R. Gérard

Deuxième partie : théorie globale Chapitre II

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1968, tome 5
« Théorie de Fuchs sur une variété analytique complexe », , exp. n° 3, p. 45-59
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1968__5__A4_0>

DEUXIEME PARTIE : THEORIE GLOBALE

CHAPITRE II

Dans cette partie, nous nous donnons une variété analytique complexe V de dimension finie m et un sous-ensemble analytique A de V, de codimension un en chacun de ses points dont les composantes irréductibles ainsi que l'ensemble $S(A)$ de ses singularités sont sans singularité. La variété $V-A$ est notée $\hat{V}$.

§ 1. DEFINITION DE L'ENSEMBLE $\Omega^{p\times p}(V,A)$. RESIDU D'UN ELEMENT DE $\Omega^{p\times p}(V,A)$.

a) L'ensemble analytique A est sans singularité. Notons $\Omega^{p\times p}(V,A)$ l'ensemble des formes différentielles ω de degré un appartenant à $\Omega^{p\times p}(V-A)$ et telles que : pour tout point $M\in A$, il existe un quadruplet (U, F_U, P_U, Π_U) vérifiant les conditions I suivantes :

(I)

1°) U est un voisinage ouvert de M dans V tel que $A\cap U$ soit irréductible dans U.

2°) F_U est une fonction holomorphe sur U telle que

$$A\cap U = \{ P\in U \mid F_U(P) = 0\}$$

et $(dF_U)(P) \neq 0$ pour tout $P\in A\cap U$.

3°) $P_U\in \mathcal{H}^{p\times p}(U)$, $\Pi_U\in\Omega^{p\times p}(U)$ et vérifient :

$$\omega \mid U - A\cap U = P_U \frac{dF_U}{F_U} + \Pi_U$$

Exemple.

La variété V est une surface de Riemann et alors $A = \bigcup_{i\in I}\{p_i\}$ où les p_i sont des points isolés. On réalisera les conditions I en choisissant un ouvert U_i de V telle que $U_i\cap A = \{p_i\}$ et en prenant pour fonction F_{U_i} une coordonnée locale z de V dans U_i s'annulant au point p_i.

Proposition 1.

Pour tout $\omega\in\Omega^{p\times p}(V,A)$, il existe une matrice R^{ω} définie et holomorphe sur A ne dépendant que de ω telle que :

$$R^{\omega} \mid A \cap U = P_U \mid A \cap U$$

quels que soient U, F_U, P_U *et* Π_U *satisfaisant aux conditions* I *de la définition de* $\Omega^{p \times p}(V, A)$.

Démonstration.

Considérons deux quadruplets (U, F_U, P_U, Π_U) et $(U', F_{U'}, P_{U'}, \Pi_{U'})$ satisfaisant aux conditions I . Sur $U \cap U' \cap \complement A$ (supposé non vide) nous avons :

$$P_U \frac{d F_U}{F_U} + \Pi_U = P_{U'} \frac{d F_{U'}}{F_{U'}} + \Pi_{U'} \quad .$$

Soit Q un point de $U \cap U' \cap A$; comme F_U et $F_{U'}$ sont des générateurs de l'idéal de A au point Q (ce sont des éléments irréductibles de l'anneau local) , il existe un voisinage $v(Q) \subset U \cap U'$ du point Q tel que sur ce voisinage l'on ait

$$F_{U'} = K F_U \quad .$$

où K est une fonction holomorphe inversible sur $v(Q)$. Nous avons sur $v(Q) \cap \complement A$

$$P_U \frac{d F_U}{F_U} + \Pi_U = P_{U'} \frac{d K}{K} + P_{U'} \frac{d F_U}{F_U} + \Pi_{U'} \quad ,$$

c'est à dire :

$$(P_U - P_{U'})\, d F_U = F_U \left(\Pi_{U'} - \Pi_U + P_{U'} \frac{d K}{K}\right)$$

et comme $(d F)(Q) \neq 0$, nous avons :

$$P_U(Q) = P_{U'}(Q) \quad .$$

Ce qui prouve la proposition 1 .

Définition 1.

La fonction R^{ω} *sera notée* $\text{rés}_V\, \omega$ *et appelée le résidu de* ω .

Proposition 2.

Si le résidu d'un élément ω *de* $\Omega^{p \times p}(V, A)$ *est nul, alors* ω *est* restriction à $V-A$ d'un élément de $\Omega^{p\times p}(V)$.

Démonstration.

Soit ω un élément de $\Omega^{p\times p}(V, A)$ vérifiant $\text{rés}_V\ \omega = 0$. Il suffit de prouver qu'il se prolonge localement au voisinage de tout point M de A en une forme différentielle holomorphe.

Par hypothèse : $$\text{rés}_V\,\omega \mid A\cap U = P_U \mid A\cap U = 0 \ ,$$

donc il existe un voisinage v de M dans U tel que :

$$P_U = K\,F_U \qquad \text{sur } v \ ,$$

où K est une matrice holomorphe dans v. Nous avons donc :

$$\omega \mid v \cap \complement A = K\,d\,F_U + \pi_U \ .$$

Le second membre est holomorphe sur v, c.q.f.d.

b) L'ensemble analytique A admet des singularités. Désignons par S l'ensemble des points singuliers de A. Soit (A^*, μ) le normalisé de A et posons $S^* = \mu^{-1}(S)$. Nous noterons cette fois $\Omega^{p\times p}(V, A)$ le sous ensemble de $\Omega^{p\times p}(V-S, A-S)$ des 1-formes différentielles matricielles ω pour lesquelles il existe une fonction matricielle R^{ω} définie et holomorphe sur A^* telle que :

$$R^{\omega} = (\text{rés}_{V-S}\,\omega)\circ\mu \qquad \text{sur } A^* - S^* \ .$$

Cette fonction R^{ω} sera encore appelée le résidu de ω et notée $\text{rés}_V\ \omega$.

Proposition 3.

Soit ω un élément de $\Omega^{p\times p}(V-S, A-S)$. Si $\text{rés}_{V-S}\ \omega = 0$ alors ω est la restriction à $V-S$ d'un élément de $\Omega^{p\times p}(V)$.

Démonstration.

La condition $\text{rés}_{V-S}\,\omega = 0$ entraine que ω est la restriction à

$V - S - (A - S)$ d'une forme différentielle ω' holomorphe sur $V - S$. Comme la codimension de S est supérieure ou égale à 2 , ω' est elle-même la restriction à $V - S$ d'une forme différentielle holomorphe sur V , ce qui prouve la proposition 3.

Corollaire 1.

Si $\omega \in \Omega^{p \times p}(V, A)$ et $\text{rés}_V\, \omega = 0$, alors ω est la restriction à $V - A$ d'une forme différentielle holomorphe sur V .

Définition 2.

Si M est un point de l'ensemble analytique A , nous appellerons voisinage privilégié de M par rapport à A , tout voisinage U de M dans V tel que toutes les composantes irréductibles de $A \cap U$ contiennent M .

Pour toute forme différentielle de degré un ω appartenant à $\Omega^{p \times p}(V - A)$, nous désignerons par (P) la propriété suivante :

"Pour tout $M \in A$, il existe un voisinage privilégié $U(M)$ de M dans V tel que si $(A_i)_{1 \leq i \leq q_M}$ désignent les composantes irréductibles de $A \cap U$ l'on ait :

$$\omega = \sum_{i=1}^{q_M} P_i \frac{dF_i}{F_i} + \pi_U \quad \text{sur } U \cap \complement A , \tag{1}$$

où

a) $P_i \in \mathfrak{F}^{p \times p}(U)$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, q_M$,

b) $\pi_U \in \Omega^{p \times p}(U)$,

c) $F_i \mid A_i = 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, q_M$ " .

Proposition 4.

Si $\omega \in \Omega^{p \times p}(V - A)$ possède la propriété (P) alors $\omega \in \Omega^{p \times p}(V, A)$.

Nous avons évidemment $\omega \in \Omega^{p \times p}(V - S, A - S)$ et alors $\text{rés}_{V-S}\, \omega$ est bien défini et holomorphe sur $A - S$. La fonction $R'^{\omega} = (\text{rés}_{V-S})\omega \circ \mu$ est holomorphe sur $A^* - S^*$. Il suffit donc de montrer que R'^{ω} se prolonge en une fonction holomorphe sur A^* . Soit M^* un point de S^* et $M = \mu(M^*)$, désignons par $(A_i)_{1 \leq i \leq q_M}$ les composantes irréductibles de A passant par M , dans un voisinage privilégié $U(M)$ de M nous avons :

$$\omega \mid U(M) - A \cap U(M) = \sum_{i=1}^{q_M} P_i \frac{dF_i}{F_i} + \pi_U \quad .$$

Pour tout $i = 1 , 2 , \dots , q_M$,

$$R_i'^{\omega} = R'^{\omega} \mid \mu^{-1}(A_i \cap U - S \cap U \cap A_i)$$

$$= P_i \circ \mu \Big| A_i \cap U - S \cap U \cap A_i \quad .$$

Comme P_i est holomorphe sur U , il résulte que $R_i'^{\omega}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur

$$\overline{\mu^{-1} (A_i \cap U - S \cap A_i \cap U)} \ .$$

Ce qui entraine que R'^{ω} est la restriction à $A^* - S^*$ d'une fonction $R^{*\omega}$ holomorphe sur A^* .

§ 2. EXEMPLES.

Dans ce paragraphe, A sera réunion d'un nombre fini q de composantes irréductibles A_i sans singularité.

a) Supposons que V est une variété de Stein et que chaque A_i est défini par l'annulation d'une seule fonction F_i holomorphe dans V vérifiant $(dF_i)(M) \neq 0$ pour tout M appartenant à A_i .

Proposition 5.

Tout élément ω de $\Omega^{p\times p}(V , A)$ vérifie dans $V - A$

$$\omega = \sum_{i=1}^{q} P_i \frac{dF_i}{F_i} + \Theta$$

où

$$P_i \in \mathcal{H}^{p\times p}(V) \quad \text{et} \quad \Theta \in \Omega^{p\times p}(V) \ .$$

Démonstration.
La fonction holomorphe $R^{\omega} = \text{rés}_V\, \omega$ est la donnée de q fonctions R_i^{ω} $(i = 1,2 , \dots , q)$ holomorphes respectivement sur A_i $(i = 1 , 2 , \dots , q)$. Comme V est une variété de Stein, il existe pour tout i une fonction P_i holomorphe sur V telle que :

$$P_i \mid A_i = R_i^{\omega} \ .$$

Montrons que la forme différentielle

$$\Theta = \omega - \sum_{i=1}^{q} P_i \frac{d F_i}{F_i}$$

qui appartient à $\Omega^{p \times p}(V, A)$ se prolonge en une forme différentielle holomorphe sur V. Soit M un point quelconque de A - S, ce point appartient à une composante irréductible A_i de A et à une seule. Il existe un voisinage U(M) de M dans V et des matrices $Q_i \in \mathcal{H}^{p \times p}(U)$, $\pi_i \in \Omega^{p \times p}(U)$ telles que :

$$\omega \mid U - A \cap U = Q_i \frac{d F_i}{F_i} + \pi_i \; .$$

Comme $(dF_i)(N) \neq 0$ pour tout $N \in A_i$ nous avons :

$$(Q_i - P_i) \mid U \cap A_i = 0$$

et donc

$$Q_i - P_i = K F_i$$

où K est une matrice carrée d'ordre p dont tous les éléments sont holomorphes inversibles. Ce résultat entraine que pour tout $i = 1, 2, \ldots, q$

$$\text{rés}_{V-S} \, \Theta \mid A_i - S = 0$$

et donc $\text{rés}_{V-S} \, \Theta = 0$, ce qui signifie que Θ est la restriction à $V-A$ d'une forme différentielle holomorphe sur V et comme sur V - A nous avons

$$\omega = \sum_{i=1}^{q} P_i \frac{d F_i}{F_i} + \Theta$$

la proposition 4 est démontrée.

Remarque 1.

Cette proposition nous permet de donner une réciproque à la proposition 4 du § 1. En effet, il suffit de choisir le voisinage suffisamment petit et de plus de Stein, ce qui est toujours possible.

b) Supposons que V est l'espace projectif complexe, quotient de

$\mathbb{C}^{m+1} - \{0\}$ par l'application π qui identifie les points situés sur une même droite complexe issue de l'origine de $\mathbb{C}^{m+1}$. Soit F_i une équation polynômiale irréductible de $\pi^{-1}(A_i)$ et soit $\hat{\pi}$ la restriction de π à $\mathbb{C}^{m+1} - (\pi^{-1}(A) \cup \{0\})$.

Proposition 6.

Pour tout $\omega \in \Omega^{p \times p}(V, A)$ on a :

$$\omega = \sum_{i=1}^{q} \mathcal{A}_i \frac{dF_i}{F_i}$$

où les matrices $\mathcal{A}_i$ sont des $p \times p$ - matrices constantes liées par la relation

$$\sum_{i=1}^{q} (\text{degré } F_i)\, \mathcal{A}_i = 0$$

Démonstration .

Désignons par $x_0, x_1, \ldots, x_m$ un système de coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ et par $\mathcal{U} = \{U_j\}_{0 \leq j \leq m}$ le recouvrement canonique de $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ par les ouverts de coordonnées définis respectivement par $x_j \neq 0$ et posons

$$y_j^k = \frac{x_k}{x_j} \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m \quad ; \quad k = 0, 1, \ldots, m \quad \text{et} \quad k \neq j .$$

Pour tout i, F_i est un polynôme mais au voisinage de tout point de A_i ce polynôme est équivalent à un polynôme distingué du premier degré ce qui entraine que $(dF_i)(M) \neq 0$ pour tout M appartenant à A_i. Sur l'ouvert de Stein U_j nous avons :

$$\omega \mid U_j - A \cap U_j = \sum_{i=1}^{q} P_j^i \frac{df_i}{f_i} + \overline{\omega}_j$$

où

$$P_j^i \in \mathcal{H}^{p \times p}(U_j) \quad , \ \overline{\omega}_j \in \Omega^{p \times p}(U_j) ,$$

et où les fonctions f_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ sont définies par :

$$F_i(x_0, x_1, \ldots, x_m) = (x_j)^{p_i} f_i(y_j^0, y_j^1, \ldots, y_j^m) .$$

La fonction $\text{rés}_V\, \omega$ est constituée de q fonctions $\mathcal{A}_i$ respectivement holomorphe sur A_i ; comme A_i est compact, la fonction $\mathcal{A}_i$ est constante. Considérons la forme différentielle

$$\hat{\iota} = \sum_{i=1}^{q} \mathcal{A}_i \frac{dF_i}{F_i} ,$$

et montrons qu'il existe une forme différentielle ι sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C}) - A$ telle que

$$\pi^* \iota = \hat{\iota} .$$

Pour cela il suffit de prouver que

$$\sum_{i=1}^{q} (\text{degré } F_i)\, \mathcal{A}_i = 0 .$$

Nous avons :

$$\hat{\pi}^* (\omega \mid U_j - U_j \cap A) = \sum_{i=1}^{q} P_j^i \frac{dF_i}{F_i} + \sum_{i=1}^{q} P_j^i \frac{d(x_j^{-p_i})}{x_j^{-p_i}} + \overline{\omega}_j$$

$$= \sum_{i=1}^{q} P_j^i \frac{dF_i}{F_i} + \sum_{i=1}^{q} P_j^i (-p_i) \frac{dx_j}{x_j} + \overline{\omega}_j .$$

On peut supposer sans nuire à la généralité du raisonnement qui va suivre que pour un j donné la sous variété définie par $x_j = 0$ n'appartient pas à A . Soit D une droite projective complexe quelconque de $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$. Le théorème des résidus appliqué à la forme différentielle

$$\omega \mid (U_j - U_j \cap A) \cap D$$

nous donne immédiatement

$$\sum_{i=1}^{q} (\text{degré } F_i)\, P_j^i \mid A_i \cap D = 0 ,$$

c'est à dire :

$$\sum_{i=1}^{q} (\text{degré } F_i)\, \mathcal{A}_i = 0 .$$

En d'autres termes, il existe une forme différentielle ι définie et holomorphe sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C}) - A$ telle que

$$\hat{\pi}^* \iota = \hat{\iota} .$$

Mais alors vu la définition de ι la forme différentielle $\omega - \iota$ est holomorphe sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$, comme il n'y a pas d'autres formes différentielles holomorphes sur $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ que la forme différentielle nulle, la proposition 5 se trouve démontrée.

§ 3. STABILITE DE $\Omega^{p\times p}(V, A)$ PAR MODIFICATION DE HOPF.

Soit Σ un sous ensemble analytique de V, sans singularité et de codimension supérieure ou égale à 2. On peut supposer sans nuire à la généralité que Σ est irréductible. Désignons par V' la variété obtenue à partir de V en faisant un éclatement de Hopf [10] σ le long de Σ, par A' le sous ensemble analytique $\sigma^{-1}(A)$ de V' et par $\Sigma' = \sigma^{-1}(\Sigma)$.

Théorème 1.

L'application σ^* est un isomorphisme de $\Omega^{p\times p}(V, A)$ sur $\Omega^{p\times p}(V', A')$.

Ce théorème va être une conséquence des lemmes suivants.

Lemme 1.

L'application σ^* est un isomorphismes de $\Omega^{p\times p}(V)$ sur $\Omega^{p\times p}(V')$.

Démonstration.

L'application σ étant analytique, il est évident que si $\omega \in \Omega^{p\times p}(V)$ on a $\sigma^* \omega \in \Omega^{p\times p}(V')$. Inversement soit ω' un élément de $\Omega^{p\times p}(V')$, comme σ est un isomorphisme analytique de $V' - \Sigma'$ sur $V - \Sigma$, il existe une forme différentielle $\hat{\omega} \in \Omega^{p\times p}(V - \Sigma)$ telle que :

$$\omega' \mid V' - \Sigma' = \sigma^* \hat{\omega} .$$

D'autre part l'ensemble analytique Σ étant de codimension supérieure ou égale à 2, il existe une forme différentielle ω appartenant à $\Omega^{p\times p}(V)$ telle que :

$$\omega \mid V - \Sigma = \hat{\omega}$$

mais alors l'égalité

$$\sigma^* \omega \mid V' - \Sigma' = \omega' \mid V' - \Sigma'$$

et de plus $\omega' \in \Omega^{p \times p}(V')$ et $\sigma^* \omega \in \Omega^{p \times p}(V')$ entrainent que

$$\sigma^* \omega = \omega' \quad \text{sur} \quad V' .$$

Ce qui démontre le lemme 1.

Lemme 2.

Si $\omega \in \Omega^{p \times p}(V,A)$ *alors* $\sigma^* \omega \in \Omega^{p \times p}(V',A')$.

Soit ω un élément de $\Omega^{p \times p}(V,A)$, nous avons $\sigma^* \omega \in \Omega^{p \times p}(V' - A')$ et même $\sigma^* \omega \in \Omega^{p \times p}(V' - \Sigma' \cap A' , A' - \Sigma' \cap A')$. Le fait d'appartenir à $\Omega^{p \times p}(V',A')$ étant une propriété locale, il suffit pour faire la démonstration de se placer au voisinage d'un point P' de $\Sigma' \cap A'$. Notons P la projection de P' sur V et utilisons la définition locale de l'éclatement σ .

Il existe un voisinage $U(P)$ de P dans V et des fonctions coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_m$ telles que :

a) $U(P)$ soit un ouvert de Stein privilégié pour A .

b) $U \cap \Sigma = \{ x \in U \mid x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0 \}$ où k est la codimension de Σ .

De plus $U(P)$ peut être choisi de manière à décrire localement σ , c'est à dire tel qu'il existe un isomorphisme analytique ρ de $\sigma^{-1}(U)$ sur le sous ensemble analytique sans singularité U^* de $U \times \mathbb{P}_{k-1}(\mathbb{C})$ défini par

$$U^* = \{ (x , t_1 , t_2 , \dots, t_k) \in U \times \mathbb{P}_{k-1}(\mathbb{C}) \mid x_u t_v = x_v t_u \text{ pour tout } u , v = 1,2,\dots,k \}$$

vérifiant

$$\pi \circ \rho = \sigma ,$$

où

a) $t_1, t_2, \dots, t_k$ forment un système de coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}_{k-1}(\mathbb{C})$,

b) π est la projection canonique de $U \times \mathbb{P}_{k-1}(\mathbb{C})$ sur U .

La variété U^* peut-être recouverte par les ouverts de coordonnées suivants U_j^* $(j = 1, 2, \dots, k)$ défini par $t_j \neq 0$ et muni des fonctions coordonnées

$$\frac{t_1}{t_j} , \frac{t_2}{t_j} , \dots, \frac{t_{j-1}}{t_j}, x_j, \frac{t_{j+1}}{t_j}, \dots, \frac{t_k}{t_j} , x_{k+1} , \dots, x_m .$$

Posons :

$$\xi_j^l = x_l \quad \text{si} \quad l > k \quad \text{ou si} \quad l = j$$

$$\xi_j^l = \frac{t_l}{t_j} \quad \text{si} \quad l \leq k \quad \text{et} \quad l \neq j \ .$$

Alors

$$x_l = \xi_j^l \quad \text{si} \quad l > k \quad \text{ou} \quad l = j$$

$$x_l = \xi_j^l \ \xi_j^j \quad \text{si} \quad l \leq k \quad \text{et} \ l \neq j \ .$$

Notons A_i $(i = 1,2,\dots,r)$ les composantes irréductibles de $A \cap U$, elles passent toutes par P car U est privilégié pour A . En restreignant éventuellement l'ouvert U , nous avons sur $U \cap \complement A$, la formule (1) (p. II.1.48.)

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} P_i \ \frac{dF_i}{F_i} + \overline{\omega} \quad .$$

Dans la suite nous éviterons d'écrire l'application ρ intervenant dans la définition locale de l'éclatement σ .

Si I désigne le sous-ensemble de $\{1 , 2,\dots,r\}$ des indices i tels que $A_i \cap U \supset \Sigma \cap U$; nous avons pour tout $i \in I$

$$(F_i \circ \sigma) \mid U_j^* = (\xi_j^j)^{p_i^j} \ G_i^j \ (\xi_j^1 \ , \ \xi_j^2 \ ,\dots, \ \xi_j^m \ ) \ ,$$

et la condition $(dF_i)(M) \neq 0$ pour tout $M \in U \cap A_i$ entraine, $p_i^j = 1$ et $G_i^j \ (\xi_j^1 \ ,\dots, \ \xi_j^{j-1}, 0, \ \xi_j^{j+1} \ ,\dots, \ \xi_j^m \ ) \neq 0$.

Mais alors nous avons sur $U_j^* - A' \cap U_j^*$

$$\sigma^* \omega = \sum_{i \in I} {}^*P_i \ \frac{d \ \xi_j^j}{\xi_j^j} + \sum_{i \in I} {}^*P_i \ \frac{d \ G_i^j}{G_i^j} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \notin I}}^{r} {}^*P_i \ \frac{d \ F_i}{F_i} + \sigma^* \ \overline{\omega}$$

où pour tout i , ${}^*P_i = P_i \ (\xi_j^1 \ \ \xi_j^j \ , \ \xi_j^2 \ \xi_j^j \ ,\dots,) = P_i \circ \sigma \mid U_j^*$)

Cette formule nous montre que la forme différentielle

$$\sigma^* \ \omega \mid U_j^* - A' \cap U_j^*$$

appartient à $\Omega^{p\times p}(U_j^*, A' \cap U_j^*)$. Ce résultat étant valable pour tout j nous avons par lã démontré que $\sigma^*\omega \in \Omega^{p\times p}(V',A')$ (cf. prop. 4 § 1) .

Démonstration du théorème 1.

Vu les lemmes ci-dessus, il reste à prouver que σ^* est surjective car elle est évidemment injective. Soit ω' une forme différentielle appartenant à $\Omega^{p\times p}(V',A')$, σ étant un isomorphisme analytique de $V'-\Sigma'$ sur $V-\Sigma$, il existe une forme $\tilde{\omega} \in \Omega^{p\times p}(V-\Sigma\cap A, A-\Sigma\cap A)$ telle que :

$$\iota^*\tilde{\omega} \mid V'-\Sigma' = \omega' .$$

Notons $R'(\omega')$ le résidu de ω' sur V' , cette fonction est définie et holomorphe sur A' et

$$R'(\omega') \circ \sigma^{-1} \mid A-\Sigma\cap A = R(\tilde{\omega}) = \text{rés}_{V-\Sigma\cap A}\tilde{\omega} .$$

Désignons par $(A_i)_{i\in I}$ les composantes irréductibles de A et posons

$$\tilde{R}_i = R(\tilde{\omega}) \mid A_i - \Sigma\cap A_i .$$

Il est évident que si $\Sigma\cap A = \emptyset$ alors $\tilde{\omega}$ appartient à $\Omega^{p\times p}(V, A)$ et le théorème se trouve démontré. Le seul cas à étudier est donc le cas ou $\Sigma\cap A \neq \emptyset$. Pour les indices i telles que $\Sigma\cap A_i = \emptyset$, $\tilde{R}_i$ est une fonction définie et holomorphe sur A_i . Par ailleurs si la codimension de $\Sigma\cap A_i$ est supérieure à 2 , il est clair que la fonction $\tilde{R}_i$ se prolonge en une fonction R_i holomorphe sur A_i . On peut donc supposer que la codimension de Σ est égale à 2 et le seul cas restant à étudier est celui des composantes irréductibles A_i contenant Σ . Rappelons que nous avons supposer Σ irréductible. L'application σ est un isomorphisme analytique de $\sigma^{-1}(A_i-\Sigma\cap A_i)$ sur $A_i - \Sigma\cap A_i$, nous avons donc

$$\tilde{R}_i \circ \sigma \mid \sigma^{-1}(A_i-\Sigma\cap A_i) = R' \mid \sigma^{-1}(A_i - \Sigma\cap A_i)$$

où R' est holomorphe sur $\sigma^{-1}(A_i)$. Montrons que R_i est la restriction à $A_i - \Sigma\cap A_i$ d'une fonction R_i sur A_i holomorphe. Pour cela plaçons nous au voisinage d'un point $P \in \Sigma\cap A_i$. Soit $U(P)$ un voisinage coordonné de P privilégié pour A_i possédant les propriétés suivantes ; $x_1, x_2, \dots, x_m$ désignant les

Fonctions coordonnées dans U :

a) $U \cap \Sigma = \{ (x_1,x_2,\dots,x_m) \in U \mid x_1 = x_2 = 0 \}$,

$P = (o,o,\dots,o) \in U$.

b) $A_i \cap U = \{ (x_1,x_2,\dots,x_m) \in U \mid F_i(x_1,x_2 ,\dots, x_m) = 0 \}$

où F_i est une fonction holomorphe dans U vérifiant $(dF_i)(M) \neq 0$ pour tout $M \in U \cap A_i$.

c) L'ouvert U décrit localement l'éclatement σ , c'est à dire qu'il existe un **isomorphisme** analytique ρ de $\sigma^{-1}(U)$ sur la sous variété U^* de $U \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ définie par :

$$U^* = \{(x,t_1,t_2) \in U \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \mid x_1 t_2 = x_2 t_1\}$$

avec

$$\pi \circ \rho = \sigma$$

où

1°) t_1,t_2 sont des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$,

2°) π est la projection canonique de $U \times \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ sur U .

Dans la suite nous n'écrirons pas explicitement l'isomorphisme ρ . La variété U^* est recouverte par les deux ouverts de coordonnées U_1^* défini par $t_1 \neq 0$ et muni des fonctions coordonnées

$$\xi_1^1 = x_1 \ , \ \xi_2^1 = \frac{t_2}{t_1} \ , \ \xi_3^1 = x_3 \ ,\dots, \ \xi_m^1 = x_m \ ,$$

et U_2^* défini par $t_2 \neq 0$ et muni des fonctions coordonnées

$$\xi_1^2 = \frac{t_1}{t_2} \ , \ \xi_2^2 = x_2 \ , \ \xi_3^2 = x_3 \ ,\dots, \ \xi_m^2 = x_m \ .$$

Nous avons

$$F_i \circ \sigma \mid U_1^* = \xi_1^1 \, G_i^1 \, (\xi_1^1 \, , \, \xi_2^1,\dots,\xi_m^1)$$

avec

$$G_i^1 \, (0 \, , \, \xi_2^1 \, ,\dots, \, \xi_m^1) \not\equiv 0$$

et

$$F_i \circ \sigma \mid U_2^* = \xi_2^2 \, G_i^2 \, (\xi_1^2 \, , \, \xi_2^2 \, ,\dots, \, \xi_m^2)$$

avec

$$G_i^2 \, (\xi_1^2 \, ,0, \, \xi_3^2 \, ,\dots, \, \xi_m^2) \not\equiv 0 \ .$$

Désignons par A''_i le sous ensemble analytique de U^* défini par

$$G_i^1 = 0 \quad \text{dans} \quad U_1^*$$

et

$$G_i^2 = 0 \quad \text{dans} \quad U_2^* .$$

Le fait que A_i soit sans singularité entraine que $\sigma \mid A''_i$ est un isomorphisme de $\overline{A''_i}$ sur $A_i \cap U$, mais comme $R' \mid \overline{A''_i}$ est holomorphe et comme

$$\tilde{R}_i \mid A_i \cap U - \Sigma \cap A_i \cap U = R' \circ \sigma \mid A''_i - \Sigma' \cap A''_i \quad ,$$

la fonction $\tilde{R}_i$ se prolonge en une fonction R_i holomorphe sur $A_i \cap U$. La famille $(R_i)_{i \in I}$ défini donc une fonction sur A holomorphe, il en résulte que la forme différentielle $\tilde{\omega}$ appartient à $\Omega^{p \times p}(V,A)$ et par suite l'application σ^* est surjective ce qui prouve le théorème 1.

Du théorème 1 nous déduisons un autre résultat intéressant concernant les résidus. Soient J l'ensemble des éléments $i \in I$ tels que $A_i \supset \Sigma$, et. A'_i l'adhérence de $\sigma^{-1}(A_i - \Sigma \cap A_i)$ dans V' .

Proposition 1.

Si $J \neq \emptyset$, nous avons pour tout $\omega' \in \Omega^{p \times p}(V',A')$,

$$\text{rés}_{V'} \omega' \mid \Sigma' = \sum_{i \in J} \text{rés}_{V'} \omega' \mid A'_i \cap \Sigma' \quad .$$

En effet soit $\omega' \in \Omega^{p \times p}(V',A')$, il existe $\omega \in \Omega^{p \times p}(V,A)$ telle que

$$\sigma^* \omega = \omega' ,$$

et si U est un voisinage d'un point $P \in \Sigma$ choisi comme dans la démonstration du lemme 2 dont nous utilisons les notations, nous avons :

$$\omega \mid U - A \cap U = \sum_{i=1}^{r} P_i \frac{d F_i}{F_i} + \overline{\omega} ,$$

et pour $j = 1,2$

$$\sigma^* \omega \mid U_j^* - A' \cap U_j^* = \sum_{i \in J} {}^*P_i \frac{d \xi_i^j}{\xi_i^j} + \sum_{i \in J} {}^*F_i \frac{d G_i^j}{G_i^j} + \sum_{\substack{i \in I \\ i \notin J}} {}^*P_i \frac{d F_i}{F_i} + \sigma^* \overline{\omega} ,$$

où $\quad {}^*P_i = P_i \circ \sigma \mid U_j^*$.

Alors

$$\text{rés}_{V'}\ \omega' \,|\, \Sigma' \cap U^{*} = \sum_{i \in J} {}^{*}P_i \,|\, \Sigma' \quad ,$$

or A'_j est défini dans U_j par

$$G_i^j = 0 \ .$$

Il en résulte que

$$\text{rés}_{V'}\ \omega' \,|\, A'_i \cap \Sigma' \cap U_j^{*} = {}^{*}P_i \,|\, A'_i \cap \Sigma' \cap U_j^{*}$$

ce qui prouve la proposition 6.