Gunter Bengel

Das Weyl'sche Lemma in der Theorie der Hyperfunktionen

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1966, tome 2
« Conférences de G. Bengel, P. Lelong, R. Omnes et R. Stora », , exp. n° 1, p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1966__2__A1_0>

DAS WEYL'SCHE LEMMA IN DER THEORIE DER HYPERFUNKTIONEN

par

Gunter BENGEL

Einleitung

Sei $P(D)$ ein elliptischer partieller Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten vom Grade m und f eine m-mal stetig differenzierbare Funktion, die Lösung der Gleichung $P(D)f = 0$ ist. Dann besagt das Weyl'sche Lemma in seiner klassischen Form, dass f reell-analytisch ist. SCHWARTZ hat dies in [17] auf Lösungen im Sinne der Distributionentheorie ausgedehnt. Aus Arbeiten von HÖRMANDER und MALGRANGE folgt, dass dieses Verhalten für elliptische Gleichungen charakteristisch ist (vgl. [8], [10], [22]).

Im Anschluss an die Theorie der Randverteilungen von KÖTHE und TILLMANN [21] hat SATO [16] einen noch allgemeineren Bereich von verallgemeinerten Funktionen betrachtet, die Hyperfunktionen, die nach Arbeiten von MARTINEAU [14], [15] und TILLMANN [21] die Schwartz'schen Distributionen umfassen. Die Hyperfunktionen sind vor allem deshalb interessant, weil jede Hyperfunktion, die auf einer offenen Menge definiert ist, sich auf den ganzen Raum fortsetzen lässt; (die Garbe der Keime von Hyperfunktionen ist welk).

In der vorliegenden Arbeit soll eine Verallgemeinerung des Weyl'schen Lemmas für den Bereich der Hyperfunktionen bewiesen werden. Nach einigen Vorbereitungen stellen wir in § 2 einen Dualitätssatz von GROTHENDIECK [5] in der Form dar, wie er im folgenden benötigt wird. In § 3 führen wir die P-Funktionale ein in Analogie zur Darstellung der Theorie der Hyperfunktionen, wie sie in der Arbeit [14] von MARTINEAU zu finden ist. Die Beweise von [14] konnten zum Teil wörtlich auf unseren Fall übertragen werden. Wir betrachten dazu kompakte Teilmengen K in R^n und in R^{n+1} offene Umgebungen Ω von K. Wenn $P(D)$ ein elliptischer partieller Differentialoperator auf R^{n+1} ist, bezeichnen wir mit $H_P(\Omega)$ den Raum der in Ω definierten Funktionen f, die Lösung der Gleichung $P(D)\,f = 0$ sind. $H_P(K)$ ist der induktive Limes der $H_P(\Omega)$, wenn Ω alle offenen Umgebungen von K durchläuft. Ein P-Funktional mit kompaktem Träger in K ist eine stetige Linearform auf $H_P(K)$. Die P-Funktionale mit beliebigem Träger erhalten wir durch einen Verheftungsprozess, indem wir lokal-endliche Reihen von P-Funktionalen mit kompaktem Träger betrachten. Dann wird gezeigt, dass man die P-Funktionale auch als Elemente gewisser relativer Kohomologiegruppen verstehen kann (Satz 8), und daraus resultiert eine Darstellung durch Funktionen $u(x,t)$ die für $t \neq 0$ definiert sind und der transponierten Gleichung ${}^tP(D)\,u = 0$ genügen. Wir nennen $u(x,t)$ die Indikatrix des P-Funktionals.

In § 4 stellen wir der Vollständigkeit halber die wichtigsten Eigenschaften der Hyperfunktionen zusammen und zeigen, dass man jede Hyperfunktion als P-Funktional auffassen kann. Damit haben wir auch eine Darstellung der Hyperfunktionen durch die Indikatrizen der zugehörigen P-Funktionale. Im Falle, dass $P(D)$ der Laplace-Operator ist, findet sich diese Darstellung bereits bei TILLMANN [20] und MANTOVANI - SPAGNOLO [13].

Im letzten Paragraphen geben wir eine Bedingung dafür an, dass eine Funktion $u(x,t)$ die Indikatrix einer analytischen Funktion ist. $u(x,t)$ muss einer gewissen Fortsetzbarkeitsbedingung genügen, die auch schon bei den holomorphen Indikatrizen auftauchte [21]. Darauf folgt der Beweis des Weyl'schen Lemmas:

Eine Hyperfunktion Ψ die einer elliptischen Differentialgleichung $Q(D)\,\Psi = 0$ genügt ist eine analytische Funktion.

Der Beweis verläuft über die Indikatrix. Wir stellen Ψ als P-Funktional dar und beweisen, dass die Indikatrix von Ψ die Fortsetzungseigenschaft hat.

Die Resultate dieser Arbeit wurden in zwei Noten [1] in den Comptes Rendus Acad. Sc. Paris angekündigt.

Vor kurzem hat SEBASTIAO e SILVA [19] einen Beweis des Weyl'schen Lemmas im Falle des Laplace-Operators von zwei Variablen und des Cauchy-Riemann-Operators angekündigt. Der Beweis benutzt die Theorie der Silva'schen Ultradistributionen.

Herrn Prof. G. KÖTHE, dem ich die Anregung zu dieser Arbeit verdanke, möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank abstatten. Ebenso gilt mein Dank Herrn Prof. A. MARTINEAU, der mir während meines Aufenthalts in Montpellier in vielen Gesprächen wertvolle Hinweise gab.

§ 1. Vorbereitungen

R^n sei der n-dimensionale relle Zahlenraum der $x = (x_1 \ldots x_n)$. Wenn Ω eine offene Teilmenge des R^n ist, sind die Räume $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$ und $\mathcal{E}'(\Omega)$ definiert (vgl. [17]); $\langle\ ,\ \rangle_\Omega$ bezeichne das Skalarprodukt zwischen $\mathcal{D}'(\Omega)$ und $\mathcal{D}(\Omega)$ bzw. $\mathcal{E}'(\Omega)$ und $\mathcal{E}(\Omega)$. Wenn aus dem Zusammenhang ersichtlich ist um welche Menge Ω es sich handelt, werden wir den Index oft weglassen.

Sei $P(\xi)$ ein Polynom in n Variablen $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ vom Grade m, $P_m(\xi)$ sein Hauptteil, d.h. die homogenen Bestandteile von $P(\xi)$ vom Grade m. Man ordnet $P(\xi)$ einen linearen partiellen Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten $P(D)$, indem man die ξ_k durch $i \frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = 1 \ldots n)$ ersetzt. $P(D)$ heisst elliptisch, wenn $P_m(\xi)$ nur $\xi = 0$ als einzige reelle Nullstelle hat. Mit ${}^tP(D)$ bezeichnen wir den zu $P(D)$ transponierten Operator, den man aus dem Polynom $P(-\xi)$ erhält; ${}^tP(D)$ ist wieder elliptisch. Im folgenden sei $P(D)$ immer als elliptisch vorausgesetzt. Es ist bekannt, dass jede Lösung $T \in \mathcal{D}'$ der Gleichung

$$(1) \qquad P(D)\,T = 0$$

eine reell-analytische Funktion ist und dass $P(D)$ eine Elementarlösung $E(x)$ besitzt, die für $x \neq 0$ reell-analytisch ist (vgl. [8], [22]).

Lemma 1. Seien S, T, $X \in \mathcal{D}'$ Distributionen von denen eine beliebig oft differenzierbar ist und zwei kompakte Träger haben. Dann gilt die Transpositionsformel

$$(2) \qquad \langle S * T, X \rangle = \langle T, \check{S} * X \rangle$$

($*$ ist die Faltung, $\check{S}$ ist die zu S symmetrische Distribution definiert durch $\langle \check{S}, \varphi \rangle = \langle S, \varphi(-x) \rangle$). Beweis : siehe Formel VI, 4, 11 von [17].

Wenn $E(x)$ eine Elementarlösung von $P(D)$ ist folgt aus Lemma 1 dass $\check{E}(x) = E(-x)$ eine Elementarlösung von ${}^tP(D)$ ist, denn es gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle {}^tP(D)\check{E}, \varphi \rangle = \langle {}^tP(D)\check{E} * \delta, \varphi \rangle = \langle \check{E} * \delta, P(D)\varphi \rangle$$
$$= \langle \delta, E * P(D)\varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$$

d.h. ${}^tP(D)\check{E} = \delta$ und ebenso zeigt man dass $\check{E} * {}^tP(D) = \delta$.

Sei Ω eine offene Teilmenge in R^n, wir bezeichnen mit $H_P(\Omega)$ den Raum der $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, die Lösung der Gleichung (1) sind. Auf $H_P(\Omega)$ führen wir die Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von Ω ein ; dadurch wir $H_P(\Omega)$ zu einem (F)-Raum. Der Satz von Banach - Schauder zeigt, dass diese Topologie mit der durch $\mathcal{E}(\Omega)$ auf $H_P(\Omega)$ induzierten übereinstimmt. $H_P(\Omega)$ ist also nuklear. Sei $K \subset R^n$ kompakt, dann setzen wir $H_P(K) = \varinjlim H_P(\Omega)$, wobei Ω alle offenen Umgebungen von K durchläuft. Man kann sich natürlich auf eine Fundamentalfolge von Umgebungen Ω_ν beschränken. Daraus folgt, dass $H_P(K)$ ein ultrabornologischer (LF)-Raum wird, der als abzählbarer induktiver Limes von nuklearen Räumen wieder nuklear ist.

§ 2. Ein Dualitätssatz

Sei $K \subset R^n$ kompakt, U eine offene Umgebung von K. Im folgenden sei $\omega(x)$ eine Funktion, die die Bedingungen:

$$(3) \quad \begin{cases} \omega(x) \text{ ist beliebig oft differenzierbar} \\ \omega(x) \equiv 1 \text{ in einer Umgebung } V_1 \subset U \text{ von } K \\ \omega(x) \equiv 0 \text{ in einer Umgebung } V_2 \subset \complement K \text{ von } \complement U \end{cases}$$

erfüllt. Sei $f \in H_P(K)$ und $u \in H_{{}^tP}(\complement K)$; f sei in einer Umgebung U von K definiert und ω erfülle die Bedingungen (3). Dann hat der Ausdruck

$$(4) \qquad \langle P(D)(\omega f), u \rangle_{U \cap \complement K} = (f, u)$$

einen Sinn. Dabei hängt ω von der Umgebung U ab, in der f definiert ist.

<u>Satz 1</u>. a) (4) definiert eine getrennt stetige Bilinearform auf $H_P(K) \times H_{{}^tP}(\complement K)$.

b) Dieses Skalarprodukt hängt nur von f und u, nicht aber von ω ab.

c) Es gilt $(f, u) = \langle P(D)(\omega f), u \rangle_{U \cap \complement K} = 0$ für alle $f \in H_P(K)$ dann und nur dann, wenn $u \in H_{{}^tP}(R^n)$.

Beweis: a) ist klar. b) sei ω' eine andere Funktion die (3) erfüllt, dann ist $\omega - \omega'$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger in $U \cap \complement K$ und es gilt:

$$\langle P(D)(\omega f), u \rangle_{U \cap \complement K} - \langle P(D)(\omega' f), u \rangle_{U \cap \complement K} =$$

$$= \langle P(D)\left[(\omega - \omega')f\right], u \rangle_{U \cap \complement K} = \langle (\omega - \omega')f, {}^tP(D)u \rangle = 0$$

da ${}^tP(D)u = 0$ in der Umgebung des Trägers von $\omega - \omega'$.

c) Sei $u \in H_{{}^tP}(R^n)$, der Träger von $P(D)(\omega f)$ ist enthalten in $U \cap \complement K$ und es gilt

$$(f, u) = \langle P(D)(\omega f), u \rangle_{U \cap \complement K} = \langle P(D)(\omega f), u \rangle_{R^n} =$$

$$= \langle \omega f, {}^tP(D)u \rangle = 0 \quad \text{da } {}^tP(D)u = 0 \text{ in } R^n.$$

Sei nun $u \in H_{{}^tP}(\complement K)$ mit $(f,u) = 0$ für alle $f \in H_P(K)$. Sei Ω eine relativ kompakte offene Teilmenge von R^n mit $K \subset \Omega$ und $\alpha(x)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion, die in einer Umgebung von $\bar{\Omega}$ identisch eins ist. ${}^tP(D)(\alpha u)$ ist definiert in $\complement K$ und hat kompakten Träger in $\complement \bar{\Omega}$; wir können ${}^tP(D)(\alpha u)$ auf ganz R^n fortsetzen, indem wir sie in Ω identisch Null setzen. Damit ist auch

$$\check{E} * {}^tP(D)(\alpha u) = v \tag{5}$$

auf ganz R^n definiert und es gilt

$${}^tP(D)\, v = {}^tP(D)\left[\check{E} * {}^tP(D)(\alpha u)\right] = {}^tP(D)\,(\alpha u)$$

d.h. in Ω gilt ${}^tP(D)v = 0$. Ausserdem stimmen u und v auf $\Omega \cap \complement K$ überein. Dazu genügt es zu zeigen, dass

$$\langle v, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \cap \complement K).$$

Betrachten wir eine beliebig oft differenzierbare Funktion β mit kompaktem Träger in $\Omega \cap \complement K$, die in einer Umgebung des Trägers von φ identisch eins ist. Damit haben wir

$$\langle u, \varphi \rangle_{\Omega \cap \complement K} = \langle \beta u, \varphi \rangle_{\Omega \cap \complement K} = \langle \check{E} * P(D)(\beta u), \varphi \rangle_{\Omega \cap \complement K}$$

und es gilt wegen (5)

$$\langle v - u, \varphi \rangle_{\Omega \cap \complement K} = \langle \check{E} * {}^tP(D)\left[(\alpha - \beta) u\right], \varphi \rangle_{\Omega \cap \complement K} .$$

Nun ändert sich die rechte Seite nicht, wenn, wir die Skalarprodukte über ganz R^n erstrecken und die Transpositionsformel (2) ergibt

$$\langle \check{E} * {}^tP(D)\left[(\alpha - \beta) u\right], \varphi \rangle = \langle {}^tP(D)\left[(\alpha - \beta) u\right], E * \varphi \rangle .$$

Bezeichnen wir mit U das Komplement des Trägers von φ, so sieht man aus der Definition von α und β, dass gilt ${}^tP(D)\left[(\alpha - \beta) u\right] = 0$ in einer Umgebung von $\complement U$ und einer Umgebung von K. Wir können also die Skalarprodukte auf $U \cap \complement K$ beschränken; dort ist aber $P(D)(E * \varphi) = 0$ d.h. $E * \varphi \in H_P(K)$ ist definiert in U. $\alpha - \beta = \omega$ erfüllt die Bedingungen (3), und man erhält mit der Voraussetzung über u :

$$\langle {}^tP(D)\left[(\alpha-\beta)u\ ,\ E*\varphi\rangle = \langle {}^tP(D)(\omega\ u)\right],\ E*\varphi\rangle_{U\cap \complement K} = \langle u\ ,\ E*\varphi\rangle = 0\ .$$

u stimmt also auf $\Omega \cap \complement K$ mit v überein , v ist in einer Umgebung von K definiert und liefert daher die Fortsetzung von u auf K und damit auf den ganzen Raum .

Der Unterraum von $H_{t_P}(\complement K)$, der aus den Einschränkungen der Funktionen von $H'_{t_P}(R^n)$ auf $\complement K$ besteht , sei der Einfachheit halber wieder mit $H_{t_P}(R^n)$ bezeichnet .

<u>Corollar</u> . $H_{t_P}(R^n)$ ist abgeschlossen in $H_{t_P}(\complement K)$.

Beweis : $H_{t_P}(R^n)$ ist der Durchschnitt der Nullräume der stetigen Linearformen $u \longrightarrow (f,u)$, $f \in H_P(K)$.

<u>Satz 2</u> . (GROTHENDIECK [5] , Theorem 4): Der duale Raum zu $H_P(K)$ ist der Quotientenraum $H_{t_P}(\complement K) \big/ H_{t_P}(R^n)$. Die Dualität ist gegeben durch die Bilinearform (4) .

Beweis : Satz 1 besagt , dass jedes Element aus diesem Quotientenraum eine stetige Linearform auf $H_P(K)$ erzeugt . Es bleibt zu zeigen , dass jede stetige Linearform ψ auf $H_P(K)$ auf diese Weise erhalten werden kann . ψ ist genau dann eine stetige Linearform auf $H_P(K)$, wenn für jede offene Umgebung U von K , die Einschränkung von ψ auf $H_P(U)$ stetig ist . Nach dem Satz von Hahn - Banach lässt sich ψ fortsetzen zu einer stetigen Linearform auf $\mathcal{E}(U)$. Es gibt also eine Distribution T_ψ mit kompaktem Träger in U , sodass gilt

$$\langle T, f\rangle = \psi(f)$$

für alle $f \in H_P(U)$. Wir setzen nun

$$u = \check{E} * T_\psi \tag{6}$$

und es gilt

$$ {}^tP(D)u = {}^tP(D)(\check{E} * T_\psi) = T_\psi\ . \tag{7}$$

Im Komplement des Trägers von T_ψ erfüllt also u die Differentialgleichung ${}^tP(D)u = 0$. Wir zeigen nun, dass u nur von ψ nicht aber von der gewählten Umgebung U von K und der Distribution T_ψ abhängt. Seien U und U' zwei offene Umgebungen von K, wir können annehmen $U' \subset U$, und seien T und S Fortsetzungen von ψ auf $\mathcal{E}'(U)$ bzw. $\mathcal{E}'(U')$. Es genügt zu zeigen, dass $\langle \check{E} * (T-S), \varphi \rangle = 0$ für jede beliebig oft differenzierbare Funktion φ mit kompaktem Träger in $\complement U$. Es gilt aber

$$\langle \check{E} * (T-S), \varphi \rangle = \langle T-S, E * \varphi \rangle$$

$E * \varphi$ ist eine Funktion aus $H_P(U)$ und auf diesen Funktionen stimmen T und S überein, d.h. $\langle \check{E} * (T-S), \varphi \rangle = 0$. Daraus folgt dass $\check{E} * T$ und $\check{E} * S$ in $\complement U$ übereinstimmen, $\check{E} * S$ gibt also eine Fortsetzung von $\check{E} * T$ auf $\complement U'$. Wählt man U immer kleiner, so sieht man dass man u auf ganz $\complement K$ fortsetzen kann.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die so bestimmte Funktion u die Linearform ψ erzeugt. Sei $f \in H_P(K)$ in der Umgebung U von K definiert und sei T_ψ die Fortsetzung von ψ auf $\mathcal{E}'(U)$. ω sei eine Funktion, die (3) erfüllt und in einer Umgebung des Trägers von T_ψ identisch eins ist. Dann gilt $\omega f = E * P(D)(\omega f)$ und weiter

$$\begin{aligned}\psi(f) &= \langle T_\psi, f \rangle = \langle T_\psi, \omega f \rangle = \langle T_\psi, E * P(D)(\omega f) \rangle \\ &= \langle \check{E} * T_\psi, P(D)(\omega f) \rangle = \langle u, P(D)\,\omega f \rangle\end{aligned}$$

d.h. $(u, f) = \psi(f)$. Damit ist der Dualitätssatz vollständig bewiesen.

§ 3. P - Funktionale

Wir betrachten nun den R^n mit den Variablen $x = (x_1 \dots x_n)$ eingebettet in den R^{n+1} mit den Variablen $(x, t) = (x_1 \dots x_n, t)$. Auf R^n sei ein elliptischer Differentialoperator $Q(D)$ vom Grade m gegeben. Für den Hauptteil des zugehörigen Polynoms $Q(\xi)$ gelte $Q_m(\xi) \geqslant 0$ für reelle ξ. Daraus folgt, dass m eine gerade Zahl sein muss (vgl. [22] prop. 20. 1), also gilt auch $P_m(\xi, \tau) = Q_m(\xi) + \tau^m \geqslant 0$ und $P_m(\xi, \tau) = 0$ genau dann wenn $(\xi, \tau) = 0$. Der auf R^{n+1} definierte Operator $P(D) = Q(D) + (i\frac{\partial}{\partial t})^m$ ist also wieder elliptisch. Im folgenden sei $P(D)$ immer von dieser Form.

Sei nun K eine kompakte Teilmenge des R^n, $H_P(K) = \varinjlim H_P(\Omega)$ der oben definierte Raum der Funktionen f die in der Umgebung von K die Gleichung (1) erfüllen, wobei Ω alle in R^{n+1} offenen Umgebungen von K durchläuft.

Sei $\Omega \subset R^{n+1}$ offen, dann bezeichnen wir mit $\tilde{\Omega}$ die Vereinigung von Ω mit allen relativ kompakten Zusammenhangskomponenten von $\complement\Omega$. $\tilde{\Omega}$ ist wieder offen [10].

<u>Lemma 2</u>. Sei $K \subset R^n$ kompakt, dann existiert eine Fundamentalfolge von offenen Umgebungen $\Omega_\nu \subset R^{n+1}$ von K mit $\Omega_\nu = \tilde{\Omega}_\nu$.

Beweis: Sei Ω_ν die Menge aller $(x, t) \in R^{n+1}$ die von K einen Abstand $< \frac{1}{\nu}$ haben. Diese Ω_ν erfüllen offenbar die Bedingung des Lemmas, denn wenn ein Punkt (x, t) nicht in Ω_ν liegt, dann liegt eine ganze zur t-Achse parallele Halbgerade von (x, t) aus ebenfalls nicht in Ω_ν; $\complement\Omega_\nu$ hat nur eine Zusammenhangskomponente, die nicht relativ kompakt ist.

Aus dem Lemma folgt sofort

<u>Satz 3</u>. $H_P(R^{n+1})$ ist dicht in $H_P(K)$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass jede stetige Linearform auf $H_P(K)$, deren Einschränkung auf $H_P(R^{n+1})$ verschwindet, identisch Null ist. Sei Ψ eine derartige Linearform. Nach [10], Chap. III, prop. 8 ist $H_P(R^{n+1})$ dicht in $H_P(\Omega_\nu)$ für alle Ω_ν der in Lemma 2 konstruierten Folge. Daraus folgt, dass die Einschränkung von Ψ auf $H_P(\Omega_\nu)$ verschwindet für alle ν.

Da $H_P(K) = \varinjlim H_P(\Omega_\nu)$ ist, folgt dass ψ auf $H_P(K)$ verschwindet. Satz 3 gestattet es, Linearformen auf $H_P(K)$ für verschiedene K zu identifizieren.

Definition 1. Seien K_1 und K_2 kompakte Teilmengen des R^n und $\psi_i \in H'_P(K_i)$, $(i = 1, 2)$. Die ψ_i heissen äquivalent, wenn ihre Einschränkungen auf $H_P(R^{n+1})$ übereinstimmen. Eine Klasse äquivalenter Linearformen ψ heisst ein P-Funktional mit kompaktem Träger in R^n.

Lemma 3. Seien K_1 und K_2 kompakt in R^n mit $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Für alle $f \in H_P(K_1 \cap K_2)$ existieren $f_i \in H_P(K_i)$ $(i = 1, 2)$, sodass $f = f_1 - f_2$.

Beweis: Sei $\wp$ die Garbe der Keime von Lösungen der Gleichung (1). Für ein offenes $\Omega \subset R^{n+1}$ gilt $H^o(\Omega, \wp) = H_P(\Omega)$ (vgl. [3], Theorem 4.4.1) und falls Ω P-konvex ist gilt nach [11], Theorem 1: $H^1(\Omega, \wp) = 0$. Für einen elliptischen Operator ist jedoch jede offene Menge P-konvex ([8], Cor. 3.7.1). Durch Übergang zum induktiven Limes erhält man $H^o(K, \wp) = H_P(K)$ und $H^1(K, \wp) = 0$ für jedes kompakte $K \subset R^n$.

Betrachten wir nun die exakte Sequenz ([3], 5.6)

$$0 \to H^o(K_1 \cup K_2, \wp) \to H^o(K_1, \wp) \times H^o(K_2, \wp) \xrightarrow{\pi} H^o(K_1 \cap K_2, \wp) \to 0 .$$

Die Null am rechten Ende rührt von der Tatsache her, dass $H^1(K_1 \cup K_2, \wp) = 0$ ist. Die Abbildung π ist gegeben durch $(f_1, f_2) \to f_1 - f_2$ und da die Sequenz exakt ist, ist π surjektiv.

Bemerkung. Die Abbildung π ist offenbar stetig, und aus der Verallgemeinerung des Satzes von Banach-Schauder (vgl. die Einleitung von [7], oder [2] Chap. III, § 3 Exercise 13) folgt, dass π ein topologischer Homomorphismus ist.

Satz 4. Sei ψ ein von Null verschiedenes P-Funktional auf R^n, dann existiert ein minimales kompaktes $K \subset R^n$ mit $\psi \in H'_P(K)$. Dieses K heisst der Träger von ψ, und wir schreiben $K = \sigma(\psi)$.

Beweis : a) $\psi_1 \in H'_P(K_1)$ und $\psi_2 \in H'_P(K_2)$ seien äquivalent. Wir definieren dann ein $\psi \in H'_P(K_1 \cap K_2)$ das zu ψ_1 und ψ_2 äquivalent ist. Sei $f \in H_P(K_1 \cap K_2)$ dann existieren nach Lemma 3 $f_1 \in H_P(K_1)$ und $f_2 \in H_P(K_2)$ derart, dass $f = f_1 - f_2$, und wir setzen $\psi(f) = \psi_1(f_1) - \psi_2(f_2)$. Diese Definition ist sinnvoll, wenn wir zeigen können, dass $\psi(f) = 0$ falls $f_1 - f_2 = 0$ in einer Umgebung von $K_1 \cap K_2$. Unter dieser Bedingung sind aber f_1 und f_2 Einschränkungen einer Funktion $g \in H_P(K_1 \cup K_2)$, und da $H_P(R^{n+1})$ dicht in $H_P(K_1 \cup K_2)$ ist, gilt wegen der Äquivalenz von ψ_1 und ψ_2 :

$$\psi_1(f_1) = \psi_1(g) = \psi_2(g) = \psi_2(f_2) \quad .$$

Daraus folgt auch, dass $\psi = 0$ ist, falls $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Die Stetigkeit von ψ folgt aus der Stetigkeit der ψ_i $(i = 1, 2)$ und der Tatsache, dass die in Lemma 3 definierte Abbildung ein topologischer Homomorphismus ist. ψ ist äquivalent zu ψ_1 und ψ_2, denn sei $g \in H_P(R^{n+1})$, dann stellen wir g in der Form $g = g - 0$ dar und erhalten $\psi(g) = \psi_1(g)$.

b) Damit ist zunächst gezeigt, dass wir uns beim Beweis auf ineinander enthaltene kompakte Mengen beschränken können. Diese haben einen nichtleeren Durchschnitt K. Dann genügt es, eine Folge von kompakten K zu betrachten mit $K_{\nu+1} \subset K_\nu$ und $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} K_\nu = K$. Seien $\psi_\nu \in H'_P(K_\nu)$ gegeben, die alle untereinander äquivalent sind; wir müssen zeigen, dass es ein $\psi \in H'_P(K)$ gibt, das zu den ψ_ν äquivalent ist. Sei Ω_i eine Umgebungsbasis von K mit $\Omega_i = \tilde{\Omega}_i$. Für jedes i existiert dann ein K_{ν_i} derart, dass Ω_i Umgebung von K_{ν_i} ist. ψ_{ν_i} definiert eine stetige Linearform auf $H_P(\Omega_i)$ und da alle ψ_ν äquivalent sind, stimmt für $k \geq i$ die Einschränkung von ψ_{ν_k} auf $H_P(\Omega_i)$ mit ψ_{ν_i} überein. Damit ist aber eine stetige Linearform auf dem induktiven Limes der $H_P(\Omega_i)$ d.h. auf $H_P(K)$ definiert, die nach Konstruktion äquivalent zu den ψ_ν ist.

<u>Bemerkung</u> : Für die Träger von P-Funktionalen gilt offenbar

$$\sigma(\psi_1 + \psi_2) \subset \sigma(\psi_1) \cup \sigma(\psi_2) \qquad \text{und } \sigma(\lambda\psi) \subset \sigma(\psi) \; .$$

Satz 5 . Sei $\sigma(\psi) = \bigcup_{i=1}^{k} K_i$, dann existieren ψ_i mit $\sigma(\psi_i) \subset K_i$ $(i = 1 \dots k)$, sodass $\psi = \sum_{i=1}^{k} \psi_i$.

Beweis : Betrachten wir die Abbildung $\prod_1^k H'_P(K_i) \longrightarrow H'_P(K)$ gegeben durch $(\psi_1 \dots \psi_k) \to \sum_1^k \psi_i$. Die dazu transponierte Abbildung $H_P(K) \to \prod_1^k H_P(K_i)$ ist gegeben durch $f \longrightarrow (f_1 \dots f_k)$, f_i die Einschränkung von f auf K_i . Diese Abbildung hat einen abgeschlossenen Bildraum und daher ist die ursprüngliche Abbildung surjektiv ([2] , Chap. IV , § 4 , prop. 5) . Sei eine Folge von P-Funktionalen ψ_i gegeben . Wir nennen die formale Reihe $\sum \psi_i$ lokal - endlich , wenn die $\sigma(\psi_i)$ eine lokal - endliche Überdeckung von R^n bilden . Eine lokal - endliche Reihe heisse lokal - trivial , wenn für alle $x \in R^n$ gilt :

$$x \notin \sigma \Big(\sum_{j: x \in \sigma(\psi_j)} \psi_j \Big) . \tag{8}$$

Zwei lokal - endliche Reihen $\sum \psi_i$ und $\sum \theta_i$ heissen äquivalent , wenn $\sum(\psi_i - \theta_i)$ lokal trivial ist . Dabei brauchen die ψ_i und θ_i nicht von vornherein dieselben Träger zu haben . Man kann dies jedoch immer erreichen , indem man die ψ_i und θ_i nach Satz 5 zerlegt . Die so entstehenden neuen Reihen sind dann zu den ursprünglichen äquivalent . Die Äquivalenzklasse einer lokal - endlichen Reihe nennen wir ihre Summe .

Definition 2 . Ein P-Funktional mit beliebigem Träger auf R^n ist die Summe einer lokal - endlichen Reihe von P-Funktionalen mit kompaktem Träger .

Bemerkung : a) Die Summe einer lokal - endlichen Reihe ist von der Reihenfolge der Terme unabhängig .

b) Diese Konstruktion lässt sich auch für eine beliebige lokal - abgeschlossene Menge in R^n durchführen .

c) Die lokale Trivialität einer Reihe $\sum \psi_i$ ist eine lokale Eigenschaft . Wir können daher sagen , wann zwei P-Funktionale in der Umgebung eines Punktes übereinstimmen . $\sum \psi_i$ und $\sum \Theta_i$ stimmen genau dann in der Umgebung von x überein , wenn $\sum(\psi_i - \theta_i)$ lokal trivial in der Umgebung von x ist .

d) Die Menge der Punkte, wo $\sum \psi_i = 0$ ist, ist offen, denn wenn (8) in einem Punkte x erfüllt ist, dann gibt es eine ganze Umgebung von x in der (8) erfüllt ist. Das Komplement dieser Menge heisst der Träger von $\sum \psi_i$.

Satz 6. Sei U eine relativ kompakte offene Teilmenge des R^n und ψ ein P-Funktional auf U. Dann existiert ein P-Funktional θ mit kompaktem Träger in $\bar{U}$ das mit ψ auf U übereinstimmt.

Beweis: Sei $K \subset U$ kompakt, mit $\tilde{K}$ bezeichnen wir wieder die Vereinigung von K mit den bezüglich U relativ kompakten Zusammenhangskomponenten von $U - K$. $\tilde{K}$ ist wieder kompakt [10]. Wenn $K = \tilde{K}$, ist $H'_p(\bar{U} - U)$ dicht in $H'_p(\overline{U - K})$; (der Beweis ist wörtlich derselbe wie der von Lemma 1 in [14]). Es existiert eine Folge $\{K_i\}$ von kompakten Mengen mit $K_i \subset \mathring{K}_{i+1}$ und $K_i = \tilde{K}_i$ für alle i derart, dass $U = \bigcup_1^\infty K_i$. Sei ψ ein P-Funktional auf U, wegen Satz 5 können wir annehmen, dass ψ durch eine lokal-endliche Reihe $\sum \psi_i$ definiert ist derart, dass die Träger der ψ_i in $\overline{K_{i+1} - K_i}$ enthalten sind. Sei d_j eine Metrik auf $H'_p(\overline{U - K_j})$; ($H'_p(U - K_j)$ ist ein (F)-Raum), die Einbettung von $H'_p(\overline{U - K_j})$ in $H'_p(\overline{U - K_i})$ für $j \leq i$ ist stetig. Man kann nach dem oben gesagten ein $\varphi_j \in H'_p(\bar{U} - U)$ finden mit $d_i(\psi_j - \varphi_j) \leq \frac{1}{2^n}$. Daraus folgt, dass die (nicht lokal-endliche) Reihe $\sum(\psi_i - \varphi_i)$ konvergiert gegen ein Element $\theta \in H'_p(U)$. Nun zerlegen wir θ in der Form:

$$\theta = \sum_{i=1}^{j-1} \psi_i - \sum_{i=1}^{j-1} \varphi_i + \sum_{i=j}^{\infty} (\psi_i - \varphi_i).$$

Der letzte Term konvergiert in $H'_p(\overline{U - K_j})$, stellt also ein P-Funktional auf $\overline{U - K_j}$ dar, die zweite Summe ist ein P-Funktional auf $\bar{U} - U_j$ im Innern von K_j bleibt nur der Beitrag der ersten Summe, θ stimmt also im Innern von K_j mit ψ überein für alle j, d.h. θ stimmt in U mit ψ überein.

Wir wollen nun eine zweite Definition für die P-Funktionale herleiten. Wir bezeichnen mit $H'_P(R^n)$ den Raum aller P-Funktionale mit kompaktem Träger in R^n. $H'_P(R^n)$ ist offenbar ein linearer Raum. Wir fassen $H'_P(R^n)$ als konstante Garbe auf R^n auf und betrachten die Untergarbe $\mathcal{J}$ die durch das Garbendatum

$$\mathcal{J}(U) = \left\{ \psi \in H'_P(R^n) ; \sigma(\psi) \cap U = \emptyset \right\}$$

gegeben ist.

Definition 3. Die Quotientengarbe $H'_P(R^n)/_{\mathcal{J}} = \mathcal{O}\!\mathcal{L}_P$ heisst die Garbe der Keime von P-Funktionalen. Diese Definition wird gerechtfertigt durch

Satz 7. a) $H'_P(R^n) = \Gamma_*(R^n, \mathcal{O}\!\mathcal{L}_P)$ (Raum der Schnitte mit kompaktem Träger).

b) Der Raum der Schnitte mit beliebigem Träger $\Gamma(R^n, \mathcal{O}\!\mathcal{L}_P)$ kann mit dem Raum der P-Funktionale im Sinne der Definition 2 identifiziert werden.

c) Die Garbe $\mathcal{O}\!\mathcal{L}_P$ ist welk.

Beweis: Sei N_x der Unterraum von $H'_P(R^n)$ der aus allen ψ besteht mit $x \notin \sigma(\psi)$. Der Halm von $\mathcal{O}\!\mathcal{L}_P$ im Punkt x ist dann gerade $\mathcal{O}\!\mathcal{L}_P(x) = H'_P(R^n)/_{N_x}$. Wir bezeichnen mit P_x die kanonische Abbildung $P_x : H'_P(R^n) \longrightarrow \mathcal{O}\!\mathcal{L}_P(x)$. Jedem $\psi \in H'_P(R^n)$ können wir dann einen Schnitt $s_\psi \in \Gamma(R^n, \mathcal{O}\!\mathcal{L}_P)$ zuordnen, indem wir setzen $s_\psi(x) = P_x(\psi)$. Der Träger von s_ψ stimmt mit dem von ψ überein, da $s_\psi(x) = 0$ genau dann wenn $\psi \in N_x$, d.h. wenn $x \notin \sigma(\psi)$. Diese Zuordnung lässt sich auf die P-Funktionale mit beliebigem Träger fortsetzen, indem wir der lokal-endlichen Reihe $\sum \psi_i$ den Schnitt $\sum s_{\psi_i}$ zuordnen, denn in $\Gamma(R^n, \mathcal{O}\!\mathcal{L}_P)$ hat diese Summe einen Sinn. Der Kern bei dieser Abbildung besteht genau aus den lokal-trivialen Reihen. Die Abbildung ist surjektiv; es genügt, dies lokal nachzuweisen. Sei $s \in \Gamma(R^n, \mathcal{O}\!\mathcal{L}_P)$, dann existiert nach Konstruction der Garbe $\mathcal{O}\!\mathcal{L}_P$ zu jedem x eine Umgebung, sodass die Einschränkung von s auf U im Bild der oben definierten Abbildung liegt. Damit ist a) und b) bewiesen. c) folgt aus Satz 6, indem man den auf der offenen Menge U definierten Schnitt s zunächst auf $\overline{U}$ fortsetzt und dann ausserhalb von U Null setzt.

Im folgenden benötigen wir relative Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in einer Garbe. Sei X ein topologischer Raum, Z eine lokal-abgeschlossene Teilmenge von X und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Sei U eine in X offene Menge, in der Z abgeschlossen ist. $\Gamma_Z(U, \mathcal{F})$ bezeichnet die Gruppe der Schnitte von $\mathcal{F}$ über U mit Träger in Z. Wenn $V \subset U$ eine andere derartige Menge ist, sieht man leicht, dass $\Gamma_Z(U, \mathcal{F}) = \Gamma_Z(V, \mathcal{F})$; $\Gamma_Z(U, \mathcal{F})$ hängt also nicht von U ab und wir setzen $\Gamma_Z(U, \mathcal{F}) = \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$. Die relativen Kohomologiegruppen von X mod Z mit Koeffizienten in $\mathcal{F}$ sind die von dem Funktor $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ abgeleiteten Funktoren. Zur Berechnung der $H^i_Z(X, \mathcal{F})$ betrachtet man eine welke Auflösung $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1 \to \dots$ von $\mathcal{F}$ und erhält die $H^i_Z(X, \mathcal{F})$ als die Kohomologie des formalen Komplexes $\Gamma_Z(X, \mathcal{F}_0) \to \Gamma_Z(X, \mathcal{F}_1) \to \dots$. Wenn Z in X abgeschlossen ist, ist für eine welke Garbe $\mathcal{G}$ der Homomorphismus $\Gamma(X, \mathcal{G}) \to \Gamma(X - Z, \mathcal{G})$ surjektiv, da sich jeder Schnitt über der offenen Menge $X - Z$ zu einem Schnitt auf ganz X fortsetzen lässt. Der Kern dabei ist gerade $\Gamma_Z(X, \mathcal{G})$ und wir erhalten die exakte Sequenz

$$0 \to \Gamma_Z(X, \mathcal{G}) \to \Gamma(X, \mathcal{G}) \to \Gamma(X - Z, \mathcal{G}) \to 0 \quad .$$

Wendet man dies auf eine welke Auflösung einer beliebigen Garbe $\mathcal{F}$ an, so erhält man eine exakte Kohomologiesequenz

$$0 \to H^0_Z(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X - Z, \mathcal{F}) \to H^1_Z(X, \mathcal{F}) \to \dots$$

Sei Z in X abgeschlossen, dann definieren wir Garben $\mathcal{H}^i_Z(X, \mathcal{F})$ durch die Garbendaten $U \to H^i_{U \cap Z}(U, \mathcal{F})$. Falls diese Garbendaten Null sind für $i = 0, 1, \dots q-1$, ist das Garbendatum $U \to H^q_{U \cap Z}(U, \mathcal{F})$ bereits eine Garbe und die Gruppe der Schnitte ist $H^q_Z(X, \mathcal{F})$.

Sei ${}^t\wp$ die Garbe der Keime von Lösungen der Gleichung ${}^tP(D)f = 0$ und U offen in R^{n+1}. Dann ist das Garbendatum $U \to H^0_{R^n \cap U}(U, {}^t\wp)$ gleich Null, also ist $U \to H^1_{U \cap R^n}(U, {}^t\wp)$ bereits die Garbe $\mathcal{H}^1_{R^n}(R^{n+1}, {}^t\wp)$ und die Schnittgruppe ist $H^1_{R^n}(R^{n+1}, {}^t\wp)$.

Satz 8. Die Garbe $\mathcal{H}^1_{R^n}(R^{n+1}, {}^t\wp)$ ist isomorph zu $\mathcal{O}_P$.

Beweis : Es genügt zu zeigen, dass die beiden Garben dieselben Schnitte mit kompaktem Träger haben. Sei also $K \subset R^n$, dann ist ein Schnitt von $\mathcal{H}^1_{R^n}(R^{n+1}, {}^t\wp)$ über K ein Element von $H^1_K(R^{n+1}, {}^t\wp)$. Betrachten wir die exakte Kohomologiesequenz :

$$0 \to H^o_K(R^{n+1}, {}^t\wp) \to H^o(R^{n+1}, {}^t\wp) \to H^o(R^{n+1} - K, {}^t\wp) \to$$

$$\to H^1_K(R^{n+1}, {}^t\wp) \to H^1(R^{n+1}, {}^t\wp) \to \ldots\ldots$$

Wir haben bereits gesehen, dass $H^o_K(R^{n+1}, {}^t\wp) = 0$ ist und nach [11] Theorem 1 ist $H^1(R^{n+1}, {}^t\wp) = 0$. Wir haben also

$$H^1_K(R^{n+1}, {}^t\wp) = H_{{}^tP}(R^{n+1} - K) \Big/ H_{{}^tP}(R^{n+1}) \quad .$$

Nach Satz 2 ist dieser Quotientenraum isomorph zu $H'_P(K)$, d. h. jedes Element von $H^1_K(R^{n+1}, {}^t\wp)$ ist ein P-Funktional mit kompaktem Träger in K.

Bemerkung. Betrachtet man die exakte Kohomologiesequenz mit R^n anstatt K, so ergibt sich, dass $H^1_{R^n}(R^{n+1}, {}^t\wp)$ isomorph zu

$$H_{{}^tP}(R^{n+1} - R^n) \Big/ H_{{}^tP}(R^{n+1})$$

ist. Man kann also jedes P-Funktional auf R^n darstellen durch eine Klasse von Funktionen $u(x, t)$ die für $t \neq 0$ definiert sind und die Gleichung ${}^tP(D)\, u(x,t) = 0$ erfüllen. Zwei solche Funktionen definieren dasselbe P-Funktional, wenn sie sich um eine Funktion aus $H_{{}^tP}(R^{n+1})$ unterscheiden. Wir nennen $u(x, t)$ eine Indikatrix des P-Funktionals

§ 4. Analytische Funktionale

Wir stellen hier die wichtigsten Eigenschaften der analytischen Funktionale mit reellem Träger zusammen. Eine genauere Darstellung findet sich in der Arbeit [14]. Wir betten den R^n in den komplexen n-dimensionalen Raum C^n ein. Sei Ω eine offene Teilmenge des C^n, dann bezeichnet man üblicherweise mit $H(\Omega)$ den Raum der au Ω holomorphen Funktionen. $H(\Omega)$ wird zu einem (F)-Raum, wenn man ihn mit der Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von Ω versieht. Sei $K \subset R^n$ kompakt, dann ist $H(K) = \varinjlim H(\Omega)$, wobei Ω alle offenen (komplexen) Umgebungen von K durchläuft. $H(K)$ ist mit der Topologie des induktiven Limes versehen ein (LF)-Raum. $H(C^n)$ ist in $H(K)$ dicht für alle $K \subset R^n$ [14], man kann also wieder Linearformen auf verschiedenen K identifizieren, wenn ihre Einschränkungen auf $H(C^n)$ übereinstimmen. Ein analytisches Funktional mit kompaktem Träger in R^n ist dann eine Klasse von äquivalenten stetigen Linearformen. Man kann die Existenz eines Trägers beweisen, und es gelten die den Sätzen 4 und 5 entsprechenden Aussagen. Man kann ebenfalls lokal-endliche Reihen $\sum \psi_i$ betrachten; zwei solche Reihen $\sum \psi_i$ und $\sum \theta_i$ heissen äquivalent, wenn $\sum (\psi_i - \theta_i)$ die Bedingung (8) erfüllt, und die Äquivalenzklasse einer Reihe heisst ihre Summe.

<u>Definition 4</u>. Eine Hyperfunktion (analytisches Funktional mit beliebigem Träger auf R^n) ist die Summe einer lokal-endlichen Reihe von analytischen Funktionalen mit kompaktem Träger.

Analog zur Garbe $\mathcal{O}_p$ kann man eine Garbe $\mathcal{O}$ der Keime von Hyperfunktionen definieren, und es gelten die den Sätzen 6 und 7 äquivalenten Sätze ([14], prop. 3 Thm. 1.). Dem Satz 8 entspricht die Tatsache, dass $\mathcal{O}$ isomorph zur Garbe $\mathcal{H}^n_{R^n}(C^n, \Omega^n)$ ist, wobei Ω^n die Garbe der Keime von holomorphen Differentialformen vom Grade n ist ([14], Theorem 2).

Wir können jeder Funktion $f(x,t) \in H_p(K)$ die Einschränkung $f(x,0)$ auf K zuordnen, $f(x,0)$ ist reell-analytisch und kann also in eindeutiger Weise zu einer holomorphen Funktion in einer gewissen komplexen Umgebung von K fortgesetzt werden. Damit ist eine Abbildung $\pi : H_p(K) \longrightarrow H(K)$ definiert.

Lemma 4 . Die Abbildung π ist surjektiv . Sei $f_o(x) \in H(K)$ holomorph in der komplexen Umgebung Ω von K . Dann betrachten wir folgendes Cauchy-Problem :

(i) $P(D)\, f(x,t) = 0$ in einer Umgebung $U \subset R^{n+1}$ von K

(ii) $f(x,0) = f_o(x)$

(iii) $\frac{\partial^\nu f}{\partial t^\nu}(x,0) = 0$ für $\nu = 1,2 \ldots m-1$.

Falls ein solches $f(x,t)$ existiert, muss es reell-analytisch sein und wir können $f(x,t)$ in jedem Punkt $x \in K$ in eine Potenzreihe entwickeln

$$f(x,t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(x) \frac{t^\nu}{\nu!} \quad .$$

Aus der Bedingung (i) erhalten wir dann

$$P(D)\, f(x,t) = \sum_\nu Q(D)\, a_\nu(x) \frac{t^\nu}{\nu!} + \sum_\nu (i)^m\, a_\nu(x) \frac{t^{\nu-m}}{(\nu-m)!}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$(9) \qquad (-i)^m Q(D)\, a_\nu(x) = -a_{\nu+m}(x) \quad .$$

Bedingung (iii) ergibt $a_\nu(x) = 0$ für $\nu = 1,2 \ldots m-1$ und (9) zeigt, dass $a_\nu(x) = 0$ für $\nu \neq km$ $(k = 1,2 \ldots)$. Schliesslich erhalten wir aus der Bedingung (ii)

$$a_o(x) = f_o(x) \text{ und (9) ergibt}$$

$$a_{km}(x) = (i)^{km}\, Q(D)^k f_o(x)$$

sodass schliesslich bleibt

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i)^{km}}{(km)!} Q(D)^k\, u(x)\, t^{km} \quad .$$

Legen wir um x einen kleinen in Ω enthaltenen Polyzylinder $Z : \{ z \in \Omega \, ; |x_\nu - z_\nu| < r \}$ so gilt für $f_o(z)$ in Z die Cauchy'sche Ungleichung

$$| D^\mu f_o(z) | \leq \frac{\mu!}{r^{|\mu|}} \; . \; M$$

mit $\mu = (\mu_1 \dots \mu_\nu)$; $\mu ! = \mu_1 ! \dots \mu_n !$, $|\mu| = \sum_1^n \mu_i$

und $M = \sup_{\zeta \in Z} u(\zeta)$. Daraus kann man nun für $Q(D)^k f_o(x)$ die Abschätzung

$$| Q(D)^k \; f_o(x) | \leq C \frac{(k-m)!}{N^{km}}$$

herleiten mit zwei Konstanten C und N . Dann gilt

$$| f(x,t) | \leq \sum_k | Q(D)^k \; f_o(x) | \; \frac{t^{km}}{(km)!} \leq C \sum_k \left(\frac{|t|}{N} \right)^{km} .$$

Die Reihe für $f(x,t)$ konvergiert also in einer Umgebung von x für $|t| < N$.

Aus der Konstruktion sieht man, dass die Lösung $f(x,t)$ des Cauchy-Problems eindeutig von $f_o(x)$ abhängt . Man hat also eine injektive Abbildung $\Phi : H(K) \to H_p(K)$ definiert durch $\Phi(f_o) = f$. Ausserdem ist $\pi \circ \Phi$ die Identität auf $H(K)$.

$\Phi(H(K))$ ist ein Unterraum E_1 von $H_p(K)$, nämlich der Raum aller $f(x,t)$, die die Bedingungen (ii) und (iii) des Lemmas erfüllen, und $\Phi \circ \pi$ ist eine Projektion von $H_p(K)$ auf E_1 . Man sieht leicht, dass E_1 in $H_p(K)$ abgeschlossen ist, und dass E_1 ist als Unterraum eines D S-Raumes wieder ein D S -Raum , und deshalb ein (LF)-Raum .

Lemma 5 . $\pi : H_p(K) \to H(K)$ ist ein topologischer Homomorphismus . $\Phi : H(K) \to E_1$ ist ein topologischer Isomorphismus .

Beweis : $H_p(K)$, $H(K)$ und E_1 sind ultrabornologische (LF)-Räume, sodass wir den Graphensatz und den Satz von Banach-Schauder anwenden können (vgl. [7] , [2]) . Da aus der Konvergenz im Sinne der Topologien von $H_p(K)$, $H(K)$ und E_1 jeweils die punktweise Konvergenz folgt, ist der Graph der Abbildungen π und Φ abgeschlossen, und da beide Abbildungen surjektiv sind, folgt mit dem Satz von Banach-Schauder die Behauptung .

Bemerkung . Daraus folgt nun dass $\Phi \circ \pi$ eine stetige Projektion auf E_1 ist . Sei E_2 der Kern von π , dann stellt sich $H_p(K)$ dar als topologische direkte Summe $H_p(K) = E_1 \oplus E_2$.

Jedes P-Funktional ψ lässt sich dann eindeutig in eine Summe $\psi = \psi_1 + \psi_2$ zerlegen derart, dass die Einschränkung von ψ_i auf E_i $(i = 1, 2)$ verschwindet. Wir können, da E_1 isomorph zu $H(K)$ ist, jedem analytischen Funktional ψ eineindeutig ein P-Funktional θ zuordnen durch $\theta = 0 + \psi$. Ein P-Funktional ist genau dann ein analytisches Funktional, wenn bei der obigen Zerlegung seine erste Komponente verschwindet.

Lemma 6. Sei ψ ein analytisches Funktional. Dann stimmt der Träger von ψ als analytisches Funktional mit dem Träger von ψ als P-Funktional überein.

Beweis. Sei K der Träger von ψ als analytisches Funktional, K' der Träger von ψ als P-Funktional. Da für jedes K, $H'(K)$ in $H'_P(K)$ eingebettet werden kann, muss K' in K enthalten sein. Da andererseits K' der Träger von ψ als P-Funktional ist, ist die Einschränkung von ψ auf $H_P(K)$ stetig in der von $H_P(K')$ induzierten Topologie. Dann ist aber ψ auch stetig auf $H(K)$ in der durch $H(K')$ induzierten Topologie, da π ein topologischer Homomorphismus war. Nun ist $H(K)$ dicht in $H(K')$ (da bereits $H(C^n)$ dicht ist) und ψ lässt sich wegen der Stetigkeit auf $H(K')$ fortsetzen.

Satz 9. Die Garbe $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ der Keime von Hyperfunktionen ist eine Untergarbe von $\mathcal{O}\!\mathcal{l}_P$.

Beweis : Eine Hyperfunktion wird dargestellt durch eine lokal-endliche Reihe von analytischen Funktionalen mit kompaktem Träger $\sum \psi_i$, wir ordnen $\sum \psi_i$ die Reihe $\sum \theta_i$ zu, wenn θ_i die durch die ψ_i definierten P-Funktionale sind. Aus Lemma 6 folgt dass $\sum \theta_i$ genau dann lokal-trivial ist, wenn $\sum \psi_i$ lokal-trivial ist.

Bemerkung. Da jede Hyperfunktion in eindeutiger Weise ein P-Funktional bestimmt, können wir sie durch eine Indikatrix $u(x, t) \in H_{t_P}(R^{n+1} - R^n)$ darstellen (s. Bemerkung nach Satz 8).

§ 5. Das Weyl'sche Lemma

Um das Weyl'sche Lemma beweisen zu können müssen wir noch ein Kriterium dafür angeben, wann eine Hyperfunktion eine analytische Funktion ist, und definieren was wir unter der Ableitung einer Hyperfunktion verstehen. Man weiss, dass jede Schwartz'sche Distribution eine Hyperfunktion definiert ([14], [15], [21]) und damit auch ein P-Funktional. Sei T zunächst eine Distribution mit kompaktem Träger in K, T definiert eine stetige Linearform auf $H_P(K)$. Sei $\check{E}$ die Elementarlösung von ${}^tP(D)$ dann ist $u(x,t) = \check{E} * (T \otimes \delta_t)$ eine Funktion aus $H_{{}^tP}(R^{n+1} - K)$. Geht man den Beweis von Satz 2 durch so sieht man, dass dieses $u(x,t)$ eine Indikatrix von T ist, und man erhält T oder zumindest $T \otimes \delta_t$ aus $u(x,t)$, indem man den Operator ${}^tP(D)$ auf $u(x,t)$ anwendet (im Sinne der Distributionentheorie). Sei umgekehrt $u(x,t) \in H_{{}^tP}(R^{n+1} - K)$ eine Funktion, die sich als Distribution auf ganz R^{n+1} fortsetzen lässt. Dann ist ${}^tP(D)\, u(x,t)$ eine Distribution mit Träger in K und lässt sich daher als endliche Summe $\sum_{\nu=0}^{k} T_\nu \otimes \delta_t^{(\nu)}$ darstellen, wobei die T_ν Distributionen auf R^n mit Träger in K sind. Man kann annehmen dass $k < m$, denn sei $\nu \geq m$, dann gilt für jede Funktion $f \in H_P(K)$

$$\langle T_\nu \otimes \delta_t^{(\nu)}, f \rangle = (-1)^m \langle T_\nu \otimes \delta_t^{(\nu-m)}, \frac{\partial^m f}{\partial t^m} \rangle.$$

Nun erfüllt f die Differentialgleichung

$$P(D) f = Q(D) f + (i)^m \frac{\partial^m f}{\partial t^m} = 0$$

d.h. $\dfrac{\partial^m f}{\partial t^m} = -(i)^m Q(D) f$ und es gilt weiter

$$\langle T_\nu \otimes \delta_t^{\nu}, f \rangle = -(i)^m \langle T_\nu \otimes \delta_t^{(\nu-m)}, Q(D) f \rangle =$$

$$= -(i)^m \langle {}^tQ(D)\, T_\nu \otimes \delta_t^{(\nu-m)}, f \rangle$$

d.h. $T_\nu \otimes \delta_t^{(\nu)} = -(i)^m\, {}^tQ(D)\, T \otimes \delta_t^{(\nu-m)}$ als P-Funktional.

Wenn $\nu - m < m$ ist, sind wir fertig, andernfalls wiederholen wir das Verfahren. Betrachten wir nun das P-Funktional

$$\Psi = \sum_{\nu=0}^{m-1} T_\nu \otimes \delta_t^{(\nu)} \quad ;$$

$u(x,t)$ ist eine Indikatrix von Ψ, denn $\check{E} * \Psi$ kann sich von $u(x,t)$ nur um eine Lösung v der homogenen Gleichung ${}^tP(D)\, v = 0$ unterscheiden, die in ganz R^{n+1} definiert ist, d.h. $v \in H_{t_P}(R^{n+1})$. Wenn Ψ eine Distribution sein soll, muss bei der Zerlegung $\Psi = \psi_1 + \psi_2$ (s. Bemerkung nach Lemma 5) seine erste Komponente verschwinden. Man hat

$$\psi_1 = \sum_{\nu=1}^{m-1} T_\nu \otimes \delta_t^{(\nu)} = 0 .$$

In diesem Fall stellt $u(x,t)$ dann die Distribution T_o dar, denn man hat ${}^tP(D)\, u(x,t) = T_o \otimes \delta_t$.

Diese ganzen Überlegungen lassen sich auf den Fall beliebiger Träger übertragen, denn jede Distribution ist lokal-endliche Summe von Distributionen mit kompaktem Träger.

Eine Funktion $u(x,t) \in H_{t_P}(R^{n+1} - R^n)$ zerfällt in zwei Komponenten, die für $t > 0$ bzw. $t < 0$ definiert sind. Wir setzen nun voraus, dass sich jede dieser beiden Komponenten reell-analytisch in eine Umgebung von $t = 0$ fortsetzen lässt. Dabei brauchen die beiden Fortsetzungen für $t = 0$ nicht übereinzustimmen. Wir setzen

$$u^+(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{für } t \geq 0 ; \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} ; \quad u^-(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{für } t \leq 0 \\ 0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

wobei u^+ und u^- für $t = 0$ durch die Fortsetzung der jeweiligen Komponente definiert sei. Es gilt $u = u^+ + u^-$. Damit ist $u(x,t)$ als Distribution auf ganz R^{n+1} fortgesetzt. (Die spezielle Wahl der Fortsetzung spielt keine Rolle, da man eine Funktion auf einer Menge vom Masse Null abändern kann, ohne die zugehörige Distribution zu ändern). Da u^+ für $t \neq 0$ die Gleichung ${}^tP(D)\, u^+ = 0$ erfüllt, erhält man für ${}^tP(D)\, u^+$ nur die Anteile, die von den Sprüngen der Funktion und ihrer Ableitungen für $t = 0$ herrühren.

$${}^tP(D)\, u^+ = (i)^m \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\partial^\nu u^+}{\partial t^\nu}(x,0) \otimes \delta_t^{(m-1-\nu)}$$

Wenn wir schon wissen, dass $u(x,t)$ die Indikatrix einer Hyperfunktion ist, kann nur der Term mit δ_t von Null verschieden sein und wir haben

$$t_P(D)\, u^+ = (i)^m \frac{\partial^{m-1} u^+}{\partial t^{m-1}} (x,0) \otimes \delta_t$$

u^+ ist also Indikatrix von $(i)^m \frac{\partial^{m-1} u^+}{\partial t^{m-1}} (x,0)$, da aber u^+ für $t=0$ noch analytisch war ist auch $\frac{\partial^{m-1} u^+}{\partial t^{m-1}} (x,0)$ analytisch. Für u^- verläuft die Sache analog und wir haben als Kriterium, dass die Indikatrix $u(x,t)$ einer Hyperfunktion eine analytische Funktion darstellt, wenn sich die beiden Komponenten von u reell-analytisch in $t=0$ hinein fortsetzen lassen.

Sei D eine der Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_k}$, ψ ein analytisches Funktional mit kompaktem Träger, dann definieren wir $D\psi$ durch :

$$\langle D\psi, f\rangle = -\langle \psi, Df\rangle \quad \text{für alle } f \in H(K).$$

Da für ein $f \in H(K)$ gilt $\Phi(Df) = D\,\Phi(f)$, Φ die im Beweis von Lemma 4 definierte Abbildung, können wir auch verlangen

$$\langle D\psi, f\rangle = -\langle \psi, Df\rangle \quad \text{für alle } f \in H_P(K).$$

Wenn $u(x,t)$ die Indikatrix von ψ ist so gilt nach (4)

$$\langle \psi, f\rangle = \langle P(D)\,(\omega f), u\rangle.$$ Wir erhalten dann für $D\psi$

$$\langle D\psi, f\rangle = -\langle \psi, Df\rangle = -\langle P(D)\,(\omega Df), u\rangle =$$
$$= -\langle P(D)\, D\,(\omega f), u\rangle + \langle P(D)\,((D\omega)\, f), u\rangle.$$

Nun hat $D\omega$ wegen (3) kompakten Träger, und wie im Beweis von Satz 1 sieht man, dass $\langle P(D)((D\omega) f), u\rangle = 0$ ist. Wir können nun noch D mit $P(D)$ vertauschen und erhalten

$$\langle D\psi, f\rangle = -\langle D\,P(D)(\omega f), u\rangle = \langle P(D)(\omega f), Du\rangle$$

d.h. die Indikatrix von $D\psi$ ist Du. Dies lässt sich auf Hyperfunktionen mit beliebigem Träger übertragen.

<u>Definition 5</u> . Sei ψ eine Hyperfunktion auf R^n , $u(x,t)$ die Indikatrix von ψ. Die Ableitung $D\psi$ ist dann die Hyperfunktion mit der Indikatrix Du .

<u>Satz 10</u> . Jede Hyperfunktion auf R^n , die Lösung einer elliptischen partiellen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten $Q(D)\psi = 0$ ist, ist eine analytische Funktion .

Beweis : Nehmen wir zunächst an, dass für den Hauptteil $Q_m(\xi)$ von $Q(\xi)$ gelte $Q_m(\xi) \geqslant 0$ für reelles ξ . Dann sind $P(D) = Q(D) + (i)^m \frac{\partial^m}{\partial t^m}$ und der transponierte Operator ${}^tP(D)$ auch elliptisch . Die Hyperfunktion ψ sei Lösung der Gleichung $Q(D)\psi = 0$, wir fassen ψ als ${}^tP$-Funktional mit dem oben definierten ${}^tP(D)$ auf, ψ hat also eine Indikatrix $u(x,t) \in H_P(R^{n+1} - R^n)$ (wegen ${}^{tt}P(D) = P(D)$) . Nach Voraussetzung gilt $Q(D)\,u(x,t) = f(x,t)$, mit $f(x,t) \in H_P(R^{n+1})$. Wir können es jedoch immer so einrichten, dass $f(x,t) = 0$. Dazu lösen wir in R^{n+1} das System

$$P(D)\,g = 0 \ , \ Q(D)\,g = f \ .$$

Nach Theorem 3.2. von [12] existiert eine Lösung $g(x,t)$, wenn gilt $P(D)f = 0$. Wir setzen $v(x,t) = u(x,t) - g(x,t)$, v ist natürlich zu u äquivalent mod $H_P(R^{n+1})$, da gilt $P(D)\,g = 0$, und ist deshalb auch eine Indikatrix von ψ . Ausserdem gilt jetzt $Q(D)\,v = 0$ und $P(D)\,v = 0$ in $R^{n+1} - R^n$, und wir haben

$$P(D)v = Q(D)v + (i)^m \frac{\partial^m v}{\partial t^m} = (i)^m \frac{\partial^m v}{\partial t^m} = 0 \text{ in } R^{n+1} - R^n \ .$$

Damit haben wir das Problem zurückgeführt auf die Lösung einer Gleichung $\frac{\partial^m F}{\partial t^m} = 0$, F eine vektorwertige Funktion von t mit Werten in $H_Q(R^n)$. Nach [18], exposé 15 ist der Raum der Lösungen dieser Gleichung $\mathbb{P}^{(m)} \hat{\otimes} H_Q(R^n)$, $\mathbb{P}^{(m)}$ der Raum der skalaren Lösungen von $\frac{\partial^m f}{\partial t^m} = 0$, d.h. der Raum der Polynome in t vom Grade $< m$. Die beiden Komponenten von v sind also Polynome in t mit Koeffizienten in $H_Q(D)$ und können deshalb reell-analytisch in $t = 0$ hinein fortgesetzt werden . Nach dem oben abgeleiteten Kriterium ist ψ analytisch .

Im allgemeinen Fall betrachten wir das Polynom $R(\xi) = \overline{Q(\xi)}\, Q(\xi)$. Es gilt $R_{2m}(\xi) \geq 0$; $R(D)$ erfüllt also die Voraussetzung für den ersten Teil des Beweises. Damit ist jede Lösung ψ von $R(D)\psi = 0$ analytisch. Sei ψ nun Lösung von $Q(D)\psi = 0$, dann ist auch $R(D)\psi = 0$, also ψ analytisch.

LITERATUR

[1] BENGEL G. a) Sur une extension de la théorie des hyperfonctions.
b) Régularité des solutions hyperfonctions d'une équation elliptique. C.R. Acad. Sci. Paris, 262, Série A, (1966).

[2] BOUBAKI N. Espaces vectoriels topologiques. Hermann, Paris (1953, 1955).

[3] CARTAN H. Séminaire, t. 3. 1950/51, Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux. E.N.S. Paris.

[4] GODEMENT R. Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Hermann, Paris (1958).

[5] GROTHENDIECK A. Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles. J. Analyse Math. 2, 243-280 (1952/53).

[6] GROTHENDIECK A. Sur les espaces (F) et (DF), Summa Brasil. Math. 3, 57-123 (1954).

[7] GROTHENDIECK A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Memoirs Am. Math. Soc. 16 (1955).

[8] HÖRMANDER L. Linear Partial Differential Operators. Springer, Berlin - Göttingen - Heidelberg (1963).

[10] MALGRANGE B. Existence et approximation des solutions ...., Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 6, 271-355 (1955/56).

[11] MALGRANGE B. Sur les ouverts convexes par rapport à un opérateur différentiel. C.R. Acad. Sci. Paris, 254, 614-615 (1962).

[9] KÖTHE G. Topologische lineare Räume I. Springer, Berlin - Göttingen - Heidelberg (1960).

[12] MALGRANGE B. Sur les systèmes différentiels à coefficients constants . Colloque international sur les équations aux dérivées partielles , 113-122 , Paris 1962 .

[13] MANTOVANI F. und SPAGNOLO S. Funzionali analitici reali e funzioni armoniche . Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa , Serie III , 18 , 475-513 , (1964) .

[14] MARTINEAU A. Les hyperfonctions de M. Sato . Séminaire Bourbaki , 13^{e} année 1960/61 , Nr. 214 .

[15] MARTINEAU A. Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes , erscheint in Proceedings of the International Summer Course on the Theory of Distributions , Lissabon 1964

[16] SATO M. Theory of Hyperfunctions I , II , J. Fac. Sci Tokyo 8 , 139-193 und 287-437 (1959/60) .

[17] SCHWARTZ L. Théorie des distributions I , II , Hermann , Paris (1957 , 1959) .

[18] SCHWARTZ L. Séminaire 1953/54 , Produits tensoriels topologiques .., Fasc. d. Sci. Paris (1954) .

[19] SEBASTIAO e SILVA J. O lema de Weyl no Quadro das Ultradistribuicoes . Bol. Acad. Ci. Lisboa . 38 , 70-79 (1965) .

[20] TILLMANN H.G. Dualität in der Potentialtheorie , Port. Math. 13 , 55-86 (1954) .

[21] TILLMANN H.G. Darstellung der Schwartzschen Distributionen durch analytische Funktionen . Math. Z. 77 , 106-124 (1961) .

[22] TRÈVES F. Lectures on linear partial differential equations with constant coefficients . Notas de Matematica , n° 27 , Rio de Janeiro (1961) .