha_t(x) = 1$ dans un voisinage ω_t de E, et à support dans un voisinage ω'_t de E, ω'_t tendant vers E quand $t \longrightarrow 0$, et qu'on ait

$$\lim \ t \wedge d\alpha_t = 0$$

quand $t \longrightarrow 0$. La condition est locale et il suffit de construire de tels noyaux relatifs aux parties compactes de E.

En particulier, si E est l'image C^1 d'une variété linéaire R^m de dimension réelle m, il suffit qu'on ait

$$\lim_{r=0} \ r^{-1} \|t\|_G^r = 0$$

pour tout compact G, où la norme $\|t\|_G^r$ est calculée sur les formes $\varphi \in \mathcal{D}_{pp}(G_r)$ à support dans $G_r = [x \in G, \quad \text{distance de } x \text{ à } E < r]$.

On obtient ainsi une notion de "frontière nulle" au sens du théorème de Stockes .

La démonstration initiale donnée dans [7] consiste à voir que la condition est vérifiée par la norme du courant $t_o(\varphi)$; pour cette norme on peut prendre σ , qui est dans ce cas l'aire de la variété $A - A'$. Tout revient alors à obtenir une limitation suffisamment précise de σ au voisinage des points de A' . L'énoncé suivant à paraître dans un prochain travail permet de simplifier cette partie de la démonstration .

Proposition . Soit A un ensemble analytique de dimension pure p contenant l'origine et η l'ensemble des L^{n-p} qui coupent A de manière que l'origine ne soit pas un point isolé de l'intersection . Alors

1) η s'identifie à un sous-ensemble analytique (c'est-à-dire algébrique) de la grassmanienne ,

2) il existe des systèmes d'axes orthogonaux d'origine x dont aucun sous-espace coordonné de dimension complexe $n-p$ n'appartient à η .

3) il existe relativement à un tel système d'axes un polycercle $P = [z \; ; |z_k| < a_k \, , \; 1 \leq k \leq n \; , \; a_k > 0]$ de manière que les projections de $A \cap P$ sur les espaces coordonnés C^p soient des applications propres .

Cet énoncé rend évidente l'existence dans une boule $\|z\| < r$ d'une majoration

$$\sigma(r) \leq k\, r^{2p}$$

pour la norme de t_o et permet l'application du théorème de Stockes généralisé .

6 . Familles bornées d'ensembles analytiques. Dorénavant on va considérer l'application

$$A \longrightarrow t(A) \subset T_+^p$$

qui associe à un ensemble analytique A de dimension pure p un courant positif fermé .

Les familles de courants positifs dans un domaine D donnent lieu aux mêmes propriétés que les familles de mesures positives .

On dira que t_n converge faiblement vers t si $t_n(\varphi)$ a une limite sur toute $\varphi \in \mathcal{D}_{pp}(D)$. Alors :

1) si t_n converge faiblement , $t = \lim t_n \subset T_+^p$. De plus les normes $\| t_n \|$ sont bornées sur tout compact de Ω .

2) Si les $\| t \|$ sont bornées sur tout compact, la famille $\mathcal{F}$ sera dite <u>bornée</u> localement . Elle est <u>normale</u> car de toute suite t_q on peut extraire une suite qui converge faiblement [considérer les $t_q \wedge \omega(L_s^{n-p})$ pour un système régulier de L_s^{n-p}] .

3) Soit $\mathcal{F}^1$ une famille de courants positifs fermés de dimension p dans D : sur tout compact $K \subset D$, les nombres

$$\nu(\zeta , 0) , \nu(\zeta , r) = p ! \pi^{-p} \sigma(\zeta , r) r^{-2p}$$

sont bornés , $\sigma(\zeta , r)$ étant la mesure σ portée par la boule $\| z - \zeta \| < r$, supposée portée par K .

4) Si $t_n \longrightarrow t$ faiblement, et $x_q \longrightarrow x$, on a

(2) $$\nu_t(x, 0) \geqslant \lim. \sup._q \nu_{t_q}(x_q , 0) .$$

5) En particulier $\nu(x, 0)$ est une fonction semi-continue supérieurement de x .

<u>Définition</u> . Une famille $A_{(i)}$ d'ensembles analytiques de dimension p sera dite <u>localement bornée</u> dans D si les courants $t_{(i)} = t[A_{(i)}]$ forment une suite localement bornée dans D .

Propriétés du nombre $\nu(x, 0)$ pour les ensembles analytiques. Pour les diviseurs $f = 0$, il est aisé de voir que si au voisinage de l'origine 0,

$$f = P_q + P_{q+1} + \ldots$$

le polynome homogène non nul de plus bas degré étant de degré q, on a

$$\nu(0, 0) = q .$$

D'autre part, une démonstration élémentaire donne le résultat suivant : si x est un point ordinaire sur A, $\nu(x, 0) = 1$. Il résulte alors de (2)

$$\nu(x, 0) \geqslant 1$$

pour $x \in A$. Récemment P. Thie, élève de Stoll, a établi [11] que le nombre $\nu(x, 0)$ était toujours un entier positif. On a

Proposition (Thie). Soit $x \in A$, A ensemble analytique de dimension p pure. Alors

$$\nu(x, 0) = \nu \sum_s m_s m'_s$$

où l'indice s est relatif à la décomposition du cône tangent P au point x en composantes $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ inéductibles ; m'_s est le degré de γ_s, qui vaut encore le nombre $\nu(x, 0)$ pour γ_s ; m_s est le degré de l'application holomorphe de A sur γ_s au voisinage de l'origine.

Indiquons des conséquences :

Si $\sigma(x, r)$ est "l'aire" de A dans la boule $\| z - x \| \leq r$, et $\ell(x, r)$, la mesure (2p - 1 dimensionnelle) de $A \cap [\| z - x \| = r]$, on a, τ_{2p}, ω_{2p-1} étant la mesure de l'intérieur et de la frontière de la boule unité de dimension réelle $2p$:

$$\sigma(x\,,\ r) \geqslant \nu(x\,,0)\ \tau_{2p}\ r^{2p} \geqslant \tau_{2p}\ r^{2p}$$

$$\ell(x\,,\ r) \geqslant \nu(x\,,0)\ \omega_{2p-1}\ r^{2p-1} \geqslant \omega_{2p-1}\ r^{2p-1}\ .$$

En particulier si A est de dimension un , $\ell(x\,,r) \geqslant 2\pi r$.

La classe des courants positifs fermés t qui sont des courants $t(A)$, A ensemble analytique complexe , se distingue ainsi par les propriétés :

(I) t est positif ,

(II) t est fermé ,

(III) le nombre $\nu(x\,,0)$ pour $x \in$ supp t a une borne inférieure $c > 0$,

(IV) $\nu(x\,,0)$ est un entier pour $x \in$ supp t .

Existe-t-il des courants possèdant les trois premières propriétés (classe Λ) et qui ne sont pas des ensembles analytiques ? Ces propriétés entraînent :

Proposition . Si $t_n \in \Lambda$ et t_n converge faiblement , alors $t = \lim. t_n \in \Lambda$ et lim supp t_n = supp t .

Pour $t \in \Lambda$, la mesure de Hausdorff de supp t en dimension $2\,p+1$ est nulle . Il en résulte que l'ensemble des L^{n-p} par un point qui coupent supp t de manière que l'intersection contienne un continu est de première catégorie .

Ceci conduit (cf. [2]) à l'énoncé suivant établi par E. Bishop :

Proposition . Si des ensembles analytiques A_q dans D de dimension pure p sont tels que les $t(A_q)$ forment une famille bornée sur tout compact et si $A_q \longrightarrow A$ au sens des ensembles , alors A est un ensemble analytique .

On remarque qu'il existe des axes tels que $[z_1 = 0, \ldots, z_p = 0] \cap A$ soit un ensemble discontinu. Un point x de A a alors un voisinage "manchon" pour A de la forme $S \times T$ avec $[S \times bT] \cap A = \emptyset$ ce qui entraîne $[S \times bT] \cap A_q = \emptyset$ pour $q > q_o$. Il s'ensuit que les sections de presque tous les A_q par $[S \times (x \in T)]$ sont de dimension zéro, donc les applications π des A_q sur S sont propres. Elles ont un degré λ_q, évidemment borné. Alors, si $z^o \in (S \times T) - A$, on définit $f_q(z) = \prod [g(z) - g(z_{i,q})]$ où $\{z_{i,q}\}$ sont les points de A_q composants

$$\{z_{i,q}\} = \pi^{-1}[\pi(z)] \cap A_q ,$$

et où $g(z)$ est une fonction holomorphe sur $S \times T$ avec $g(z^o) \neq 0$.

Les f_q sont holomorphes sur $S \times T$ et convergent vers $f(z)$ uniformément. On a ainsi $A \subset [z \ ; \ f(z) = 0]$ et $f(z^o) \neq 0$. Comme z^o est un point quelconque de $S \times T - A$, A est bien un ensemble analytique.

<u>Théorème</u>. Les familles $\mathcal{F}$ localement bornées d'ensembles analytiques complexes sont normales.

En effet, de toute suite $A_q \in \mathcal{F}$ on peut extraire une suite telle que $t_q = t(A_q)$ converge. Soit $t = \lim t_q$; alors $A_q = \operatorname{supp} t(A_q) \to \operatorname{supp} t = A$ et A est un ensemble analytique d'après l'énoncé précédent.

On en déduit :

<u>Conséquences</u>. 1) Le théorème de Remmert Stein : si B est un ensemble analytique dans D avec dim. $B \leq p-1$, si A est un ensemble analytique de dimension pure p, dans $D - B$, alors $\bar{A}$ prolonge A dans tout D.

2) L'énoncé suivant (conjoncture de Stoll) : si A est de dimension pure dans $D - B$, si B est un ensemble analytique dans D et si $\|t(A)\|_{D-B} \leq \infty$, alors $\bar{A}$ prolonge A dans D.

Ces deux énoncés sont établis dans [3] par la méthode précédente. Ils ne semblent pas épuiser la recherche des hypothèses minima à faire sur E (fermé) pour que l'application de restriction de l'espace $A_b(D)$ dans $A_b(D - E)$ soit bijective, $A_b(\Omega)$ désignant l'espace des ensembles analytiques bornés dans Ω.

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>

[1] ANDREOTTI (A.) et NORGUET (F.) - Quelques propriétés de courants définis à l'aide de fonctions holomorphes, (Volume I de ces prépublications, à paraître aussi aux Anais da Academia Brasileira de Ciencias).

[2] BISHOP (E.) - Conditions for the analyticity of certain sets. Michigan Math. Journal. Vol. 11, 1964, p. 289 - 304.

[3] GUNNING (R.) et ROSSI (H.) - Analytic functions of several complex variables. Englewood Cliffs (N. J.), Prentice - Hall, 1965.

[4] HERRERA (M.) - Integration on a semi-analytic set (à paraître au Bull. Soc. Math. de France, 1966).

[5] HERVE (M.) - Several complex variables, Local Theory. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1963.

[6] LELONG (P.) - Integration of a differential form on an analytic complex subrariety, Proceedings Nat. Acad. of Science, 43, p. 246-248, 1957).

[7] LELONG (P.) - Intégration sur un ensemble analytique complexe. Bull. Soc. Math. de France, t. 85, 1957, p. 239 - 262.

[8] LELONG (P.) - Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives. Colloque de Varenna (C. I. M. E.) Juillet 1963. Editions Cremonese, Rome.

[9] de RHAM (G.) - Variétés différentiables. Hermann, Paris.

[10] STOLL (W.) - The growth of the area of a transcendental analytic set. Math. Zeitschrift, 81, 1963, p. 76-98.

[11] THIE (P.) - On the Lelong's number. Thèse de l'Université de Notre - Dame (Indiana, U. S. A.), 1965.