R. Gérard

Introduction

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1968, tome 5
« Théorie de Fuchs sur une variété analytique complexe », , p. I-IV
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1968__5__A1_0>

INTRODUCTION

Une équation différentielle linéaire et homogène est dite de Fuchs au voisinage de l'origine du plan complexe, si elle s'écrit dans un voisinage de ce point, sous la forme :

$$(1) \qquad x^n \frac{d^n y}{dx^n} + x^{n-1} a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx} + \dots + a_n(x) y = 0 \qquad ,$$

où les coefficients $a_i(x)$ sont holomorphes.

Supposons que les coefficients $a_i(x)$ $(i = 1 , 2 \dots n)$ de (1) soient holomorphes dans un disque D du plan complexe centré à l'origine. Notons R le revêtement universel de $D - \{0\}$ et Ψ la projection canonique de R sur sa base. Toute solution f de (1) est holomorphe sur R et il existe un nombre $\lambda(f)$ réel tel que

$$(2) \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in U}} \frac{f(Q)}{Q^{\lambda}} = 0 \qquad , \qquad Q \in R \qquad , \qquad x = \Psi(Q) \qquad ;$$

pour tout ouvert U de $\mathbb{C}$ contenant l'origine dans son adhérence et contenu dans un secteur angulaire de sommet l'origine différent du plan tout entier. Nous résumerons ceci en disant que f est d'ordre fini à l'origine.

Le théorème classique de Fuchs affirme que cette propriété des solutions caractérise les équations du type de Fuchs.

Dans une partie de sa thése [13] A.H.M. LEVELT a montré que l'étude de ces équations se ramène (pages 19-20, th. 2.9. et th. 2.10.) à celle des systèmes d'équations différentielles de la forme :

$$(3) \qquad df = \left(\frac{P(x)}{x} dx \right) f \qquad ,$$

où $P(x)$ est une matrice carrée holomorphe d'ordre n . La notion d'ordre fini se généralise évidemment aux fonctions à valeurs vectorielles et A.H.M. Levelt a caractérisé l'espace vectoriel des solutions d'un système d'équations différentielles du type (3) par la propriété d'être "faiblement singulier à l'origine"*.

* voir la notion généralisée (page II de cette introduction).

La première partie de ce travail dont les résultats ont été annoncés dans [5] et [6] généralise ces résultats de A.H.M. Levelt à plusieurs variables. Considérons par exemple un polydisque centré à l'origine de $\mathbb{C}^2$ (muni des coordonnées x_1 et x_2) . Notons cette fois R le revêtement universel de $\mathcal{D} = (D - \{0\})^2$. Dans ce cas nous généralisons la notion d'ordre fini (chap. I, page 9, déf. 3) en utilisant des limites suivant des ouverts distingués (chap. I, page 9, déf. 2). Cela nous permet d'introduire l'espace vectoriel $\mathcal{H}_o^{p\times q}(R)$ des (p,q)-matrices holomorphes sur R et d'ordre fini à l'origine. A l'aide des préliminaires algébriques (chap. I, § 1 , A) nous montrons, (chap. I, § 3) que tout sous-espace vectoriel E de dimension finie q de $\mathcal{H}_o^{p\times 1}(R)$, stable par les opérations du groupe fondamental de admet une base dont la matrice associée est de la forme :

$$U(M) \prod_{j=1}^{2} Q_j^{A_j} \times \prod_{j=1}^{2} Q_j^{F_j} \quad ,$$

où A_j et F_j $(j = 1 , 2)$ sont des matrices constantes ayant des propriétés remarquables (chap. I, § 3 , page 13) et où U est une (p,q)-matrice holomorphe dans D^2 .

L'espace vectoriel E est dit faiblement singulier à l'origine si le rang de la matrice U(0) est maximum. Dans le <u>cas où</u> q = p , nous montrons (chap. I, § 4) que E est alors l'espace vectoriel des solutions d'un système de Pfaff complètement intégrable de la forme :

$$df = \left(\sum_{j=1}^{2} \frac{P_j(x_1,x_2)}{x_j} dx_j \right) f \quad ,$$

où pour tout j , les (p,q)-matrices $P_j(x_1 , x_2)$ sont méromorphes dans D^2 et holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^2$. La réciproque de ce résultat est établie dans le § 6 du chapitre I .

Dans le § 5 du chapitre I , nous étudions les sous-espaces vectoriels de dimension finie p de $\mathcal{H}_o^{1\times 1}(R)$ faiblement singulier à l'origine, pour cela nous définissons une application Θ de $\mathcal{H}_o^{1\times 1}(R)$ dans $\mathcal{H}_o^{p\times 1}(R)$. Un tel espace vectoriel est alors l'espace vectoriel des solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles transformé pa Θ d'un système de Pfaff complètement intégrable.

- Cette théorie ne s'applique pas au cas où, la sous-variété singulière est :

$\{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\} \cup \{x_1 = x_2\}$ (au lieu de $\{x_1 = 0\} \cup \{x_2 = 0\}$ comme précédemment),

car elle utilise essentiellement la commutativité du groupe fondamental de $\emptyset$. Pour étudier ce cas nous effectuons un éclatement de Hopf à l'origine. Dans la variété "modifiée", les sous-variétés singulières sont en position générale, mais pour avoir la théorie locale à l'origine dans la variété de base, il faut faire une théorie globale dans la variété "modifiée" ou du moins sur certains ouverts de coordonnées qui sont de Stein.

Ceci nous amène tout naturellement à la deuxième partie de ce travail qui développe la théorie globale. Dans cette deuxième partie, on se donne une variété analytique complexe V de dimension finie, et un sous-ensemble analytique A de codimension un en chacun de ses points, dont les composantes irréductibles sont sans singularité. Le chapitre II est destiné à la définition et à l'étude d'une classe $\Omega^{p\times p}(V,A)$ de formes différentielles matricielles holomorphes dans $V - A$ qui joueront le rôle de formes coefficients dans les systèmes de Pfaff du type de Fuchs. Nous montrons en particulier la stabilité de $\Omega^{p\times p}(V,A)$ par les modifications de Hopf introduites dans ce chapitre, résultat essentiel pour développer la théorie globale dans le cas où les composantes irréductibles de A ne sont pas en position générale. Nous déterminons explicitement $\Omega^{p\times p}(V,A)$ lorsque V est une variété de Stein ou un espace projectif complexe, A n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles toutes définies par des équations globales. Dans le chapitre III, nous définissons la classe des systèmes de Pfaff complètement intégrable du type de Fuchs, un élément de cette classe étant caractérisé par la propriété de son espace vectoriel d'être "faiblement singulier" en tout point de A . Nous donnons alors la démonstration du résultat suivant :

" Pour qu'un système de Pfaff complètement intégrable :

$$df = \omega f$$

où ω est holomorphe sur $V - A$, soit du type de Fuchs, il faut et il suffit que $\omega \in \Omega^{p\times p}(V,A)$."

Compte tenu du chapitre II, ce théorème nous donne les systèmes de Pfaff du type de Fuchs sur une variété de Stein et sur un espace projectif complexe.

Dans le cas où les composantes irréductibles de A ne sont pas en position générale, notre définition des systèmes de Pfaff du type de Fuchs utilise certaines modifications, nous montrons sur un exemple (§ 3, exemple A) que cette notion peut être définie, avec toutefois moins de simplicité, sans avoir recourt à ces modifications. D'autres exemples sont donnés dans ce § 3 . L'exemple B nous montre un cas où, pour définir les systèmes de Pfaff du type de Fuchs, il suffit de poser la condition d'être faiblement singulier pour l'espace vectoriel des solutions en certains points de A qui sont les points singuliers de A .

La fonction hypergéométrique F_1 vérifie le système d'équations aux dérivées partielles :

$$x(1-x)(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (\gamma(x-y) - (\alpha+\beta+1)x^2 + (\alpha+\beta-\beta'+1)xy + \beta' y)\frac{\partial z}{\partial x} - \beta y(1-y)\frac{\partial z}{\partial y} - \alpha\beta(x-y)z = 0$$

$$y(1-y)(y-x)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + (\gamma(y-x) - (\alpha+\beta'+1)y^2 + (\alpha+\beta'-\beta+1)xy + \beta x)\frac{\partial z}{\partial y} - x(1-x)\frac{\partial z}{\partial x} - \alpha\beta'(y-x)\, z = 0$$

$$(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \beta'\frac{\partial z}{\partial x} + \beta\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad .$$

Nous montrons (exemple C), que l'application

$$z \to \begin{pmatrix} z \\ x\,\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ y\,\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

transforme ce système d'équations aux dérivées partielles en un système de Pfaff du type de Fuchs sur le plan projectif complexe. Ce résultat généralise des résultats de Monsieur A.H.M. Levelt [13] et de Monsieur Erdélyi [3] .