Aldo Andreotti
François Norguet

Problème de Levi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1966, tome 1
« Travaux de A. Andreotti et F. Norguet sur les espaces analytiques Q-pseudoconvexes »,
, exp. n° 2, p. 1-51
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1966__1__A2_0>

PROBLEME DE LEVI ET CONVEXITE HOLOMORPHE POUR LES CLASSES DE COHOMOLOGIE.

par

Aldo ANDREOTTI et François NORGUET

Introduction.

Soit Y un sous-ensemble ouvert relativement compact, à frontière bY suffisamment différentiable, d'une variété analytique complexe X.

Si Y est le domaine d'existence d'une fonction holomorphe, bY est (faiblement) pseudoconvexe. Réciproquement, si bY est fortement pseudoconvexe, alors Y est le domaine d'existence d'une fonction holomorphe.

La première partie de ce théorème est due à E.E. Levi et la seconde à H. Grauert [4], Celui-ci a montré aussi que si bY est fortement pseudoconvexe, alors Y est holomorphiquement convexe. Si on suppose en plus l'existence d'une fonction plurisousharmonique dans Y, alors Y est de Stein.

Ce mémoire est consacré à la généralisation de ces résultats lorsqu'on remplace :

i) l'espace vectoriel $H^0(Y,\mathcal{O})$ des fonctions holomorphes dans Y par un espace vectoriel $H^q(Y,\mathcal{F})$ de cohomologie de Y à valeurs dans un faisceau analytique $\mathcal{F}$ localement libre.

ii) la pseudoconvexité par la q-convexité, déjà considérée dans [1].

iii) la convexité holomorphe (resp. la séparabilité des points par les fonctions holomorphes) par une notion convenable de convexité par rapport aux ensembles analytiques compacts de dimension q (resp. de séparabilité des sous-ensembles analytiques compacts de dimension q de Y par les éléments de $H^q(Y,\mathcal{F})$).

Dans le § 1 , on étudie la notion générale de classe de cohomologie non prolongeable et on généralise le théorème de Levi (pour un espace analytique et un faisceau analytique cohérent quelconque). Puis, partant d'une généralisation d'une formule intégrable de E . Martinelli [10] , on étudie le comportement de certaines intégrales de formes différentielles extérieures sur des suites d'ensembles analytiques ayant des points limites dans les variétés polaires des formes intégrées ; les résultats ainsi obtenus constituent, avec les théorèmes de finitude de [1] et les résultats de [13] sur les familles normales de diviseurs, le fondement des techniques de démonstration de ce mémoire.

Les théorèmes de Grauert rappelés ci-dessus sont généralisés pour des ensembles ouverts, appelés strictement q-pseudoconvexes, et définis dans le N° 5 ; un exemple très simple d'un tel ouvert est indiqué. La solution du problème de Levi généralisé est donnée dans la suite du § 2 .

La proposition 7 du § 3 est le point de départ de la théorie de la convexité par rapport aux ensembles analytiques, et la proposition 8, de la séparation des ensembles analytiques par des classes de cohomologie.

Ces deux théories s'expriment commodément si l'on introduit l'espace des combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs de sous-ensembles analytiques compacts de dimension q de X , et si l'on munit cet espace de la topologie induite par celle des courants, grâce aux résultats de P. Lelong [8] . C'est l'objet du § 4 .

§ 1 . Théorème de Levi et résultats préliminaires .

1 . Classes de cohomologie non prolongeables .

a - Considérons le diagramme commutatif d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "\rho"] \arrow[dd, "\alpha"'] & & C \arrow[dl, "q"'] \arrow[dd, "\beta"] \\
& E \arrow[dl, "p"] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
B & & D
\end{tikzcd}$$

et supposons que les deux suites obliques sont exactes. Nous avons alors

$$(1) \qquad p^{-1}(\mathfrak{Im}\,\alpha) = \gamma^{-1}(\mathfrak{Im}\,\beta)$$

Vu la symétrie du diagramme, il suffit d'établir l'inclusion

$$p^{-1}(\mathfrak{Im}\,\alpha) \subset \gamma^{-1}(\mathfrak{Im}\,\beta) \quad ;$$

soit donc $\zeta \in p^{-1}(\mathfrak{Im}\,\alpha)$; il existe $\xi \in A$ tel que $p(\zeta) = \alpha(\xi) = p(\rho(\xi))$, soit $p(\zeta - \rho(\xi)) = 0$; la suite (p,q) étant exacte, il existe $\eta \in C$ tel que $\zeta - \rho(\xi) = q(\eta)$, soit $\zeta = q(\eta) + \rho(\xi)$; on a donc

$$\gamma(\zeta) = \gamma(q(\eta)) + \gamma(\rho(\xi)) = \beta(\eta)\ , \text{ et } \zeta \in \gamma^{-1}(\mathfrak{Im}\,\beta) \ .$$

Soit maintenant δ une application linéaire d'un espace vectoriel G dans E ; soit $\theta = p \circ \delta$ et $\nu = \gamma \circ \delta$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "\rho"] \arrow[dd, "\alpha"'] & & C \arrow[dl, "q"'] \arrow[dd, "\beta"] \\
& E \arrow[dl, "p"] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
B & & D \\
& G \arrow[uu, "\delta"] \arrow[ul, "\theta"] \arrow[ur, "\nu"'] &
\end{tikzcd}$$

On a

$$(2) \qquad \theta^{-1}(\mathfrak{J}m\,\alpha) = \nu^{-1}(\mathfrak{J}m\,\beta)\,.$$

En effet ,

$$\theta^{-1}(\mathfrak{J}m\,\alpha) = \delta^{-1}(p^{-1}(\mathfrak{J}m\,\alpha)) = \delta^{-1}(\gamma^{-1}(\mathfrak{J}m\,\beta)) = \nu^{-1}(\mathfrak{J}m\,\beta)\,.$$

En particulier, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) ν est injective et $\nu(G) \cap \mathfrak{J}m\,\beta = \{0\}$

ii) θ est injective et $\theta(G) \cap \mathfrak{J}m\,\alpha = \{0\}$.

b - Soit $\mathcal{F}$ un faisceau d'espaces vectoriels sur un espace topologique X , et soit Y un sous-ensemble ouvert de X . Pour tout entier $r \geq 0$ et tout point x appartenant à la frontière bY de Y , on désigne par

$$H^r(Y,x,\mathcal{F}) \qquad (\text{resp. } H^r_+(Y \cup \{x\},\mathcal{F}) \;,\; H^r_x(\mathcal{F})\;)$$

la limite inductive de

$$H^r(Y \cap U,\mathcal{F}) \qquad (\text{resp. } H^r(Y \cup U,\mathcal{F}) \;,\; H^r(U,\mathcal{F})\;)$$

suivant l'ordonné filtrant des voisinages ouverts U de x dans X . On a $H^0_x(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_x$ et , pour $r \geq 1$, $H^r_x(\mathcal{F}) = \{0\}$.

Du diagramme commutatif d'homomorphismes de restriction

$$\begin{tikzcd}
H^r(Y \cup U,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & H^r(U,\mathcal{F}) \arrow[d] \\
H^r(Y,\mathcal{F}) \arrow[r] & H^r(Y \cap U,\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

résulte, par passage à la limite, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^r_+(Y \cup \{x\},\mathcal{F}) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha"] & H^r_x(\mathcal{F}) \arrow[d, "\beta'"] \\
H^r(Y,\mathcal{F}) \arrow[r, "\mu"] & H^r(Y,x,\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

De la suite exacte de Mayer-Victoris ([1], p. 236)

$$H^r(Y \cup U, \mathcal{F}) \to H^r(Y, \mathcal{F}) \oplus H^r(U, \mathcal{F}) \to H^r(Y \cap U, \mathcal{F}) \to H^{r+1}(Y \cup U, \mathcal{F})$$

résulte de même la suite exacte

$$(3) \qquad H^r_+(Y \cup \{x\}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\rho} H^r(Y, \mathcal{F}) \oplus H^r_x(\mathcal{F}) \xrightarrow{\gamma} H^r(Y, x, \mathcal{F}) \to H^{r+1}_+(Y \cup \{x\}, \mathcal{F})$$

où

$$\rho(\xi) = \alpha(\xi) \oplus \lambda(\xi) \quad \text{pour tout} \quad \xi \in H^r_+(Y \cup \{x\}, \mathcal{F})$$

et

$$\gamma(\xi \oplus \eta) = \mu(\xi) - \beta'(\eta) \quad \text{pour tous} \quad \xi \in H^r(Y, \mathcal{F}) \ , \ \eta \in H^r_x(\mathcal{F}) \ .$$

En posant $\beta = -\beta'$ et en considérant la suite exacte naturelle

$$H^r_x(\mathcal{F}) \xrightarrow{q} H^r(Y, \mathcal{F}) \oplus H^r_x(\mathcal{F}) \xrightarrow{p} H^r(Y, \mathcal{F}) \ ,$$

on obtient le diagramme commutatif

$$(4) \qquad \begin{tikzcd} H^r_+(Y \cup \{x\}, \mathcal{F}) \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "\rho"] & & H^r_x(\mathcal{F}) \arrow[dl, "q"'] \arrow[d, "\beta"] \\ H^r(Y, \mathcal{F}) & H^r(Y, \mathcal{F}) \oplus H^r_x(\mathcal{F}) \arrow[l, "p"] \arrow[r, "\gamma"] & H^r(Y, x, \mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

<u>Définition 1</u> .

Un élément de $H^r(Y, \mathcal{F})$ (resp. $H^r(Y, x, \mathcal{F})$) sera dit <u>prolongeable</u> au point $x \in bY$ s'il est dans l'image de α (resp. β) .

Pour qu'un élément de $H^r(Y, x, \mathcal{F})$ soit prolongeable au point $x \in bY$, il faut et il suffit :

i) si $r = 0$, qu'il soit image d'un élément de $\mathcal{F}_x$;

ii) si $r > 0$, qu'il soit nul .

Lemme 1 .

Pour qu'un élément ξ *de* $H^r(Y,\mathcal{F})$ *soit prolongeable au point* x , *il faut et il suffit que* $\mu(\xi)$, *son image dans* $H^r(Y,x,\mathcal{F})$, *le soit* .

En effet, la propriété (1) , appliquée au diagramme (4) , montre que la condition $\xi \in \mathfrak{Im}\,\alpha$ équivaut à l'existence d'un $\eta \in H^r_x(\mathcal{F})$ tel que $\gamma(\xi + \eta) \in \mathfrak{Im}\,\beta$, et cette dernière condition équivaut à $\mu(\xi) + \beta(\eta) \in \mathfrak{Im}\,\beta$.

Lemme 2 .

Soit W *un sous-espace vectoriel de* $H^r(Y,x,\mathcal{F})$, *dont les éléments non nuls ne sont pas prolongeables au point* x ; *soit* $G = W \cap \mathfrak{Im}\,\gamma$; *soit* δ *une application linéaire de* G *dans* $H^r(Y,\mathcal{F}) \oplus H^r_x(\mathcal{F})$, *telle que* $\nu = \gamma \circ \delta$ *soit l'identité de* G . *Alors* $\theta = p \circ \delta$ *est injective, les éléments non nuls de* $V = \mathfrak{Im}\,\theta$ *ne sont pas prolongeables au point* x , *et on a*

$$\dim V + \dim H^{r+1}_+(Y \cup \{x\},\mathcal{F}) \geq \dim W .$$

En effet, les éléments non nuls de W n'étant pas prolongeables au point x , on a $W \cap \mathfrak{Im}\,\beta = \{0\}$ et $G \cap \mathfrak{Im}\,\beta = \{0\} = \nu(G) \cap \mathfrak{Im}\,\beta$; comme ν est injective, la propriété indiquée à la fin de a - montre que θ est injective et que $V \cap \mathfrak{Im}\,\alpha = \{0\}$; cette dernière relation signifie que les éléments non nuls de V ne sont pas prolongeables au point x . L'inégalité résulte de la suite exacte (3) , compte-tenu de l'injectivité de θ .

Corollaire .

Si $H^r(Y,x,\mathcal{F})$ *contient un sous-espace vectoriel, de dimension infinie, dont les éléments non nuls ne sont pas prolongeables au point* x , *et si l'on a* $\dim H^{r+1}_+(Y \cup \{x\},\mathcal{F}) < +\infty$, *alors* $H^r(Y,\mathcal{F})$ *contient un sous-espace vectoriel, de dimension infinie, dont les éléments non nuls ne sont pas prolongeables au point* x .

2 . Généralisation du théorème de Levi .

a - Soit X un espace analytique complexe. Pour tout point $x \in X$, soit $m(x)$ la dimension de l'espace tangent de Zariski $T_x(X)$ à X au point x . On sait qu'il existe une application biholomorphe $\mathscr{C}$ d'un voisinage U de x sur un sous-ensemble analytique $\mathscr{C}(U)$ d'un voisinage de l'origine dans $T_x(X)$.

Une fonction φ à valeurs réelles dans X est dite indéfiniment différentiable au voisinage de x s'il existe une application biholomorphe $\mathscr{C}$ d'un voisinage U de x sur un sous-ensemble analytique d'un ouvert V de $\mathbb{C}^{m(x)}$ et une fonction $\tilde{\varphi}$, indéfiniment différentiable dans V , vérifiant $\varphi|U = \tilde{\varphi} \circ \mathscr{C}$. On dit que $d\varphi$ est non nul au point x , et on écrit $(d\varphi)_x \neq 0$, si on peut choisir $\tilde{\varphi}$ de telle sorte que $(d\tilde{\varphi})_{\mathscr{C}(x)} \neq 0$. On dit que φ est faiblement (resp. fortement) q-pseudo-convexe $(q \geq 0)$ si on peut choisir $\tilde{\varphi}$ de telle sorte que sa forme de Levi $\mathfrak{L}(\tilde{\varphi})$ ait au moins $m(x)-q$ valeurs propres ≥ 0 (resp. > 0) .

Soit Y un sous-ensemble ouvert de X , et soit $x_o \in bY$. On appelle fonction de définition de Y au point x_o une fonction φ , définie et indéfiniment différentiable dans un voisinage U de x_o , telle qu'on ait

$$Y \cap U = \{x \ ; \ x \in U \ , \ \varphi(x) < \varphi(x_o)\} \ .$$

Une telle fonction existe quels que soient Y et $x_o \in bY$. Il suffit de le prouver pour un ouvert Y de $X = \mathbb{R}^n$ (la structure complexe de X étant étrangère à la question) . Or soit f une fonction indéfiniment différentiable dans $\mathbb{R}^n$, nulle ainsi que toutes ses dérivées sur bY , strictement positive dans le complémentaire de bY ; la fonction g qui vérifie

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X-Y \\ -f(x) & \text{si } x \in Y \end{cases}$$

est une fonction de définition de Y en chaque point de sa frontière.

L'existence de la fonction f ci-dessus est assurée par le

Lemme 3 .

Soit F un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. Il existe une fonction f , indéfiniment différentiable dans $\mathbb{R}^n$, qui s'annule sur F ainsi que toutes ses dérivées, et qui est strictement positive dans le complémentaire de F .

Preuve . Soit d'abord B la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$, et F un sous-ensemble fermé de B . Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles dans B , indéfiniment dérivables dans $\mathring{B}$, et continues, ainsi que toutes leurs dérivées, dans B . Muni de la topologie définie par les semi-normes

$$\rho_k(f) = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in B} |D^\alpha f(x)| ,$$

$\mathcal{E}$ est un espace de Fréchet. L'ensemble $\mathcal{G}$ de toutes les fonctions de $\mathcal{E}$ qui sont ≥ 0 et s'annulent sur F ainsi que toutes leurs dérivées est fermé dans $\mathcal{E}$; c'est donc un espace métrique complet.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite fondamentale de voisinages ouverts de F dans B . Soit

$$A_n = \{f \; ; \; f \in \mathcal{G} \; , \quad f(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x \in B - U_n\} \; ;$$

chaque ensemble A_n est ouvert et partout dense dans $\mathcal{G}$; d'après le théorème de Baire, il existe une fonction $f \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$; cette fonction, strictement positive dans $B-F$, s'annule sur F ainsi que toutes ses dérivées.

A partir de ce résultat, on établit le lemme 3 en utilisant une partition de l'unité.

Un point x_o de bY est dit régulier s'il existe une fonction de définition φ de Y au point x_o , vérifiant $(d\varphi)_{x_o} \neq 0$.

b - Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X ; pour tout $x \in X$, soit

$$\delta_x(\mathcal{F}) = m(x) - pf_x(\mathcal{F})$$

où $pf_x(\mathcal{F})$ est le nombre désigné par $dih_x(\mathcal{F})$ dans [1] ; $\delta_x(\mathcal{F})$ est un nombre entier ≥ 0 ; si x est un point non singulier de X et si $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_x$-module libre, on a $\delta_x(\mathcal{F}) = 0$.

Lemme 4 .

Supposons qu'il existe un voisinage U *de* x_o *dans* X *et une fonction* φ , *indéfiniment différentiable et fortement* q-*pseudoconvexe dans* U , *vérifiant*

$$Y \cap U = \{x \; ; \; x \in U \, , \; \varphi(x) > \varphi(x_o)\} \; .$$

Alors tout élément de $H^r(Y, x_o, \mathcal{F})$ *est prolongeable au point* x_o *pour*

$$0 \leq r < pf_x(\mathcal{F}) - q - 1 \; .$$

C'est une conséquence immédiate des théorèmes 9 et 10 de [1] et de la remarque qui suit la Définition 1 .

Théorème 1 .

Soit Y *un sous-ensemble ouvert d'un espace analytique complexe* X , *et soit* x *un point régulier de la frontière de* Y . *Supposons qu'il existe un élément de* $H^r(Y, x, \mathcal{F})$ *non prolongeable au point* x . *Alors* Y *admet au point* x *une fonction de définition* φ *qui vérifie* $(d\varphi)_x \neq 0$ *et qui est faiblement* q-*pseudoconvexe avec* $q \leq \delta_x(\mathcal{F}) + r$.

Preuve . Soit φ' une fonction de définition de Y au point x , définie dans un voisinage U de x , et vérifiant $(d\varphi)_x \neq 0$. Choisissant U suffisamment petit, nous le considérons comme plongé dans l'espace tangent de Zariski $\mathbb{C}^{m(x)}$ à X au point x , de telle sorte qu'il existe une fonction indéfiniment dérivable $\tilde{\varphi}$ au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{m(x)}$, vérifiant

$$\tilde{\varphi}|U = \varphi' \quad \text{et} \quad (d\tilde{\varphi})_o \neq 0 \; .$$

Soit q le nombre de valeurs propres < 0 de la restriction de $\mathcal{L}(\tilde{\varphi})$ à l'hyperplan analytique tangent en 0 à l'hypersurface d'équation $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(0)$. Choisissons le nombre réel $c < 0$ de telle sorte que $\mathcal{L}(ce^{c\tilde{\varphi}})$ ait $q + 1$

valeurs propres < 0 au point 0 ; alors la fonction $-ce^{c\tilde{\varphi}}$ est $(m(x)-q-1)$-pseudoconvexe au voisinage de 0, et le lemme 4 a pour conséquence l'inégalité $q \leq \delta_x(\mathscr{F}) + r$. Choisissons maintenant le nombre réel $c' > 0$ de telle sorte que $\mathfrak{L}(c'e^{c'\tilde{\varphi}})$ ait $m(x)-q$ valeurs propres ≥ 0 au voisinage du point 0 ; la fonction $\varphi = c'e^{c'\tilde{\varphi}}$ vérifie les conditions souhaitées.

3 . Etude de quelques intégrales .

a - Quelques lemmes élémentaires .

Lemme 5 .

Soit $(\alpha_i)_{1\leq i\leq l}$ une suite finie de nombres complexes de module 1 . La suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où $z_k = \sum_{1\leq i\leq l} (\alpha_i)^k$ admet 1 comme valeur d'adhérence lorsque k tend vers $+\infty$.

Preuve . Pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq l$, posons $\alpha_i = e^{2i\pi\theta_i}$, avec $0 \leq \theta_i < 1$. Partageons le cube K de $\mathbb{R}^l$ défini par les inégalités $0 \leq \theta_i < 1$ en m^{2l} cubes de côté $\frac{1}{m^2}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Considérons les points de $\mathbb{R}^l$

$$x_h = (h\theta_i \bmod. 1)_{1\leq i\leq l} \quad , \quad h \in \mathbb{N} \quad , \quad 1 \leq h \leq m^{2l} + 1 \; .$$

Il existe un cube de la division qui contient deux de ces points, et par conséquent il existe un nombre entier h_m vérifiant $1 \leq h_m \leq m^{2l} + 1$ tel que l'on ait

$$|h_m\theta_i \bmod. 1| \leq \frac{1}{m^2} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq l \; .$$

Soit $k_m = mh_m$; on a

$$|k_m\theta_i \bmod. 1| \leq \frac{1}{m} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq l \; .$$

Pour $m > 2$, on a donc

$$|1 - \alpha_i^{k_m}|^2 = 2(1 - \cos 2\pi k_m\theta_i) = 4 \sin^2 \pi k_m\theta_i \leq \frac{4\pi^2}{m^2}$$

et

$$\left|1 - \alpha_i^{k_m}\right| \leq \frac{2\pi}{m} .$$

Par conséquent $\alpha_i^{k_m}$ tend vers 1 et z_{k_m} vers 1 quand m tend vers $+\infty$.

Lemme 6 .

<u>Soit</u> $(\alpha_i)_{i\in I}$ <u>une famille finie de nombres complexes, vérifiant</u> $\max\limits_{i\in I} |\alpha_i| = 1$. <u>La suite</u> $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ <u>où</u> $z_k = \sum\limits_{i\in I} (\alpha_i)^k$ <u>a une valeur d'adhérence appartenant à</u> $\mathbb{N}^*$.

Preuve. Soit $I = I' \cup I''$, où $i \in I'$ entraîne $|\alpha_i| = 1$ et $i \in I''$ entraîne $|\alpha_i| < 1$. On a $z_k = z'_k + z''_k$ où

$$z'_k = \sum_{i\in I'} (\alpha_i)^k \quad \text{et} \quad z''_k = \sum_{i\in I''} (\alpha_i)^k .$$

Comme $I' \neq \emptyset$, la suite $(z'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a (vu le lemme 5) une valeur d'adhérence entière $l \geq 1$. Comme z''_k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$, la suite z_k admet aussi l comme valeur d'adhérence.

Lemme 7 .

<u>Soit</u> $(a_{i,j})_{i\in I, j\in\mathbb{N}}$ <u>une famille de nombres complexes vérifiant</u> $0 < |a_{i,j}| \leq 1$, <u>l'ensemble</u> I <u>étant fini</u> ; <u>pour tous</u> $j \in \mathbb{N}$ <u>et</u> $k \in \mathbb{N}$, <u>soit</u>

$$s_{j,k} = \sum_{i\in I} \frac{1}{(a_{i,j})^k} .$$

<u>Supposons que</u> $\min\limits_{i\in I} |a_{i,j}|$ <u>tend vers</u> 0 <u>quand</u> j <u>tend vers</u> $+\infty$. <u>Il existe alors deux parties infinies</u> J <u>et</u> K <u>de</u> $\mathbb{N}$ <u>telle que</u>

i) <u>pour tout</u> $k \in K$, $\lim\limits_{\substack{j\to+\infty \\ j\in J}} |s_{j,k}| = +\infty$

ii) <u>pour tous</u> $k \in K$, $k' \in K$ <u>vérifiant</u> $k' < k$,

$$\lim_{\substack{j\to+\infty \\ j\in J}} \left|\frac{s_{j,k}}{s_{j,k'}}\right| = +\infty .$$

Preuve . Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit $\nu(j)$ un élément de I tel que

$$|a_{\nu(j),j}| = \min_{i\in I} |a_{i,j}| \quad .$$

Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une valeur d'adhérence de la suite $(\zeta_j)_{j\in\mathbb{N}}$,

$$\zeta_j = \left(\frac{a_{\nu(j),j}}{a_{i,j}} \right)_{i\in I}$$

de points de $\mathbb{C}^I$; on a $\max\limits_{i\in I} |\alpha_i| = 1$. D'après le lemme 6 , la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $z_k = \sum\limits_{i\in I} (\alpha_i)^k$ a une valeur d'adhérence entière ≥ 1 . Soit donc K une partie infinie de $\mathbb{N}$ telle que $|z_k| > \frac{1}{2}$ pour $k \in K$.

Soit maintenant J une partie infinie de $\mathbb{N}$ telle que

$$\lim_{\substack{j\to +\infty \\ j\in J}} \zeta_j = (\alpha_i)_{i\in I} \quad .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$z_{j,k} = (a_{\nu(j),j})^k s_{j,k} = \sum_{i\in I} \left(\frac{a_{\nu(j),j}}{a_{i,j}}\right)^k$$

tend vers z_k quand j tend vers $+\infty$ en restant dans J . La conclusion du lemme est maintenant immédiate.

<u>Lemme 8</u> .

<u>Sous les hypothèses du lemme 7 , il existe un sous-ensemble infini K de $\mathbb{N}$ tel que, pour toute famille $(c_k)_{k\in K}$ de nombres complexes nuls à l'exception d'un nombre fini non nul d'entre eux, on ait</u>

$$\overline{\lim_{j\to +\infty}} \left| \sum_{\substack{i\in I \\ k\in K}} \frac{c_k}{(a_{i,j})^k} \right| = +\infty \quad .$$

Preuve . Soient J et K des sous-ensembles infinis de $\mathbb{N}$ vérifiant les conditions du lemme 7 ; soit $(c_k)_{k\in K}$ une famille de nombres complexes nuls à l'exception d'un nombre fini non nul d'entre eux, et soit h le plus grand des entiers $k \in K$ pour lesquels $c_k \neq 0$. On a

$$\sum_{\substack{i\in I\\ k\in K}} \frac{c_k}{(a_{i,j})^k} = \sum_{k\in K} c_k\, s_{j,k} = s_{j,h} \left(c_h + \sum_{\substack{k\in K\\ k<h}} c_k \frac{s_{j,k}}{s_{j,h}} \right)$$

avec les notations du lemme 7 ; de ce lemme résulte immédiatement le résultat annoncé .

b - Généralisation d'une formule de E. Martinelli [10].

Pour $z = (z_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n$ et $\alpha = (\alpha_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{N}^n$, on pose

$$\psi_\alpha = \Big(\sum_{1\leq j\leq n} z_j^{\alpha_j}\, \bar{z}_j^{\alpha_j} \Big)^{-n} \sum_{1\leq j\leq n} (-1)^{j-1}\, \bar{z}_j^{\alpha_j} \bigwedge_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq j}} d(\bar{z}_k^{\alpha_k}) ,$$

$$\omega = \bigwedge_{1\leq j\leq n} dz_j \quad , \quad K_\alpha^{(n)} = \omega \wedge \psi_\alpha \quad ,$$

$$\alpha + 1 = (\alpha_i + 1)_{1\leq i\leq n} \quad , \quad \alpha' = (\alpha_i)_{2\leq i\leq n} \quad .$$

Proposition 1 .

Soit $B = \{z \; ; \; z \in \mathbb{C}^n \; , \; \sum_{1\leq j\leq n} z_j \bar{z}_j < 1\}$, *et soit* S *la frontière de* B . *Pour toute fonction* f *holomorphe au voisinage de* $\bar{B}$, *on a*

$$(5) \qquad \int_S f\, K_{\alpha+1}^{(n)} = \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} \, \frac{1}{\alpha!} \, \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(0)$$

où $\alpha! = \prod_{1\leq i\leq n} (\alpha_i !)$ *et* $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} = \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}}$, B étant orienté de telle sorte que la forme différentielle extérieure $(\frac{i}{2})^n \omega \wedge \overline{\omega}$ soit positive, et S étant muni de l'orientation compatible avec la formule de Stokes.

Preuve . Pour $n = 1$, la relation (5) est la formule de Cauchy. Nous l'établirons pour toute valeur de n par récurrence. Pour la démonstration, orientons B de telle sorte que la forme différentielle extérieure $\bigwedge_{1\leq j\leq n} (\frac{i}{2}\, dz_j \wedge d\overline{z}_j)$ soit positive, et munissons S de l'orientation que définit la formule de Stokes. Soit

$$\theta_\alpha = \frac{1}{n-1} \frac{1}{z_1^{\alpha_1}} \Big(\sum_{1\leq j\leq n} z_j^{\alpha_j} \overline{z}_j^{\alpha_j} \Big)^{1-n} \wedge \sum_{2\leq j\leq n} (-1)^j \, \overline{z}_j^{\alpha_j} \bigwedge_{\substack{2\leq k\leq n \\ k\neq j}} d(\overline{z}_k^{\alpha_k})$$

et

$$L_\alpha = (-1)^n \omega \wedge \theta_\alpha .$$

On a

$$\psi_\alpha = d''\,\theta_\alpha \qquad \text{et} \qquad K_\alpha^{(n)} = d'' L_\alpha = d\, L_\alpha ,$$

d'où résulte, pour $\beta = (\alpha_1 + 1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n)$

$$\int_S f\, K_\beta^{(n)} = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{S\,\cap\,\{|z_1| > \epsilon\}} d(f\, L_\beta) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{S\,\cap\,\{|z_1| = \epsilon\}} f\, L_\beta$$

où $S \cap \{|z_1| = \epsilon\}$ est orienté comme bord de $S \cap \{|z_1| > \epsilon\}$. On a donc

$$\int_S f\, K_\beta^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-S\,\cap\,\{|z_1|=\epsilon\}} f\, \frac{dz_1}{z_1^{\alpha_1+1}} \wedge \Big(\bigwedge_{2\leq j\leq n} dz_j\Big) \wedge \frac{\sum_{2\leq j\leq n} (-1)^j \overline{z}_j^{\alpha_j} \bigwedge_{\substack{2\leq k\leq n \\ k\neq j}} d(\overline{z}_k^{\alpha_k})}{\Big(\epsilon^{2(\alpha_1+1)} + \sum_{2\leq j\leq n} z_j^{\alpha_j} \overline{z}_j^{\alpha_j}\Big)^{n-1}}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} \frac{2i\pi}{\alpha_1 !} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{S\cap\{z_1=0\}} \frac{\partial^{\alpha_1} f}{\partial z_1^{\alpha_1}} \Big(\bigwedge_{2\leq j\leq n} dz_j\Big) \wedge \frac{\sum_{2\leq j\leq n} (-1)^j \overline{z}_j^{\alpha_j} \bigwedge_{\substack{2\leq k\leq n \\ k\neq j}} d(\overline{z}_k^{\alpha_k})}{\Big(\epsilon^{2(\alpha_1+1)} + \sum_{2\leq j\leq n} z_j^{\alpha_j} \overline{z}_j^{\alpha_j}\Big)^{n-1}}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} \frac{2i\pi}{\alpha_1 !} \int_{S\,\cap\,\{z_1=0\}} \frac{\partial^{\alpha_1} f}{\partial z_1^{\alpha_1}} K_{\alpha'}^{(n-1)}$$

où $S \cap \{z_1 = 0\}$ est orienté comme bord de $B \cap \{z_1 = 0\}$, lui-même orienté de telle sorte que la forme différentielle extérieure $\bigwedge_{2\leq j\leq n} (\frac{i}{2}\, dz_j \wedge d\bar{z}_j)$ soit positive. On a donc

$$\int_S f\, K_{\alpha+1}^{(n)} = \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!}\ \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\alpha!}\ \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(0)$$

d'où on déduit la relation (5) en modifiant l'orientation de S .

c - Une formule de résidus dans $\mathbb{C}^n$.

Si V est une variété analytique complexe connexe, on désigne par $\mathcal{H}(V)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans V , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de V . On désigne par $\mathcal{D}'(V)$ l'espace vectoriel topologique des courants dans V . Pour toute $f \in \mathcal{H}(V) - \{0\}$,

i) $\log|f|$ est une fonction plurisousharmonique [7] dans V , donc est localement sommable dans V , et par conséquent définit un courant de degré zéro dans V , que l'on désignera encore par $\log|f|$;

ii) la forme différentielle méromorphe $\frac{df}{f}$ est localement sommable [6] dans V , donc définit dans V un courant de degré 1 qu'on désignera encore par $\frac{df}{f}$, et qui est égal à $d' \log|f|$ (où $\log|f|$ est le courant défini ci-dessus) .

Le courant $\frac{i}{\pi} d'd'' \log|f| = \frac{1}{2i\pi}\, d\, \frac{df}{f} = \frac{1}{2i\pi}\, d''\, \frac{df}{f}$ est le courant d'intégration [8] sur le diviseur de f .

L'application de $\mathcal{H}(V) - \{0\}$ dans $\mathcal{D}'(V)$, qui à f associe $\log|f|$ (resp. $\frac{df}{f}$, resp. le courant d'intégration sur le diviseur de f) , est continue [3] .

Si x est un point de V , on désignera par $\mathcal{H}_x(V)$ l'ensemble des éléments f de $\mathcal{H}(V)$ qui vérifient $f(x) = 0$.

Proposition 2 .

Soit B un domaine de $\mathbb{C}^n$ contenant l'origine 0 ; soit F le diviseur d'une fonction $f \in \mathcal{H}(B) - \mathcal{H}_0(B)$; soit φ une forme différentielle holomorphe de degré $n-1$ dans B ; soit ρ une fonction indéfiniment différentiable à support compact dans B, égale à 1 au voisinage de 0. On a

$$\int_F \rho\, \varphi \wedge \psi_{\alpha+1} = -\frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!}\, \frac{1}{\alpha!}\, \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha}\left(\frac{df \wedge \varphi}{f.\ \omega}\right)(0) \tag{6}$$

$$+ \frac{1}{2i\pi} \int_B \frac{df}{f} \wedge d''\rho \wedge \varphi \wedge \psi_{\alpha+1} .$$

Preuve . Soit B' une boule ouverte de centre 0, telle que l'on ait $\overline{B'} \cap F = \emptyset$ et $\rho|_{\overline{B'}} = 1$. Soit μ une fonction indéfiniment différentiable dans B, dont le support ne contienne pas 0, et telle que $\mu|_{B-B'} = 1$. On a

$$\int_F \rho\, \varphi \wedge \psi_{\alpha+1} = \int_F \rho\, \mu\, \varphi \wedge \psi_{\alpha+1} = \frac{1}{2i\pi} \int_B d''\frac{df}{f} \wedge \rho\, \mu\, \varphi \wedge \psi_{\alpha+1}$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_B \frac{df}{f} \wedge d''(\rho\, \mu\, \varphi \wedge \psi_{\alpha+1})$$

où $\frac{df}{f}$ est considéré comme courant. Donc

$$\int_F \rho\, \varphi \wedge \psi_{\alpha+1} = \frac{1}{2i\pi} \int_B \mu \frac{df}{f} \wedge d''\rho \wedge \varphi \wedge \psi_{\alpha+1} + \frac{1}{2i\pi} \int_B \rho \frac{df}{f} \wedge d''\mu \wedge \varphi \wedge \psi_{\alpha+1}$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_B \frac{df}{f} \wedge d''\rho \wedge \varphi \wedge \psi_{\alpha+1} + \frac{1}{2i\pi} \int_B \frac{df}{f} \wedge d''\mu \wedge \varphi \wedge \psi_{\alpha+1}$$

car $\qquad \mu|_{\operatorname{supp} d''\rho} = 1 \quad$ et $\quad \rho|_{\operatorname{supp} d''\mu} = 1$.

Soit B'' une boule ouverte de centre 0, telle que $\mu|_{\overline{B''}} = 0$. On a $\operatorname{supp} d''\mu \subset \overline{B'} - B''$, et $\frac{1}{f}$ est holomorphe dans $\overline{B'} - B''$, donc

$$\int_B \frac{df}{f} \wedge d''\mu \wedge \varphi \wedge \psi_{\alpha+1} = -\int_{B'-B''} d\left(\frac{df}{f} \wedge \mu \wedge \varphi \wedge \psi_{\alpha+1}\right) =$$

$$-\int_{S'} \mu \frac{df}{f} \wedge \varphi \wedge \psi_{\alpha+1} + \int_{S''} \mu \frac{df}{f} \wedge \varphi \wedge \psi_{\alpha+1}$$

où S' et S'' désignent les bords respectifs de B' et B''. Compte-tenu du choix de μ et de la Proposition 1 , l'intégrale sur S'' est nulle et

$$\int_{S'} \mu \frac{df}{f} \wedge \varphi \wedge \psi_{\alpha+1} = \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} \left(\frac{df \wedge \varphi}{f \cdot \omega}\right)(0) .$$

<u>Remarque</u> .

La relation (6) est énoncée et démontrée, $\mathbb{C}^n$ étant muni de l'orientation définie par la Proposition 1 , et l'orientation de F se déduisant de celle de $\mathbb{C}^n$ grâce à la relation $F = \frac{1}{2i\pi} d'' \frac{df}{f}$ entre courants. Cette condition d'orientation sera conservée jusqu'à nouvel ordre .

<u>Corollaire</u> .

<u>Soit</u> B <u>un domaine de</u> $\mathbb{C}^n$, <u>contenant l'origine</u> 0 . <u>Soit</u> φ <u>une forme différentielle holomorphe de degré</u> $n-1$ <u>dans</u> B . <u>Pour toute</u> $f \in \mathcal{H}(B) - \mathcal{H}_o(B)$, <u>et pour toute fonction</u> ρ <u>indéfiniment différentiable à support compact dans</u> B <u>et égale à</u> 1 <u>au voisinage de</u> 0 , <u>soit</u>

$$I_\rho(f) = \int_F \rho\varphi \wedge \psi_{\alpha+1} + \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} \left(\frac{df \wedge \varphi}{f\omega}\right)(0)$$

<u>où</u> F <u>est le diviseur de</u> f . <u>La fonction</u> $I_\rho(f)$ <u>a une limite finie en tout point de</u> $\mathcal{H}(B) - \{0\}$; <u>elle est donc bornée au voisinage de tout point de</u> $\mathcal{H}(B) - \{0\}$.

<u>Preuve</u> .

Compte-tenu de la Proposition 2 , on a

$$I_\rho(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_B \frac{df}{f} \wedge d''\rho \wedge \varphi \wedge \psi_{\alpha+1} \quad ;$$

quand f tend vers g dans $\mathcal{H}(B) - \{0\}$, le courant $\frac{df}{f}$ tend vers le courant

$\frac{dg}{g}$ dans $\mathcal{D}'(B)$, donc $I_\rho(f)$ tend vers

$$\frac{1}{2i\pi} \int_B \frac{dg}{g} \wedge d''\rho \wedge \varphi \wedge \psi_{\alpha+1} \quad .$$

d - Intégrales sur des suites d'ensembles analytiques .

Proposition 3 .

Soit

$$B = \{z \ ; \ z \in \mathbb{C}^n \ , \ |z_1| < 1 \ , \ \sum_{2 \leq j \leq n} z_j \bar{z}_j < 1 \} \ .$$

Soit $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ une famille de nombres complexes, nuls sauf un nombre fini non nul d'entre eux . Il existe une forme holomorphe φ de degré $n-1$ au voisinage de $\bar{B}$, telle que

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \left| \int_{B \cap \{z_1 = t\}} \varphi \wedge \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha \psi_{\alpha+1} \right| = +\infty \ .$$

Preuve .

Soit h une fonction holomorphe au vosinage de $\bar{B}$, et soit $\varphi = h . \bigwedge_{2 \leq j \leq n} dz_j$. Comme dans la preuve de la proposition 1 ,on a

$$\varphi \wedge \psi_{\alpha+1} = d''((-1)^{n-1} \varphi \wedge \theta_{\alpha+1})$$

et

$$\varphi \wedge \psi_{\alpha+1} \Big|_{\{z_1 = t\}} = d((-1)^{n-1} \varphi \wedge \theta_{\alpha+1}) \Big|_{\{z_1 = t\}} \ .$$

Pour intégrer, orientons $B \cap \{z_1 = t\}$ de telle sorte que la forme différentielle extérieure $\bigwedge_{2 \leq j \leq n} (\frac{i}{2} dz_j \wedge d\bar{z}_j)$ soit positive . Nous avons alors

$$\int_{B \cap \{z_1=t\}} \varphi \wedge \psi_{\alpha+1} = (-1)^{n-1} \int_{\substack{z_1=t \\ \sum_{2\leq j\leq n} z_j\bar{z}_j=1}} \varphi \wedge \theta_{\alpha+1} \quad \text{pour} \quad t \neq 0$$

et

$$\lim_{\substack{t\to 0 \\ t\neq 0}} t^{\alpha_1+1} \int_{B \cap \{z_1=t\}} \varphi \wedge \psi_{\alpha+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} \int_{\substack{z_1 = 0 \\ \sum_{2\leq j\leq n} z_j\bar{z}_j=1}} h\, K^{(n-1)}_{\alpha'+1}$$

$$= \frac{(2i\pi)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\alpha'!} \frac{\partial^{|\alpha'|} h}{\partial z^{\alpha'}} (0) .$$

En désignant par ν le plus grand des α_1 tels que $c_\alpha \neq 0$, nous avons :

$$\lim_{\substack{t\to 0 \\ t\neq 0}} t^{\nu+1} \int_{B \cap \{z_1=t\}} \varphi \wedge \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha \psi_{\alpha+1} =$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(2i\pi)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\alpha'\in\mathbb{N}^{n-1}} \frac{c_{(\nu,\alpha')}}{\alpha'!} \frac{\partial^{|\alpha'|} h}{\partial z^{\alpha'}} (0) .$$

Il est possible de chosir h de telle sorte que ce nombre ne soit pas nul ; la forme φ vérifie alors la conclusion de la Proposition.

Proposition 4 .

Soit B la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{C}^n$. Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}(B) - \mathcal{H}_o(B)$, convergeant dans $\mathcal{H}(B)$ vers un élément f de $\mathcal{H}_o(B) - \{0\}$. Supposons que $f(z_1,0,\ldots,0)$ ne soit pas identiquement nul. Soit B' une boule ouverte de centre 0, vérifiant $\overline{B'} \subset B$. Il existe alors un sous-ensemble infini K de $\mathbb{N}$ tel que, pour toute famille $(c_k)_{k\in K}$ de nombres complexes nuls à l'exception d'un nombre fini non nul d'entre eux, et pour toute fonction ρ indéfiniment différentiable à support compact dans B' et égale à 1 au voisinage de 0, on ait

$$\overline{\lim_{j\to+\infty}} \left| \int_{F_j} \rho(\bigwedge_{2\leq j\leq n} dz_j) \wedge \sum_{k\in K} c_k \, \psi(k+1,1,\ldots,1) \right| = +\infty .$$

<u>où</u> F_j <u>est le diviseur de</u> f_j ,

<u>Preuve</u> .

Soit B'' une boule ouverte de centre 0, vérifiant $B' \subset B'' \Subset B$, et telle que f ne s'annule pas sur le bord de $B'' \cap \{z_2 = \ldots = z_n = 0\}$. Le théorème de Rouché montre alors que, lorsque j est assez grand, le nombre des zéros de f_j dans $B'' \cap \{z_2 = \ldots = z_n = 0\}$ est égal au nombre m des zéros de f dans $B'' \cap \{z_2 = \ldots = z_n = 0\}$; soit alors $(a_{i,j})_{1\leq i\leq m}$ l'ensemble de ces zéros ; on a

$$f_j(z_1,0,\ldots,0) = u_j(z_1) \prod_{1\leq i\leq m} (z_1 - a_{i,j})$$

où $u_j(z_1)$ ne s'annule pas sur $B'' \cap \{z_2 = \ldots = z_n = 0\}$; soit

$$g_j(z) = \frac{f_j(z)}{u_j(z_1)} \qquad \text{pour} \quad z \in B'' \ ;$$

$F_j \cap B''$ est le diviseur de g_j. Soit $\varphi = \bigwedge_{2\leq j\leq n} dz_j$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial z_1^k} \left(\frac{dg_j \wedge \varphi}{g_j \omega} \right)(0) = - \sum_{1\leq i\leq m} \frac{1}{a_{i,j}^{k+1}} .$$

D'après le Corollaire de la Proposition 2 ,

$$\int_{F_j} \rho \, \varphi \wedge \psi(k+1,1,\ldots,1) - \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} \sum_{1\leq i\leq m} \frac{1}{a_{i,j}^{k+1}}$$

reste borné quand $j \to +\infty$. Il en est de même pour

$$\int_{F_j} \varphi \wedge \sum_{k+1\in K} c_k \, \psi(k+1,1,\ldots,1) - \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} \sum_{\substack{1\leq i\leq m \\ k+1\in K}} \frac{c_k}{a_{i,j}^{k+1}}$$

où K désigne un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$ associé à la famille $(a_{i,j})_{1\leq i\leq m,\, j\in\mathbb{N}}$

de la même manière que dans le lemme 8 , et $(c_k)_{k+1 \in K}$ une famille de nombres complexes nuls à l'exception d'un nombre fini non nul d'entre eux. La conclusion de la Proposition 4 résulte alors de celle du lemme 8 .

§ 2 . Problème de Levi généralisé .

4 . Cohomologie aux points frontières d'un domaine q-pseudoconvexe .

On désigne par $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}^n$ ou, plus généralement, dans l'espace analytique que l'on considère.

Proposition 5 .

Soit φ une fonction indéfiniment différentiable, fortement pseudoconvexe (1) *dans un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}^n$, et vérifiant $(d\varphi)_0 \neq 0$. Soit $Y = \{z \,;\, z \in U \,,\, \varphi(z) > \varphi(0)\}$. Il existe un système de coordonnées $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans un voisinage V de 0 tel que : les images dans $H^{n-1}(Y, 0, \mathcal{O})$ des éléments de $H^{n-1}(V - \{0\}, \mathcal{O})$ définis (grâce à l'isomorphisme de Dolbeault) par les formes différentielles $\psi_{\alpha+1}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, constituent une famille libre*

Preuve .

Soit

$$\varphi(z) = \varphi(0) + 2\,\mathcal{R}e\left(\sum_{1 \leq j \leq n} z_j \frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(0) + \frac{1}{2}\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} z_j z_k \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial z_k}(0)\right)$$

$$+ \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} z_j \bar{z}_k \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(0) + O(|z|^3)$$

(1) c'est-à-dire fortement 0-pseudoconvexe .

le développement de Taylor de φ au voisinage de 0 .

L'hypothèse $(d\varphi)_o \neq 0$ entraîne $\sum_{1\le j\le n} z_j \frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(0) \neq 0$.

Supposons par exemple $\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}(0) \neq 0$. Alors il existe un voisinage V de 0 dans lequel le jacobien du changement de coordonnées

$$\begin{cases} z_1 \to \sum_{1\le j\le n} z_j \frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(0) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le n}} z_j z_k \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial z_k}(0) \\ z_j \to z_j \quad \text{pour} \quad 2 \le j \le n \end{cases}$$

ne s'annule pas. Relativement à ces nouvelles coordonnées on a

$$\varphi(z) = \varphi(0) + 2\,\Re e\ z_1 + \sum_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le n}} z_j \bar{z}_k \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(0) + O(|z|^3) .$$

Soit $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ une famille de nombres complexes, nuls sauf éventuellement un nombre fini d'entre eux. Supposons qu'il existe un voisinage W de 0 et une forme différentielle indéfiniment différentiable η dans $W \cap Y$ tels que

$$\Big(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha \psi_{\alpha+1}\Big)\Big|_{W\cap Y} = d''\eta .$$

Soit r un nombre réel > 0 tel que le polycylindre

$$P = \{z \ ;\ z \in \mathbb{C}^n \ ,\ \sup_{1\le j\le n} |z_j| \le r\}$$

soit contenu dans $V \cap W \cap U$. Pour tout nombre t réel vérifiant $0 \le t \le r$, soit

$$D_t = \{z \ ;\ z \in \mathbb{C}^n \ ,\ z_1 = t \ ,\ \sum_{2\le j\le n} |z_j|^2 \le r^2\} ;$$

choisissons r assez petit pour avoir

i) $D_t \subset Y$ pour $0 < t \leq r$

ii) $b\,D_t \subset Y$ pour $0 \leq t \leq r$

iii) $D_o \cap bY = \{0\}$.

Pour toute forme différentielle holomorphe φ de degré $n-1$ définie au voisinage de P , on a

$$\int_{D_t} \varphi \wedge \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha \psi_{\alpha+1} = \int_{D_t} \varphi \wedge d''\eta = \int_{D_t} d(\varphi \wedge \eta) = \int_{bD_t} \varphi \wedge \eta$$

pour $t \neq 0$, et

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \int_{D_t} \varphi \wedge \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_k \psi_{\alpha+1} = \int_{bD_o} \varphi \wedge \eta \ .$$

La proposition 3 montre que tous les c_α sont nuls .

<u>Proposition 6</u> .

<u>Soit</u> Y <u>un sous-ensemble ouvert d'une variété analytique complexe</u> X , <u>et soit</u> x <u>un point régulier de</u> bY . <u>Soit</u> $\mathcal{F}$ <u>un faisceau analytique cohérent dans</u> X , <u>libre au voisinage de</u> x . <u>On suppose que</u> Y <u>possède au point</u> x <u>une fonction de définition</u> φ , <u>telle que la restriction de la forme de Levi</u> $\mathcal{L}(\varphi)$ <u>à l'hyperplan analytique tangent à</u> bY <u>au point</u> x <u>soit non dégénérée et admette exactement</u> q <u>valeurs propres</u> < 0 . <u>Alors</u> $H^q(Y,x,\mathcal{F})$ <u>contient un espace vectoriel de dimension infinie dont les éléments non nuls ne sont pas prolongeables au point</u> x <u>et, pour</u> $0 \leq r < q$, <u>tous les éléments de</u> $H^r(Y,x,\mathcal{F})$ <u>sont prolongeables au point</u> x .

<u>Preuve</u> .

Comme $\mathcal{F}$ est localement libre au voisinage de x , il existe p tel que $\mathcal{F} \approx \mathcal{O}^p$, et $H^r(Y,x,\mathcal{F}) \approx \overset{p}{\oplus} H^r(Y,x,\mathcal{O})$. Il suffit donc de démontrer la proposition pour le faisceau $\mathcal{O}$.

Supposons d'abord $q = 0$; le nombre réel $c > 0$ étant choisi suffisamment grand, la forme de Levi de $\hat{\varphi} = e^{c\varphi}$ est définie positive au voisinage de x et, avec un choix convenable des coordonnées $(z_i)_{1\leq i\leq n}$ au voisinage de x, on a

$$\hat{\varphi}(z) = \hat{\varphi}(x) + 2\,\mathcal{R}e\, z_1 + \mathcal{L}(\varphi) + 0(\|z\|^3)\ .$$

Au voisinage de x, l'hyperplan $\{z_1 = 0\}$ est contenu dans $X - Y$ et ne rencontre $\overline{Y}$ qu'au point x. Donc les fonctions $z_1^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$, engendrent un sous-espace vectoriel de dimension infinie de $H^0(Y,x,\mathcal{O})$ dont les éléments non nuls ne sont pas prolongeables au point x.

Supposons maintenant $q > 0$; le nombre réel $c > 0$ étant choisi suffisamment grand, la forme de Levi de $\hat{\varphi} = -e^{-c\varphi}$ au voisinage de x est non dégénérée et a exactement $q+1$ valeurs propres < 0 ; d'après le lemme 4, tous les éléments de $H^r(Y,x,\mathcal{F})$ sont, pour $0 \leq r < q$, prolongeables au point x. Choisissons les coordonnées $(z_i)_{1\leq i\leq n}$ dans un voisinage V de x de telle sorte que

$$\hat{\varphi}(z) = \hat{\varphi}(x) + 2\,\mathcal{R}e\, z_1 - \sum_{1\leq j\leq q+1} a_j z_j \bar{z}_j + \sum_{q+2\leq j\leq n} a_j z_j \bar{z}_j + 0(\|z\|^3)$$

où les a_j, $1 \leq j \leq n$, sont des nombres réels > 0. Choisissons V assez petit pour que :

i) l'ensemble $A = \{z\ ;\ z \in V\ ,\ z_1 = \ldots = z_{q+1} = 0\}$ vérifie $A \cap \overline{Y} = \{x\}$.

ii) la partie de l'ensemble $B = \{z\ ;\ z \in V\ ,\ z_{q+2} = \ldots = z_n = 0\}$ définie par $\hat{\varphi}(z) > \hat{\varphi}(x)$ est fortement pseudoconvexe.

Soit ϵ un nombre réel > 0 tel que le polycylindre

$$W = \{\sup_{1\leq j\leq n} |z_j| < \epsilon\}$$

vérifie $\overline{W} \subset V$. Soit π la projection naturelle de W sur $W \cap B$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{q+1}$, soit $\psi_{\alpha+1}$ la forme différentielle, définie en 3. b - , relative aux variables $(z_j)_{1\leq j\leq q+1}$, et soit

$$\theta_{\alpha+1} = \pi^* \psi_{\alpha+1}\ .$$

Les formes $\theta_{\alpha+1}$, $\alpha \in \mathbb{N}^{q+1}$, définissent des éléments de $H^q(Y \cap W, \mathcal{O})$ dont les images $\xi_{\alpha+1}$ dans $H^q(Y,x,\mathcal{O})$ constituent une famille libre, puisque, d'après la Proposition 5 , les images des $\xi_{\alpha+1}$ dans $H^q(Y \cap B,x,\mathcal{O})$ constituent une famille libre.

5 . Notion de q-pseudoconvexité stricte .

Un sous-ensemble ouvert relativement compact Y d'un espace analytique complexe X est dit fortement q-pseudoconvexe s'il existe une fonction φ indéfiniment différentiable et fortement q-pseudoconvexe dans un voisinage U de bY , telle que l'on ait

$$Y \cap U = \{z \ ; \ z \in U \ , \ \varphi(z) < 0\} \ .$$

Définition .

Soit Y un sous-ensemble ouvert d'une variété analytique complexe X . Nous dirons que Y est strictement q-pseudoconvexe si Y est relativement compact dans X , si sa frontière est continûment différentiable et si, pour tout point $x \in bY$, il existe une fonction de définition φ de Y au point x , telle que la restriction de $\mathcal{L}(\varphi)$ à l'hyperplan analytique tangent à bY au point x soit non dégénérée et admette exactement q valeurs propres < 0 .

Remarque .

De la Proposition 15 de [1] , il résulte que : si Y est strictement q-pseudoconvexe, alors Y est fortement q-pseudoconvexe .

Exemple .

Soit $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ l'espace projectif de dimension n sur $\mathbb{C}$. Soient $(z_i)_{0\leq i\leq n}$ des coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Soit

$$P_h = \{z \ ; \ z \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \ , \ z_{h+1} = \ldots = z_n = 0\} \ ,$$

$$P_{n-h-1} = \{z \ ; \ z \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \ , \ z_0 = \ldots = z_h = 0\}$$

et
$$X = \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) - (P_h \cup P_{n-h-1}) \ .$$

La fonction

$$F(z) = \Big(\sum_{h+1\le j\le n} z_j\,\bar z_j\Big) \Big/ \Big(\sum_{0\le j\le h} z_j\,\bar z_j\Big)$$

est > 0 en tout point $z \in X$. Soit $\Phi(z) = \log F(z)$. On a

$$d'd''\,\Phi(z) = d'd'' \log \sum_{h+1\le j\le n} z_j\,\bar z_j - d'd'' \log \sum_{0\le j\le h} z_j\,\bar z_j \ .$$

On définit les applications holomorphes

$$\pi_1 : X \to P_h \quad \text{et} \quad \pi_2 : X \to P_{n-h-1}$$

par

$$\pi_1(z) = (z_o\ ,\dots,\ z_h) \quad \text{et} \quad \pi_2(z) = (z_{h+1}\ ,\dots,\ z_n)\ .$$

En désignant par Ω_1 et Ω_2 les formes différentielles extérieures associées à la métrique de Fubini sur P_h et P_{n-h-1} respectivement, on a

$$\mathcal{L}(\Phi) = \pi_2^*\,\Omega_2 - \pi_1^*\,\Omega_1 \ .$$

Soit $a = (a_j)_{1\le j\le n}$ un point de X , et soient i et k deux indices tels que $0 \le i \le h < k \le n$, $a_i \neq 0$ et $a_k \neq 0$; alors les fractions rationnelles

$$(x_1\ ,\dots,\ x_h) = \Big(\frac{z_o}{z_i}\ ,\dots,\ \frac{\hat z_i}{z_i}\ ,\dots,\ \frac{z_h}{z_i}\Big)$$

$$(y_1\ ,\dots,\ y_{n-h-1}) = \Big(\frac{z_{h+1}}{z_k}\ ,\dots,\ \frac{\hat z_k}{z_k}\ ,\dots,\ \frac{z_n}{z_k}\Big)$$

et

$$t = \frac{z_i}{z_k}$$

sont holomorphes au point a et peuvent être prises comme coordonnées locales au voisinage de a . Grâce à ces coordonnées locales, on a

$$\pi_1^* \Omega_1 = \sum_{j,l} a_{j,l} \, dx_j \wedge d\bar{x}_l \quad ,$$

$$\pi_2^* \Omega_2 = \sum_{r,s} b_{r,s} \, dy_r \wedge d\bar{y}_s$$

et $$\mathcal{L}(\Phi) = \sum_{r,s} b_{r,s} \, dy_r \wedge d\bar{y}_s - \sum_{j,l} a_{j,l} \, dx_j \wedge d\bar{x}_l \quad .$$

Cette forme de Levi a $n-h-1$ valeurs propres > 0 , h valeurs propres < 0 et 1 valeur propre nulle .

Au voisinage du point x , on a

$$\Phi(z) = \log \frac{1}{t\bar{t}} \; \frac{1 + \sum\limits_{1 \leq l \leq n-h-1} y_l \bar{y}_l}{1 + \sum\limits_{1 \leq j \leq h} x_j \bar{x}_j} \quad ;$$

l'hyperplan analytique H tangent au point a à l'hypersurface d'équation $\Phi(z) = \Phi(a)$ est donné par

$$\frac{\sum\limits_{1 \leq l \leq n-h-1} \bar{y}_l \, dy_l}{1 + \sum\limits_{1 \leq l \leq n-h-1} y_l \bar{y}_l} - \frac{dt}{t} - \frac{\sum\limits_{1 \leq j \leq h} \bar{x}_j \, dx_j}{1 + \sum\limits_{1 \leq j \leq h} x_j \bar{x}_j} = 0 \quad ;$$

comme t ne s'annule pas au point a , l'hypersurface considérée est non singulière au point a et la restriction de $\mathcal{L}(\varphi)$ à H a $n-h-1$ valeurs propres > 0 et h valeurs propres < 0 .

Pour tout nombre $c \in \mathbb{R}$, soit

$$Y_c = P_h \cup \{x \, , \, x \in X \, , \, \Phi(x) < c\} \; ;$$

les considérations précédentes montrent que Y_c est un ouvert strictement h-pseudoconvexe de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

6 . Problème de Levi généralisé .

Théorème 2 .

Soit Y un sous-ensemble ouvert relativement compact et fortement q-pseudoconvexe d'un espace analytique complexe X ; soit x un point régulier de bY, non singulier dans X. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent dans X, libre au voisinage de x. On suppose que Y possède au point x une fonction de définition φ, telle que la restriction de la forme de Levi $\mathcal{L}(\varphi)$ à l'hyperplan analytique tangent à bY au point x soit non dégénérée et admette exactement q valeurs propres < 0. Alors $H^q(Y, \mathcal{F})$ contient un espace vectoriel de dimension infinie dont les éléments non nuls ne sont pas prolongeables au point x.

Preuve .

Vu l'inégalité

$$\dim H_+^{q+1}(Y \cup \{x\}, \mathcal{F}) < +\infty$$

qui résulte du théorème 11 et de la proposition 16 de [1], le théorème 2 est une conséquence de la Proposition 6 et du Corollaire du Lemme 2 .

Théorème 3 .

Soit Y un sous-ensemble ouvert strictement q-pseudoconvexe d'une variété analytique complexe X. Pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ localement libre dans X, il existe un élément de $H^q(Y, \mathcal{F})$ qui n'est prolongeable en aucun point de bY.

Preuve .

α) Vu la remarque du § 5 , soit φ une fonction indéfiniment différentiable et fortement q-pseudoconvexe dans un voisinage U de bY, telle que :

i) $Y \cap U = \{x \,;\, x \in U \,,\, \varphi(x) < 0\}$

ii) pour tout $x \in U$, on a $(d\varphi)_x \neq 0$

iii) $\mathcal{L}(\varphi)$ est non dégénérée et admet exactement q valeurs propres < 0 en tout point de U.

iv) pour tout $x \in bY$, la restriction de $\mathcal{L}(\varphi)$ à l'hyperplan analytique tangent à bY au point x est non dégénérée et admet exactement q valeurs propres < 0.

β) Soit $(p_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset bY$ une suite de points, deux à deux distincts, partout dense dans bY. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ soit ρ_j une fonction, indéfiniment différentiable dans U, vérifiant les conditions

$$\operatorname{supp} \rho_j \subset U , \ \rho_j(p_j) = 0 \quad \text{et} \quad \rho_j(x) > 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in bY - \{p_j\} .$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit ϵ_j un nombre réel > 0 suffisamment petit pour que l'on ait $d(\varphi - \epsilon_j\rho_j) \neq 0$ dans U et pour que $\mathcal{L}(\varphi - \epsilon_j\rho_j)$ soit non dégénérée et admette exactement q valeurs propres < 0 en tout point de U.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit

$$Y_j = (Y - U) \cup \{x \ ; \ x \in U , \ \varphi - \epsilon_j\rho_j < 0\} ;$$

on a

$$Y \subset Y_j \quad \text{et} \quad bY \cap bY_j = \{p_j\} .$$

γ) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique localement libre dans X ; c'est le faisceau des germes de sections holomorphes d'un espace fibré vectoriel holomorphe E sur X. Pour toute partie ouverte W de X, soit $C^{r,s}(W,E)$ l'espace des formes différentielles indéfiniment différentiables dans W, de type (r,s) et à valeurs dans E.

La méthode de construction de disques exposée dans la démonstration de la Proposition 5, puis la Proposition 3, le lemme 2 et les résultats du N°1 de [1], permettent de déterminer, pour tout $j \in \mathbb{N}$:

i) des coordonnées $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans un voisinage V_j de p_j, s'annulant au point p_j, et un nombre réel $r_j > 0$, tels que les q-disques

$$D_{\nu,j}(r) = \{z \ ; \ z \in V_j , \ z_1 = \frac{1}{\nu} , \ \sum_{2 \leq i \leq q+1} z_i \bar{z}_i < r^2 , \ z_{q+2} = \dots = z_n = 0\}$$

$\nu \in \mathbb{N}^*$, vérifient les conditions

$$D_{\nu,j}(r) \subset Y \quad \text{pour} \quad 0 < r \leq r_j \quad \text{et} \quad \nu \in \mathbb{N}^*$$

$$\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}^*} bD_{\nu,j}(r) \Subset Y \quad \text{pour} \quad 0 < r \leq r_j \quad .$$

ii) une forme holomorphe $\gamma_j \in C^{q,0}(V_j, E^*)$ (où E^* désigne le fibré dual de E) et une forme $\eta_j \in C^{0,q}(Y_j, E)$ vérifiant $d''\eta_j = 0$, telles que l'on ait

$$\lim_{\nu \to +\infty} \left| \int_{D_{\nu,j}(r)} \gamma_j \wedge \eta_j \right| = +\infty \quad \text{pour} \quad 0 < r \leq r_j \quad .$$

δ) Soit $(U_i)_{i \in I} = \mathcal{U}$ un recouvrement de Y par des cartes locales. Si D^r est un symbole de dérivation par rapport aux coordonnées de U_i , on désigne par $|D^r \eta_j|$ la somme des modules des D^r-dérivées des coefficients de η_j dans U_i .

Soit $(K_s)_{s \in \mathbb{N}^*}$ une suite de sous-ensembles compacts de Y vérifiant les conditions

$$K_s \subset \mathring{K}_{s+1} \quad \text{pour} \quad s \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \bigcup_{s \in \mathbb{N}^*} K_s = Y \; ;$$

soit

$$c_s = \sum_{|r| \leq s} \sup_{i \in I} \sup_{U_i \cap K_s} |D^r \eta_s| \quad ;$$

soit $(\lambda_s)_{s \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels vérifiant

$$0 < \lambda_s < \frac{1}{2^s c_s}$$

La série de terme général $\lambda_s \eta_s$ converge vers un élément $\eta \in C^{0,q}(Y,E)$ vérifiant $d''\eta = 0$.

En effet, quels que soient les nombres entiers positifs s_o, p et k vérifiant $p \geq s_o$, on a

$$\sum_{|r| \leq s_o} \sup_{i \in I} \sup_{U_i \cap K_{s_o}} \left| D^r \sum_{p \leq s \leq p+k} \lambda_s \eta_s \right| \leq \sum_{p \leq s \leq p+k} \frac{1}{2^s} \leq \frac{1}{2^{p-1}} \quad ;$$

la série, et toutes ses "dérivées" jusqu'à l'ordre s_o inclus, convergent donc uniformément sur K_{s_o} ; il en résulte que la série et toutes ses "dérivées" convergent uniformément sur tout compact de Y ; cela entraîne la propriété annoncée.

ε) Pour $s \neq j$, η_s est régulière au voisinage de $\overline{\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}^*} D_{\nu,j}(r_j)}$; il existe donc des nombres réels $c_s(j)$ tels que l'on ait

$$\left| \int_{D_{\nu,j}(r)} \gamma_j \wedge \eta_s \right| \leq c_s(j)$$

pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$ et tout r vérifiant $0 < r \leq r_j$; de plus $\int_{D_{\nu,j}(r)} \gamma_j \wedge \eta_s$ a une limite (finie) quand $\nu \to +\infty$.

Astreignons maintenant la suite $(\lambda_s)_{s \in \mathbb{N}^*}$ de δ) aux conditions

$$0 < \lambda_s < \min_{0 \leq j < s} \frac{1}{2^s c_s(j)} \quad \text{où} \quad c_s(0) = c_s \ .$$

Nous aurons

$$\sum_{j+1 \leq s < +\infty} \left| \lambda_s \int_{D_{\nu,j}(r)} \gamma_j \wedge \eta_s \right| \leq \sum_{j+1 \leq s < +\infty} \frac{1}{2^s} < \frac{1}{2^j}$$

pour tous $j \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ et pour $0 < r \leq r_j$. Il en résulte

$$\lim_{\nu \to +\infty} \left| \int_{D_{\nu,j}(r)} \gamma_j \wedge \eta \right| = +\infty$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour $0 < r \leq r_j$.

Comme dans la démonstration de la proposition 5 , on en déduit que l'élément de $H^q(Y,\mathscr{F})$ défini par η n'est par prolongeable au point p_j ; ceci est établi quel que soit $j \in \mathbb{N}$; l'élément considéré n'est prolongeable en aucun point x de bY, car, s'il était prolongeable au point x , il le serait en un point p_j suffisamment voisin de x .

La démonstration, écrite pour le cas $q > 0$, est valable, avec quelques modifications évidentes, pour $q = 0$.

§ 3 . Convexité et séparabilité relatives aux ensembles analytiques.

7 . Convexité par rapport aux ensembles analytiques.

a - Remarques relatives à l'intégration sur un ensemble analytique .

Soit X une variété analytique complexe ; soit A un sous-ensemble analytique de X , ayant la dimension q en chacun de ses points ; soit φ une forme différentielle indéfiniment différentiable de type (q,q) dans X .

α) On dira que l'intégrale $\int_A \varphi$ est absolument convergente si, pour toute partition de l'unité $(\rho_i)_{i\in I}$ dénombrable et localement finie dans X , la série $\sum_{i\in I} \int_A \rho_i \varphi$ converge absolument ; s'il en est ainsi, sa somme l ne dépend pas de la partition de l'unité choisie et on écrit

$$\int_A \varphi = l \quad .$$

Soit ω la forme différentielle extérieure (de type $(1,1)$) d'une métrique hermitienne dans X ; la somme de la série à termes positifs $\sum_{i\in I} \int \rho_i \frac{\omega^q}{q!}$ ne dépend pas du choix de la partition $(\rho_i)_{i\in I}$; on l'appelle volume de A relativement à la métrique définie par ω , et on la désigne par $\mathrm{vol}_\omega(A)$. L'intégrale $\int_A \frac{\omega^q}{q!}$ est absolument convergente si et seulement si $\mathrm{vol}_\omega(A) < +\infty$; alors

$$\mathrm{vol}_\omega(A) = \frac{1}{q!} \int_A \omega^q \ .$$

β) Soit $T(X)$ le fibré holomorphe tangent à X ; soit X_o la section nulle de $\Lambda^q\, T(X)$, et soit $\Theta = \Lambda^q\, T(X) - X_o$. Pour tout $x \in X$, φ et $\frac{1}{q!}\,\omega^q$ définissent des formes sesquilinéaires φ_x et $\frac{1}{q!}\,\omega_x^q$ sur le produit par elle-même de la fibre de $\Lambda^q\, T(X)$ au point x , et par conséquent définissent des formes quadratiques $\tilde{\varphi}_x$ et $\tilde{\omega}_x$ sur cette fibre ; la seconde de ces deux formes quadratiques est définie positive. Soit Θ_x la fibre de Θ au point x ; $g_x = \tilde{\varphi}_x\, (\tilde{\omega}_x)^{-1}$ est une fonction continue, homogène de degré 0 sur Θ_x . On pose

$$\|\varphi\|_x^{\omega} = \sup_{u\in \Theta_x} |g_x(u)| \quad ;$$

d'après ce qui précède, on a $\|\varphi\|_x^\omega < +\infty$; pour toute partie K de X, on pose

$$\|\varphi\|_K^\omega = \sup_{x \in K} \|\varphi\|_x^\omega \quad ;$$

si K est compact, on a $\|\varphi\|_K^\omega < +\infty$, puisque $\|\varphi\|_x^\omega$ est une fonction continue de x.

<u>Lemme 9</u>.

<u>Si l'on a</u> $\mathrm{vol}_\omega(A) < +\infty$ <u>et</u> $\|\varphi\|_A^\omega < +\infty$, <u>alors l'intégrale</u> $\int_A \varphi$ <u>est absolument convergente et on a</u>

$$\left|\int_A \varphi\right| \leq \|\varphi\|_A^\omega \cdot \mathrm{vol}_\omega(A) \quad .$$

En effet, pour toute partition $(\rho_i)_{i \in I}$ du type considéré ci-dessus on a, vu la définition de $\|\varphi\|_A^\omega$,

$$\left|\int_A \rho_i \, \varphi\right| \leq \|\varphi\|_A^\omega \int_A \rho_i \, \omega^q \qquad \text{pour tout } i \in I \ ;$$

de ces inégalités résulte la conclusion du lemme 9.

γ) Soit Ω^q le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré q dans X. Si A est compact et si φ vérifie $d''\varphi = 0$, alors $\int_A \varphi$ ne dépend que de l'élément de $H^q(X,\Omega^q)$ que lui associe le théorème de Dolbeault.

En effet, pour toute forme différentielle η, indéfiniment différentiable et de type $(q,q-1)$ dans X, on a

$$\int_A \varphi + d''\eta = \int_A \varphi + \int_A d\eta - \int_A d'\eta$$

où $\int_A d\eta = 0$ d'après P. Lelong [8] et $\int_A d'\eta = 0$ parce que $d'\eta$ est de type $(q+1, q-1)$.

Pour tout $\xi \in H^q(X,\Omega^q)$, on posera

$$\int_A \xi = \int_A \varphi$$

où φ est une forme différentielle à laquelle le théorème de Dolbeault associe la classe ξ .

b - Résultat fondamental .

Proposition 7 .

Soit Y un sous-ensemble ouvert relativement compact et fortement q-pseudoconvexe d'une variété analytique complexe X . Soit x un point régulier de bY . On suppose que Y possède au point x une fonction de définition φ telle que la restriction de $\mathcal{L}(\varphi)$ à l'hyperplan analytique tangent à bY au point x soit non dégénérée et admette exactement q valeurs propres < 0 . Soit $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles analytiques compacts de Y , de dimension q en chacun de leurs points, admettant x comme point adhérent. On suppose encore qu'il existe dans X une métrique hermitienne pour laquelle $\sup_{\nu\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(A_\nu) < +\infty$. Alors il existe un sous-espace vectoriel V de dimension infinie de $H^q(Y,\Omega^q)$, dont les éléments non nuls ne sont pas prolongeables au point x , et tel que l'on ait, pour tout $\xi \in V$,

$$\sup_{\nu\in\mathbb{N}} \left| \int_{A_\nu} \xi \right| = +\infty \quad .$$

Preuve .

α) Soit Y' un sous-ensemble ouvert relativement compact de X possédant les mêmes propriétés de convexité que Y et vérifiant les conditions

$$Y \subset Y' \qquad , \qquad bY \cap bY' = \{x\} \ ;$$

la construction d'un tel ouvert Y' a été exposée au cours de la démonstration du théorème 3 . Ainsi qu'on l'a montré dans la démonstration de la Proposition 6 , il existe une fonction de définition φ de Y' au point x , ayant exactement $q + 1$ valeurs propres < 0 ; cette fonction vérifie

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \Re e z_1 - \sum_{1\leq j\leq q+1} a_j z_j \bar{z}_j + \sum_{q+2\leq j\leq n} a_j z_j \bar{z}_j + O(\|z\|^3)$$

dans

$$U = \{z \ ; \ \sum_{1\leq j\leq n} z_j \bar{z}_j < 1\}$$

avec $a_j > 0$ pour $1 \leq j \leq n$, pour un choix convenable au voisinage de x des coordonnées $(z_j)_{1\leq j\leq n}$ s'annulant au point x .

Soit

$$E = \{z \ ; \ z \in U \ , \ z_1 = \ldots = z_{q+1} = 0\}$$

et soit ϵ un nombre réel, vérifiant $0 < \epsilon < 1$, tel que l'on ait

$$\varphi|_E(z) - \varphi(0) = \sum_{q+2\leq j\leq n} b_j z_j \bar{z}_j + O(\|z\|^3) > 0$$

pour $0 < \sum_{q+2\leq j\leq n} z_j \bar{z}_j < \epsilon^2$. Soit alors σ un nombre réel > 0 tel que, en posant

$$P = \{z \ ; \ z \in U \ , \ \sum_{1\leq j\leq q+1} z_j \bar{z}_j < \sigma^2 \ , \ \sum_{q+2\leq j\leq n} z_j \bar{z}_j < \epsilon^2\}$$

et

$$\dot{P} = \{z \ ; \ z \in U \ , \ \sum_{1\leq j\leq q+1} z_j \bar{z}_j < \sigma^2 \ , \ \sum_{q+2\leq j\leq n} z_j \bar{z}_j = \epsilon^2\} \ ,$$

on ait

$$\bar{P} \subset U \quad \text{et} \quad \dot{P} \subset U \cap (X - \bar{Y}') \ .$$

Remarquons que les ouverts P construits de cette manière constituent un système fondamental de voisinages de x . Nous fixons et désignons par P l'un d'entre eux.

Soit π la projection naturelle de P sur

$$Q = \{z \ ; \ z \in P \ , \ z_{q+2} = \ldots = z_n = 0\} \ .$$

La restriction de π à $S_\nu = A_\nu \cap P$ est propre, car les conditions ci-dessus entraînent l'existence de ϵ_1 vérifiant $0 < \epsilon_1 < \epsilon$, tel que

$$S_\nu \subset \{z \; ; \; z \in P \, , \sum_{q+2 \leq j \leq n} z_j \bar{z}_j \leq \epsilon_1^2\} .$$

Donc $\pi(S_\nu)$ est un ensemble analytique dans Q, de codimension 1 en chacun de ses points ; la condition $E \subset X - Y'$ entraîne $x \notin \pi(S_\nu)$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}$; soit F_ν le diviseur dans Q obtenu en associant à chaque point de $\pi(S_\nu)$ un nombre entier égal au degré de l'application π en ce point.

β) Désignons par vol_e le volume par rapport à la métrique euclidienne de P et par vol le volume par rapport à la métrique hermitienne envisagée sur X. En vertu du lemme 9, il existe un nombre réel $c > 0$ tel que

$$\mathrm{vol}_e(S_\nu) \leq c \, . \, \mathrm{vol}(S_\nu) \quad \text{pour tout} \quad \nu \in \mathbb{N} \; ;$$

on a donc

$$\mathrm{vol}_e(F_\nu) \leq \mathrm{vol}_e(S_\nu) \leq c \, . \, \mathrm{vol}(S_\nu) \leq c \, . \, \mathrm{vol}(A_\nu)$$

pour tout $\nu \in \mathbb{N}$; il en résulte

$$\sup_{\nu \in \mathbb{N}} \mathrm{vol}_e(F_\nu) < +\infty \; .$$

Soient B et B' deux boules ouvertes dans Q, de centre x, vérifiant $B' \Subset B \Subset Q$. D'après Stoll [13], il existe une partie infinie M de $\mathbb{N}$, et une famille $(f_\nu)_{\nu \in M}$ d'éléments de $\mathscr{H}(B)$, telle que :

i) x est point limite de la suite $(A_\nu)_{\nu \in M}$;

ii) $F_\nu \cap B$ est le diviseur de f_ν pour tout $\nu \in M$;

iii) f_ν converge dans $\mathscr{H}(B)$ vers un élément f de $\mathscr{H}(B) - \{0\}$.

Pour tout $\nu \in M$, on a $f_\nu \in \mathscr{H}(B) - \mathscr{H}_0(B)$, puisque $x \notin F_\nu$; étant point limite de la suite $(A_\nu)_{\nu \in M}$, x est point limite de la suite $(F_\nu)_{\nu \in M}$; par conséquent $f(0) = 0$, et on a $f \in \mathscr{H}_0(B) - \{0\}$. Comme f n'est pas identiquement nulle, il n'est pas restrictif de supposer que $f(z_1, 0, \ldots, 0)$ n'est pas identiquement nulle (quitte à faire une rotation des coordonnées $(z_j)_{1\leq j\leq q+1}$).

D'après la Proposition 4, il existe donc un sous-ensemble infini K de $\mathbb{N}$ tel que, pour toute famille $(c_k)_{k\in K}$ de nombres complexes nuls à l'exception d'un nombre fini non nul d'entre eux et pour toute fonction ρ indéfiniment différentiable à support compact dans B' et égale à 1 au voisinage de 0, on ait

$$\sup_{\nu\in M} \left| \int_{F_\nu} \rho \sum_{k\in K} c_k \chi_k \right| = +\infty$$

avec

$$\chi_k = \Big(\bigwedge_{2\leq j\leq q+1} dz_j \Big) \wedge \psi_{(k+1,1,\ldots,1)} ,$$

la forme $\psi_{(k+1,1,\ldots,1)}$ étant exprimée à l'aide des variables $(z_j)_{1\leq j\leq q+1}$; d'après la Proposition 5, les images dans $H^q(Y'\cap Q, x, \Omega^q)$ (où Ω^q désigne le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré q dans X) des éléments de $H^q(Q-\{0\}, \Omega^q)$ définis par les formes χ_k, $k\in K$, constituent une famille libre.

γ) Pour tout $k\in K$, soit $\eta_k = \pi^*\chi_k$; on a $d''\eta_k = 0$. La construction de P a été faite de telle sorte que pour toute fonction ρ du type considéré ci-dessus, il existe des fonctions $\hat{\rho}$ indéfiniment différentiables et à support compact dans P, égales à $\pi^*\rho$ au voisinage de $\overline{\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} S_\nu}$; de plus, les ensembles ouverts du type de P constituant (comme on l'a remarqué) un système fondamental de voisinages de x, il existe des fonctions $\hat{\rho}$ de support arbitrairement voisin de x (correspondant à des fonctions ρ de support suffisamment voisin de x). Pour toute fonction $\hat{\rho}$, on a, quels que soient $\nu\in\mathbb{N}$ et $k\in K$,

$$\int_{S_\nu} \hat{\rho}\, \eta_k = \int_{F_\nu} \rho\, \chi_k .$$

Donc :

i) pour toute famille $(c_k)_{k\in K}$ de nombres complexes nuls à l'exception d'un nombre fini non nul d'entre eux, et pour toute fonction $\hat{\rho}$ du type considéré ci-dessus, on a

$$\sup_{\nu\in\mathbb{N}} \left| \int_{S_\nu} \hat{\rho} \sum_{k\in K} c_k \eta_k \right| = +\infty .$$

ii) les images ξ_k dans $H^q(Y', x, \Omega^q)$ des éléments de $H^q(U-\Sigma, \Omega^q)$ définis par les formes η_k , $k \in K$, constituent une famille libre.

En vertu de ii), du N° 17 de [1] et du lemme 2 , il existe un sous-espace vectoriel V de dimension infinie de $H^q(Y', \Omega^q)$, dont les éléments non nuls ne sont pas prolongeables au point x , et dont l'image dans $H^q(Y', x, \Omega^q)$ est contenue dans le sous-espace vectoriel engendré par les ξ_k (resp. les ξ_k mod. Ω^q_x) si $q > 0$ (resp. $q = 0$) .

Tout élément de V est représentable par une forme différentielle η indéfiniment différentiable, de type (q,q) , vérifiant $d''\eta = 0$, dans Y' , et on a

$$\sup_{\nu\in\mathbb{N}} \left| \int_{A_\nu} \eta \right| = +\infty .$$

En effet, il existe un voisinage W de x dans X , vérifiant $W \subset \pi^{-1}(B)$, une forme différentielle θ , indéfiniment différentiable dans $W \cap Y'$, et une famille $(c_k)_{k\in K}$ de nombres complexes nuls à l'exception d'un nombre fini non nul d'entre eux, tels que l'on ait

$$\eta = d''\theta + \sum_{k\in K} c_k \eta_k \quad \text{dans} \quad W \cap Y' .$$

Soit $\hat{\rho}$ une fonction du type considéré ci-dessus, qui soit positive ou nulle en tout point, et dont le support soit contenu dans W . On a

$$\int_{A_\nu} \eta = \int_{A_\nu} \hat{\rho}\, \eta + \int_{A_\nu} (1-\hat{\rho})\eta =$$

$$\int_{S_\nu} \hat{\rho} \sum_{k\in K} c_k \eta_k + \int_{S_\nu} d''(\hat{\rho}\theta) - \int_{A_\nu} d''\hat{\rho} \wedge \theta + \int_{A_\nu} (1-\hat{\rho})\eta \; ;$$

la seconde intégrale est nulle pour une raison de type explicitée dans 7.a.γ ; en vertu du lemme 9 , la troisième et la quatrième restent bornées quand ν tend vers $+\infty$, car les formes intégrées sont indéfiniment différentiables au voisinage de $\overline{\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} A_\nu}$, et le volume de A_ν reste borné ; la première est non bornée en vertu de la conclusion i) ci-dessus.

8 . Séparation des ensembles analytiques .

a - Lemmes sur certains faisceaux analytiques .

Si A est un sous-ensemble analytique d'un espace analytique complexe X , on pose $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}/\mathcal{J}(A)$, $\mathcal{O}$ désignant le faisceau des germes de fonctions holomorphes dans X , $\mathcal{J}(A)$ le faisceau d'idéaux des éléments de $\mathcal{O}$ qui s'annulent sur A .

Lemme 10 .

Soient A et B deux sous-ensembles analytiques d'un espace analytique complexe X . On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O}_{A\cup B} \to \mathcal{O}_A \oplus \mathcal{O}_B \to \mathcal{O}_{(A\cap B)} \to 0 ,$$

où

$$\mathcal{O}_{(A\cap B)} = \mathcal{O}/I(A\cap B) ,$$

$I(A\cap B)$ *désignant le faisceau d'idéaux engendré dans* $\mathcal{O}$ *par* $\mathcal{J}(A)$ *et* $\mathcal{J}(B)$.

Preuve . La relation $\mathcal{J}(A\cup B) = \mathcal{J}(A) \cap \mathcal{J}(B)$ entraîne les inclusions

$$\mathcal{J}(A\cup B) \subset \mathcal{J}(A) \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(A\cup B) \subset \mathcal{J}(B) ,$$

d'où résulte l'existence d'homomorphismes naturels

$$\mathcal{O}_{A\cup B} \to \mathcal{O}_A \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{A\cup B} \to \mathcal{O}_B$$

et d'un monomorphisme

$$\alpha : \mathcal{O}_{A\cup B} \to \mathcal{O}_A \oplus \mathcal{O}_B$$

Des inclusions $\mathcal{J}(A) \subset I(A\cap B)$ et $\mathcal{J}(B) \subset I(A\cap B)$ résultent des épimorphismes naturels

$$\beta_A : \mathcal{O}_A \to \mathcal{O}_{(A\cap B)} \quad , \quad \beta_B : \mathcal{O}_B \to \mathcal{O}_{(A\cap B)} \ ;$$

l'homomorphisme

$$\beta : \mathcal{O}(A) \oplus \mathcal{O}(B) \to \mathcal{O}_{(A\cap B)}$$

défini par

$$\beta(\varphi_1 \oplus \varphi_2) = \beta_A(\varphi_1) - \beta_B(\varphi_2) \quad \text{pour tous} \quad \varphi_1 \in \mathcal{O}_A \quad , \quad \varphi_2 \in \mathcal{O}_B$$

est surjectif .

Soient $\varphi_1 = f_1 + \mathcal{J}(A) \in \mathcal{O}_A$ et $\varphi_2 = f_2 + \mathcal{J}(B) \in \mathcal{O}_B$, où $f_1 \in \mathcal{O}$ et $f_2 \in \mathcal{O}$; la condition $\beta(\varphi_1 \oplus \varphi_2) = 0$ équivaut à $f_1 - f_2 \in I(A\cap B)$ (c'est-à-dire $f_1 - f_2 \in \mathcal{J}(A) + \mathcal{J}(B)$) ou encore à l'existence de $g_1 \in \mathcal{J}(A)$ et de $g_2 \in \mathcal{J}(B)$ tels que $f_1 + g_1 = f_2 + g_2$. On voit donc que la condition $\beta(\varphi_1 \oplus \varphi_2) = 0$ équivaut à l'existence de $f \in \mathcal{O}$ tel que $\varphi_1 = f + \mathcal{J}(A)$ et $\varphi_2 = f + \mathcal{J}(B)$, c'est-à-dire à l'existence de

$$\varphi = f + \mathcal{J}(A) \cap \mathcal{J}(B) \in \mathcal{O}_{A\cup B}$$

tel que

$$\varphi_1 \oplus \varphi_2 = \alpha(\varphi) \ .$$

Notons que le faisceau $\mathcal{O}_{(A\cap B)}$ est porté par l'ensemble analytique $A \cap B$.

Lemme 11 .

Soit A un sous-ensemble analytique compact d'une variété analytique complexe X ; soit Ω^q le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré q sur X ; soit F_A la forme linéaire sur l'espace vectoriel $H^q(X,\Omega^q)$ définie par

$$F_A(\xi) = \int_A \xi \quad \text{pour tout} \quad \xi \in H^q(X,\Omega^q) \ .$$

Cette forme linéaire s'annule sur le noyau de l'homomorphisme

$$\gamma : H^q(X,\Omega^q) \to H^q(A, \mathcal{O}_A \otimes \Omega^q)$$

induit par l'homomorphisme de faisceaux

$$\Omega^q \to \mathcal{O}_A \otimes \Omega^q \ .$$

Preuve .

Soit $\mathcal{A}^{q,r}$ le faisceau des germes de formes différentielles indéfiniment différentiables et de type (q,r) dans X, et soit d_r la restriction de d'' à $\mathcal{A}^{q,r}$. Grâce au théorème de platitude de Malgrange [9], la résolution de Dolbeault

$$0 \to \Omega^q \to \mathcal{A}^{q,0} \xrightarrow{d_0} \dots \to \mathcal{A}^{q,q} \xrightarrow{d_q} \dots$$

de Ω^q fournit, tensorisée par $\mathcal{O}_A$, une résolution fine

$$0 \to \mathcal{O}_A \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^q \to \mathcal{O}_A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{q,0} \to \dots \to \mathcal{O}_A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{q,q} \xrightarrow{\delta_q} \dots$$

du faisceau $\mathcal{O}_A \otimes \Omega^q$; les homomorphismes

$$\mathcal{A}^{q,r} \to \mathcal{O}_A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{q,r}$$

commutent avec les différentielles des deux complexes ci-dessus. On en déduit

i) $H^q(A, \mathcal{O}_A \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^q)$ est canoniquement isomorphe au quotient $\operatorname{Ker} \delta_q / \operatorname{Im} \delta_{q-1}$ dans le complexe obtenu en prenant les sections sur X ;

ii) soit $\xi \in H^q(X, \Omega^q)$, et soit $\varphi \in H^0(X, \mathcal{A}^{q,q})$, vérifiant $d''\varphi = 0$, et telle que ξ corresponde à la classe de d''-cohomologie de φ par l'isomorphisme de Dolbeault ; l'hypothèse $\gamma(\xi) = 0$ signifie que φ peut s'écrire

$$\varphi = d''\alpha + \beta \quad , \quad \beta \in H^0(X, \mathcal{J}(A) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{A}^{q,q}) \ ;$$

sous cette hypothèse, on a donc

$$\int_A \xi = \int_A \varphi = \int_A d''\alpha + \int_A \beta$$

où $\int_A d''\alpha = 0$ pour une raison de type exposée dans 7. a. γ, et $\int_A \beta = 0$ parce que les coefficients de β s'annulent sur A.

Lemme 12 .

Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace analytique général (c'est-à-dire dont le faisceau de structure $\mathcal{H}$ possède éventuellement des éléments nilpotents) ; soit $(X, \mathcal{O})$ l'espace réduit associé, et soit q un nombre entier > 0. Si l'on a $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout faisceau $\mathcal{O}$-analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur X, on a aussi $H^q(X, \mathcal{G}) = 0$ pour tout faisceau $\mathcal{H}$-analytique cohérent $\mathcal{G}$ sur X.

Ce résultat est prouvé par la démonstration du théorème 3 de [5].

b - Séparation des ensembles analytiques par les classes de cohomologie.

Un espace analytique complexe X est dit q-complet s'il existe une fonction φ, fortement q-pseudoconvexe dans X, telle que les ensembles

$$B_c = \{x \; ; \; x \in X \, , \, \varphi(x) < c\} \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

soient relativement compacts.

Proposition 8.

Soient A et B deux sous-ensembles analytiques compacts d'une variété analytique (*). On suppose que A et B sont de dimension q en chacun de leurs points et n'ont pas de composante irréductible commune. Pour tout $\xi \in H^q(X,\Omega^q)$, et pour tout couple (λ,μ) de nombres réels, il existe un élément $\eta \in H^q(X,\Omega^q)$ tel que l'on ait

$$\int_A \eta = \lambda \int_A \xi \quad \text{et} \quad \int_B \eta = \mu \int_B \xi \, .$$

Preuve.

α) En tensorisant par Ω^q la suite exacte du lemme 10, nous obtenons la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{A\cup B} \otimes \Omega^q \to \mathcal{O}_A \otimes \Omega^q \oplus \mathcal{O}_B \otimes \Omega^q \to \mathcal{O}_{(A\cap B)} \otimes \Omega^q \to 0$$

d'où résulte la suite exacte

$$H^q(A\cup B \, , \, \mathcal{O}_{A\cup B} \otimes \Omega^q) \to H^q(A,\mathcal{O}_A \otimes \Omega^q) \oplus H^q(B,\mathcal{O}_B \otimes \Omega^q) \to$$
$$H^q(A\cap B \, , \, \mathcal{O}_{(A\cap B)} \otimes \Omega^q) \, .$$

(*) complexe X vérifiant $H^{q+1}(X,\mathcal{F}) = 0$ pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ dans X.

Le faisceau $\mathcal{O}_{(A\cap B)} \otimes \Omega^q$, restreint à $A \cap B$, est un faisceau analytique cohérent sur l'espace analytique général $(A\cap B\ ,\ \mathcal{O}_{(A\cap B)}\,|\,{A\cap B})$; en vertu de [11] , et éventuellement du lemme 12 , on a

$$H^q(A\cap B\ ,\ \mathcal{O}_{(A\cap B)} \otimes \Omega^q) = 0$$

car $A \cap B$ est de dimension $\leq q-1$; si X est algébrique, cette relation résulte aussi de l'existence d'un recouvrement de $A \cap B$ par q ouverts de Stein ; elle entraîne la surjectivité de l'application

$$H^q(A\cup B\ ,\ \mathcal{O}_{A\cup B} \otimes \Omega^q) \to H^q(A,\mathcal{O}_A \otimes \Omega^q) \oplus H^q(B,\mathcal{O}_B \otimes \Omega^q)\ .$$

β) En tensorisant par Ω^q la suite exacte

$$0 \to \mathcal{J}(A\cup B) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_{A\cup B} \to 0\ ,$$

nous obtenons la suite exacte

$$0 \to \mathcal{J}(A\cup B) \otimes \Omega^q \to \Omega^q \to \mathcal{O}_{A\cup B} \otimes \Omega^q \to 0\ ,$$

d'où résulte la suite exacte

$$H^q(X,\Omega^q) \to H^q(A\cup B\ ,\ \mathcal{O}_{A\cup B} \otimes \Omega^q) \to H^{q+1}(X,\ \mathcal{J}(A\cup B) \otimes \Omega^q)$$

où le dernier terme est nul par hypothèse. L'application

$$H^q(X,\Omega^q) \to H^q(A\cup B\ ,\ \mathcal{O}_{A\cup B} \otimes \Omega^q)$$

est donc surjective .

γ) En composant les applications dont α) et β) ont établi la surjectivité, on obtient une application surjective

$$\mathcal{C}:\ H^q(X,\Omega^q) \to H^q(A,\mathcal{O}_A \otimes \Omega^q) \oplus H^q(B,\mathcal{O}_B \otimes \Omega^q)\ .$$

Soit $\mathcal{C}(\xi) = \omega_1 \oplus \omega_2$; il existe $\eta \in H^q(X,\Omega^q)$, tel que $\mathcal{C}(\eta) = \lambda\, \omega_1 \oplus \mu\omega_2$; on a , grâce au lemme 11 ,

$$\int_A \eta = \lambda \int_A \xi \quad \text{et} \quad \int_B \eta = \mu \int_B \xi \ .$$

Remarque 1 .

Ce résultat entraîne la séparation des ensembles analytiques A et B par les éléments de $H^q(X,\Omega^q)$, pourvu qu'il existe un élément $\xi \in H^q(X,\Omega^q)$ tel que les nombres $\int_A \xi$ et $\int_B \xi$ ne soient pas tous deux nuls ; ceci est réalisé en particulier si X admet une métrique kählérienne, car il suffit alors de prendre pour ξ la classe définie par la puissance extérieure ω^q de la forme différentielle extérieure de type (1,1) associée à la métrique.

Remarque 2 . Vu le corollaire au théorème 14 de [1] , l'hypothèse concernant X est réalisée en particulier si X est une variété q-complète.

§ 4 . L'espace (topologique) des cycles positifs et la q-convexité .

9 . La topologie de cet espace .

Soit X une variété analytique complexe, de dimension n en chaque point. On désigne par $C^{r,s}(X)$ l'espace vectoriel des formes différentielles indéfiniment différentiables et de type (r,s) dans X;cet espace est muni de la topologie de la convergence uniforme, sur tout compact, des coefficients des formes et de leurs dérivées ; c'est un espace de Fréchet-Schwartz, et un espace de Montel.

Soit $K^{r,s}(X)$ l'espace vectoriel topologique des courants de type (r,s) à support compact dans X ; c'est le dual topologique de $C^{n-r,n-s}(X)$; c'est un espace de Montel complet. Une partie Σ de $K^{r,s}(X)$ est bornée si et seulement si elle vérifie les deux conditions (cf. [12] p. 90) :

i) il existe un compact de X contenant les supports de tous les éléments de Σ ;

ii) Σ est borné dans l'espace vectoriel topologique des courants à support quelconque .

Cette dernière condition peut s'exprimer aussi en disant que, pour toute $\varphi \in C^{n-r,n-s}(X)$, $< T , \varphi >$ reste borné quand T varie dans Σ (cf. [12] p. 72) .

Soit $S_k(X)$ la famille des sous-ensembles analytiques compacts de X , de dimension k en chacun de leurs points. On a une application

$$i : S_k(X) \to K^{n-k,n-k}(X)$$

définie par

$$< i(A),\varphi > = \int_A \varphi \quad \text{pour tous} \quad A \in S_k(X) \quad \text{et} \quad \varphi \in C^{k,k}(X) .$$

Soit $C_k(X)$ le groupe abélien libre engendré par les éléments de $S_k(X)$; l'application i se prolonge en une application linéaire

$$\hat{i} : C_k(X) \to K^{n-k,n-k}(X) ;$$

pour tous $A \in C_k(X)$ et $\varphi \in C^{k,k}(X)$, on pose

$$\int_A \varphi = < \hat{i}(A) , \varphi > .$$

Tout élément A de $C_k(X)$ possède une expression

$$A = \sum_{i\in I} n_i A_i \quad , \quad n_i \in \mathbb{Z} \quad , \quad A_i \in S_k(X) \quad ;$$

une telle expression est unique si on lui impose les conditions :

i) A_i irréductible pour tout $i \in I$,

ii) $A_i \neq A_j$ pour $i \neq j$;

on l'appellera alors expression canonique de A , et l'ensemble $|A| = \bigcup_{i\in I} A_i$ sera appelé support de A .

On désignera par $C_k^+(X)$ l'ensemble des éléments A de $C_k(X)$ de la forme

$$A = \sum_{i\in I} n_i A_i \quad , \quad n_i \in \mathbb{N}^* \quad , \quad A_i \in S_k(X) .$$

Lemme 13 .

L'application $\hat{\imath}$ est injective; pour tout $A \in C_k(X)$, $|A|$ est le support du courant $\hat{\imath}(A)$.

Preuve .

L'expression canonique de tout élément A de $C_k(X)$ s'écrit de manière unique $A = A' - A''$, avec $A' \in C_k^+(X)$ et $A'' \in C_k^+(X)$. On a $|A| = |A'| \cup |A''|$.

Comme $|A'| \neq |A''|$, l'un des deux ensembles $|A'|$ et $|A''|$ est non vide ; supposons par exemple $|A'| \neq \phi$; soit x un point de $|A'|$ vérifiant $x \notin |A''|$; soit $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de coordonnées holomorphes dans un voisinage ouvert U de x vérifiant $\bar{U} \cap |A''| = \phi$; soit ρ une fonction indéfiniment différentiable dans X , à valeurs réelles ≥ 0 , à support compact dans U ; soit

$$\varphi = \rho \, (i \sum_{1 \leq j \leq n} dz_j \wedge d\bar{z}_j)^k \quad ;$$

on a

$$\int_{A'} \varphi > 0 \quad \text{et} \quad \int_{A''} \varphi = 0 \quad ,$$

d'où

$$\int_A \varphi > 0 \, .$$

Ceci démontre que $\hat{\imath}$ est injective et aussi que x appartient au support du courant $\hat{\imath}(A)$.

On a donc

$$|A'| \cup |A''| - |A'| \cap |A''| \subset \operatorname{supp} \hat{\imath}(A) \subset |A| \quad ;$$

comme la fermeture du premier ensemble est $|A'| \cup |A''| = |A|$, on a $\operatorname{supp} \hat{\imath}(A) = |A|$.

Vu le lemme 12 , on convient d'identifier tout élément A de $C_k(X)$ à son image $\hat{\imath}(A)$, de considérer $C_k(X)$ (resp. $C_k^+(X)$) comme sous-espace de $K^{n-k,n-k}(X)$, de le munir de la topologie induite par celle de $K^{n-k,n-k}(X)$, et de dire qu'une partie de $C_k^+(X)$ est bornée si c'est une partie bornée de $K^{n-k,n-k}(X)$.

Lemme 14 .

Soit Σ une partie de $C_k^+(X)$. Supposons qu'il existe un compact K de X tel que $|A| \subset K$ pour tout $A \in \Sigma$. Si l'on a $\sup_{A\in\Sigma} \mathrm{vol}(A) < +\infty$ pour le choix d'une métrique hermitienne sur X , la même condition est réalisée pour toute autre métrique hermitienne sur X .

C'est une conséquence immédiate du lemme 9 , où l'on remplace φ par β^q , β étant la forme différentielle extérieure d'une seconde métrique hermitienne sur X .

Proposition 9 .

Une partie Σ de $C_k^+(X)$ est bornée si et seulement si elle vérifie les conditions :

i) il existe un compact K de X tel que $|A| \subset K$ pour tout $A \in \Sigma$;

ii) pour toute métrique hermitienne sur X , $\sup_{A\in\Sigma} \mathrm{vol}(A) < +\infty$.

Preuve .

L'ensemble des conditions i) et ii) relatives à Σ équivaut, vu le lemme 14 , à l'ensemble de la condition i) et de la condition

iii) pour toute $\varphi \in C^{k,k}(X)$, il existe un nombre réel $c'(\varphi)$ tel que l'on ait

$$\left|\int_A \varphi\right| \leq c'(\varphi) \qquad \text{pour tout } A \in \Sigma \ .$$

Vu la caractérisation des bornés de $K^{n-k,n-k}(X)$ rappelée ci-dessus, l'ensemble des conditions i) et iii) signifie que Σ est borné .

Remarque .

Si $k = 0$, $\mathrm{vol}(A)$ est la somme des multiplicités des points de A .

10 . Domaines holomorphiquement q-convexes .

Le sous-espace

$$Z^{r,s}(X) = \{\varphi \; ; \; \varphi \in C^{r,s}(X) \; , \; d''\varphi = 0\}$$

de $C^{r,s}(X)$ est fermé ; c'est donc encore un espace de Fréchet-Schwartz et un espace de Montel. L'application linéaire naturelle

$$j : K^{n-r,n-s}(X) \to (Z^{r,s}(X))'$$

de $K^{n-r,n-s}(X)$ dans le dual topologique $(Z^{r,s}(X))'$ de $Z^{r,s}(X)$ est surjective et continue .

Définition .

Soit Y un ouvert relativement compact d'une variété analytique complexe X . Nous dirons que Y est holomorphiquement k-convexe si les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Σ *est une partie bornée de* $C_k^+(Y)$.

ii) $j(\Sigma)$ *est une partie bornée de* $(Z^{k,k}(Y))'$ *et il existe sur* X *une métrique hermitienne telle que* $\sup_{A\in\Sigma} \mathrm{vol}(A) < +\infty$.

Remarque 1 .

Si X admet une métrique kählérienne, la condition relative au volume est redondante : elle est certainement réalisée si $j(\Sigma)$ est une partie bornée de $(Z^{k,k}(Y))'$.

Remarque 2 .

En remplaçant $C_k^+(X)$ par $S_k(X)$, on obtient une notion plus faible ; nous ne savons pas si cette notion est strictement plus faible.

Remarque 3 .

Pour que Y soit holomorphiquement k-convexe, il faut et il suffit que la condition ii) de la Définition ci-dessus entraîne l'existence d'un compact K de Y tel que $|A| \subset K$ pour tout $A \in \Sigma$.

Lemme 15 .

Soit X une variété analytique complexe fortement q-pseudoconvexe, c'est-à-dire sur laquelle xiste une fonction φ indéfiniment différentiable, vérifiant les conditions :

i) φ *est fortement q-pseudoconvexe hors d'un compact K de X ;*

ii) *pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble*

$$B_c = \{x \; ; \; x \in X \; , \; \varphi(x) < c\}$$

est relativement compact dans X .

Soit $c_o = \sup_{x \in K} \varphi(x)$. Pour tout $k > q$ et tout $A \in C_k^+(X)$, on a $|A| \subset \hat{K} = \overline{B}_{c_o}$.

Preuve .

Supposons qu'il existe un élément A de $S_k(X)$, qui ne soit pas contenu dans $\hat{K}$, Soit $x_o \in A$, tel que

$$\varphi(x_o) = \sup_{x \in A} \varphi(z) .$$

Soit $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de coordonnées dans un voisinage U de x_o , s'annulant au point x_o , et tèl que la restriction de φ au disque

$$D_{n-q} = \{z \; ; \; z \in U \; , \; z_{n-q+1} = \ldots = z_n = 0\}$$

soit fortement plurisousharmonique .

L'ensemble $B = A \cap U \cap D_{n-q}$ est analytique dans U , et de dimension ≥ 1 au point x_o ; la restriction de φ à B est fortement sousharmonique, ce qui contredit l'existence d'un maximum au point intérieur x_o .

Corollaire .

Toute variété analytique complexe fortement q-pseudoconvexe est holomorphiquement k-convexe pour $k > q$.

Théorème 4 .

Tout sous-ensemble ouvert strictement q-pseudoconvexe d'une variété analytique complexe est holomorphiquement k-convexe pour tout $k \geq q$.

Preuve .

Pour $k > q$, la conclusion résulte du corollaire ci-dessus. Soit Y un sous-ensemble ouvert strictement q-pseudoconvexe d'une variété analytique complexe X . Soit Σ un sous-ensemble de $C_q^+(Y)$, tel que :

i) il existe sur X une métrique hermitienne telle que

$$\sup_{A \in \Sigma} \mathrm{vol}(A) < +\infty$$

ii) pour toute $\varphi \in Z^{q,q}(Y)$, on a

$$\sup_{A \in \Sigma} \left| \int_A \varphi \right| < +\infty \quad .$$

Soit $(K_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite de compacts de Y tels que

$$\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} K_\nu = Y \quad \text{et} \quad K_\nu \subset \mathring{K}_{\nu+1} \quad \text{pour tout} \quad \nu \in \mathbb{N} \quad .$$

Il existe un indice ν_o tel que l'on ait

$$|A| \subset K_{\nu_o} \qquad \text{pour tout} \quad A \in \Sigma \quad .$$

En effet, si un tel indice n'existe pas, on peut choisir, pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, un élément A_ν de Σ tel que $|A_\nu| \not\subset K_\nu$; il existe alors un point x de bY , adhérent à la suite d'ensembles $|A_\nu|$; la démonstration de la Proposition 7 reste valable quand on y remplace les ensembles analytiques A_ν par des éléments de $C_q^+(Y)$, et la conclusion qu'elle fournit est incompatible avec la condition ii) .

11 . Séparation de $C^+_k(X)$.

Soit X une variété analytique complexe, et soit A un élément de $C^+_k(X)$, ayant pour expression canonique

$$A = \sum_{i \in I} n_i A_i \quad ;$$

pour tout $\xi \in H^k(X,\Omega^k)$, on pose naturellement

$$\int_A \xi = \sum_{i \in I} x_i \int_{A_i} \xi \quad .$$

Définition .

Nous dirons que $C^+_k(X)$ est holomorphiquement séparable si, pour tout couple (A,B) d'éléments différents de $C^+_k(X)$, il existe un élément $\xi \in H^k(X,\Omega^k)$ tel que

$$\int_A \xi \neq \int_B \xi \quad .$$

Théorème 5 .

Soit X une variété analytique complexe vérifiant les conditions : i) $H^{q+1}(X,\mathcal{F}) = 0$ pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ dans X .
ii) pour tout $A \in C^+_q(X)$, il existe un $\xi \in H^q(X,\Omega^q)$ tel que $\int_A \xi \neq 0$.

Alors $C^+_q(X)$ est holomorphiquement séparable .

Preuve .

Soient A et B deux éléments différents de $C^+_q(X)$; l'élément $A-B$ de $C_q(X)$ peut encore s'écrire $A'-B'$, où A' et B' sont des éléments de $C^+_q(X)$ dont les expressions canoniques

$$A' = \sum_{i \in I} m_i A'_i \quad \text{et} \quad B' = \sum_{j \in J} n_j B'_j$$

sont telles que $A'_i \neq B'_j$ pour tous $i \in I$ et $j \in J$. Soit $A'' = \bigcup_{i \in I} A'_i$ et $B'' = \bigcup_{j \in J} B'_j$. Appliquons la Proposition 8 aux ensembles analytiques A'' et B'' , avec une classe ξ telle que $\int_{B'} \xi \neq 0$, $\lambda = 0$ et $\mu = 1$. Nous obtenons un élément $\eta \in H^q(X,\Omega^q)$ tel que

$$\int_{A'} \eta = \sum_{i\in I} m_i \int_{A_i'} \eta = \lambda \sum_{i\in I} m_i \int_{A_i'} \xi = 0$$

et

$$\int_{B'} \eta = \sum_{j\in J} n_j \int_{B_j'} \eta = \sum_{j\in J} n_j \int_{B_j'} \xi = \int_{B'} \xi \neq 0 .$$

Alors

$$\int_B \eta - \int_A \eta = \int_{B'} \eta - \int_{A'} \eta = \int_{B'} \eta \neq 0 .$$

Remarque . L'hypothèse i) du théorème 5 est vérifiée en particulier si X est q-complète.

-=-=-=-=-=-=-=-

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDREOTTI et H. GRAUERT — Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes. Bull. Soc. Math. France 90 , 1962, p.193-259.-

[2] A. ANDREOTTI et F. NORGUET — Problème de Levi pour les classes de cohomologie. C.R. Acad. Sc. Paris 258, 1964, p. 778-781.-

[3] A. ANDREOTTI et F. NORGUET — Quelques propriétés de courants définis à l'aide de fonctions holomorphes. Anais Acad. Bras. de Ciencias.-

[4] H. GRAUERT — On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds. Annals of Math., 68, 1958, 460-472.-

[5] H. GRAUERT — Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Publications mathématiques de l'I.H.E.S. N° 5 , 1960 .-

[6] K. KODAIRA et G. de RHAM — Harmonic integrals, Lectures delivered of the Institute for Advanced Study, 1950, revised 1953. Princeton, Institute for Advanced Study, 1953, multigraphié.-

[7] P. LELONG — Les fonctions plurisousharmoniques. Ann. Ec. Norm. Sup. 62 , 1945, p. 301-338.-

[8] P. LELONG — Intégration sur un ensemble analytique complexe. Bull. Soc. Math. France, 85, 1957, p.239-262.-

[9] B. MALGRANGE — Systèmes différentiels à coefficients constants, Séminaire Bourbaki, 1962-1963, Exposé 246.-

[10] E. MARTINELLI — Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse, Memor. Accad. Ital. , t. 9 , 1938, 269-283.-

[11] H.J. REIFFEN — Prolongement de Riemann concernant les classes de cohomologie à supports compacts. C.R. Acad. Sci. Paris 259, 1964, 2333-2335.-

[12] L. SCHWARTZ — Théorie des distributions, tome I (seconde édition), Hermann, 1957.-

[13] W. STOLL — Normal families of non-negative divisors. Math. Zeitschr. 84, 1964, 154-218.-