

# RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

ALDO ANDREOTTI

FRANÇOIS NORGUET

## **Quelques propriétés de courants définis à l'aide de fonctions holomorphes**

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1966, tome 1*  
« Travaux de A. Andreotti et F. Norguet sur les espaces analytiques Q-pseudoconvexes »,  
, exp. n° 1, p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=RCP25\\_1966\\_\\_1\\_\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1966__1__A1_0)

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROPRIETES DE COURANTS DEFINIS  
A L'AIDE DE FONCTIONS HOLOMORPHES

par Aldo ANDREOTTI et François NORGUET

---

1. Soit  $\mathcal{H}(V)$  l'ensemble des fonctions holomorphes dans une variété analytique complexe connexe  $V$ , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de  $V$ . Soit  $\mathcal{D}'(V)$  l'espace vectoriel topologique des courants dans  $V$ .

Pour toute  $f \in \mathcal{H}(V) - \{0\}$ ,  $\log|f|$  est une fonction plurisousharmonique [1] dans  $V$ , donc est localement sommable dans  $V$ , et par conséquent définit un courant de degré zéro dans  $V$ , que l'on désignera encore par  $\log|f|$ .

Théorème 1.

L'application de  $\mathcal{H}(V) - \{0\}$  dans  $\mathcal{D}'(V)$ , qui à  $f$  associe  $\log|f|$ , est continue.

Preuve.

Ce théorème étant local, il suffit de le démontrer pour un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ .

a) Soit  $D'$  un domaine borné de  $\mathbb{C}^n$ ; pour toute fonction  $\varphi$  à valeurs complexes définie dans  $\bar{D}'$ , on pose

$$M(\varphi) = \sup_{z \in \bar{D}'} |\varphi(z)| .$$

Soit  $f$  une fonction holomorphe au voisinage de  $\bar{D}'$  ; soit  $\mathfrak{G}$  l'ensemble des fonctions  $g$  , holomorphes au voisinage de  $\bar{D}'$  , et vérifiant

$$|f(z) - g(z)| \leq \frac{1}{2} M(f) \quad \text{pour } z \in \bar{D}'$$

Alors :

i) pour tout  $z \in \bar{D}'$  , et tout  $g \in \mathfrak{G}$  , on a

$$|g(z)| \leq |f(z)| + |g(z) - f(z)| \leq \frac{3}{2} M(f) \quad ;$$

donc

$$M(g) \leq \frac{3}{2} M(f) .$$

ii) en un point  $z_0$  de  $\bar{D}'$  tel que  $|f(z_0)| = M(f)$  , on a , pour tout  $g \in \mathfrak{G}$  ,

$$\begin{aligned} M(f) = |f(z_0)| &\leq |g(z_0)| + |f(z_0) - g(z_0)| \\ &\leq |g(z_0)| + \frac{1}{2} M(f) , \end{aligned}$$

d'où

$$|g(z_0)| \geq \frac{1}{2} M(f) \quad ;$$

par conséquent la fonction nulle n'est pas limite de fonctions de  $\mathfrak{G}$  dans  $D'$  .

Soit  $K$  un compact contenu dans  $D'$  , et soit  $D$  un domaine vérifiant  $K \subset D \subset \subset D'$  , D'après le corollaire du Théorème 4 de [2] , il existe deux nombres  $a$  et  $\omega$  tels que l'on ait, pour toute boule  $B(M,R)$  , de centre  $M$  et de rayon  $R$  , contenue dans  $\bar{D}$  , et pour toute fonction  $g \in \mathfrak{G}$  ,

$$\lambda(\log|g| , M,R) \geq a + \omega \log R ,$$

en désignant par  $\lambda(\log|g| , M,R)$  la moyenne de  $\log|g|$  sur la sphère de centre  $M$  et de rayon  $R$  . En désignant par  $\beta_n$  l'élément de volume de  $\mathbb{R}^{2n}$  , on a donc

$$\begin{aligned} \int_{B(M,R)} \log |g| \cdot \beta_n &= \int_0^R \lambda(\log |g|, M, r) r^{2n-1} dr \\ &= \frac{1}{2n} \int_0^R \lambda(\log |g|, M, r) d(r^{2n}), \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{B(M,R)} \log |g| \cdot \beta_n \geq \frac{1}{2n} \int_0^R (a + \omega \log r) d(r^{2n})$$

et

$$(1) \quad \int_{B(M,R)} \log |g| \cdot \beta_n \geq R^{2n} (b + \theta \log R)$$

où  $b = \frac{1}{2n} (a - \frac{\omega}{2n})$  et  $\theta = \frac{\omega}{2n}$ .

b) Soit  $B$  le bord de  $D$ , et soit  $F = \{z ; z \in \bar{D}, f(z) = 0\}$  ; supposons  $F \cap D \neq \emptyset$  ; soit  $\sigma$  l'aire de  $F \cap D$ . Pour tout nombre réel  $\alpha > 0$ , on pose  $D_\alpha = \{z ; z \in D, d(z, B) > \alpha\}$ . Soient deux nombres réels  $\epsilon > 0$  et  $H > 0$ .

Soit un nombre réel  $\eta > 0$  tel que l'on ait  $K \subset D_\eta$ .

Soit  $A = \{z ; z \in \bar{D}, |f(z)| = 1\}$ .

Soit  $\delta$  un nombre réel  $> 0$  vérifiant

$$\delta \leq \frac{\eta}{2}, \quad \delta \leq \frac{1}{2} d(F, A) \quad \text{et} \quad -18 \left(\frac{72n}{\pi}\right)^{n-1} (n-1)! \delta^2 (b + \theta \log \delta) \sigma \leq \frac{\epsilon}{2H}.$$

Soient  $\rho = \frac{\delta}{\epsilon/\sqrt{2n}}$ ,

$$\Delta_\rho = \{z ; z \in D, d(z, F) \leq \rho, d(z, B) \geq 3\rho \sqrt{2n}\},$$

$$\Lambda_\rho = \Delta_\rho \cap \bar{D}_\eta = \{z ; z \in D, d(z, F) \leq \rho, d(z, B) \geq \eta\}.$$

Conformément au Théorème 3 de [2], soit  $(B(M_i, \delta))_{1 \leq i \leq N}$  un recouvrement de  $\Delta_\rho$  par des boules de rayon  $\delta$ , centrées aux points  $M_i$  de  $F$ ,

$1 \leq i \leq N$ , avec

$$N \leq 3^{2n} \frac{(n-1)!}{(\pi \rho^2)^{n-1}} \sigma .$$

Soit  $I$  l'ensemble des  $i$  vérifiant  $1 \leq i \leq N$  et tels que l'on ait  $B(M_i, \delta) \cap \Lambda_\rho \neq \emptyset$ ;  $(B(M_i, \delta))_{i \in I}$  est un recouvrement de  $\Lambda_\rho$ .

Pour tout  $i \in I$ , il existe  $x \in \Lambda_\rho$  tel que

$$d(M_i, x) \leq \delta \leq \frac{\eta}{2};$$

comme  $d(x, B) \geq \eta$ , on a

$$\eta \leq d(x, B) \leq d(x, M_i) + d(M_i, B) \leq \frac{\eta}{2} + d(M_i, B)$$

et par conséquent

$$d(M_i, B) \geq \frac{\eta}{2} \geq \delta ,$$

d'où

$$M_i \in F \cap \overline{D}_{\frac{\eta}{2}} \quad \text{et} \quad B(M_i, \delta) \subset \overline{D} .$$

c) Soit un nombre réel  $\chi$  vérifiant  $0 \leq \chi \leq \frac{1}{2} M(f)$  et tel que les conditions

$g \in \mathcal{G}$  et  $|f(z) - g(z)| \leq \chi$  pour tout  $z \in \overline{D}$  entraînent

i)  $G = \{z ; z \in \overline{D}, g(z) = 0\} \subset \{z ; z \in \overline{D}, d(z, F) \leq \rho\}$ .

ii)  $|g(z)| \leq 1$  pour  $z \in \overline{D}$  et  $d(z, F) \leq \frac{1}{2} d(F, A)$

iii)  $|\log |f(z)| - \log |g(z)|| \leq \frac{\epsilon}{2VH}$  pour tout  $z \in D_\eta - \Lambda_\rho$ ,

$V$  désignant le volume de  $D_\eta$ .

La première condition peut être réalisée grâce au théorème de Rouché ; la seconde, grâce au principe du maximum ; la troisième, parce que  $F$  est à distance positive de  $D_\eta - \Lambda_\rho$ .

Soit une fonction  $g \in \mathfrak{F}$ , vérifiant  $|f(z) - g(z)| \leq \chi$  pour tout  $z \in \bar{D}'$ . On a

$$G \cap \bar{D}_\eta \subset \{z ; z \in \bar{D}, d(z, F) \leq \rho, d(z, B) \geq \eta\} = \Lambda_\rho$$

et

$$B(M_i, \delta) \subset \{z ; z \in \bar{D}, |g(z)| \leq 1\}.$$

En posant  $U = \bigcup_{i \in I} B(M_i, \delta)$ , on a donc

$$G \cap \bar{D}_\eta \subset \Lambda_\rho \subset U \subset \{z ; z \in \bar{D}, |g(z)| \leq 1\}.$$

Dans  $\Lambda_\rho$ , on a  $\log |g| < 0$ . Donc

$$\int_{\Lambda_\rho} |\log |g|| \beta_n = \int_{\Lambda_\rho} -\log |g| \beta_n \leq \sum_{i \in I} \int_{B(M_i, \delta)} -\log |g| \beta_n.$$

Or, d'après l'inégalité (1), on a

$$\int_{B(M_i, \delta)} \log |g| \beta_n \geq \delta^{2n} (b + \theta \log \delta);$$

par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_\rho} |\log |g|| \beta_n &\leq -N \delta^{2n} (b + \theta \log \delta) \\ &\leq -3^{2n} \frac{(n-1)!}{(\pi \rho^2)^{n-1}} \delta^{2n} (b + \theta \log \delta) \sigma \end{aligned}$$

$$\leq -9 \left(\frac{72n}{\pi}\right)^{n-1} (n-1)! \delta^2 (b + \theta \log \delta) \sigma \leq \frac{\epsilon}{4H}.$$

d) Soit  $\varphi$  une fonction continue dans  $D$ , dont le support est contenu dans  $K$ , et vérifiant  $M(\varphi) \leq H$ . On a

$$\int_D \varphi(\log |f| - \log |g|) \beta_n = \int_{D_\eta} \varphi(\log |f| - \log |g|) \beta_n = \\ \int_{\Lambda_\rho} \varphi \log |f| \beta_n - \int_{\Lambda_\rho} \varphi \log |g| \beta_n + \int_{D_\eta - \Lambda_\rho} \varphi(\log |f| - \log |g|) \beta_n .$$

Donc

$$\left| \int_D \varphi(\log |f| - \log |g|) \beta_n \right| \leq M(\varphi) \left[ \int_{\Lambda_\rho} |\log |f|| \beta_n + \int_{\Lambda_\rho} |\log |g|| \beta_n + \int_{D_\eta - \Lambda_\rho} |\log |f| - \log |g|| \beta_n \right] \\ \leq H \left( \frac{\epsilon}{4H} + \frac{\epsilon}{4H} + \frac{\epsilon}{2H} \right) = \epsilon .$$

2. Pour toute  $f \in \mathcal{H}(V)$ , la forme différentielle holomorphe  $\frac{df}{f}$  est localement sommable dans  $V$ , donc définit dans  $V$  un courant de degré 1 qu'on désignera encore par  $\frac{df}{f}$ ; ce courant est égal à  $2d' \log |f|$ , où  $\log |f|$  est un courant défini plus haut.

Le courant  $\frac{i}{\pi} d'd'' \log |f| = \frac{1}{2i\pi} d \frac{df}{f}$  (où  $\frac{df}{f}$  est le courant défini ci-dessus) est le courant d'intégration sur le diviseur de  $f$ .

Comme les opérateurs  $d, d'$  et  $d''$  sont continus pour la topologie des courants, on déduit immédiatement du Théorème 1 :

Corollaire 1 .

L'application de  $\mathcal{H}(V) - \{0\}$  dans  $\mathcal{D}'(V)$ , qui à  $f$  associe  $\frac{df}{f}$ , est continue .

Corollaire 2 .

L'application de  $\mathcal{H}(V) - \{0\}$  dans  $\mathcal{D}'(V)$ , qui à  $f$  associe le courant d'intégration sur le diviseur de  $f$ , est continue .

BIBLIOGRAPHIE

-----

- [1] P. LELONG            Les fonctions plurisousharmoniques. Ann. Ec. Norm. Sup.  
t 62 , pp. 301-338 , 1945 .
- [2] P. LELONG            Propriétés métriques des variétés analytiques complexes  
définies par une équation. Ann. Ec. Norm. Sup. , t 67 ,  
pp. 393-419 , 1950 .

-----