Recherche Coopérative sur
Programme n° 25

J. Bros

Propriétés algébriques des valeurs au bord de la fonction de *n* points en théorie quantique des champs

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1967, tome 3
« Conférences de J. Bros, P. Dolbeault, P. Lelong, A. Martineau et R. Stora », , exp. n° 1,
p. 1-39

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1967__3__A1_0>

I

PROPRIETES ALGEBRIQUES DES VALEURS AU BORD DE LA FONCTION DE n POINTS EN THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

par

J. BROS

Service de Physique Théorique
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
BP n° 2 - 91, Gif-Sur-Yvette

I - INTRODUCTION AU "CONTENU PHYSIQUE"

Dans l'état actuel de la physique des particules élémentaires, on ne possède aucun modèle calculable de théorie quantique des champs qui permette d'expliquer convenablement les résultats expérimentaux. Cette situation a conduit certains physiciens [1] à développer une "théorie axiomatique des champs" où, partant d'une formulation mathématique précise de quelques principes généraux et physiquement raisonnables et s'appuyant sur les concepts traditionnels de la mécanique quantique relativiste, on essaie de déduire le maximum de propriétés pour les quantités observables. En fait, il n'a pas été possible jusqu'à présent de démontrer même l'existence d'un modèle non trivial satisfaisant à tous les axiomes que l'on désire imposer, le seul modèle calculable étant le champ libre, lequel décrit des particules sans interaction. Inversement, il se peut que ce cadre axiomatique soit trop général et renferme plusieurs modèles, dont un seul (au maximum) convienne à la physique.

La "théorie axiomatique" n'est donc pas une théorie à proprement parler, mais seulement une méthode d'approche systématique de la théorie des champs. Son intérêt consiste d'abord en l'étude de la cohérence logique des concepts utilisés par les physiciens. Ainsi, partant de la notion d'opérateur de champ (héritée de la quantification du champ électromagnétique classique), on peut démontrer indépendamment de tout modèle, que la notion de particules entrantes au temps $t \to -\infty$ et sortantes au temps $t \to +\infty$ en est une conséquence, pourvu que ce champ satisfasse à certaines propriétés générales (interprétées comme la causalité, l'invariance par rapport au groupe de POINCARE, la positivité de l'énergie etc...) .

Après avoir introduit les particules élémentaires comme des formes asymptotiques du champ, la méthode axiomatique permet alors d'établir quelques propriétés générales des amplitudes de diffusion de ces particules qui semblent en bon accord avec l'expérience. Nous allons donner un exemple particulièrement important de ce genre de propriétés.

Rappelons que les amplitudes de diffusion (principales quantités observables) sont des fonctions $f_\alpha\ (p_1 \ldots p_m\ ;\ p_{m+1} \ldots p_n)$ de n "quadrivecteurs" de l'espace-temps $\mathbb{R}^4$; dans cette notation l'indice α désigne une réaction où interviennent m particules entrantes d'un type déterminé, de quadri-impulsions $p_1 \ldots p_m$ et $n - m$ particules sortantes d'un type déterminé et de quadri-impulsions $p_{m+1} \ldots p_n$. (Tous ces quadrivecteurs sont en fait liés par la relation $p_1 + \ldots + p_m = p_{m+1} + \ldots + p_n$ qui traduit la conservation de l'énergie et de l'impulsion). Une notion fondamentale, que l'approche axiomatique a permis de dégager, est que dans tout modèle satisfaisant aux axiomes (si un tel modèle existe), les fonctions $f_\alpha\ (p_1 \ldots p_n)$ doivent être des valeurs au bord sur les réels de certaines fonctions analytiques de n quadrivecteurs complexes $F_\beta(k_1 \ldots k_n)$;

$$(k_i = p_i + i\, q_i \in \mathbb{C}^4\ ;\ 1 \leq i \leq n)\ .$$

Un exemple de propriété intéressante (bien que difficile à exprimer quantitativement) qui en résulte est la notion de "croisement" que nous allons expliquer très brièvement.

Soient deux amplitudes de diffusion notées :

$$f_1\ (p_1\ p_2\ ;\ p_3\ p_4)$$

et $$f_2\ (p'_1\ ,\ p'_3\ ;\ p'_2\ ,\ p'_4)$$

faisant intervenir les mêmes particules $a_i (i = 1,2,3,4)$, mais tantôt sous la forme "particule" , tantôt sous la forme "antiparticule"; f_1 et f_2 correspondent respectivement aux réactions suivantes :

$$a_1 + a_2 \rightarrow a_3 + a_4 \tag{1}$$

$$a_1 + \bar{a}_3 \rightarrow \bar{a}_2 + a_4\ . \tag{2}$$

On passe de la réaction (1) à la réaction (2) en remplaçant la particule entrante a_2 par l'antiparticule associée $\overline{a}_2$ sortante, et la particule sortante a_3 par l'antiparticule associée $\overline{a}_3$ entrante. Physiquement les deux processus correspondent à des conditions expérimentales très différentes (par exemple : (1) est la diffusion d'un méson π sur un proton : $\pi + p \to \pi + p$; (2) est l'annihilation d'une paire proton-antiproton en deux mésons π : $p + \overline{p} \to \pi + \pi$).

Or, on peut montrer qu'il existe une seule fonction analytique : $F(k_1, k_2, k_3, k_4)$ telle que :

$$f_{\alpha_1}(p_1, p_2; p_3, p_4) = \lim_{q_1 \to 0} F(p_1 + iq_1, p_2 + iq_2, -p_3 - iq_3, -p_4 - iq_4) \quad (3)$$

et $$f_{\alpha_2}(p'_1, p'_3; p'_2, p'_4) = \lim_{q'_1 \to 0} F(p'_1 + iq'_1, -p'_2 - iq'_2, p'_3 + iq'_3, -p'_4 - iq'_4). \quad (4)$$

(Les limites étant prises dans des régions différentes dans les formules (3) et (4)).

Cette notion de prolongement analytique reliant 2 amplitudes qui correspondent à des processus physiques différents peut dans les meilleurs des cas s'exprimer quantitativement par des équations intégrales appelées "relations de dispersion" (du type : formule de CAUCHY à une ou plusieurs variables) ; celles qui ont pu être démontrées dans le cadre de la théorie axiomatique des champs sont bien vérifiées par l'expérience.

Le problème de l'obtention à partir des axiomes d'un domaine d'analyticité maximum pour les amplitudes de diffusion se ramène à deux types de problèmes mathématiques (intervenant simultanément de façon complexe) :

1°) Etude de la structure algébrique d'un ensemble de valeurs au bord de fonctions analytiques dans certains tubes $\mathcal{T}_\lambda = \mathbb{R}^{4n} + i\,\Gamma_\lambda$ (où les Γ_λ sont des cônes de sommet l'origine dans $\mathbb{R}^{4n}$).

2°) Problèmes d'enveloppe d'holomorphie.

Dans cet exposé, nous nous proposons de montrer comment les axiomes de la théorie de WIGHTMAN conduisent à un problème bien particulier de valeurs au bord, et d'en décrire en détail l'aspect algébrique.

II - INTRODUCTION A LA FORMULATION MATHEMATIQUE

a) Notations

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ (espace-temps relativiste) est muni du produit scalaire de MINKOWSKI :

$$x.y \;=\; x^{(o)}y^{(o)} - x^{(1)}y^{(1)} - x^{(2)}y^{(2)} - x^{(3)}y^{(3)} \quad (x,y \in \mathbb{R}^4)$$

et on note $x.x = x^2$.

Le cône "futur" V^+ (resp. "passé" V^-) est défini par :

$$V^{\pm} = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \quad ; \quad x^2 > 0 \quad , \quad x^{(o)} \gtrless 0 \right\} \; ; \; \overline{V}^+ \text{ est la fermeture de } V^+.$$

Deux points $x,y \in \mathbb{R}^4$ sont dits en position relative du "genre espace" (resp. du "genre temps") si $(x - y)^2 < 0$ (resp. $(x - y)^2 > 0$).

La transformation de Fourier est définie par :

$$\tilde{f}\,(p_1 \ldots , p_n) = \int e^{\,i \sum_{i=1}^{n} p_i . x_i} f(x_1, \ldots, x_n)\, d_4 x_1 \ldots d_4 x_n$$

(où $x_i \in \mathbb{R}^4_x$, $p_i \in \mathbb{R}^4_p$; $1 \leq i \leq n$) .

L'espace $\mathbb{R}^4_x$ est l'espace des positions et l'espace $\mathbb{R}^4_p$ l'espace des impulsions.

b) Les axiomes de WIGHTMAN

Nous rappellerons succinctement les principaux axiomes de WIGHTMAN ; pour plus de détails le lecteur pourra se reporter par exemple aux livres cités aux références A et B. Les grandeurs fondamentales introduites dans la théorie sont des opérateurs non bornés :

$$A_i(f) = \int A_i(x)\, f(x)\, d_4\, x \ ,(x = (x^{(o)},x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}))$$

agissant dans un espace de HILBERT $\mathcal{H}$.

Les $A_i(f)$ sont supposés définis pour toute fonction à décroissance rapide $f \in \mathcal{S}^4$. L'indice entier i permet par exemple de distinguer des champs ayant des propriétés de covariance différentes par rapport au groupe de POINCARE, mais ne jouera aucun rôle dans les propriétés générales que nous désirons étudier ici ; aussi le négligerons nous dans la suite, afin de simplifier l'écriture.

Tous les opérateurs $A_i(f)$ sont supposés avoir un domaine commun dense dans $\mathcal{H}$, stable par l'action des $A_i(f)$ et sur lequel agissent également tous les opérateurs adjoints $A_i(f)^*$. On suppose en outre, que pour tout couple d'états $\Phi,\Psi \in D$, l'application $f \to \langle \Phi, A_i(f)\, \Psi \rangle$ définit une distribution tempérée.

Les axiomes que nous allons utiliser ici, sont les suivants :

1°) Causalité : Pour tout couple de fonctions $f, g \in \mathcal{S}^4$ tel que

$$(x - y)^2 < 0 \quad , \quad \forall\, x \in \text{support de } f \ ,$$
$$\forall\, y \in \text{support de } g \ ,$$

on a : $[A_i(f) \; , \; A_j(g)] = 0 \qquad (\forall\, i \, , \, j)$

2°) <u>Invariance par translation</u> : Il existe dans $\mathcal{H}$ une représentation unitaire continue du groupe des translations de l'espace temps, notée $a \to T_a (a \in \mathbb{R}^4)$; de plus $\forall\, a \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$A_i(f) = T_a^{-1} A_i(f_a) \; T_a \quad ,$$

où

$$f_a(x) = f(x - a) \quad .$$

3°) <u>Positivité de l'énergie ou "Condition spectrale"</u> : Le groupe T_a admet une représentation spectrale du type :

$$T_a = \int e^{\, i \, a.p} \; d\, E_p$$

(théorème de STONE généralisé (cf. A)), où $d\, E_p$ est une mesure à valeur opérateur ; on suppose que le support de cette mesure est contenu dans le cône $\overline{V}^{\,+}$. (Ceci exprime de façon invariante relativiste la positivité de l'opérateur autoadjoint

$$H = \int p^{(o)} \; d\, E_p \quad ,$$

lequel est interprété comme l'hamiltonien ou l'opérateur d'énergie du système).

4°) <u>Existence d'un vecteur unique Ω de $\mathcal{H}$, appelé "vide", tel que</u> :

$$T_a \, \Omega = \Omega , \forall\, a \in \mathbb{R}^4 \quad .$$

Nous voulons seulement exposer ici les propriétés algébriques de certaines quantités appelées "opérateurs retardés généralisés" (O.R.G) que l'on obtient en multipliant des monômes $A(x_{i_1}) \ldots A(x_{i_n})$ par diverses combinaisons de fonctions de saut $\theta(x_i^{(o)} - x_j^{(o)})$;

$(i_1, \ldots, i_n)$ désigne une permutation quelconque de $\{1, 2 \ldots n\}$, et $\theta(t)$ est la fonction de HEAVYSIDE ($\theta(t) = 1$ si $t \geq 0$, $\theta(t) = 0$ si $t < 0$).

La notation $A(x_1) \ldots A(x_n)$ désigne une fonctionnelle multilinéaire sur $\mathcal{S}^4$ à valeur opérateur définie de la manière suivante :

A tout ensemble $\{f_1, \ldots f_n\}$ de fonctions de $\mathcal{S}^4$, on associe l'opérateur non borné $A(f_1)\, A(f_2) \ldots A(f_n)$ (dont le domaine contient au moins D par hypothèse). Grâce au théorème nucléaire, cette fonctionnelle possède l'importante propriété suivante :

Pour tout couple de vecteurs Φ, $\Psi \in D$, il existe une distribution tempérée notée

$$\langle \Phi, A(x_1) \ldots A(x_n) \Psi \rangle \tag{5}$$

telle que : $$\int \langle \Phi, A(x_1) \ldots A(x_n) \Psi \rangle\, f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)\, d_4 x_1 \ldots d_4 x_n$$

$$= \langle \Phi, A(f_1) \ldots A(f_n) \Psi \rangle .$$

<u>REMARQUES</u> :

L'introduction dans la théorie de distributions tempérées plutôt que de fonctions se justifie par l'exemple du champ libre (seul exemple calculable) où l'on constate que les quantités (5) ne sont pas des fonctions, et par l'usage constant que l'on veut faire de la transformation de FOURIER.

Les axiomes énoncés ci-dessus vont impliquer à la fois des propriétés de support des O.R.G dans l'espace des positions et des propriétés de support de leurs transforméesde FOURIER $\widetilde{\text{O.R.G}}$ dans l'espace des impulsions.

En fait, la multiplication de distributionsdu type (5) par des fonctions $\theta(x_1^{(o)} - x_j^{(o)})$ ne peut se faire qu'au prix d'un procédé de régularisation dont l'inconvénient majeur est de faire dépendre les supports des O.R.G de ce procédé ; on obtient ainsi des supports plus grands que ceux que l'on obtiendrait si les $\langle \Phi, A(x_1) \dots A(x_n) \psi \rangle$ étaient des fonctions.

C'est un problème ouvert et non trivial (seulement résolu affirmativement par R. STORA[8] et par H. EPSTEIN et V. GLASER dans le cas $n = 3$) de savoir si l'on peut encore définir des O.R.G au sens des distributions, en préservant <u>exactement</u>(*) les propriétés de support que l'on obtient dans le cas des fonctions (à la fois dans l'espace des x et dans l'espace des p).

Etant uniquement intéressésici par les propriétés algébriques des O.R.G , nous traiterons $A(x)$ comme un véritable champ d'opérateurs ; ainsi les monômes $A(x_{i_1}) \dots A(x_{i_n})$ seront dans cet exposé des <u>fonctions</u> sur $\mathbb{R}^{4n}$ à valeursopérateurs dans $\mathcal{H}$ et pourront être multipliés sans ambiguité par des fonctions $\theta(x_i^{(o)} - x_j^{(o)})$.

(*)

Toutefois, il est relativement facile de maintenir ces supports dans un voisinage arbitrairement petit des supports correspondant au cas des fonctions.

III - STRUCTURE ALGEBRIQUE DE L'ENSEMBLE DES O.R.G.

On considère l'algèbre associative $\mathcal{A}$ sur l'anneau des entiers, définie de la façon suivante :

On construit l'algèbre associative libre engendrée par la somme de deux ensembles d'éléments $\{A_i$; i entier positif$\}$ et $\{\theta_{jk}$; j, k entiers positifs ; $j \neq k\}$; on prend le quotient de cette algèbre libre par l'idéal engendré par tous les commutateurs $[\theta_{ij}, A_k]$, $[\theta_{ij}, \theta_{kl}]$ $(\forall$ i, j, k, l) et par tous les éléments à répétitions (c'est-à-dire les monomes contenant au moins deux fois un même facteur A_i ou θ_{jk}) ; enfin, on lui adjoint un élément unité e .

Cette algèbre $\mathcal{A}$ est automatiquement graduée de la façon suivante :

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{A}^{(n)}$$

où $\mathcal{A}^{(n)}$ est engendrée par les monômes homogènes de degré n par rapport aux A_i, et on a :

$$\forall n \quad \mathcal{A}^{(n)} = \bigoplus_{I} \mathcal{A}^{(n)}_{I}$$

où I est un ensemble quelconque de n entiers positifs.

Dans $\mathcal{A}$, on introduit pour tout entier $j > 0$ des dérivations notées $A_j\uparrow$, $A_j\downarrow$, $\hat{A}_j$ en définissant leur action sur les générateurs de $\mathcal{A}$ par la règle suivante :

1°) Appliquées aux θ_{jk}, toutes ces dérivations donnent zéro.

$$2°) \quad \begin{aligned} A_j\uparrow\ A_i &= \theta_{ji}\,[A_j, A_i] \\ A_j\downarrow\ A_i &= -\,\theta_{ij}\,[A_j, A_i] \end{aligned} \qquad (6)$$

$\hat{A}_j A_i = [A_j , A_i]$ (dérivation intérieure associée à l'élément A_j).

Calculons le commutateur de deux dérivations ayant des flèches de même sens ; c'est une dérivation dont l'action sur les θ_{ij} donne zéro et dont l'action sur les A_j est donnée par :

$$[A_i\uparrow, A_k\uparrow] A_j \equiv (A_i\uparrow A_k\uparrow - A_k\uparrow A_i\uparrow)A_j = (\theta_{ij}\theta_{kj} - \theta_{ij}\theta_{ki} - \theta_{kj}\theta_{ik}) [[A_k,A_i], A_j]$$

$$[A_i\downarrow, A_k\downarrow] A_j = (\theta_{ji}\theta_{jk} - \theta_{ji}\theta_{ik} - \theta_{jk}\theta_{ki}) [[A_k,A_i] , A_j] . \tag{7}$$

Dans la suite, on imposera en outre que les relations suivantes soient vérifiées dans $\mathcal{A}$:

$$\forall\ ijk \quad \left[\begin{array}{l} \theta_{ij}\theta_{kj} - \theta_{ij}\theta_{ki} - \theta_{kj}\theta_{ik} = 0 \\ \theta_{ji}\theta_{jk} - \theta_{ji}\theta_{ik} - \theta_{jk}\theta_{ki} = 0 \\ \theta_{ij} + \theta_{ji} = e . \end{array}\right. \tag{8}$$

L'ensemble des relations (8) implique donc d'après (6) et (7) les propriétés suivantes des dérivations $A_j\uparrow$, $A_j\downarrow$, $\hat{A}_j$:

$$[A_i\uparrow , A_j\uparrow] = [A_i\downarrow , A_j\downarrow] = 0 \quad \forall\ i,j \tag{9}$$

$$\hat{A}_j = A_j\uparrow - A_j\downarrow \qquad \forall\ j . \tag{9'}$$

L'ensemble des dérivations $A_j\uparrow$, $A_j\downarrow$ (j entier $\geqslant 0$) engendre une algèbre de Lie $\mathfrak{D}$ qui peut être construite (à un isomorphisme près) de la façon suivante :

on forme l'algèbre de Lie libre engendrée par $\{A_j\uparrow , A_j\downarrow ; j$ entier positif$\}$ et on en fait le quotient par l'idéal défini par les relations (9) et par l'annulation des éléments à répétition. $\mathcal{D}$ est évidemment graduée : $\mathcal{D} = \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{D}^{(n)}$, où $\mathcal{D}^{(n)}$ est le sous espace des éléments homogènes de degré n.

Définition.

On appelle monôme de flèches d'ordre n tout élément de $\mathcal{A}^{(n)}$ de la forme :

$$A_{i_1}\updownarrow \;\ldots\; A_{i_{n-1}}\updownarrow \; A_{i_n} \quad , \tag{10}$$

où le symbole $A_i\updownarrow$ désigne l'une ou l'autre des dérivations $A_i\uparrow$, $A_i\downarrow$.

Soit $M^{(n)}$ l'ensemble de ces monômes d'ordre n ; on appelle $\mathcal{M}^{(n)}$ le sous-espace de $\mathcal{A}^{(n)}$ engendré par les éléments de $M^{(n)}$ et on pose :

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{M}^{(n)} .$$

A tout monôme de flèches de la forme (10) est associé un élément unique de $\mathcal{D}^{(n)}$ qui est la dérivation intérieure que ce monôme définit dans $\mathcal{A}$, et dans $\mathcal{D}$ on a l'égalité (*) :

$$\widehat{A_{i_1}\updownarrow \;\ldots\; A_{i_{n-1}}\updownarrow \; A_{i_n}} = \left[A_{i_1}\updownarrow [\ldots [A_{i_{n-1}}\updownarrow , \hat{A}_{i_n}]] \ldots \right] \tag{11}$$

(où le symbole $\hat{B}$ dénote la dérivation intérieure associée à un élément quelconque B de $\mathcal{A}$).

(*) Puisque pour tout $B, C \in \mathcal{A}$, on a :

$$\widehat{A_i\uparrow C} \; B = [A_i\uparrow C , B] = A_i\uparrow [C,B] - [C, A_i\uparrow B] = (A_i\uparrow \hat{C} - \hat{C}\, A_i\uparrow)\, B .$$

L'ensemble des éléments de la forme (11) engendre un sous-espace de $\mathcal{D}$, isomorphe à $\mathcal{M}$: c'est l'idéal de $\mathcal{D}$ engendré par les éléments $\hat{A}_j = A_j\uparrow - A_j\downarrow$. On vérifie trivialement que pour $n \geq 2$, $\mathcal{D}^{(n)}$ est en fait isomorphe à $\mathcal{M}^{(n)}$; dans la suite, on désignera par i_n l'isomorphisme qui applique $\mathcal{D}^{(n)}$ sur $\mathcal{M}^{(n)}$. Il résulte des relations (9') et (11) qu'à tout monôme de Lie emboité du type :

$$\mu_\alpha = [A_{i_1}\updownarrow, [A_{i_2}\updownarrow \dots [A_{i_{n-1}}\downarrow , A_{i_n}\uparrow]\dots]] \in \mathcal{D}^{(n)} , \qquad (12)$$

l'isomorphisme i_n associe le monôme de flèche

$$m_\alpha = i_n(\mu_\alpha) = A_{i_1}\updownarrow A_{i_2}\updownarrow \dots A_{i_{n-1}}\downarrow A_{i_n} \in M^{(n)}$$

(dans cette notation, l'indice α représente la donnée de l'ensemble ordonné d'indices $i_1, i_2 \dots i_n$ à chacun desquels on a assigné une flèche d'un sens déterminé).

Les éléments de $M^{(n)}$ ne sont pas linéairement indépendants dans $\mathcal{A}$; ils vérifient un système de relations linéaires, appelées "<u>relations de Steinmann</u>" [2] ; on obtient ces relations (à l'isomorphisme i_n près) en considérant tous les monômes de Lie emboités d'ordre n du type (12), et en écrivant toutes les relations résultant de l'identité de Jacobi et des conditions (9) et (9') auxquelles satisfont ces monômes emboités.

Evidemment, on obtient autant de systèmes de relations indépendantes que de couples d'ensembles d'entiers positifs (I_+, I_-). A un tel couple correspond un système de relations linéaires $S^{(n)}_{I_+,I_-}$ entre les monômes emboités du type (12) dont les facteurs appartiennent à $\{A_i\uparrow ; A_j\downarrow ; i \in I_+ ; j \in I_-\}$. On désignera par $\mathcal{D}^{(n)}_{I^+I^-}$ le sous-espace de $\mathcal{D}^{(n)}$ engendré par ces éléments.

<u>Exemple</u> : la plus petite valeur de n pour laquelle on a un système non trivial est $n = 4$. $I_+ = \{1,2\}$, $I_- = \{3,4\}$.

On a alors la relation (unique) :

$$\left[A_2\uparrow , [A_4\downarrow , [A_3\downarrow , A_1\uparrow]]\right] - \left[A_4\downarrow , [A_2\uparrow , [A_3\downarrow , A_1\uparrow]]\right]$$

$$= \left[A_1\uparrow , [A_3\downarrow , [A_2\uparrow , A_4\downarrow]]\right] - \left[A_3\downarrow , [A_1\uparrow , [A_2\uparrow , A_4\downarrow]]\right]$$

$$\left(= \left[[A_2\uparrow , A_4\downarrow] \quad , \quad [A_3\downarrow , A_1\uparrow] \right]\right).$$

et, dans $\mathcal{M}^{(4)}$, la relation correspondante entre les monômes de flèches :

$$A_2\uparrow A_4\downarrow A_3\downarrow A_1 \quad - \quad A_4\downarrow A_2\uparrow A_1\uparrow A_3 \quad = - A_1\uparrow A_3\downarrow A_4\downarrow A_2 \quad + \quad A_3\downarrow A_1\uparrow A_2\uparrow A_4 \quad .(13)$$

<u>Définition des O.R.G. de Steinmann.</u>

On définit un homomorphisme h de l'algèbre $\mathcal{A}$ dans l'algèbre tensorielle $\mathcal{O}$ des champs d'opérateurs dans $\mathcal{H}$ en associant :

- à tout élément A_i, le champ $A(x_i)$ ($x_i \in \mathbb{R}^4_i$) défini au chapitre II.

- à tout élément θ_{ij} tel que $i < j$, le champ scalaire $\theta_{ij}(x) = \theta(x_i^{(o)} - x_j^{(o)}) \times \mathbb{1}$, $\mathbb{1}$ étant l'opérateur identité dans $\mathcal{H}$ (et $\theta(t) = 1$ si $t \geq 0$; $\theta(t) = 0$ si $t < 0$).

- à tout élément θ_{ij} tel que $i > j$, le champ scalaire

$$\theta_{ij}(x) = (1 - \theta(x_j^{(o)} - x_i^{(o)})) \times \mathbb{1} .$$

- à l'unité e de l'algèbre $\mathcal{A}$, le champ constant $\mathbb{1}$.

Il est clair que cette correspondance définit bien un homomorphisme puisque les homologues des relations (8) sont identiquement satisfaites par les fonctions $\theta_{ij}(x)$.

Par définition, les "<u>O.R.G. de Steinmann</u>" [2] sont les images par cet homomorphisme h des monômes de flèches définis plus haut.

Par exemple à $A_1 \uparrow A_2 = \theta_{12} [A_1, A_2]$ correspond "l'opérateur retardé de deux points" :

$$\theta(x_1^{(o)} - x_2^{(o)}) \; [A(x_1), A(x_2)] \quad ;$$

à $A_1 \uparrow A_2 \uparrow A_3$ correspond "l'opérateur retardé de trois points" :

$$\theta(x_2^{(o)} - x_3^{(o)}) \; \theta(x_1^{(o)} - x_2^{(o)}) \left[[A(x_1) \; A(x_2)] \; A(x_3) \right] + \theta(x_2^{(o)} - x_3^{(o)}) \; \theta(x_1^{(o)} - x_3^{(o)}) \ldots$$

$$\ldots \left[A(x_2), [A(x_1) \; A(x_3)] \right] \; ;$$

on écrirait de la même façon les 32 O.R.G. de quatre points (x_1, x_2, x_3, x_4) ; ceux-ci vérifient 6 relations de Steinmann, obtenues en transcrivant l'équation (13) pour tous les couples (i_1, i_2), (i_3, i_4).

Plus généralement, à tout monôme de flèches $m_\alpha = i_n(\mu_\alpha) \in M^{(n)}$ sera associé un O.R.G. de Steinmann noté :

$$m_\alpha(x_{i_1} \ldots x_{i_n}) = h(m_\alpha) = h \circ i_n(\mu_\alpha) \; .$$

A tout O.R.G., on fait correspondre une "fonction retardée généralisée" (F.R.G) qui est l'élément de matrice $\langle \Omega, m_\alpha(x_{i_1} \ldots x_{i_n}) \, \Omega \rangle$, Ω désignant le vecteur "<u>vide</u>" introduit au chapitre II , (4ème axiome).

A cause des propriétés d'invariance par le groupe des translations (2ème et 4ème axiomes), on a :

$$\langle\Omega, m_\alpha(x_1+a, x_2+a, \dots, x_n+a)\,\Omega\rangle$$

$$= \langle\Omega, T_a\, m_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)\, T_a^{-1}\Omega\rangle$$

$$= \langle\Omega, m_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)\,\Omega\rangle \quad ,$$

ce qui montre que les F.R.G. sont en fait des fonctions définies sur le quotient de $\mathbb{R}^{4n}$ par l'espace diagonal $\{x_1 = a, x_2 = a, \dots, x_n = a\}$, c'est-à-dire des fonctions de $(n-1)$ quadrivecteurs indépendants $x_i - x_j$.

Corrélativement les transformées de Fourier $\widetilde{\text{F.R.G.}}\,(p_1 \dots p_n)$ des F.R.G. $(x_1 \dots x_n)$ sont de la forme :

$$\delta(p_1 + \dots + p_n) \times \widetilde{\text{F.R.G}}'(p_1, \dots, p_{n-1})$$ (δ étant la mesure de Dirac),

puisque le produit scalaire $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i$ peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i = (p_1 + \dots + p_n).\, x_1 + \sum_{i=2}^{n} p_i \cdot (x_i - x_1)\,.$$

Ce facteur $\delta(p_1 + \dots + p_n)$ est l'origine de la règle de conservation de l'énergie et de l'impulsion qui apparaît ainsi comme une conséquence directe de l'invariance de la théorie par les translations d'espace-temps.

IV - ALGEBRE DE GRAPHES ET CONES ASSOCIES

a) L'algèbre de Lie Λ :

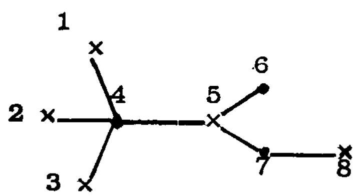
Soient I^+, I^- deux ensembles quelconques et disjoints d'entiers positifs. On désigne par $T^{(n)}_{I^+I^-}$ l'ensemble des graphes simplement connexes ou "arbres" possédant les propriétés suivantes :

1°) Le nombre de sommets est égal à n (et par suite le nombre de lignes $n-1$).

2°) Les sommets sont de deux types repérés respectivement par les entiers appartenant aux ensembles I^+ et I^-.

3°) Toute ligne de l'arbre relie un sommet $i \in I^+$ à un sommet $j \in I^-$.

Graphiquement, chaque sommet $i \in I^+$ est représenté par une croix $\times_i$ et chaque sommet $j \in I^-$ par un point $\bullet_j$

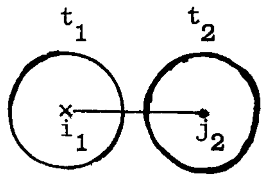
Exemple : 

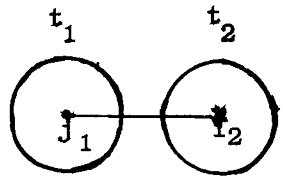
$\in T^{(8)}_{I^+I^-}$ où $I^+ = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, $I^- = \{4, 6, 7\}$.

Pour tout couple d'ensembles disjoints (I^+, I^-), on considère le module libre $\Lambda^{(n)}_{I^+I^-}$ sur l'anneau des entiers dont la base est l'ensemble d'arbres $T^{(n)}_{I^+I^-}$.

On définit alors Λ comme la somme directe de tous les modules $\Lambda^{(n)}_{I^+I^-}$.

Sur le module Λ, on peut mettre une structure d'algèbre de Lie (bien qu'il n'y ait pas d'algèbre associative naturelle) en définissant le produit suivant :

A tout couple d'arbres $t_1 \in T^{n_1}_{I_1^+ I_1^-}$, $t_2 \in T^{n_2}_{I_2^+ I_2^-}$, on associe le crochet $[t_1\ ,\ t_2] = \sum\limits_{\substack{i_1 \in I_1^+ \\ j_2 \in I_2^-}}$ 

$- \sum\limits_{\substack{j_1 \in I_1^- \\ i_2 \in I_2^+}}$ 

.

Chaque terme du second membre est un arbre appartenant à $T^{(n_1+n_2)}_{I_1^+ \cup I_2^+\ ,\ I_1^- \cup I_2^-}$.
On ajoute aussi la règle $[t_1\ ,\ t_2] = 0$, si les ensembles
I_1^+, I_2^+, I_1^-, I_2^- ne sont pas tous disjoints deux à deux. On vérifie aisément que ce produit est anticommutatif et que l'identité de Jacobi est satisfaite.

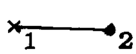
On définit alors un homomorphisme ℓ unique de l'algèbre de Lie $\mathcal{D}$ dans Λ , en posant :

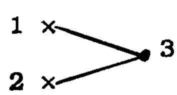
$$\ell(A_i\uparrow) = \times_i \in T^1$$

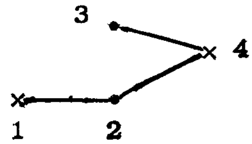
$$\ell(A_i\downarrow) = \bullet_i \in T^1 \quad ;$$

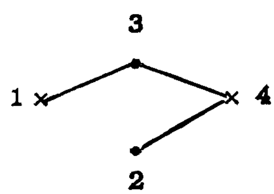
en effet les éléments $A_i\updownarrow$ engendrent toute l'algèbre $\mathcal{D}$.

On a par exemple :

$\ell([A_1\uparrow,\ A_2\downarrow]) =$ 

$\ell([A_1\uparrow,[A_2\uparrow,\ A_3\downarrow]]) =$ 

$\ell([A_1\uparrow,[A_2\downarrow[A_3\downarrow,\ A_4\uparrow]]]) =$ 

$+$ 

.

Plus généralement, pour tout monôme emboîté $\mu_\alpha \in \mathcal{D}^{(n)}_{I^+I^-}$, on obtient :

$$\ell(\mu_\alpha) = (-1)^{n^-} \sum_\beta k_{\alpha\beta}\ t_\beta \in \Lambda^{(n)}_{I^+I^-} \qquad (14)$$

où la sommation s'étend à tous les arbres $t_\beta \in T^{(n)}_{I^+I^-}$, et où les coefficients $k_{\alpha\beta}$ sont égaux à O ou à 1 ; n^- désigne le nombre d'éléments de I^- (*) .

Nous nous contenterons d'énoncer ici sans démonstration le théorème suivant :

Théorème IV.1 : l'homomorphisme ℓ est injectif.

Il en résulte la propriété suivante :

Corollaire : A tout arbre $t_\beta \in T^{(n)}_{I^+I^-}$, on peut associer un élément $F_\beta(x_{i_1} \ldots , x_{i_n})$ (où $\{i_1, \ldots i_n\} \equiv I^+ \cup I^-$) de l'algèbre tensorielle $\mathcal{O}$, de façon que tout O.R.G $m_\alpha(x_{i_1} \ldots x_{i_n}) = h \circ i_n(\mu_\alpha)$ s'écrive :

$$m_\alpha(x_{i_1} \ldots x_{i_n}) = (-1)^{n^-} \sum_\beta k_{\alpha\beta} \; F_\beta \, (x_1 \ldots x_n) \, , \tag{15}$$

et que les relations de Steinmann qui relient les m_α soient automatiquement satisfaites.

Démonstration : D'après le théorème 1 , il existe un homomorphisme de modules qui applique le sous-espace $\ell\left(\mathcal{D}^{(n)}_{I^+I^-}\right)$ de Λ dans $\mathcal{O}$; il est défini par $h \circ i_n \circ \ell^{-1}$. Cet homomorphisme s'étend à tout le sous-espace $T^{(n)}_{I^+I^-}$ (il suffit pour cela que le quotient $\Lambda^{(n)}_{I^+I^-} \Big/ \ell\left(\mathcal{D}^{(n)}_{I^+I^-}\right)$ admette une base, ce qui se vérifie

---

(*) On convenant d'écrire toujours les m_α comme dans la formule (12), c'est-à-dire avec la flèche la plus à droite du type $\uparrow$.

au cours de la démonstration du théorème 1). Par suite, l'ensemble des relations (14) se transporte dans $\mathcal{O}$ et on obtient ainsi les relations (15).

<u>Remarque</u> : Pour établir la formule (15) on n'a aucunement fait usage des axiomes physiques exposés au chapitre II. Notamment le 1er axiome va introduire des propriétés de support pour les O.R.G $m_\alpha(x_{i_1} \dots x_{i_n})$, que nous étudierons au chapitre suivant ; on énoncera alors un théorème meilleur que le précédent, d'après lequel il est encore possible de satisfaire à l'égalité (15) avec des champs d'opérateurs $F_\beta(x_{i_1} \dots x_{i_n})$ ayant des supports adéquats.

b) <u>Cônes associés</u> :

Nous considérons dans ce paragraphe deux espaces $\mathbb{R}^n$ notés respectivement $\mathbb{R}^n_t$ et $\mathbb{R}^n_s$; les points de $\mathbb{R}^n_t$ sont décrits par leurs coordonnées $(t_1, t_2, \dots t_n) \equiv t$, et ceux de $\mathbb{R}^n_s$ par $(s_1, s_2, \dots, s_n) \equiv s$. On va décrire des ensembles de cônes polyédraux de sommet l'origine dans $\mathbb{R}^n_t$ et $\mathbb{R}^n_s$; à chaque cône h_n de $\mathbb{R}^n_t$ correspondra dans $\mathbb{R}^n_s$ le cône dual par rapport à la forme bilinéaire $\sum\limits_{i=1} s_i\, t_i$, que l'on notera $\tilde{h}$ ($\tilde{h} = \{s ; \sum s_i\, t_i \geq 0 \; ; \; \forall\, t \in h\}$). En fait tous les cônes h que l'on définira dans $\mathbb{R}^n_t$ serpnt invariants par les translations $t_i \to t_i + a$ $(1 \leq i \leq n)$, de sorte que les cônes $\tilde{h}$ correspondants seront aplatis et appartiendront à l'hyperplan $\sum\limits_{i=1}^{n} s_i = 0$, noté P^{n-1}_s.

1°) A toute partition de $\{1, 2, \dots n\}$ en deux sous-ensembles non vides I^+, I^-, on associe un cône $\Pi^{(n)}_{I^+ I^-}$ défini dans P^{n-1}_s par :

$$\Pi^{(n)}_{I^+I^-} = \left\{ s \; ; \; \sum_{k=1}^{n} s_k = 0 \; ; \; s_i > 0 \; ; \; \forall\, i \in I^+ \; ; \; s_j < 0 \; ; \; \forall\, j \in I^- \right\} .$$

Tous ces cônes sont disjoints et l'union des cônes fermés $\overline{\Pi^{(n)}_{I^+I^-}}$ est tout l'espace P^{n-1}_s.

2°) A tout arbre $t_\beta \in T^{(n)}_{I^+I^-}$, on associe le cône

$$c_\beta = \{t \,;\, t_\ell - t_m > 0 \,;\, \forall \underset{\ell \quad m}{\times\!\!\longrightarrow\!\!\bullet} \text{, ligne de l'arbre } t_\beta\} \in \mathbb{R}^n_t .$$

Le cône $\tilde{c}_\beta$ dual de c_β est un cône simplicial de P^{n-1}_s défini par la règle suivante : chacune des $n-1$ lignes $\overset{\ell \quad m}{\times\!\!\longrightarrow\!\!\bullet}$ de l'arbre t_β détermine une partition de l'ensemble des sommets $\{1, 2, \ldots n\}$ de t_β en deux sous-ensembles $I_{\ell m}$ et $J_{\ell m}$ tels que $\underset{\times}{\ell} \in I_{\ell m}$, $\underset{\bullet}{m} \in J_{\ell m}$. $\tilde{c}_\beta$ est défini par l'ensemble des $n-1$ inégalités correspondantes soit :

$$\left\{ s \,;\, \sum_{i \in I_{\ell m}} s_i = - \sum_{j \in J_{\ell m}} s_j > 0 \,,\, \forall \underset{\ell \quad m}{\times\!\!\longrightarrow\!\!\bullet} \right\} .$$

On vérifie aisément que chaque cône $\Pi^{(n)}_{I^+I^-}$ contient tous les cônes $\tilde{c}_\beta$ associés aux arbres $t_\beta \in T^{(n)}_{I^+I^-}$.

3°) A tout monôme emboité $\mu_\alpha \in \mathcal{D}^{(n)}_{I^+I^-}$, on associe les cônes :

$$\sigma_\alpha = \bigcup_{\beta ; k_{\alpha\beta}=1} c_\beta \in \mathbb{R}^n_t$$

et
$$\tilde{\sigma}_\alpha = \bigcap_{\beta ; k_{\alpha\beta}=1} \tilde{c}_\beta \in P^{n-1}_s ,$$

les nombres $k_{\alpha\beta}$ étant ceux définis par la formule (14) .

4°) <u>Définition</u> : on appelle <u>cellule</u> de l'espace $P^{(n-1)}_s$ tout cône de sommet l'origine défini en se donnant pour tout sous-ensemble I de $\{1,2, \dots n\}$ une inégalité du type :

$$\sum_{i \in I} s_i = - \sum_{j \in \complement I} s_j > 0 \quad \text{ou} < 0 \ ,$$

de façon que l'ensemble de ces inégalités soient compatibles (*). Deux cellules sont dites adjacentes, si on passe de l'une à l'autre en changeant le signe d'une seule inégalité.

On peut alors résumer dans le petit lemme suivant les propriétés des cônes $\tilde{\sigma}_\alpha$:

<u>lemme</u>

1°) Pour tout monôme emboité $\mu_\alpha = [A_{i_1} \updownarrow, [\dots[A_{i_{n-1}} \downarrow, A_{i_n} \uparrow]\dots]] \in \mathcal{D}^{(n)}_{I^+I^-}$,

le cône $\tilde{\sigma}_\alpha$ associé est simplicial, et défini par les $(n-1)$ inégalités suivantes :

$$\left[\begin{array}{ll} s_i + \sum\limits_{j \in J_i \cap I^-} s_j > 0 & \forall\ i \in I^+ \ ; \ i \neq i_n \\ \\ s_i + \sum\limits_{j \in J_i \cap I^+} s_j < 0 & \forall\ i \in I^- \ , \end{array}\right.$$

où J_i désigne l'ensemble des indices entiers apparaissant à gauche de l'indice i dans l'expression de μ_α.

(*) Ces cônes ont été introduits par D. Ruelle (cf.(3)).

2°) $\tilde{\sigma}_\alpha$ est une cellule de $P_s^{(n-1)}$, contenue dans le cône $\Pi^{(n)}_{I^+I^-}$.

3°) Etant donné un arbre quelconque $t_\beta \in T^{(n)}_{I^+I^-}$, on a :

$$\left[\begin{array}{l} \tilde{\sigma}_\alpha \subset \tilde{c}_\beta \text{ si } k_{\alpha\beta} = 1 \\ \\ \tilde{\sigma}_\alpha \cap \tilde{c}_\beta = \emptyset \text{ si } k_{\alpha\beta} = 0 \ . \end{array}\right.$$

L'exemple suivant montre que pour $n \geq 5$, l'ensemble des cônes $\tilde{\sigma}_\alpha$ n'est qu'un sous-ensemble strict de l'ensemble des cellules ; le cône

$$\gamma = \left\{ s \ ; \ \sum_{i=1}^{5} s_i = 0 \ ; \ \begin{array}{l} s_1+s_4 > 0 \ , \ s_2+s_4 > 0 \ , \ s_3+s_4 > 0 \\ s_1+s_5 > 0 \ , \ s_2+s_5 > 0 \ , \ s_3+s_5 > 0 \end{array} \right\}$$

est une cellule, mais ne peut être un cône $\tilde{\sigma}_\alpha$, n'étant pas simplicial.

Dans la suite, une cellule quelconque de $P_s^{(n-1)}$ sera notée γ_λ , l'indice λ désigne une certaine fonction $\lambda(I)$ définie sur l'ensemble des sous-ensembles de $\{1,2, \ldots n\}$, et à valeur dans $\{+1 \ , -1\}$ de telle sorte que l'on ait :

$$\gamma_\lambda = \left\{ s \ ; \ \sum_{j=1}^{n} s_j = 0 \ ; \ \forall I \ , \ \lambda(I) \times \sum_{i \in I} s_i > 0 \right\} .$$

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème IV.2.

1°) A toute cellule γ_λ de l'espace P_s^{n-1} contenue dans un cône $\Pi^{(n)}_{I^+I^-}$, on peut associer un élément unique r_λ de l'algèbre de Lie $\mathcal{D}\left(r_\lambda \in \mathcal{D}^{(n)}_{I^+I^-}\right)$, tel que :

$$\ell(r_\lambda) = \sum_\beta k_{\lambda\beta} \quad t_\beta \quad \in \quad \Lambda^{(n)}_{I^+I^-} \quad , \tag{16}$$

où la sommation s'étend à tous les arbres $t_\beta \in T^{(n)}_{I^+I^-}$, et où $k_{\lambda\beta} = 0$ si

$$\gamma_\lambda \cap \tilde{c}_\beta = \emptyset \quad ; \quad k_{\lambda\beta} = 1 \text{ si } \gamma_\lambda \subset \tilde{c}_\beta \; .$$

2°) Pour tout couple de cellules adjacentes γ_{λ_1}, γ_{λ_2}, auxquelles correspondent deux éléments r_{λ_1}, $r_{\lambda_2} \in \mathcal{D}^{(n)}_{I^+I^-}$, il existe deux éléments de degrés inférieurs à n, $r_{\lambda'} \in \mathcal{D}^{(p)}$, $r_{\lambda''} \in \mathcal{D}^{(n-p)}$, $(1 \leq p < n)$, tels que dans $\mathcal{D}$, on ait l'égalité :

$$r_{\lambda_1} - r_{\lambda_2} = [r_{\lambda'}, r_{\lambda''}] \; . \tag{17}$$

Démonstration :

Soient deux cellules adjacentes γ_{λ_1}, γ_{λ_2} ; leur face commune φ appartient à un certain hyperplan H_p d'équation :

$$s_{i_1} + \ldots + s_{i_p} = -(s_{i_{p+1}} + \ldots + s_{i_n}) = 0 \; ,$$

qui s'identifie à un produit $P^{(p-1)}_{(s_{i_1} \ldots s_{i_p})} \times P^{n-p-1}_{(s_{i_{p+1}} \ldots s_{i_n})}$. Dans H_p il existe un seul cône produit $\gamma_{\lambda'} \times \gamma_{\lambda''}$ tel que $\gamma_{\lambda'}$ et $\gamma_{\lambda''}$ soient des cellules, respectivement dans P^{p-1} et P^{n-p-1}, et que φ soit contenue dans $\gamma_{\lambda'} \times \gamma_{\lambda''}$. (Il suffit pour le définir, de conserver parmi les inégalités qui définissent γ_{λ_1} et γ_{λ_2} celles qui portent uniquement sur les variables de l'un ou de l'autre des ensembles $\{i_1 \dots i_p\}$, $\{i_{p+1} \dots i_n\}$). A $\gamma_{\lambda'}$ et $\gamma_{\lambda''}$, associons respectivement les éléments $\rho_{\lambda'} = \sum_{\beta'} k_{\lambda'\beta'} t_{\beta'} \in \Lambda^{(p)}$ et

$$\rho_{\lambda''} = \sum_{\beta''} k_{\lambda''\beta''} t_{\beta''} \in \Lambda^{(n-p)} ,$$

selon la définition (16) donnée dans l'énoncé du théorème. Formons dans Λ, le produit de Lie :

$$[\rho_{\lambda'} , \rho_{\lambda''}] = \sum_{\beta'\beta''} k_{\lambda'\beta'} k_{\lambda''\beta''} [t_{\beta'} , t_{\beta''}] . \tag{18}$$

D'après la définition du produit de Lie de deux arbres, chaque crochet du deuxième membre s'écrit :

$[t_{\beta'} , t_{\beta''}] = \sum_{\beta_1} t_{\beta_1} - \sum_{\beta_2} t_{\beta_2}$; dans cette expression, tous les arbres t_{β_1} (resp. t_{β_2}) ont un cône associé $\tilde{c}_{\beta_1}$ (resp. $\tilde{c}_{\beta_2}$) admettant pour face dans l'hyperplan H_p le cône produit $\tilde{c}_{\beta'} \times \tilde{c}_{\beta''}$ (où $\tilde{c}_{\beta'}$ et $\tilde{c}_{\beta''}$ sont respectivement associés à $t_{\beta'}$ et $t_{\beta''}$ dans P^{p-1} et P^{n-p-1}). Comme $\gamma_{\lambda'} \subset \tilde{c}_{\beta'}$ et $\gamma_{\lambda''} \subset \tilde{c}_{\beta''}$, on a :

$$\varphi \subset \gamma_{\lambda'} \times \gamma_{\lambda''} \subset \tilde{c}_{\beta'} \times \tilde{c}_{\beta''} ;$$

comme de plus tous les cônes $\tilde{c}_{\beta_1}$ sont d'un certain côté de H_p et tous les cônes

$\tilde{c}_{\beta_2}$ de l'autre côté de H_p , on a(pour un choix convenable des notations) :

$$\forall \ \beta_1 \quad \tilde{c}_{\beta_1} \supset \gamma_{\lambda_1}$$

$$\forall \ \beta_2 \quad \tilde{c}_{\beta_2} \supset \gamma_{\lambda_2} \ .$$

De plus ces cônes sont les seuls à contenir γ_{λ_1} ou γ_{λ_2} et à avoir une face dans H_p. Par suite, si l'on forme :

$$\rho_1 - \rho_2 = \sum_{\beta_1'} k_{\lambda_1 \beta_1'} \ t_{\beta_1'} - \sum_{\beta_2'} k_{\lambda_2 \beta_2'} \ t_{\beta_2'}$$

selon la définition de l'énoncé, on est sûr d'obtenir tous les termes apparaissant dans le développement de la formule (18) et avec le même signe. En outre, tous les arbres t_β dont les cônes $\tilde{c}_\beta$ correspondant n'ont pas de face dans H_p apparaissent avec le même coefficient dans $\sum_{\beta_1'}$ et $\sum_{\beta_2'}$; en effet si un tel cône contient γ_{λ_1} , il contient nécessairement γ_{λ_2} . Ainsi, on a montré la relation suivante dans Λ :

$$\rho_{\lambda_1} - \rho_{\lambda_2} = [\rho_{\lambda'} , \rho_{\lambda''}] \ . \tag{19}$$

Si on suppose que $\forall \ p < n$, et $\forall \ \lambda$, l'élément ρ_λ appartient à $\ell(\mathcal{D})$, on voit que :

$$\rho_{\lambda_1} \in \ell(\mathcal{D}) \Rightarrow \rho_{\lambda_2} \in \ell(\mathcal{D}) \ .$$

Comme la propriété est vraie, d'après le lemme ci-dessus, pour tous les $\rho_\alpha = \ell(\mu_\alpha)$

(où μ_α est un monôme emboité quelconque), et que l'on passe d'une cellule $\tilde{\sigma}_\alpha$ à une cellule γ_λ quelconque en traversant un nombre fini de faces, on a établi que :

$$\forall \lambda \ , \ \rho_\lambda \in \ell \ (\mathcal{D}) \ .$$

Comme ℓ est injective, il existe quel que soit λ un élément unique $r_\lambda = \ell^{-1}(\rho_\lambda)$ de $\mathcal{D}$ tel que la formule (16) soit vérifiée.

La deuxième partie du théorème s'obtient immédiatement en transportant la formule (19) par l'homomorphisme ℓ^{-1}.

<u>Remarque</u> : Il résulte de la démonstration précédente qu'il existe toujours au moins un cône $\tilde{c}_\beta$ contenant une cellule donnée γ_λ ; s'il n'en était pas ainsi, on aurait $\rho_\lambda = 0$ quel que soit λ, ce qui est absurde puisque $\rho_\alpha = \ell(m_\alpha) \neq 0$. Ceci montre du même coup que $\forall\lambda$, γ_λ est exactement l'intersection de tous les cônes $\tilde{c}_\beta$ qui le contiennent, car toute face φ de γ_λ est alors contenue dans au moins un cône produit $\tilde{c}_{\beta'} \times \tilde{c}_{\beta''}$ et la construction ci-dessus permet d'associer à ce produit un ensemble de cônes $\tilde{c}_\beta$ contenant γ_λ et dont la frontière contient φ.

<u>V - PROPRIETES DE SUPPORT DES O R G RESULTANT DE LA CAUSALITE</u>

On s'intéresse dans ce chapitre aux propriétés de support des O R G $m_\alpha(x_1,\ldots,x_n)$ définis à la fin du chapitre III. Ces O R G sont des champs d'opérateurs définis sur un espace $\mathbb{R}^{4n}$ que nous noterons $\mathbb{R}_x^{4n}$ pour rappeler qu'il s'agit du produit tensoriel de l'espace des positions $\mathbb{R}_x^4$ par un espace $\mathbb{R}^n$. En identifiant cet espace $\mathbb{R}^n$ à l'espace $\mathbb{R}_t^n$ du chapitre précédent, on peut associer à tous les cônes σ_α, $c_\beta \subset \mathbb{R}_t^n$ respectivement les cônes

$$\Sigma_\alpha = V^+ \otimes \sigma_\alpha \ , \ C_\beta = V^+ \otimes \ c_\beta \subset \mathbb{R}_x^{4n} \ .$$

On se propose de montrer le théorème suivant :

Théorème V.1 :

Tout O R G de Steinmann $m_\alpha(x_1,\dots x_n) = h \circ i_n(\mu_\alpha)$ a pour support, dans $\mathbb{R}_x^{4n}$, le cône $\Sigma_\alpha = \bigcup_{\beta\ ;\ k_{\alpha\beta}=1} C_\beta$.

Définitions : Pour tout point $x \in \mathbb{R}_x^4$, on désigne par $\mathcal{A}_x$ le quotient de l'algèbre $\mathcal{A}$ par l'ensemble des relations $\{\theta_{ij} = 0\ ;\ \theta_{k\ell} = e\}$ en correspondance biunivoque avec l'ensemble des identités $\{\theta_{ij}(x) = 0\ ;\ \theta_{k\ell}(x) = 1\}$ vérifiées par le point x. L'image dans $\mathcal{A}_x$ d'un monôme de flèches $m_\alpha \in \mathcal{A}$ sera notée $m_{\alpha,x}$. En outre on appelle J_x l'idéal de $\mathcal{A}_x$ engendré par tous les éléments $[A_i, A_j]$ tels que $(x_i - x_j)^2 < 0$.

On va d'abord établir le lemme suivant :

Lemme . Pour tout point $x \in \complement\, \Sigma_\alpha$ et tout monôme de flèches m_α, on a : $m_{\alpha x} \in J_x$.

La démonstration se fait par récurrence sur l'ordre n de m_α .

a) Si $n = 2$, il suffit de considérer $m_\alpha = \theta_{12}\,[A_1, A_2]$ et il est trivial que $m_{\alpha,x} \in J_x$ ($m_{\alpha,x} = 0$ si $x_1^o - x_2^o < 0$; $m_{\alpha,x} = [A_1, A_2]$ si $(x_1-x_2)^2 < 0$ et $x_1^o - x_2^o \geqslant 0$).

b) Supposons la propriété vraie à l'ordre $n - 1$, et écrivons $m_\alpha = A_n \uparrow m'_\alpha$ (le cas $A_n \downarrow m'_\alpha$ serait analogue). En se reportant à la définition de Σ_α , on voit que :

$$\complement\,\Sigma_\alpha = \complement\,\Sigma'_\alpha \bigsqcup \left\{ X\ ;\ X_n - X_i \in \complement\,\bar{V}^+\ ;\ \forall i\ ,\ 1 \leqslant i \leqslant n-1 \right\}.$$

- Si $x_n - x_i \in \complement \bar{V}^+$ quel que soit i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, on utilise le fait que m_α appartient à l'idéal engendré par tous les éléments $\theta_{ni} [A_n, A_i]$ (ceci résulte de la définition de la dérivation $A_n \uparrow$). Or au point x, θ_{ni} n'est différent de zéro que si $(x_n - x_i)^2 < 0$, donc $m_{\alpha,x} \in J_x$.

- Si $x \in \complement \Sigma'_\alpha$, $m'_{\alpha,x}$ appartient d'après l'hypothèse de récurrence à l'idéal engendré par tous les éléments $[A_i, A_j]$ tels que $1 \leqslant i,j \leqslant n-1$ et $(x_i - x_j)^2 < 0$. Il suffit donc de considérer l'action de $A_n \uparrow$ sur un monôme quelconque d'ordre $n-1$ contenant en facteur un tel élément $[A_i, A_j]$. On obtient ainsi des termes contenant en facteur $[A_i, A_j]$ plus un terme contenant en facteur l'élément

$$A_n \uparrow [A_i, A_j] = \theta_{ni} \Big[[A_n, A_i], A_j \Big] + \theta_{nj} \Big[A_i, [A_n, A_j] \Big] . \tag{20}$$

Deux cas sont possibles :

. $(x_i - x_n)^2 > 0$ et $(x_j - x_n)^2 > 0$, alors nécessairement $\theta_{ni} = \theta_{nj}$ et d'après l'identité de Jacobi, le second membre de la formule (20) s'écrit :

$$\theta_{ni} \Big[[A_i, A_j], A_n \Big] \in J_x ;$$

. $(x_i - x_n)^2 < 0$ (ou de même $(x_j - x_n)^2 < 0$), alors le second membre de la formule (20) s'écrit :

$$(\theta_{ni} - \theta_{nj}) \Big[[A_n, A_i], A_j \Big] + \theta_{nj} \Big[A_n, [A_i, A_j] \Big] \in J_x ;$$

ceci achève la démonstration du lemme.

Le théorème V.1 est alors un corollaire immédiat de ce lemme et de l'axiome de causalité (1er axiome énoncé au chapitre II).

Nous énoncerons sans démonstration (celle-ci étant trop longue pour avoir sa place dans cet exposé [4]) le théorème suivant qui est une version améliorée du corollaire du théorème IV.1.

<u>Théorème V.2</u> : A tout arbre $t_\beta \in T^{(n)}_{I^+I^-}$, on peut associer un champ d'opérateurs $F_\beta(x_1, \dots, x_n)$ sur $\mathbb{R}^{4n}_x$ ayant pour support le cône C_β, de telle sorte que pour tout monôme m_α, on ait : $m_\alpha(x_1, \dots x_n) = \sum_\beta k_{\alpha\beta}\ F_\beta(x_1, \dots x_n)$, (21) et que les relations de Steinmann reliant les O R G $m_\alpha(x)$ soient identiquement satisfaites par les seconds membres des équations (21).

Considérons alors l'ensemble des champs d'opérateur $r_\lambda(x_1 \dots x_n) = \sum_\beta k_{\alpha\beta}\, F_\beta(x_1 \dots x_n)$ (22) où la définition des coefficients $k_{\alpha\beta}$ est celle du théorème IV.2. Comme tout $F_\beta(x_1 \dots x_n)$ est l'image de l'arbre t_β par l'extension à T de l'homomorphisme de <u>modules</u> $h \circ i_n \circ \ell^{-1}$ (cf. corollaire du théorème IV.1), il est clair que :

$$r_\lambda(x_1 \dots x_n) = h \circ i_n \circ \ell^{-1}(\rho_\lambda) = h \circ i_n (r_\lambda) \quad , \quad \text{où } r_\lambda \in \mathcal{D} \ .$$

Or $h \circ i_n$ peut aussi être considéré comme un homomorphisme <u>d'algèbres de Lie</u> de $\mathcal{D}$ dans l'algèbre de Lie associée à l'algèbre tensorielle $\mathcal{O}$. Par suite les relations (17) établies par le théorème IV.2 se transportent dans $\mathcal{O}$, c'est-à-dire que pour tout couple d'indice λ_1, λ_2 correspondant à des cellules adjacentes $\gamma_{\lambda_1}, \gamma_{\lambda_2}$, on a une relation de la forme :

$$r_{\lambda_1}(x_1 \dots x_n) - r_{\lambda_2}(x_1 \dots x_n) = \left[r_{\lambda'}(x_1, \dots x_m) \ , \ r_{\lambda''}(x_{i_1} \dots x_{i_{m+1}}) \right] \ . \qquad (23)$$

De plus tous les $r_\lambda(x_1 \ldots x_n)$ sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des $m_\alpha(x_1 \ldots x_n)$ puisque les monômes emboités μ_α de l'algèbre de Lie $\mathcal{D}$ engendrent linéairement toute cette algèbre et en particulier les éléments r_λ. Ils sont donc bien <u>intrinsèquement définis</u>, indépendamment de la détermination, des $F_\beta(x_1 \ldots x_n)$.

Les $r_\lambda(x_1 \ldots x_n)$ sont tous les opérateurs retardés généralisés* que l'on peut introduire dans la théorie ; Les O R G de Steinmann $m_\alpha(x_1 \ldots x_n)$ n'en constituent qu'un sous-ensemble correspondant à des éléments particulièrement simples de l'algèbre $\mathcal{D}$, à savoir les monômes emboités. (C'est seulement à partir de $n=5$ qu'il existe des r_λ qui ne sont pas des m_α). Dans le chapitre suivant nous considèrerons les "fonctions retardées généralisées" (F R G) correspondantes, c'est-à-dire les éléments de matrice $\langle \Omega, r_\lambda(x_1 \ldots x_n)\, \Omega \rangle$ (notés aussi $\langle r_\lambda(x_1 \ldots x_n) \rangle$). D'après la fin du chapitre III, toutes ces fonctions ne dépendent en fait que des différences $(x_i - x_j)$, et on peut également déterminer les fonctions $\langle F_\beta(x_1 \ldots x_n) \rangle$ de façon qu'elles ne dépendent que des différences $(x_i - x_j)$, tous les supports Σ_α et C_β étant invariants par les translations $\{x_i \to x_i + a\}$.

(*) Tous ces O R G ont été introduits par Ruelle (3) par un procédé différent.

VI - UN PROBLEME DE VALEURS AU BORD DANS L'ESPACE DES IMPULSIONS

a) Géométrie de l'espace des impulsions :

A toutes les notions introduites au chapitre IV , en ce qui concerne l'espace $\mathbb{R}_s^n$, on peut faire correspondre les notions suivantes relatives à l'espace $\mathbb{R}_p^{4n}$ de n quadrivecteurs p_i représentant les variables d'impulsion :

$$\left(\mathbb{R}_p^{4n} = \mathbb{R}_s^n \otimes \mathbb{R}_p^4 \right) .$$

Tous les cônes $\tilde{\sigma}_\alpha$, $\pi^{(n)}_{I^+I^-}$, $\tilde{c}_\beta$, γ_λ étant définis dans le plan P_s^{n-1} par des ensembles d'inégalités du type (24) $s_{i_1} + s_{i_2} + \dots + s_{i_m} > 0$ ou < 0, on leur associe dans le plan $P^{4(n-1)}$ d'équation :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 0 ,$$

les cônes $\tilde{\sum}_\alpha$, $\prod^{(n)}_{I^+I^-}$, $\tilde{C}_\beta$, Γ_λ obtenus en remplaçant chacune des inégalités (24) par l'inclusion correspondante :

$$p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_m} \in V^+ \text{ ou } V^- .$$

Dans chacun des grand cônes $\prod^{(n)}_{I^+I^-} = \left\{ p \,;\, \sum_{k=1}^{n} p_k = 0 \,;\, \dots \right.$

$$\left. \dots\, p_i \in V^+ ,\, i \in I^+ \,;\, p_j \in V^- ,\, j \in I^- \right\}$$

sont contenus tous les cônes $\tilde{C}_\beta$ relatifs à tous les arbres t_β de l'ensemble $T^{(n)}_{I^+I^-}$. Chacune des "cellules" Γ_λ contenues dans $\prod^n_{I^+I^-}$ est l'intersection de tous les cônes $\tilde{C}_\beta \subset \prod_{I^+I^-}^{(n)}$ qui la contiennent (ceci résulte de la remarque faite à la fin du chäpitre IV).

b) Analyticité des F.R.G. dans des tubes.

On considère l'ensemble des F.R.G. $\langle r_\lambda(x_1 \dots x_n) \rangle$ d'un ordre donné n quelconque ; nous supposons que ces fonctions sont continues et à croissance lente ; à cause de l'invariance de ces fonctions par les translations $\{x_i \to x_i + a\}$, leurs transformées de Fourier sont de la forme $\delta(p_1 + \dots + p_n) \ \langle \tilde{r}_\lambda (\hat{p}) \rangle$.

De même les transformées de Fourier des $\langle F_\beta(x_1 \dots x_n) \rangle$ sont de la forme $\delta(p_1 + \dots + p_n) \ \langle \tilde{F}_\beta(\hat{p}) \rangle$; dans cette notation, $\hat{p}$ désigne un point du plan $P_p^{4(n-1)}$.

D'après un théorème bien connu (*) sur les transformées de Laplace de distributions tempérées à support dans un cône, on voit que toutes les distributions $\langle \tilde{F}_\beta (\hat{p}) \rangle$ sont des valeurs au bord de fonctions analytiques notées $\langle \tilde{F}_\beta(\hat{k}) \rangle$, ($\hat{k}$ désignant un point du plan $P_p^{4(n-1)}$ complexifié). Chaque fonction $\langle \tilde{F}_\beta(\hat{k}) \rangle$ est analytique dans le tube :

$$\left\{ k = (k_1 \dots k_n) \ ; \ k_i = p_i + iq_i \ ; \ \sum_{j=1}^{n} k_j = 0 \ ; \ (q_1 \dots q_n) \in \tilde{C}_\beta \right\},$$

la base de ce tube étant en effet le cône dual de C_β par rapport à la forme bilinéaire $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i$.

(*) Pour des références plus précises concernant les origines de ce théorème on pourra se reporter au livre de Streater et Wightman (réf. A) où l'on trouvera plusieurs versions dudit théorème.

En récrivant la formule (22) pour les transformées de Fourier des F.R.G. correspondantes, soit :

$$\langle r_\lambda(\hat{p})\rangle = \sum_\beta k_{\alpha\beta} \langle F_\beta(\hat{p})\rangle ,$$

on voit immédiatement que tout $\langle r_\lambda(\hat{p})\rangle$ est la valeur au bord d'une fonction $\langle r_\lambda(\hat{k})\rangle$, analytique dans le tube :

$$\mathcal{T}_\lambda = \left\{ \hat{k} = \hat{p} + i\hat{q} \; ; \; \hat{q} \in \Gamma_\lambda \right\} , \quad \Gamma_\lambda = \bigcap_{\beta ; k_{\lambda\beta}=1} C_\beta .$$

En particulier, chaque F.R.G. de Steinmann $\langle \tilde{m}_\alpha(\hat{p})\rangle$ est la valeur au bord d'une fonction analytique dans le tube de base $\sum_\alpha$, les $\tilde{\sum}_\alpha$ constituant un sous-ensemble de l'ensemble des cellules Γ_λ ; mais ce résultat concernant les $\langle m_\alpha(\hat{p})\rangle$ pouvait s'obtenir directement par dualité à partir des propriétés de support démontrées au chapitre précédent, c'est-à-dire indépendamment du théorème V.2. En résumé, l'intérêt de l'introduction de l'algèbre des arbres et du théorème V.2. est d'avoir permis la résolution du problème de valeurs au bord suivant :

<u>Théorème VI.1.</u>

Etant donné un ensemble de fonctions $\langle m_\alpha(\hat{k})\rangle$ analytiques dans les tubes de bases $\tilde{\sum}_\alpha$, dont les valeurs au bord $\langle m_\alpha(\hat{p})\rangle$ satisfont sur tous les réels à un certain système de relations linéaires (relations de Steinmann), il existe des fonctions $\langle f_\beta(\hat{k})\rangle$ analytiques dans les tubes de bases $\tilde{C}_\beta$ telles que :

$$\langle m_\alpha(\hat{k})\rangle = \sum_\beta k_{\alpha\beta} \langle f_\beta(\hat{k})\rangle , \tag{25}$$

où :

$$k_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{si} \quad \tilde{C}_\beta \cap \tilde{\sum}_\alpha = 0 ,$$

$$k_{\alpha\beta} = 1 \quad \text{si} \quad \tilde{\sum}_\alpha \subset \tilde{C}_\beta \quad ;$$

et les expressions (25) résolvent les relations de Steinmann. De plus pour toute cellule Γ_λ, on peut définir une fonction $\langle r_\lambda(\hat{k})\rangle$ analytique dans le tube de base Γ_λ par la formule :

$$\langle r_\lambda(\hat{k})\rangle = \sum_\lambda k_{\lambda\beta} \quad \langle f_\beta(\hat{k})\rangle$$

$$(\text{où } k_{\lambda\beta} = 0 \quad \text{si} \quad \tilde{C}_\beta \cap \Gamma_\lambda = 0 \ ;$$

$$k_{\lambda\beta} = 1 \quad \text{si} \quad \Gamma_\lambda \subset \tilde{C}_\beta) \qquad ;$$

la valeur au bord sur les réels de $\langle r_\lambda(\hat{k})\rangle$ étant une combinaison linéaire bien définie (à coefficients entiers) des $\langle m_\alpha(\hat{p})\rangle$.

c) <u>La fonction de n points.</u>

L'introduction du 3ème axiome physique (condition spectrale) ajoute de nouvelles conditions sur les valeurs au bord $\langle r_\lambda(\hat{p})\rangle$ qui jusqu'à présent n'ont pu être exploitées que très partiellement :

On a le théorème suivant :

<u>Théorème VI - 2.</u>

Pour tout couple de cellules adjacentes Γ_{λ_1}, Γ_{λ_2} dont la face commune est dans le plan d'équation $p_{i_1} + \dots + p_{i_m} = 0$, les valeurs au bord correspondantes $\langle r_{\lambda_1}(\hat{p})\rangle$, $\langle r_{\lambda_2}(\hat{p})\rangle$ coïncident (en tant que distributions) sur un ouvert de la forme $\mathcal{R}_{i_1\dots i_m}\ \{\hat{p} \ ; (p_{i_1} + \dots + p_{i_m})^2 = (p_{i_{m+1}} + \dots + p_{i_n})^2 < M^2\}$.

<u>Démonstration</u> : Utilisant la relation (23), on obtient :

$$\langle r_{\lambda_1}(\hat{p})\rangle - \langle r_{\lambda_2}(\hat{p})\rangle = \int e^{i\sum_{j=i_1}^{i_n} p_j . x_j} \langle \Omega, [r_{\lambda'}(x_{i_1} \dots x_{i_m}),$$

$$, r_{\lambda''}(x_{i_{m+1}} \dots x_{i_n})] \, \Omega \rangle \; d_4 x_1 \dots d_4 x_n .$$

Sachant que les $r_\lambda(x_1 \dots x_n)$ sont des combinaisons linéaires (à coefficients θ_{ij}) de monômes $A(x_{i_1}) \dots A(x_{i_n})$, il suffit de montrer que la distribution à valeursvectorielles dans $\mathcal{H}$:

$$\Phi(p_{i_1} \dots p_{i_m}) = \int A(x_{i_1}) \dots A(x_{i_m}) \, \Omega\rangle \; e^{i\sum_{j=i_1}^{i_m} p_j . x_j} \; d_4 x_{i_1} \dots d_4 x_{i_m}$$

a son support contenu dans $\{p \,;\, p_{i_1} + \dots + p_{i_m} \in \overline{V}_M^{+}\}$ où :

$$\overline{V}_M^{+} = \{p \in R^4 \,;\, p^2 \geq M^2 \,,\, p^{(o)} \geq 0\} .$$

Pour la démonstration de cette propriété classique, conséquence des 2ème, 3ème (*) et 4ème axiomes exposés au chapitre II, nous renvoyons le lecteur au livre de R. Jost (cf. Ref.B) page 58.

(*) L'hypothèse spectrale que nous avons faite dans le 3ème axiome permet seulement de démontrer que le support est contenu dans $\overline{V}^{+}$; c'est une hypothèse un peu plus détaillée sur le spectre d'énergie qui permet d'obtenir la région $\overline{V}_M^{+}$.

En appliquant alors le théorème de "l'edge of the wedge" de H.Epstein (cf. (5)), à n'importe quel couple de fonctions $\langle r_\lambda(\hat{k})\rangle$ analytiques dans des cellules adjacentes on obtient la propriété suivante :

Théorème VI.3

Il existe une fonction $H^n(\hat{k})$ analytique dans le domaine suivant de l'espace $P_p^{4(n-1)}$ complexifié :

$$\bigcup_\lambda \mathcal{T}_\lambda \quad \bigcup_{\substack{(i_I\ldots i_m)\\(\lambda_1\lambda_2)}} \mathcal{V}_{\lambda_1\lambda_2}\left(\mathcal{R}_{i_I\ldots i_m}\right)$$

où $\mathcal{V}_{\lambda_1\lambda_2}\left(\mathcal{R}_{i_I\ldots i_m}\right)$ est l'intersection d'un voisinage complexe de la région $\mathcal{R}_{i_I\ldots i_m}$ avec l'enveloppe convexe de l'union des tubes $\mathcal{T}_{\lambda_1}$ et $\mathcal{T}_{\lambda_2}$.

Comme le domaine énoncé dans ce théorème n'est pas un domaine naturel, on se trouve devant un problème extrêmement complexe d'enveloppe d'holomorphie, dont quelques étapes seulement ont pu être franchies jusqu'à présent.

D'autre part la superposition des conditions du théorème VI.2 à la structure algébrique décrite par le théorème VI.1 pose un nouveau problème de valeurs au bord dont une étape préliminaire a pu être résolue par R. Stora (cf.(8)). La difficulté de ce nouveau problème de valeurs au bord est liée au caractère suivant : les relations linéaires entre les valeurs au bord imposées par le théorème VI.2 n'ont pas lieu sur tous les réels, mais sur des régions $\mathcal{R}_{i_I\ldots i_m}$, par suite ces relations ne peuvent s'exprimer simplement dans l'espace $\mathbb{R}_x^{4n}$ des transformées de Fourier inverses. C'est en effet dans cet espace, et grâce aux propriétés de support (et non d'analyticité) qu'on avait pu résoudre le premier problème de valeurs au bord résumé dans le théorème VI.1.

d) Relation avec les amplitudes de diffusion de particules élémentaires

Pour terminer et en vue de satisfaire le lecteur mathématicien s'il arrive jusqu'ici, nous désirons indiquer sans démonstration le lien qui existe entre les amplitudes de diffusion (qui sont actuellement les quantités physiquement mesurables) et les objets algébriques que nous venons de définir.

On démontre la propriété suivante :

Soit une amplitude de diffusion $F(p_I \dots p_n)$ où interviennent les particules entrantes $a_I, \dots a_m$ d'impulsions respectives $p_I, \dots p_m$ et les particules sortantes d'impulsions respectives $p_{m+I} \dots p_n$; $p_I, \dots p_n$ sont des quadrivecteurs appartenant au cône V^+ et satisfaisant de plus à une condition de masse $p_i^2 = m_i^2$.

Soit $\hat{\Gamma}_\lambda$ la région déduite de Γ_λ en remplaçant toutes les conditions $p_{i_I} \dots + p_{i_m} \in V^\pm$ par $p_{i_I} + \dots + p_{i_m} \in \complement V^+$ $(\hat{\Gamma}_\lambda \supset \Gamma_\lambda)$.

Alors $\forall\ \Gamma_\lambda \subset \prod^n \{1 \dots m\}\{m+1 \dots n\}$, on a la relation suivante :

$$F\,(p_I \dots p_m\ ;\ p_{m+I} \dots p_n) = \prod_{i=I}^{n} (p_i^2 - m_i^2)\ \langle r_\lambda(p_1 \dots p_m, -p_{m+I} \dots -p_n)\rangle \dots$$

$$\dots \big|_{p_i^2 = m_i^2}$$

valable dans la région :

$$\left\{ p\ ;\ p_i \in V^+\ ;\ p_i^2 = m_i^2\ ;\ 1 < i < n\ ;\ (p_I \dots p_m, -p_{m+I} \dots -p_n) \in \hat{\Gamma}_\lambda \right\} .$$

Ceci suppose évidemment que l'on ait montré que la restriction de la distribution $\prod(p_i^2 - m_i^2)\ \langle r_\lambda(\hat{p})\rangle$ à la variété $\{p_i^2 = m_i^2\}$ appelée "couche de masse", ait un sens (*) . Ceci a été montré par K. Hepp (cf.(7)) avec une définition convenablement régularisée des F.R.G.

Comme annoncé dans l'introduction, on voit maintenant plus clairement en quel sens différentes amplitudes de diffusion correspondant à un même ensemble de n particules, mais où l'on fait varier les particules entrantes et sortantes, sont des valeurs au bord de la même fonction analytique $H^{(n)}(k)$ mais prises dans des régions différentes. Cette notion (croisement) n'acquière un intérêt véritable que si elle est encore vraie pour la restriction de $H^{(n)}(k)$ à la variété "couche de masse" (considérée comme complexe c'est-à-dire $\{k \,;\, k_i^2 = m_i^2\}$). Comme le domaine initial de $H^{(n)}(k)$ énoncé au théorème VI.3. ne rencontre pas la couche de masse, la notion de croisement (si elle est démontrable) ne peut être qu'un sous-produit du problème d'enveloppe d'holomorphe énoncé plus haut. C'est seulement dans le cas de $n=4$, qu'elle a pu être démontrée jusqu'à présent (cf.(6)) c'est-à-dire pour les amplitudes de diffusion deux particules → deux particules.

(*) Ces expressions ne sont pas nulles, car on peut montrer (7) que les $r_\lambda(p)$ ont nécessairement une singularité sur la couche de masse du type.

$$\left(\delta\,(p^2 - m^2) + \text{v.p.}\,\frac{1}{p^2 - m^2} \right) .$$

BIBLIOGRAPHIE

1°) Ouvrages de référence concernant la théorie axiomatique des champs :

A - R.F. STREATER et A.S. WIGHTMAN - "P.C.T, Spin and Statistics, and all that" (Benjamin 1964).

B - R. JOST - "The general theory of quantized fields" (publié par l' "American Mathematical Society" 1965).

2°) Publications originales :

[1] - A.S. WIGHTMAN - Phys. Rev. 101, 860 (1956)
R. HAAG - Phys. Rev. 112, 669 (1958)
H. LEHMANN, K. SYMANZIK, W. ZIMMERMANN - Nuovo Cim. 1, 205 (1954) ; Ibid 6, 319 (1957)
V. GLASER, H. LEHMANN, W. ZIMMERMANN - Nuovo Cim. 6, 1122 (1957).

[2] - O. STEINMANN - Helv. Phys. Acta 33, 257, 347 (1960)

[3] - D. RUELLE - Nuovo Cim. 19, 356 (1961)

[4] - J. BROS - Thèse (en préparation).

[5] - H. EPSTEIN - J. Math. Phys. 1, 524 (1960)

[6] - J. BROS, H. EPSTEIN et V. GLASER - Comm. Math. Phys. 1, 240 (1965)

[7] - K. HEPP - Comm. Math. Phys. 1, 95 (1965)

[8] - R. STORA - à paraître dans Comptes Rendus de R.C.P. n° 25 .