Frédéric Praslon

Continuités et ruptures dans la transition terminale S / DEUG sciences en analyse : le cas de la notion de dérivée et son environnement

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1999-2000, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , exp. n° 3, p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1999-2000___3_A3_0>

Séminaire du Laboratoire de Didactique des Mathématiques
9 Juin 1999

Frédéric Praslon
Université de Marne La Vallée & **DIDIREM (Paris 7)**

CONTINUITES ET RUPTURES DANS LA TRANSITION TERMINALE S / DEUG SCIENCES EN ANALYSE : Le cas de la notion de dérivée et son environnement.

I/ INTRODUCTION.

La massification actuelle de l'enseignement supérieur, qui s'accompagne d'exigences vis à vis de l'université, en particulier en termes d'adaptation au nouveau public d'étudiants, fait aujourd'hui de cette traditionnelle question de la transition institutionnelle entre le secondaire et le supérieur un problème plus crucial que par le passé. Il s'agit d'une préoccupation qui est d'ailleurs commune à beaucoup de pays, notamment d'Europe occidentale.
Cette question revêt différentes facettes, celle du statut et de la vie sociale de l'étudiant, par exemple, outre les niveaux d'ordre « académique », relatifs aux contenus et aux formes d'accès aux connaissances, aux modes d'évaluation, aux rapports enseignants / enseignés, en évolution entre lycée et université, et sources de difficultés nouvelles.
Pour notre recherche, nous avons fait le choix de l'approche didactique d'un domaine plus particulier des Mathématiques, l'analyse, qui joue un rôle clef dans la transition terminale S / DEUG Sciences, notamment parce qu'il s'agit d'un domaine déjà largement exploré au lycée (contrairement à celui de l'algèbre). A l'intérieur de ce domaine, nous avons fait le choix pour notre étude d'un concept plus particulier, mais fondamental, celui de la dérivée, pris dans son environnement. Ce thème est au cœur de l'enseignement de l'analyse, tant au lycée (classes de première et de terminale S) qu'en première année de DEUG Sciences, et se prête donc à une étude comparée assez fine, en vue de saisir les changements de rapport au savoir liés à la transition entre ces deux niveaux d'enseignement.
L'objectif est à la fois de *mieux comprendre* cette évolution, de voir comment elle est *perçue* et *gérée* par l'institution universitaire, et de construire aussi des situations d'enseignement permettant de *sensibiliser* les acteurs aux ruptures rencontrées et de les *travailler.*

Après avoir précisé les points de départ de cette recherche (II), nous indiquons nos principales références théoriques (III), nos hypothèses et notre méthodologie générale de travail (IV). Nous présentons ensuite les résultats d'ensemble obtenus, concernant l'étude des rapports à la dérivée au lycée et en DEUG Sciences (V), puis celle des rapports *personnels* des étudiants de DEUG Sciences à cette notion de dérivée (VI).
Enfin, la question de la gestion des ruptures en cours de première année d'université, abordée via la mise au point et l'exploitation d'*ateliers* en petits groupes, est décrite avec les résultats correspondants (VII).
Nous concluons cet article en indiquant différents prolongements ou perspectives que nous entrevoyons pour notre recherche, et en décrivant de manière très succincte une réalisation pédagogique qui a déjà été menée en contrepoint de ce travail (VIII).

II/ POINTS DE DEPART DE CETTE RECHERCHE.

1°) Une expérience personnelle d'enseignant à l'université de Marne La Vallée.

Ce travail de recherche, finalisé par une thèse de Doctorat en Didactique des Mathématiques (F.Praslon, janvier 2000, université Paris 7), prend sa source dans notre expérience de terrain en tant qu'enseignant en DEUG Sciences à l'université de Marne La Vallée depuis 1992, et les difficultés d'adaptation, en augmentation régulière durant cette période, que nous avons pu constater chez les étudiants à leur entrée en première année de cette formation.
A la base de bon nombre de ces difficultés, il nous semblait notamment détecter l'existence d'attentes *non fondées* des enseignants du supérieur, vis à vis des néo-bacheliers, en termes de connaissances et plus précisément de savoir-faire, au regard des restrictions drastiques, tout particulièrement au niveau des pratiques, des textes de programmes de lycée.
Au fameux discours selon lequel : *« les étudiants devraient savoir (faire) ceci, cela en sortant de terminales S... »* semble avoir peu à peu succédé aujourd'hui l'idée plus pessimiste encore qu'*« ils ne savent plus (faire) grand chose en arrivant à l'université »*.
Il nous semblait intéressant de soumettre ce jugement péremptoire au crible d'une analyse des pratiques mathématiques effectives au lycée et à l'université, visant à jauger de façon précise l'importance de sauts réels entre les deux institutions, selon nous souvent sous-estimés, voire ignorés.

2°) Un mémoire de D.E.A.

Nous avons eu l'occasion, dans ce mémoire intitulé : *« Etude de l'aspect méta dans un cours de DEUG A sur la dérivée à l'université de Lille »*, d'analyser le contenu du discours de l'enseignant (M.Rogalski) lors d'un cours en amphithéâtre (enregistré sur cassette audio), et de mesurer la façon dont il était reçu par le public d'étudiants, à la lecture de leurs notes de cours, et de fiches de synthèse qu'ils avaient à réaliser en séance de travaux dirigés.

Dans ce cours, constitué de deux séances de deux heures chacune, l'enseignant expose notamment différents préceptes et méthodes qualitatifs et assez universels en analyse, très emblématiques de la pratique de cette discipline au niveau de l'enseignement supérieur, en lien avec des niveaux de *généralité* et de *formalisation* plus élevés.
Parmi les méthodes exposées, citons celle qui consiste à *transformer* un problème, notamment à le ramener à un cas plus simple (changements de fonction, de variable, comparer f-g à 0 plutôt que comparer f et g entre elles...), et les méthodes de *raisonnement* (par l'absurde, par contrapposée, par condition suffisante, notamment pour les démonstrations formelles en ε, avec utilisation des inégalités triangulaires).
Parmi les préceptes évoqués par l'enseignant, on peut citer : « Quand on contrôle la dérivée, on contrôle la fonction ; la réciproque est fausse » ou encore : « Par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges », voire certaines considérations sur la nécessaire distinction entre « propriété locale » et « propriété globale ».

A la lecture des notes de cours et surtout des fiches de synthèse des étudiants, on s'aperçoit nettement, au-delà des nombreux contresens et imprécisions commis[1], que la finalité d'un tel enseignement ne leur est pas encore accessible. Notons d'ailleurs que l'essentiel de la teneur de ce cours (à la fois qualitativement et quantitativement) se situe davantage au niveau du discours *oral* méta-mathématique[2] de l'enseignant qu'au niveau de ce qu'il *écrit* au tableau. Or ce discours, à la lecture des notes de cours des étudiants, semble perdu au moins en partie, puisqu'on constate qu'ils ne notent en général *que* ce qui figure au tableau, c'est-à-dire généralement des énoncés et des algorithmes assez peu commentés.
Théoriquement possible compte tenu de leurs connaissances générales, cet enseignement apparaît cependant prématuré en début de DEUG Sciences, car il induit un saut qualitatif trop important dans le champ de l'analyse. Ce mémoire de D.E.A posait ainsi déjà le problème du *rapport* entre deux cultures bien distinctes.

III/ REFERENCES THEORIQUES UTILISEES POUR CETTE RECHERCHE.

1°) Cadre théorique global : l'approche anthropologique d'Y.Chevallard.

Cette théorie anthropologique du didactique est en effet propre à caractériser les transitions institutionnelles (en général) en insistant sur la *relativité* des objets de connaissance aux institutions dans lesquels ils se situent : chaque institution se caractérise par une certaine *culture*, traduite par des *pratiques* dont découlent les rapports personnels aux concepts.
Ces rapports émergent donc de systèmes de pratiques, organisés selon Y.Chevallard en praxéologies, constituées de *tâches*, *techniques* (au sens large), *technologies* (discours sur la technique) et *théories* (technologies de ces technologies). Caractériser les nouveaux rapports aux concepts dans la transition revient alors à analyser l'évolution de ces praxéologies. En particulier, dans chaque institution, l'avancée du savoir s'accompagne nécessairement de la *routinisation* de certaines tâches et techniques destinées ensuite à devenir *transparentes*, aller de soi, ou encore, selon les termes d'Y.Chevallard, à être « *naturalisées* ».

En référence à cette approche, qui nous permet d'avoir un regard original sur cette question de la transition terminale S / DEUG Sciences, il nous faut donc arriver à identifier et à qualifier de façon précise les systèmes de pratiques respectifs dans les deux institutions, du lycée et de l'université, au moyen d'un *outil méthodologique* ad hoc.
Un des avantages de la théorie d'Y.Chevallard tient dans le fait qu'elle rend à la dimension technique, souvent péjorée dans l'analyse didactique, sa véritable place.

2°) Cadres théoriques plus spécifiques par rapport à cette recherche.

a) Les travaux de D.Tall et Ed.Dubinsky(aspects cognitifs).

[1] Les préceptes ci-dessus évoqués sont notamment exprimés dans un certain « langage de l'expert » qui n'est pas toujours compris par les étudiants. Par exemple, la formule : « *Par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges* » est interprétée par eux de diverses manières (« *On ne peut pas travailler avec des inégalités strictes* » ou « *Les inégalités strictes ne permettent pas de passer aux limites* »...).
[2] C'est-à-dire « au dessus » du discours strictement mathématique.

La distinction introduite par D.Tall et Ed.Dubinsky entre processus et objets, ainsi que celle effectuée par A.Sfard entre stade opérationnel et stade structurel, sont notamment utiles à décrire les sauts conceptuels rencontrés en DEUG Sciences, liés au monde fonctionnel.

b) Les travaux d'A.Robert (aspects épistémologiques et cognitifs).

Selon A.Robert, la référence aux connaissances de l'expert, marquées par un degré élevé d'*organisation active* et *individuelle*, est propre à saisir l'évolution nécessaire du rapport au savoir à l'entrée à l'université. Cela induit aussi la nécessité d'une certaine flexibilité cognitive, par ailleurs également évoquée par Tall et Dreyfus, et caractérisée par des mises en relation, des questionnements personnels, une utilisation plus systématique de repères, d'exemples ou de connaissances théoriques structurées selon le cas, une capacité à combiner ou à répéter des arguments, etc.
A. Robert introduit trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances (*technique*, *mobilisable* et *disponible*) qui permettent de quantifier ce besoin nouveau en termes de flexibilité cognitive.
Elle définit par ailleurs ce qu'elle appelle des niveaux de conceptualisation (« paliers correspondant à une organisation cohérente d'une partie du champ conceptuel : objets mathématiques présentés d'une certaine façon, théorèmes introduits, méthodes en découlant, et problèmes qui leur sont associés »), qui apparaissent en évolution dans la transition entre terminale S et DEUG Sciences.
Enfin, A.Robert isole des difficultés d'apprentissage propres à certains concepts introduits à l'université, liées aux aspects formalisateur, unificateur, généralisateur et simplificateur[3] de ces concepts (exemple : la notion formelle de limite en analyse, ou les différents concepts introduits en algèbre linéaire).

c) Les notions de cadre, de registre, et de point de vue.

Les notions de cadre (R.Douady), de registre (R.Duval), de point de vue (A.Robert, I.Tenaud, C.Castela, M.Rogalski) permettent de penser certains *niveaux* de cette flexibilité cognitive nouvelle, qui devient nécessaire au travail mathématique dès la première année de DEUG Sciences.

d) Des travaux plus spécifiques de la didactique de l'analyse.

Ils sont divers et variés. Il convient d'abord de citer ici les travaux de B.Cornu et A.Sierpinska concernant certains obstacles de nature épistémologique (notions de *limite* et de *tangente*, en particulier). M.Artigue décrit notamment l'*évolution* nécessaire des modes de pensée et de raisonnement en analyse, et M.Legrand évoque la *reconstruction* des rapports à l'algébrique en vue de l'apprentissage de cette discipline au niveau de l'enseignement supérieur. M.Schneider nous dévoile des problèmes liés à la *coexistence* entre une analyse rigoureuse et une analyse plus intuitive.

---

[3] Concepts « F.U.G.S. ». L'aspect « simplificateur » des constructions théoriques envisagées, qui se juge par les économies de traitement qu'elles entraînent, reste surtout apparent à l'expert, et coïncide au contraire à une perte de lisibilité initiale pour l'étudiant néophyte.

e) Les travaux sur les « méthodes » de M.Rogalski.

M.Rogalski analyse cette question des méthodes en termes de « recherche de stratégie préalable, guidée par métarègles », de « classement du problème », de « choix tactiques et techniques »...
Il affirme également le rôle accru, dans les débuts de l'université, de la mémorisation pour identifier, re-connaître des formes standards, afin de réaliser certaines tâches.

IV/ HYPOTHESES ET METHODOLOGIE GENERALES DE TRAVAIL.

1°) Hypothèses de recherche.

La considération des références théoriques précédentes, comme notre expérience antérieure sur ce problème de la transition terminale S / DEUG Sciences nous ont amené à dégager certaines hypothèses de travail :

- Il semble y avoir, dans cette transition, coexistence de ruptures fortes et de microruptures d'ordres *technique* et *conceptuel*, ces dernières pouvant être présentes au sein des praxéologies perçues par l'institution universitaire comme les plus « ordinaires », les plus « transparentes ». Ce phénomène nous paraît d'ailleurs lié à une *sous-estimation* du rôle de la routinisation des tâches par les acteurs de cette institution.

- La transition ne se réduit pas, selon nous, au passage d'une analyse *« intuitive »* à une analyse *« formalisée »*, même si cette composante est présente. Des difficultés plus *transversales* (sollicitation de niveaux d'autonomie plus élevés pour la réalisation de tâches, travail sur des objets généraux, un monde fonctionnel en évolution...) pèsent au moins aussi lourdement sur cette transition.

- L'entrée, au niveau du supérieur, dans l'analyse démontrée, avec une évolution évidente de la « dialectique » cours-exercices, paraît une source de difficultés nouvelles, et pas seulement parce qu'elle implique des exigences nouvelles au niveau du raisonnement.
  Au classique schéma « théorème-application », avec une optique d'opérationnalité qui guide l'enseignement des Mathématiques au lycée, se substitue en DEUG Sciences une construction et des *finalités* plus complexes à saisir, plus délicates à décrypter, induisant un *relief* nouveau. Ainsi, les *démonstrations*, d'intérêt et de difficulté variables, nous font rentrer au cœur du fonctionnement mathématique et des connections qui se tissent entre les divers concepts. Leur présence dans le cours ne relève donc pas d'un simple « souci d'esthétique » ; elles servent à rendre *intelligibles* les Mathématiques (réflexion nouvelle, par exemple, sur le *rôle des hypothèses* dans un énoncé).
  Il convient de même, désormais, de comprendre le rôle assez *variable* des énoncés vis à vis de l'usage *plus ou moins* opérationnel qu'on peut en faire. Par exemple, le critère de Cauchy, assez peu utile lors de la pratique des exercices, sert surtout à *l'avancement du*

cours, et va permettre, par exemple, d'établir que toute série absolument convergente est convergente, ce qui constitue en revanche un critère très opérationnel.

- Un besoin nouveau apparaît selon nous en DEUG Sciences au niveau des « méthodes ». Ces dernières sont d'ailleurs à distinguer des « *points-méthodes* » qu'on peut rencontrer dans des manuels de lycée, et qui ne sont en général que des *plans d'action* à usage très *local*, donnés « clef en main » aux élèves. L'idée de méthode sous-entend au contraire celle d'un *choix personnel* à effectuer, d'une démarche *réflexive* et d'une *distanciation* par rapport à l'action.

- Par ailleurs, un certain « *dégradé* » des méthodes paraît être à l'œuvre dans les débuts de l'enseignement supérieur. L'étudiant doit faire l'apprentissage de méthodes *spécifiques du supérieur* (exemple : méthode de raisonnement à ε-près), qui sont le plus souvent non désamalgamées du contenu même du cours (des définitions, des théorèmes...). Mais un travail de capitalisation et de réorganisation de connaissances *anciennes*, en *intégrant le neuf*, semble aussi nécessaire en début de DEUG. Citons l'exemple du calcul des limites, pour lequel les développements limités donnent un nouvel outil venant *compléter* les techniques élémentaires du lycée et non *s'y substituer.*

2°) Méthodologie générale de recherche.

Prenant donc pour *fil directeur* le cadre théorique de Chevallard, nous avons fait le choix de caractériser les rapports institutionnels à la « dérivée » des élèves de lycées et des étudiants d'universités, par une étude des tâches qui leur sont soumises sur ce thème, dans chacune des deux institutions.
Cette étude est réalisée à partir de l'analyse d'exercices et de problèmes tirés de manuels de première S et de terminale S couramment utilisés au niveau national (collections « Déclic » « Transmath », « Terracher », et « Fractales »), de sujets de Baccalauréat, et au niveau du supérieur, d'exercices issus de feuilles de travaux dirigés de DEUG Sciences (1ère année) données dans diverses universités. Le fait de mener une analyse comparée entre deux objets d'étude distincts (manuels scolaires au lycée / feuilles de travaux dirigés en DEUG) peut paraître discutable sur un plan méthodologique. Il nous a cependant semblé s'imposer du fait que le travail en classe s'organise essentiellement à l'université à partir de feuilles d'exercices conçues par les enseignants eux-mêmes, ce qui n'est pas le cas au lycée où les ouvrages ont un véritable « statut officiel ».

L'outil méthodologique utilisé pour répertorier les résultats obtenus est une grille d'analyse multidimensionnelle construite sur la base de notre analyse théorique a priori des ruptures.
En second lieu, on étudie les rapports personnels des étudiants à la dérivée à leur *entrée à l'université* au moyen de tests écrits portant sur des tâches non routinières au lycée, situées déjà, selon nous, à la transition des deux cultures.
Enfin, des ateliers en petits groupes, menés *en cours* de première année de DEUG, sur des thèmes considérés par nous-même comme *emblématiques* de la transition (statut et rôle des définitions, étude de conjectures, travail sur des fonctions définies par des propriétés générales, etc. visent à gérer localement les ruptures préalablement identifiées.

V/ ETUDE INSTITUTIONNELLE DES RAPPORTS DES ELEVES ET DES ETUDIANTS A LA DERIVEE.

1°) Description de l'outil méthodologique : la grille d'analyse multidimensionnelle.

Construite à partir des ruptures supposées, cette grille d'analyse des tâches sollicitées au lycée et à l'université se constitue de cinq tableaux à double entrée. Chaque tableau correspond à *un* type d'observation donné, c'est-à-dire à *une* dimension d'analyse précise des tâches, et permet de mentionner à la fois des informations de natures *qualitative* et *quantitative*.
Les différentes dimensions d'analyse considérées sont les suivantes :

a) Le niveau de décomposition des tâches exigées, dont l'étude doit permettre de jauger la *complexité* de ces tâches,
b) Les aides à la résolution fournies par l'énoncé, qui dévoilent les *niveaux d'autonomie* exigés dans la réalisation des tâches,
c) Le statut outil ou objet des notions engagées, le contexte des diverses tâches (monde fonctionnel engagé, degré de généralité, etc.)
d) Les cadres de travail et les changements de cadres (guidés ou autonomes) nécessités,
e) Les registres sémiotiques d'expression du travail mathématique à effectuer.

Dans chaque tableau, on reporte *en horizontal* les caractéristiques possibles, utiles à décrire la dimension d'analyse considérée, et *en vertical*, les divers thèmes d'enseignement relatifs à la dérivée sur lesquels peut être centrée la tâche en question. On peut citer par exemple, pour la dimension d'analyse « *niveau de décomposition des tâches* », les caractéristiques suivantes : « *activités de calcul* », « *activités graphiques* », « *application de définitions* », « *application de théorèmes* ». Comme exemples de thèmes (indépendants de la dimension d'analyse considérée), on peut citer les rubriques : « *inégalités des accroissements finis* », « *définition du nombre dérivé* », « *étude des variations* », etc.

Précisons aussi que nous avons été amené à faire évoluer cette grille en fonction du niveau d'apprentissage considéré :
- avec l'objet d'étude (« *caractéristiques* » à modifier entre lycée et université : par exemple, on a ajouté une rubrique « *absence d'aides* » dans le tableau des aides à la résolution relatif à la première année de DEUG Sciences),
- du fait du corpus enseigné (les « *thèmes* » d'enseignement varient d'une année à l'autre),
- par souci de simplification (passage de cinq à trois tableaux en cours d'étude, entre lycée et université).

Pour chaque thème, on définit ce que l'on appelle un taux de répétitivité des exercices portant sur ce thème. Le calcul de ce taux permet de rendre compte de la place accordée à la *systématisation* de tâches d'entraînement aux techniques standards en vue de rendre routinières ces techniques pour l'élève ou l'étudiant du niveau d'apprentissage considéré.

L'objectif est en fait de mettre en évidence comme *facteur de rupture* dans la transition une répétitivité plus faible des tâches à l'université qu'au lycée.

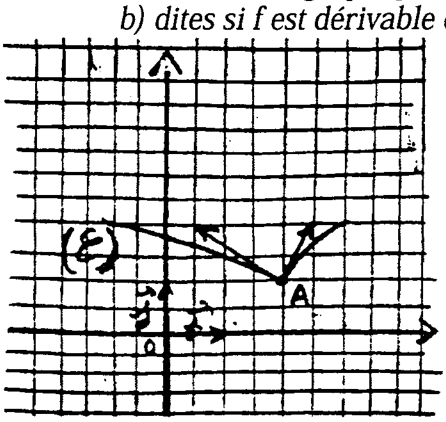
2°) <u>Résultats de l'étude institutionnelle réalisée sur les manuels de lycée</u>.

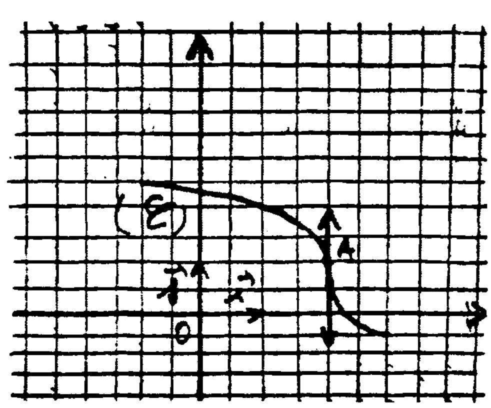
Nous présentons les résultats relatifs aux tâches sollicitées dans les manuels de lycée, selon les différentes dimensions d'analyse détaillées ci-dessus, en donnant quelques exemples en illustration.

a) <u>Niveau de décomposition des tâches</u>.

Les tâches observées dans les manuels de lycée sont *simples* et *isolées*, elles sont centrées sur l'application d'*une* technique ou d'*un* théorème particulier. Le <u>travail mathématique</u> est dans l'ensemble piloté par *quelques* pratiques <u>majoritaires</u>, bien mises en relief dans les manuels par une organisation très structurée des chapitres, notamment constitués de travaux pratiques, d'exercices corrigés, de fiches-méthodes. Un *contrat* et des *enjeux d'apprentissage* bien précis, ciblés, se dégagent de cette structure.
Au niveau <u>graphique</u>, il s'agit le plus souvent de tâches telles que : *lire* une information (très locale) à partir d'un graphe donné, *associer* deux à deux des graphes donnés (fonctions et dérivées) ; il n'y a guère de tâches de *production*, en dehors des tracés habituels de courbes représentatives de fonctions usuelles (mais cette tâche est en fait réalisée par la calculatrice).

<u>Exemple de tâche graphique</u> (manuel « Déclic » de terminale S ; exercice 1 page152) :
« *Pour les courbes suivantes, représentatives de f sur [-1,3]*
a) déterminer graphiquement $\lim_{h \to 0^+} (f(2+h)-f(2))/h$ *et* $\lim_{h \to 0^-} (f(2+h)-f(2))/h$;
b) dites si f est dérivable en 2. »





b) <u>Aides à la résolution</u>.

Elles sont <u>multiformes</u>, implicites ou explicites, locales ou globales. Citons notamment le fait que les exercices sont le plus souvent regroupés par *thèmes*, ces thèmes étant signalés par des *sous-titres* (aide implicite). Il y a un <u>découpage des tâches</u> en sous-tâches plus élémentaires, et beaucoup de réponses sont *fournies*. Cet environnement se caractérise en fait, par la présence, d'un exercice à l'autre, de <u>canevas répétitifs</u> de questions souvent très directives, surtout en 1ère S dans un rapport *initial* à la dérivée.
La possibilité d'un travail très progressif, par petites touches, de *l'autonomie* de l'élève, est ainsi offerte. En contrepartie, les niveaux d'autonomie visés demeurent assez restreints.

Exemple (manuel « Déclic » de première S) :

« Montrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution sur l'intervalle... » (ex n°31)
« Déterminer le nombre de solutions de l'équation f(x)=0 sur R » (ex. n°32 p.206)

Si on reprend la tâche de nature graphique évoquée dans le paragraphe précédent, on constate que l'interaction entre cadre algébrique et cadre graphique est totalement pilotée par le texte, l'expression du taux d'accroissement et le fait qu'il est nécessaire de distinguer « limite à gauche » et « limite à droite » sont précisés.

c) Statuts « outil » et « objet » des notions engagées. Contextes de résolution. Flexibilité.

Au sein de ces exercices, les notions sont surtout engagées dans leur statut « outil », plus rarement dans leur statut « objet ».
C'est *l'application, l'opérationalité* qui sont visées. Le travail porte sur des fonctions *usuelles* et des situations *particulières*. Le champ fonctionnel restreint, dans lequel se situent les tâches les plus courantes, *crée des règles* et entretient l'illusion selon laquelle des techniques de nature purement algébrique suffisent au travail en analyse. C'est particulièrement vrai au niveau de la classe de première S, où ce champ se réduit aux fonctions polynômes, fractions rationnelles et à radicaux[4].
Dans ce contexte, le travail formel et le rôle des définitions sont réduits. Il y a notamment des *prises de relais* permettant de plus avoir à faire référence aux définitions ; par exemple, les formules de dérivation formelle suffisent à la réalisation des tâches ordinaires, dans ce champ, rendant le plus souvent la définition du nombre dérivé sans objet. Les problèmes de nature plus qualitative, tels que *« étude de la dérivabilité en un point »* sont alors marginalisés.
La présence de *paramètres* n'est pas décisive, en général, du point de vue de la difficulté des exercices, car elle n'induit la nécessité d'une discussion délicate que de façon exceptionnelle.
Les aspects globaux l'emportent sur les aspects locaux ; ainsi par exemple, la définition par *approximation affine* de la dérivabilité en un point est surtout utilisée à des fins de *calcul numérique*, avec majoration éventuelle de l'erreur, et disparaît des exercices sollicités au sein des manuels de terminale S :

Exemple (exercice n°16 page 176, Déclic 1ère S) :

« Justifier que $1+3h$ est une valeur approchée de $(1+h)^3$ à $4h^2$ près (h $[-1;1]$).
En déduire une valeur approchée de $1,02^3$ et $0,95^3$ en précisant un majorant de l'erreur. »
→ On constate que le caractère « affine » de l'approximation sollicitée n'est guère mis en exergue par l'énoncé ; c'est un travail purement technique de majoration algébrique qui ressort surtout de la tâche proposée, avec application numérique à la clef.

Il y a de nombreux éclairages, *graphiques* et *numériques*, au sein des tâches sollicitées, mais les changements de cadres demeurent généralement *pilotés* par le texte (comme le montre d'ailleurs l'exemple précédent).

En terminale S, il s'agit davantage de consolider les acquis en vue du baccalauréat, et de réinvestir des connaissances *anciennes* sur la dérivée dans de *nouveaux* contextes, que de faire l'apprentissage de nouvelles notions relatives à la dérivée. Ajoutons que les quelques objets

---

[4] Les fonctions trigonométriques, généralement enseignées assez tard dans l'année en 1ère S, ne font donc pas partie du champ de référence *« disponible »* au quotidien durant cette année.

nouveaux, relatifs à la dérivée, qui sont introduits (les inégalités des accroissements finis, le théorème de composition des dérivées, la notion dérivées successives…) sont utilisés de façon souvent très *rigide* dans les problèmes de synthèse[5].
Les quelques tâches complexes qui sont sollicitées, et nécessitent une certaine *flexibilité*, portent sur des connaissances *anciennes* par rapport à la notion de dérivée. Mais il y a dans l'ensemble, même à ce niveau, peu d'évolution qualitative entre les tâches sollicitées en première S et celles de terminale S.
On peut citer à ce propos l'exemple des études de fonctions nécessitant l'étude préalable d'une fonction auxiliaire, qui représentent un « grand classique », aussi bien au niveau des problèmes de Baccalauréat que des exercices spécifiques des manuels de terminale S.
Ce type de tâche est alors systématiquement *guidé*, et *décortiqué* par l'énoncé en sous-tâches élémentaires :

Exemple (exercice n°55 page 186, Déclic TS) :

« *1°) Etudiez les variations de* $g(x) = \ln(x) - e/x$ *sur* R_+^*.
2°) Calculez $g(e)$ *et en déduire le signe de g sur* R_+^*.
3°) En déduire les variations de $f(x) = (x-e)(\ln(x)-1)$. »

→ Ici, le calcul de g(e) permet de constater que g est négative sur]0,e[et positive sur]e,+∞[, puisque g(e) = 0… or g se trouve être la dérivée de f…

3°) Résultats de l'étude institutionnelle réalisée sur les feuilles d'exercices de DEUG.

a) Niveau de décomposition des tâches.

On constate ici, que même s'agissant de tâches portant sur des objets *particuliers*, il y a le plus souvent une complexité beaucoup plus grande des tâches sollicitées, dans les feuilles de travaux dirigés de DEUG Sciences, que dans les manuels de lycée. Par exemple, le calcul de primitives suppose l'assimilation de méthodes précises, en plusieurs étapes, que ne décrit plus l'énoncé (tâches peu découpées).

b) Aides à la résolution.

Parallèlement à cette première constatation, on remarque que des tâches considérées (de façon générale) par les enseignants du supérieur comme « standards » en DEUG requièrent des niveaux d'autonomie beaucoup plus élevés que les tâches ordinairement sollicitées au lycée.
Il y a notamment de la part de l'institution universitaire des attentes *nouvelles* et *implicites*, sur des objets *anciens*, auxquelles elle n'est pas nécessairement très sensible :

Exemple (université de Marne la Vallée, partiel, 1996) :

« *On veut étudier la convergence de la suite récurrente* $(u_n)_{n \in N}$ *définie par* $u_0=\alpha$ *et* $(\forall n \in N)$ $u_{n+1} = 1/8\,(u_n^2+4u_n+3)$, *selon la valeur du réel* α.
1°/ Déterminer les limites possibles (éventuelles) de (u_n).
2°/ Montrer que si $\alpha \in [-5,1]$, *alors* $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ *pour tout* $n \geq 1$. *Conclure…* »

[5] On pense notamment ici aux fameux problèmes-types d'études de suites récurrentes selon la méthode du point fixe avec utilisation des inégalités des accroissements finis à la clef. Ces problèmes sont construits selon un canevas de questions très directives, qui ne varie guère d'un problème à l'autre.

→ Il convient de penser à introduire *soi-même* la fonction $x \rightarrow f(x) = 1/8\ (x^2+4x+3)$ dont il faut étudier les variations, mais aussi à placer diverses valeurs « *charnières* » (pour le problème posé) dans le tableau de variations : les solutions 1 et 3 de l'équation $f(x) = x$, les *autres* solutions des équations $f(x) = 1$ et $f(x) = 3$, et le *minimum* de f sur R. Toutes ces sous-tâches, standards en terminale S, sont certes élémentaires vis à vis du niveau d'apprentissage considéré, mais le fait d'avoir à décider *seul* de les accomplir place cet exercice à un niveau de difficulté élevé pour les étudiants.

Le travail de routinisation des tâches ne fait plus guère l'objet de scénarios *progressifs*, tels que décrits plus haut pour les manuels de lycée, et reste très *inégal* d'une université à l'autre. La répétitivité des tâches est en *forte baisse*, ce qui va de pair avec une accélération forte du temps didactique, la variété et le nombre des objectifs d'apprentissage, en nette hausse par rapport au lycée, n'autorisant plus le « bachotage » de certaines tâches spécifiques durant les séances. Le continuum observé au sein des sections d'exercices de manuels de lycée[6] fait ainsi place en DEUG Sciences, dans les feuilles de travaux dirigés, à des suites d'exercices qui apparaissent comme assez disparates, surtout à l'étudiant néophyte, avec des sauts importants, d'un exercice à l'autre, du point de vue des difficultés d'ordres technique et conceptuel, des contextes abordés, comme des connaissances sollicitées.

Les réponses sont plus rarement fournies, sauf pour les tâches qui requièrent un raisonnement formel ou une argumentation consistante.
Les tâches présentant des difficultés particulières, à présent plus nombreuses, font souvent l'objet d'aides assez frustes. Des scénarios d'aide efficaces, ne dénaturant pas de telles tâches, souvent susceptibles de forcer le développement d'une certaine autonomie, d'une réflexion personnelle, et d'une flexibilité cognitive nouvelles, semblent aussi plus difficiles, désormais, à concevoir[7].

c) Statuts « outil » et « objet » des notions engagées. Contextes de résolution. Flexibilité.

Le statut « objet » des notions engagées est davantage mis en jeu que dans les tâches issues des manuels de lycée, ce qui va de pair avec un accroissement du rôle des *définitions* et du *travail formel* au sein de ces tâches, et une augmentation de leur *niveau de généralité*.
La présence de *paramètres* est plus souvent décisive vis à vis de la difficulté des tâches, et nécessite généralement une discussion susceptible de mettre en jeu de façon très cruciale les notions au cœur de l'apprentissage considéré.
Il y a un net rééquilibrage entre les aspects locaux et globaux, au profit des premiers, et une pluralité des moyens de réalisation des tâches beaucoup plus fréquente que pour celles des manuels de lycée, mais cette pluralité n'est que rarement mise en exergue par l'énoncé.
Les *éclairages* possibles dans d'autres cadres que le cadre algébrique (et en particulier, les cadres *graphiques* et *numériques*) ne sont pas autant exploités qu'au sein des tâches issues de manuels de terminales S, les changements de cadres utiles à la compréhension d'un problème ne sont pas suggérés comme c'est le cas au lycée.

---

[6] Par ailleurs davantage structurés et organisés, par nature même, dans leur conception, en vue de mettre en relief et de respecter une certaine progression, que de simples feuilles d'exercices.
[7] Peut-être y a t-il aussi une certaine *réticence* de l'institution universitaire à piloter de près la réalisation de ces tâches, justement en vertu de ces comportements d'adaptation qu'elles sont censées provoquer chez l'étudiant.

Exemple (université de Marne la Vallée, sujet d'examen, 1997) :

« On pose $f(x) = x / \ln(x)$ pour $x>1$.

1°/ Etudier les variations de f et ses limites en 1 et $+\infty$.

2°/ Pour chaque x_0 de $]1, +\infty[$, indiquez la position relative de (Cf) et de sa tangente au point d'abscisse x_0.

On distinguera trois cas : $x_0<e^2$, $x_0> e^2$, $x_0= e^2$. »

→ La valeur d'abscisse e^2 correspond au point d'inflexion de la fonction, et la discussion s'oriente donc autour de cette valeur de manière tout à fait cruciale. C'est l'aspect local qui est ici privilégié et diverses procédures sont possibles pour l'exécution de la seconde question : recours à une formule de Taylor, à un théorème de cours relatif aux notions de convexité-concavité, à l'étude de la fonction-différence $x \to f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$... ce que ne souligne pas l'énoncé. La gestion du travail est totalement laissée à l'initiative de l'étudiant, en particulier le choix de faire interagir, ou non, cadre graphique et cadre algébrique.

L'institution est moins attentive que celle du lycée à éviter, au sein d'une tâche donnée, le télescopage entre une notion théorique *nouvelle* et un contexte *nouveau.* Par exemple, on peut solliciter le développement limité d'une fonction trigonométrique réciproque, alors que le temps consacré à l'étude de ce type de fonction reste restreint au sein du cursus, et en tous cas sans commune mesure avec celui consacré en terminale à l'étude de fonctions logarithmes et exponentielles.

Il y a une certaine diversité des environnements d'exercices, souvent *riches de potentialité,* mais le travail critique reste paradoxalement assez *peu sollicité* vis à vis des possibilités qui sont offertes par les tâches proposées.

On constate qu'il existe des pratiques jalons (servant de point de repère vis à vis d'objectifs d'apprentissage) au niveau de la première année de DEUG Sciences, comme il en existe en terminale S. Parmi ces pratiques institutionnelles centrales, on peut par exemple citer le fait d'appliquer le théorème des accroissements finis à des fonctions et entre des points donnés :

Exemple (université de Nantes, feuille d'exercices) :

« On suppose que f est dérivable sur R_+^* et que : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lambda$ et $\lim_{x\to +\infty} f'(x) = \mu$, où λ, μ deux réels. En appliquant la formule des accroissements finis à f entre x et x+1, montrez que nécessairement $\mu = 0$... »

→ Il s'agit d'une « pratique jalon » dans l'institution, avec un guidage exceptionnellement directif de l'énoncé, et pas de sollicitation d'une critique de la nécessité de l'hypothèse : « $\lim_{x\to +\infty} f'(x) = \mu$ » pour l'obtention du résultat final : « $\lim_{x\to +\infty} f'(x) = 0$ ».

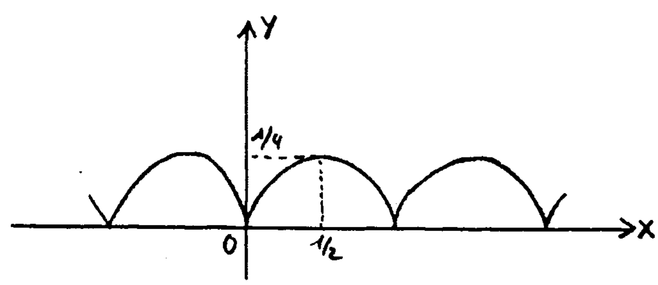
Au terme de cette étude institutionnelle, la construction de deux organigrammes, l'un d'eux concernant les manuels de lycée et l'autre étant relatif aux diverses feuilles de travaux dirigés de DEUG Sciences, permet de résumer le « paysage conceptuel » dans l'environnement de la notion de dérivée aux deux niveaux d'apprentissage. De nettes différences apparaissent dans l'agencement des notions, des objets mathématiques entre eux, avec une relation plutôt de type « *descendante* » au lycée (fléchage en sens unique des définitions ou des énoncés de base vers leurs applications), et de type « *dialectique* » en DEUG Sciences (fléchages multiples, réseau très dense et complexe de connections et d'aller-retour entre concepts ou énoncés).

VI/ ETUDE DES RAPPORTS PERSONNELS DES ELEVES / DES ETUDIANTS A LA DERIVEE.

1°) Présentation d'une tâche particulière. Résultats obtenus.

a) Description de la tâche et justification du choix effectué.

Nous présentons ici un exercice extrait du test soumis en septembre 1996 aux entrants en première année de DEUG Sciences à l'université de Marne la Vallée, exercice qui nous paraît particulièrement significatif de l'esprit général des deux tests de 1995 et 1996 utilisés dans cette recherche et, au niveau des résultats, du comportement général des étudiants face aux difficultés que soulèvent ces tests.
La tâche qui est proposée à travers cet exercice peut se résumer ainsi : *« se familiariser avec un nouvel objet mathématique, la dérivée symétrique, et la comparer à la notion de dérivée au sens ordinaire du lycée »*.
L'énoncé commence par présenter une fonction particulière, la fonction périodique de période égale à 1, définie sur [0,1[par : $f(x) = x.(1-x)$, fournit son graphe (donné ci-dessous), puis demande aux étudiants de se prononcer sur la continuité et la dérivabilité de cette fonction sur R (sous-tâche n°1) :



La notion de nombre dérivé symétrique en un point x_0, notée $f_s'(x_0)$, est ensuite présentée ainsi aux étudiants : $f_s'(x_0) = \lim_{x \to x_0} (f(x_0+h) - f(x_0-h)) / 2h$, et on leur demande, pour la fonction f qui a été introduite précédemment, de calculer les nombres dérivés symétriques et les nombres dérivés « au sens ordinaire » de cette fonction en ½ ¼, et 0, *s'ils existent*, puis de les comparer deux à deux entre eux (sous-tâche n°2).
Enfin, on propose l'étude des trois conjectures suivantes :

C1 : *« Toute fonction paire définie sur R admet une dérivée symétrique en zéro »*
C2 : *« Toute fonction paire définie sur R admet une dérivée (ordinaire) en zéro »*
C3 : *« Si une fonction définie sur R est dérivable au point x_0, alors elle admet aussi une dérivée symétrique en x_0 et on a : $f_s'(x_0) = f'(x_0)$ »* (sous-tâche n°3).

Notons encore que l'énoncé rappelle la définition du nombre dérivé au sens ordinaire :
$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} (f(x_0+h) - f(x_0)) / h$, précisant qu'elle vaut aussi $\lim_{x \to x_0} (f(x_0) - f(x_0-h)) / h$, si elle existe.

Les principes qui nous ont orientés vers le choix d'un tel questionnement :

Il nous a semblé que, conformément à nos souhaits, cette tâche était susceptible de nous aider à mieux saisir certains éléments de la transition institutionnelle qui se joue, car elle se situe bien, selon nous, à la transition des deux cultures, du secondaire et du supérieur.
En effet, d'une part, elle se démarque profondément des tâches ordinairement sollicitées au lycée :

- la fonction particulière sur laquelle l'étudiant doit travailler est définie seulement de manière implicite,
- l'étudiant doit intégrer à son travail un nouvel objet formel, la notion de dérivée symétrique,
- il doit aussi *démontrer* ou infirmer à l'aide de *contre-exemples*, des conjectures très *générales*.

Mais d'autre part, on doit relever en contrepartie :

- que la tâche demeure d'une faible technicité, notamment en raison de la simplicité de la fonction introduite,
- que l'activité démarre sur l'étude d'une fonction particulière, se prolonge au niveau de la notion nouvellement introduite par des calculs de nombres dérivés en des points également particuliers, avant l'étude finale de conjectures générales,
- que la forme même du questionnement est de nature à guider l'étudiant : le *graphe* de la fonction f est fourni par le texte, ce qui offre à l'étudiant la possibilité de visualiser la *parité* de cette fonction (au cœur des justifications à donner), et sa *non dérivabilité* aux points d'abscisses entières ; en outre, la fonction f peut être utilisée pour réaliser certaines inférences, et constitue un contre-exemple « prêt à l'emploi » en vue d'une étude de la conjecture C2.

L'un des objectifs de ce questionnement est ainsi de tester chez les étudiants une certaine flexibilité cognitive entre *cadres graphique* et *algébrique*, dans un contexte qui leur est *plutôt favorable*, et leur capacité à saisir la fonction remplie ici par le graphe (il permet de s'orienter vers la solution correcte) autant qu'à produire une preuve formelle correcte.
Relevons enfin que la tâche proposée, qui serait très originale, fort éloignée des pratiques standards, usuelles, dans un environnement de lycée, ne semble pas davantage susceptible de figurer dans un environnement de DEUG Sciences du type de ceux observés dans notre étude institutionnelle, en raison des *contenus* mis en jeu, qui ne correspondent pas aux objectifs d'apprentissage en DEUG, et de la forme *progressive*, signalée plus haut, du questionnement.

b) Résultats obtenus. Analyse succincte des productions des étudiants.

Concernant les deux premières sous-tâches, relatives à la fonction f considérée (étude de la continuité et de la dérivabilité, calcul de nombres dérivés), le phénomène dominant au sein des productions des étudiants tient dans l'amalgame, s'exprimant sous *diverses formes*, entre la fonction f présentée et la fonction polynomiale $x \to x(1-x)$.
Il convient donc de souligner ici la persistance de cet amalgame en dépit du fait que la courbe soit fournie. D'un point de vue théorique, il s'explique par le *saut qualitatif* identifié par Sfard (Sfard, 1991) intervenant dans le processus de *réification*, saut qui se manifeste en particulier dans la difficulté des étudiants à détacher l'objet « fonction » d'une expression algébrique.

Première sous-tâche : Pour l'étude de la continuité et de la dérivabilité de f sur R, on relève ainsi *trois* niveaux principaux d'interprétation :

- Un niveau 0, caractérisé par un amalgame total, qui amène bon nombre d'étudiants à affirmer que : *« f est continue, dérivable sur R comme produit de fonctions continues dérivables »*. Par rapport à cette justification, on rencontre parfois l'argument suivant, plus raffiné : *« f est continue et dérivable sur [0,1[en tant que fonction polynomiale, donc elle l'est sur R par périodicité »*.

- Un niveau 1, correspondant à l'identification de la nécessité d'une *étude locale* au point d'abscisse 0 et/ou au point d'abscisse 1, mais sans distinguer limite à gauche et à droite, ou en prenant à gauche comme à droite, en 0 ou en 1, l'expression x(1-x) pour le calcul, sans aucune tentative de justification (amalgame *implicite*). L'étudiant est conscient du fait qu'une étude spécifique au point d'abscisse 0 (ou 1) est attendue de sa part, mais il ne sait pas comment la mener et ne semble pas avoir vraiment compris le problème qui se pose.

- Un niveau 2, qui correspond à l'identification d'un problème de *« raccordement »* aux points d'abscisses entières. Le traitement formel demeure cependant, même dans ce cas, rarement correct, mais aboutit souvent à une solution qui le sera. C'est notamment le cas pour ceux qui écrivent : *« f est dérivable si et seulement si f(0) = f(1) et f '(0) = f '(1) »*, conditions qu'ils appliquent à l'expression x.(1-x). Force est de reconnaître ici que ce niveau d'interprétation est difficilement dépassable pour des élèves sortant de terminale, compte tenu de leur référentiel du lycée[8]. Nous situons également à ce niveau 2, les interprétations de nature graphique (en général correctes), type : *« f n'est pas dérivable en 0, car la courbe admet deux demi-tangentes distinctes (resp. un point anguleux, resp. un pic) en ce point. »*[9]

La répartition statistique des procédures adoptées par les étudiants se fait selon trois tiers :

Procédures :	**Répartition :**
Niveau 0	1/3
Niveau 1 ou 2	1/3
Mixtes[10]	1/3

Le recours au cadre graphique est utilisé dans 20% des réponses, mais pratiquement toujours comme argument *unique* se substituant au traitement algébrique. Il semble donc y avoir un *cloisonnement* des réponses par rapport aux deux modes de traitement possibles (algébrique / graphique), et peu de flexibilité observable entre cadres. En outre, on constate que l'icône

[8]L'amalgame entre valeur en un point et limite en ce point y est banalisé pour les fonctions considérées, et les situations où la distinction entre limite à gauche et limite à droite est pertinente, et le recours à la définition du nombre dérivé nécessaire, gardent un caractère très marginal. L'étude institutionnelle nous avait ainsi appris que la définition du nombre dérivé a un statut davantage culturel qu'opérationnel au lycée.
[9] Notons que l'interprétation graphique de la non-dérivabilité est beaucoup plus souvent exploitée dans les réponses des étudiants que celle de la continuité (courbe « sans saut », ou « sans coupure »), sans doute parce qu'elle correspond à une situation pour lesquels les bacheliers ont plus d'exemples à leur disposition (fonctions avec des valeurs absolues) qu'ils ne disposent d'exemples de fonctions discontinues.
[10] Cas où l'étudiant se situe au niveau d'interprétation 0 dans son étude de la continuité, et au niveau 1 ou 2 dans son étude de la dérivabilité, ou le contraire (beaucoup plus rare).

« *point anguleux* » ne fait pas partie des connaissances *disponibles* chez un peu plus de la moitié des étudiants au moins (ceux qui ont dit que f est dérivable sur R).

Le <u>fait marquant</u>, au sein des réponses apportées à cette question, c'est donc la diversité des *tentatives d'adaptation* de mécanismes routinisés au lycée à cette situation plus complexe (étude en 0 ou en 1, en distinguant ou non limites à gauche et à droite, en le faisant surtout pour la dérivabilité, etc.), et cela débouche souvent sur des réponses « toutes faites ».
Notons encore que les études locales sont plus souvent menées en 1 qu'en 0, par sensibilité au *repère sémiotique* : f(x) = x(1-x) <u>sur [0,1[</u> (c'est l'idée que l'expression polynomiale fournie vaut pour x=0 mais pas pour x=1, donc qu'une étude locale s'impose en 1 plutôt qu'en 0).

<u>Deuxième sous-tâche</u> : Au niveau des calculs de nombres dérivés particuliers, sollicités en ½ ¼ et 0 pour la fonction f, on relève, dans l'ensemble, *peu* de situations de *blocage* par rapport au nouvel objet formel introduit, la dérivée symétrique, ce qui est un élément <u>très positif</u>. La nature de cette sous-tâche facilite donc, nous semble-t-il, l'intégration de la notion nouvelle de dérivée symétrique dans le travail de l'étudiant.
Au niveau de la validité des réponses données, les résultats sont très <u>contrastés</u>.
Les calculs de nombres dérivés et dérivés symétriques en ½et ¼, qui relèvent de procédures algébriques très simples[11], donnent respectivement lieu à des taux de l'ordre de 95% et 75% de réponses correctes[12], tandis qu'au point zéro « fatidique », l'étude de ces nombres dérivés (*existence* et calcul éventuel) n'est correctement effectuée que dans 14% et 3% des cas.
Ainsi, une nette majorité d'étudiants se contente de substituer la valeur 0 à la variable x dans l'expression formelle f '(x) =1-2x calculée précédemment, en vue d'évaluer f '(0), comme ils l'ont fait pour déterminer les nombres dérivés aux points d'abscisses ½et ¼. Il est intéressant de constater que cette manière de procéder, comme le résultat obtenu, sont en contradiction flagrante, chez un certain nombre d'étudiants, avec leur étude préalable de la dérivabilité de f sur R (première question)[13]. Nous interprétons ici cette contradiction par l'existence d'un <u>cloisonnement</u>, pour ces étudiants, entre une tâche *rituelle* dans la culture du lycée (calcul formel de nombres dérivés) et une tâche *plus marginale* dans cette culture (étude locale de la dérivabilité en un point) :

b). f est dérivable sur [0;1[comme produit de fonctions dérivables.
$\forall x \in [0;1[$ $f'(x) = 1-2x$ $f'(0) = 1$ et $f'(1) = -1$. Or le nombre dérivé en un point est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point
Donc comme f est périodique on a : $\forall x \in \mathbb{Z}$, f admet deux <u>demi-tangentes</u> (point d'inflexion). conclusion: f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

<u>Extrait de la copie d'Hervé R.</u> : La non dérivabilité n'empêche pas le calcul du (ou <u>des</u>) nombre(s) dérivé(s) !

[11] La fonction f est à identifier, en ces points de l'intervalle [0,1[, à la seule fonction polynômiale x→x(1-x).
[12] Pour le calcul des nombres dérivés « ordinaires », ils ne repassent pas par la définition du nombre dérivé ; ils appliquent l'expression f '(x) = 1-2x aux valeurs ½ et ¼. Le taux de succès n'est que de 75% pour le calcul des nombres dérivés symétriques, car certains étudiants, constatant que $f_s'(1/2) = \lim_{h \to 0} 0/(2h)$, affirment que la dérivée symétrique n'existe pas en ½ : ils perçoivent 0/(2h) comme une forme indéterminée pour h tendant vers 0 (rapport inapproprié au concept de limite) .
[13] Il faut noter que 26% des étudiants avaient décelé la non-dérivabilité de f en 0 lors de la première sous-tâche.

Les erreurs, encore plus nombreuses, commises dans le calcul de $f_s'(0)$, sont dues quant à elles à la substitution de h par $-h$ dans l'expression $f(h) = h(1-h)$, valable seulement pour h pris dans $[0,1[$ (amalgame implicite avec la fonction polynomiale).

Troisième sous-tâche : Le *taux de participation* reste faible (respectivement 35%, 25%, 15%, pour chacune des trois conjectures) avec peu de succès. Concernant la conjecture C2, il est plutôt fait référence à la fonction $x \to |x|$ comme exemple[14] de fonction paire n'admettant pas de nombre dérivé en 0, qu'à l'exemple traité de la fonction f (l'énoncé ne précisant d'ailleurs pas que cette fonction est paire, ce qui résulte de la façon dont elle est définie). Les quelques réponses apportées à la conjecture C3 témoignent d'un *amalgame* hâtif entre nombre dérivé et nombre dérivé symétrique.

2°) Leçons à tirer de l'ensemble des tests de septembre.

Les tentatives des étudiants, présentées ci-dessus, d'adaptation de leurs connaissances du lycée et de leurs modes de fonctionnement les plus familiers, à une tâche complexe telle que celle que nous venons de décrire, correspondent à une *tendance générale* que l'on retrouve pour l'ensemble des tâches issues des tests.
Ces tentatives d'adaptation constituent en elles-mêmes un élément très positif, même si elles aboutissent souvent à des *démarches simplificatrices*, liées au champ d'expérience du lycée (fonctions usuelles, régulières), et à une *gestion séparée* des problèmes (faibles articulations, par exemple, entre continuité et dérivabilité). Une forte dépendance vis à vis du *contexte*, de la *forme* du questionnement proposé, et un fonctionnement séparé des divers *cadres* de travail (graphique, algébrique), sans grande flexibilité cognitive, sont autant de constantes observées chez les étudiants dans ces tests.
On constate en outre, que placés en face d'un réel conflit[15], les étudiants font rarement preuve d'attitude critique, soit qu'ils ne remarquent pas ce conflit, soit encore qu'ils le minimisent pour adopter une réponse « consensuelle ». Une représentation des mathématiques comme discipline *non problématique* paraît bien installée chez eux, la fonction de *vérification* et la notion de *contrôle de la cohérence* leur semblant étrangères.
Enfin, le rapport à la généralité reste le plus souvent à construire (on constate des conceptions du type : *« exemple qui confirme la règle »*, et des généralisations abusives, telles que : *« toute fonction comportant des valeurs absolues est non dérivable là où elle s'annule »*).

Nonobstant ces observations, il convient d'insister sur le fait que les germes d'adaptation constatées chez les étudiants, offrent des potentialités donnant prise au *travail didactique*.
Force est de reconnaître que les tâches ici proposées, peu de temps après l'obtention du Bac, sont tout à fait inhabituelles pour un élève de lycée, car porteuses de diverses caractéristiques de l'activité mathématique au niveau du supérieur (le degré de généralité est élevé, le monde fonctionnel est en évolution, il y a usage d'un formalisme nouveau...). Ces tâches cognitives complexes semblent peu maîtrisables au niveau du lycée, et devraient donc faire l'objet d'une gestion particulière dans la *transition* entre le lycée et l'université. L'analyse institutionnelle préalablement menée dans notre recherche montre que ce n'est pas le cas actuellement.

[14] Classique et standard, déjà en terminale S.
[15] Confrontation amenée délibérément par le texte de l'exercice, ou découlant des réponses apportées en propre par les étudiants.

Un vide didactique entre ces deux *cultures* très différentes reste donc à combler par un travail spécifique. Ce sont les possibilités de prise en charge de ce problème au moyen d'*ateliers* en petits groupes qui ont été sondées dans la suite de notre recherche.

VII/ GESTION DES RUPTURES AU MOYEN D'ATELIERS.

1°) Présentation des deux ateliers.

a) L'atelier sur les définitions de la dérivabilité.

Cet atelier consiste en l'étude des relations d'implication existant entre la propriété classique de dérivabilité en un point, ou plus exactement la proposition : « *f est dérivable au point* x_0 », et cinq propositions données qui, en apparence, lui « ressemblent ».
Parmi elles, l'analyse des trois assertions suivantes a occupé l'essentiel du temps consacré à cet atelier en petits groupes, d'une durée de deux heures :

« *Il existe une fonction affine g telle que :* $\lim_{x \to x_0} (f-g)(x) = 0$ »
« *Il existe une fonction affine g telle que :* $f(x) = g(x)$ *au voisinage de* x_0 »
« *Il existe un réel a tel que :* $\lim_{x \to x_0} [f(x_0+h)-f(x_0-h)] / 2h = a$ »[16]

L'originalité de cet atelier, par rapport aux tâches ordinairement proposées au lycée, tient non seulement au fait d'avoir à travailler sur des propositions *générales*, mais aussi au *statut* tout à fait inhabituel de la définition mathématique au sein de cet atelier : la notion de dérivabilité en un point est étudiée pour elle-même, fait *l'objet* du travail sollicité, au lieu d'être seulement utilisée comme un *outil* et destinée à la seule application.

b) L'atelier concernant l'étude de la classe des fonctions dites « à croissance forte ».

Cet atelier, programmé sur deux séances d'une durée de deux heures chacune, consiste en une étude des fonctions dérivables sur un intervalle, strictement croissantes ainsi que leur dérivée, sur cet intervalle, ici nommées « *fonctions à croissance forte* ».
La première séance consiste en *l'étude d'exemples* : on demande aux étudiants de rechercher des fonctions de ce type, notamment au sein de familles données de fonctions paramétrées (telles que : $x \to A.\ln|x-a|$, $x \to (x-a)^n$, etc.). On peut ainsi analyser les difficultés des étudiants dans le travail technique d'adaptation des valeurs de paramètre(s) aux conditions de stricte croissance de ces types de fonctions et de leurs dérivées.
La seconde séance correspond à *l'étude de conjectures* relatives à cette classe de fonctions étudiée (variations de la fonction $x \to \alpha_0(x) = (f(x)-f(0)) / x$, comparaison avec la dérivée f '). Les étudiants sont successivement amenés à établir ces conjectures dans le cas de la fonction *exponentielle*, puis dans le cas *général*, ce qui ne met pas en jeu le même type de traitement algébrique (étude d'une fonction usuelle dans le premier cas, utilisation d'une propriété des accroissements finis dans le second cas). En outre, l'interaction entre les cadres graphique et

---

[16] On retrouve ici le problème, déjà posé dans l'un des exercices du test écrit de septembre 1996, du rapport entre nombre dérivé et nombre dérivé symétrique, mais le pilotage (étude préalable d'un exemple, calculs de nombres dérivés particuliers, mise en relief du problème par des conjectures précises, rappel des définitions du nombre dérivé « utiles » en l'espèce), que l'on trouvait dans le test, est ici absent. Notons, en outre, que les étudiants observés dans les deux cas ne sont pas les mêmes.

algébrique est sollicitée, elle permet de confirmer à chaque fois les résultats obtenus, via deux modes de traitement différents.

c) Choix de ces ateliers et conditions générales de réalisation.

La conception de ces deux ateliers a été influencée par la volonté de proposer aux étudiants des activités répondant à la fois à *deux critères*. D'une part, ces activités se devaient d'être en accord avec le programme et le travail en cours de la première année de DEUG Sciences, et d'autre part, on souhaitait qu'elles ne sollicitent que peu de connaissances spécifiques de ce programme (le théorème des accroissements finis dans le second atelier), l'objectif étant de diagnostiquer et de gérer *d'abord* des microruptures largement indépendantes des contenus.

Ces ateliers ont été menés conjointement, entre les mois de février et de mai de l'année 1997, au sein des universités de Marne la Vallée et d'Orléans. Nous nous sommes attaché à suivre à chaque fois le travail d'un ou deux groupes maximum, de cinq ou six étudiants, en orientant souvent ce travail par des questions plus précises et, dans les situations de blocage, en leur apportant une aide plus substantielle.

2°) Résultats généraux inhérents à ces ateliers.

a) L'atelier sur les définitions de la dérivabilité.

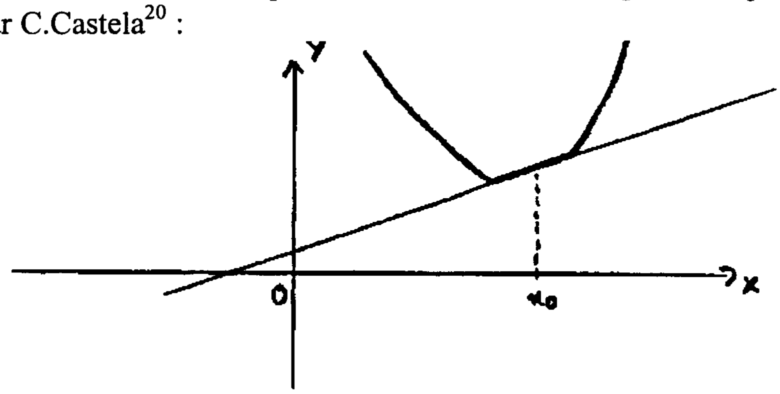
Le travail de cet atelier a tout d'abord posé d'importants problèmes de dévolution de la tâche, certains étudiants ayant de grandes difficultés à dissocier, afin de les analyser *séparément*, les caractères *« nécessaire »* et *« suffisant »* (éventuels) des propositions qui leur sont présentées, par rapport à la propriété de dérivabilité au point x_0. Le plus souvent, ces étudiants cherchent plutôt à se prononcer sur le fait que chaque proposition, prise dans sa *globalité*, est *synonyme*, ou non, de la dérivabilité au point x_0.
La seconde grande difficulté éprouvée par les étudiants tient au *choix* du registre d'expression à utiliser pour le travail sollicité, ainsi qu'à la *rigueur* nécessitée par rapport à l'utilisation de ce registre. On constate en effet que, *spontanément*, les étudiants utilisent plutôt le registre de la langue naturelle, voire le registre graphique, alors que le travail formel (algébrique), qui présente le plus de garanties pour des étudiants à l'intuition encore naïve, défaillante, et qui s'avère quasiment incontournable s'agissant de l'item sur la dérivée symétrique, n'est bien souvent enclenché que sur notre conseil. Ce phénomène, assez prévisible compte tenu des difficultés inhérentes à ce travail formel pour un étudiant de DEUG Sciences, montre aussi, selon nous, que le recours aux définitions « originelles », peu usité au lycée, ne fait pas encore partie des pratiques routinières pour l'étudiant à ce stade de la première année de DEUG.

La proposition : « *Il existe une fonction affine g telle que* $\lim_{x \to x_0} (f-g)(x) = 0$ » est, des trois assertions présentées ci-dessus, la plus aisément et correctement interprétée par les étudiants. Elle est associée dans le registre de la langue naturelle à l'idée d'un *« rapprochement »* entre la courbe représentative de la fonction f et une certaine droite pour des valeurs d'abscisses *« proches de x_0 »*, aboutissant au point d'abscisse x_0 au « croisement » de cette courbe et de cette droite (certains étudiants effectuent ici des schémas). Pour une majorité d'étudiants, ce rapprochement n'induit pas nécessairement la tangence de la droite et de la courbe c'est-à-dire dire la dérivabilité de la fonction en ce point, et ils pensent, en revanche, que la dérivabilité en

x_0 implique cette proposition. Cependant, ils ne reconnaissent pas la propriété de continuité au point x_0 à travers la proposition présentée, et ne cherchent pas d'eux-mêmes à justifier leurs affirmations à l'aide de calculs. Lorsqu'ils tentent de le faire, sur notre demande, ils éprouvent de grandes difficultés techniques, de formalisation du problème, liées à une méconnaissance de la définition de la dérivabilité en un point par approximation affine[17], et à l'impossibilité où ils se trouvent de récupérer cette définition via celle par limite du taux d'accroissement[18]. L'identification de la fonction affine tangente $g : x \to g(x) = f'(x_0).(x-x_0) + f(x_0)$ pose les mêmes problèmes. Ces difficultés les empêchent de prouver rigoureusement qu'une fonction dérivable au point x_0 vérifie forcément l'assertion présentée, mais par contre, bon nombre d'étudiants arrivent à présenter (au moins graphiquement) une fonction non dérivable en x_0, mais satisfaisant l'assertion « *Il existe une fonction affine g telle que :* $\lim_{x \to x_0} (f-g)(x) = 0$ ».

La deuxième proposition, « *Il existe une fonction affine g telle que* $f(x) = g(x)$ *au voisinage de* x_0 », fait en général l'objet d'interprétations erronées. La plupart des étudiants estiment que sa signification est : « *Il existe une fonction affine g telle que* $f(x) \approx g(x)$ *pour les valeurs de x proches de* x_0 », tout en admettant que cette dernière formulation reste assez floue. Quand on leur demande d'être plus précis, ils en viennent vite à affirmer que cela a encore le sens de : « $\lim_{x \to x_0} (f-g)(x) = 0$ », donc que les deux premières propositions présentées sont finalement synonymes l'une de l'autre. Il s'avère alors nécessaire de solliciter de leur part une définition précise (donnée en cours[19]) d'un voisinage d'un point réel x_0, définition qu'ils ont en général bien des difficultés à retrouver. En outre, on s'aperçoit qu'ils n'accordent pas à la proposition « *telle propriété (P) est vérifiée* ***sur un*** *voisinage de* x_0 », le même sens qu'à la proposition « *telle propriété (P) est vérifiée* ***au*** *voisinage de* x_0 », jugée plus vague et incertaine. Cet item illustre donc bien toutes les difficultés et les pièges liés à une utilisation exclusive du registre de la langue naturelle pour traiter un problème, et le manque de familiarisation des étudiants au langage de l'expert surtout lorsque les termes employés ont déjà pour eux une connotation particulière.

Notons enfin que lorsque le sens correct de la proposition a été restitué (c'est-à-dire : « *la fonction f s'identifie sur tout un intervalle ouvert, centré au point* x_0, *à une fonction affine* »), certains étudiants ne reconnaissent pas là une situation de tangence au point x_0, phénomène déjà observé par C.Castela[20] :



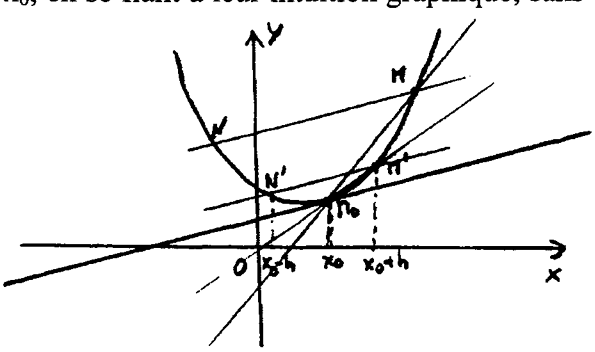
[17] Introduite en classe de première, mais marginale dans la pratique des exercices, et totalement absente de l'enseignement relatif à la notion de dérivée en classe de terminale.

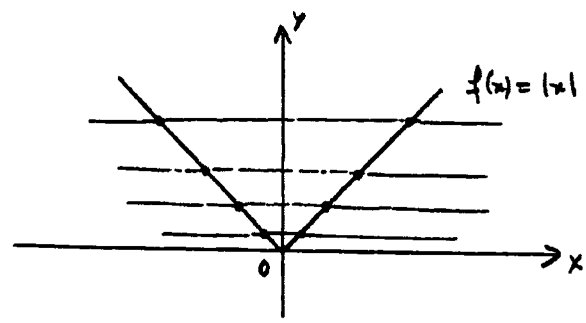
[18] Il faut utiliser « l'astuce » de formalisation consistant à réécrire l'égalité : $\lim_{x \to x_0} (f(x)-f(x_0))/(x-x_0) = f'(x_0)$ sous la forme : $(f(x)-f(x_0)) / (x-x_0) = f'(x_0) + \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

[19] On appelle « voisinage d'un point réel x_0 », tout intervalle ouvert du type $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$, où $\alpha>0$ est donné.

[20] Dans son article : « Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures – un exemple concret : celui de la tangente », R.D.M, vol 15.1, pp 7-47, 1995.

Enfin, la troisième proposition, « Il existe un réel a tel que $\lim_{x\to x_0} [f(x_0+h)-f(x_0-h)]/ 2h = a$ », est souvent assimilée à la dérivabilité de f au point x_0. Certains étudiants font bien remarquer que l'on n'a pas affaire ici au « taux d'accroissement habituel », mais d'autres leur rétorquent qu'il s'agit malgré tout d'un taux d'accroissement au point x_0, et que cela ne va rien changer.
Là encore, il nous incombe de solliciter de la part des étudiants un travail de raisonnement formel plus rigoureux que les considérations a priori qu'ils tiennent, toutes aussi recevables les unes que les autres, en apparence.
Ce travail passe parfois par un stade de *repérage formel* du taux d'accroissement symétrique sur un schéma, qui ne s'effectue pas sans certaines difficultés ; avec notre aide, ils finissent par tracer une courbe, placer les points d'abscisses x_0, x_0-h et x_0+h, et tracer la corde joignant les points d'abscisses x_0-h et x_0+h. Cependant, ayant tracé une courbe « bien ronde », sans angulosité, ils ne voient pas en quoi le passage à la limite « géométrique » pour cette corde peut, dans le cas d'un point anguleux, donner un résultat différent de celui obtenu pour la corde joignant les points d'abscisses x_0 et x_0+h. Ils sont alors décidés une nouvelle fois à conclure à l'équivalence entre la proposition donnée et la dérivabilité de la fonction f au point x_0, en se fiant à leur intuition graphique, sans tenter d'effectuer une démonstration formelle :





La tangente, limite des sécantes dans les 2 cas. Sécantes tendant « géométriquement » vers l'axe horizontal

Avec notre aide[21], ils arrivent à établir formellement (non sans mal) qu'une fonction dérivable en un point x_0 admet nécessairement une dérivée symétrique en ce point. En ce qui concerne la proposition réciproque, nous nous sommes systématiquement trouvé dans l'obligation de leur demander de tester la fonction $x \to |x|$ en zéro, tant leur certitude que cette réciproque est vérifiée s'avère forte[22].

Pour conclure, disons que l'intérêt de cet atelier réside, selon nous, dans les possibilités de modes de fonctionnement par ajustements, et de mise en œuvre *flexible* des divers registres, de la langue naturelle, du graphique, et du travail algébrique formel, cette flexibilité étant favorisée par *l'interaction* entre étudiants et entre l'enseignant et les étudiants. L'expérience faite dans ce contexte des erreurs commises, nombreuses, peut faciliter selon nous, chez les étudiants, une véritable prise de conscience de ce qui différencie un *vague argument* basé sur l'intuition d'une preuve *rigoureuse* ; ce point nous paraît être au cœur de cet atelier, et des problèmes de transition institutionnelle entre terminale S et DEUG Sciences.

[21] Nous leur conseillons notamment d'écrire la (ou les) définition(s) du nombre dérivé qu'ils connaissent et qui fait (ou font) intervenir un taux d'accroissement, nous leur demandons s'il y a possibilité de substituer $-h$ à h dans l'expression « $\lim_{h\to 0} (f(x_0+h)-f(x_0))/h$ » et ce qu'elle devient alors, etc...

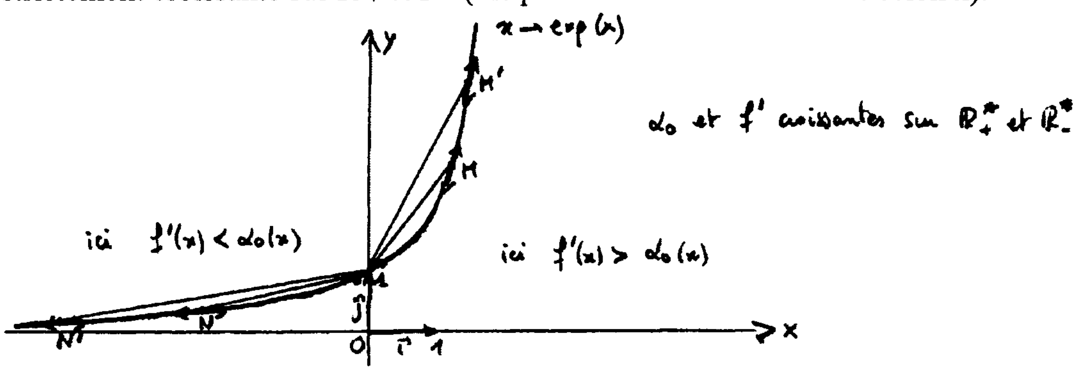
[22] Surtout après la preuve qui vient d'être effectuée du fait que la dérivabilité en un point implique l'existence d'une dérivée symétrique en ce point : bon nombre d'étudiants voient en l'égalité de nature purement algébrique utilisée pour cette preuve, entre $(f(x_0+h)-f(x_0-h))/h$ et la somme $(f(x_0+h)-f(x_0))/h + (f(x_0)-f(x_0-h))/h$, un élément décisif pour l'équivalence des deux propositions.

b) <u>L'atelier concernant l'étude de la classe des fonctions dites « à croissance forte ».</u>

La <u>première séance</u>, consacrée à la *recherche d'exemples* de fonctions à croissance forte sur R, ou à défaut sur un intervalle de R, est destinée à une première familiarisation des étudiants avec cette classe de fonctions. Ils n'ont aucun mal à citer la fonction $x \rightarrow e^x$ comme exemple de fonction à croissance forte sur R, mais généralisent parfois abusivement cet exemple à la famille des exponentielles de base a, avec <u>a>0</u>. Lors d'une préexpérimentation, des étudiants ont également affirmé que la fonction $x \rightarrow x^3$ et, plus généralement, que les fonctions $x \rightarrow x^n$ pour tout n, entier naturel impair, sont à croissance forte <u>sur R</u>.
La raison de ces erreurs, comme de quelques autres du même type, tient à ce que ces étudiants se fient souvent à leur seule <u>intuition personnelle</u>, voire à des connaissances erronées sur les <u>fonctions de référence</u>. Ainsi, l'expression de « *fonctions à croissance forte* » leur inspire bien des associations d'idées (dont ils nous font part à l'oral) ne respectant pas la définition de ces fonctions, donnée dans l'énoncé : « *fonctions dérivables, strictement croissantes, ainsi que leur dérivée première* ». Ce type de considérations les amène le plus souvent à se prononcer sur le problème, sans effectuer aucun calcul. Les autres étudiants se limitent en général au calcul de la dérivée première de la fonction, ce qui, en soi, pourrait suffire pour des fonctions de référence, à condition d'invoquer des propriétés correctes concernant ces fonctions ; ce n'est souvent pas le cas ici. En outre, l'idée d'étudier le signe de la dérivée *seconde* pour vérifier leurs affirmations relatives à la stricte croissance de la dérivée première ne leur vient jamais spontanément. C'est un fait qu'il est intéressant d'observer, puisque ce type de démarche est plus spécifique de la *pratique de l'analyse* <u>à l'université</u>, tandis qu'utiliser des connaissances générales sur les fonctions de référence est un trait davantage propre à la *culture* <u>du lycée</u>.
Le travail technique réalisé sur des familles de fonctions *paramétrées* d'adaptation des valeurs des paramètres en vue d'obtenir des fonctions à croissance forte ne s'avère pas plus aisé, et une certaine « naï veté » s'exprime parfois à travers les <u>modèles simplificateurs</u> proposés par les étudiants (<u>exemple</u> : « *La fonction* $x \rightarrow A.\ln(|x-a|)$ *est toujours à croissance lente, comme l'est le logarithme népérien, donc elle ne peut jamais être une fonction à croissance forte* »).
Dans cette première séance, on demande aussi aux étudiants de définir des critères de natures algébrique (dérivée seconde strictement positive) et graphique (stricte croissance des pentes) pour qu'une fonction soit « *à croissance forte* ». Leurs propositions sont parfois inattendues (la fonction doit vérifier $f(x) \geq x$ pour tout réel x, la fonction $g : x \rightarrow g(x) = f(x)-x$ doit être positive et strictement croissante, etc.), mais souvent vraisemblables. La conséquence de cela est, qu'en général, les divers groupes d'étudiants n'arrivent pas à se prononcer sur la validité d'une proposition effectuée par l'un d'eux, parce que leur expérience de l'analyse et leur culture du lycée ne les a pas préparés à <u>construire</u> *eux-mêmes* des contre-exemples quand ces derniers ne se trouvent pas là, « à portée de la main », comme c'est le cas des fonctions de référence (<u>exemple</u> : la fonction valeur absolue comme cas de non-dérivabilité).
Mais l'activité des étudiants, leurs nombreuses propositions attestent dans certains groupes, en dépit de ces difficultés de validation ou de rejet d'un modèle, d'une bonne implication dans le travail de recherche. Une évolution de leur *rapport* à la <u>preuve</u> et à la <u>généralité</u> est également perceptible. Cela étant, ces difficultés posent à l'enseignant qui a en charge le groupe un réel problème de *gestion de l'atelier*, le poussant à de fréquentes interventions, comme dans le cas du premier atelier. Cette observation et cette gestion pas à pas de l'atelier nous permettent

souvent de mettre à jour chez les étudiants des lacunes que l'on n'imaginait pas forcément encore présentes à ce niveau d'apprentissage. Ainsi certains étudiants estiment que la fonction $x \to x^3$ n'est pas strictement croissante sur R en raison du « faux-plat » de la courbe observable au voisinage de zéro, et quand on leur demande de prouver cette stricte croissance par une étude du signe de x^3-y^3 selon x et y, on constate qu'ils restent très embarrassés.

La <u>seconde séance</u>, consacrée à l'étude des variations de la fonction $x \to \alpha_0(x) = (f(x)-f(0))/x$, et à l'étude du signe de la quantité $\alpha_0(x) - f'(x)$ sur R^*, pour une fonction f à croissance forte sur R, permet de confirmer <u>l'amalgame</u> persistant, supposé, des étudiants entre les quantités $\alpha_0(x)$ et $f'(x)$, à $x \neq 0$ fixé ; ils ont ainsi beaucoup de difficultés à distinguer *graphiquement* ces termes, et encore bien davantage à les faire varier « mentalement » sur un tracé, celui de la courbe exponentielle, afin de percevoir leur évolution selon les valeurs de x. La <u>dévolution</u> du jeu d'allers-retours entre *registres graphique* et *algébrique*, les résultats conjecturés dans le premier de ces cadres étant ensuite destinés à être démontrés dans le second, s'avère délicate, justement du fait du différentiel existant entre le <u>niveau de rigueur</u> des considérations réalisées dans l'un et l'autre de ces deux cadres. Le travail de <u>démonstration</u> dans le cadre algébrique induit, là encore, des microruptures d'ordre *technique* par rapport aux pratiques du lycée, que ce travail concerne le cas général des fonctions dites « à croissance forte » ou même celui de la seule fonction exponentielle. Dans le <u>cas général</u>, il convient d'appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction f, ce qui permet d'écrire pour $x>0$, $\alpha_0(x) = f'(c)$ où $c \in]0,x[$, et pour $x<0$, $\alpha_0(x) = f'(c)$ où $c \in]x,0[$, et de conclure, étant donné la stricte croissance de f', sur le signe de la quantité $\alpha_0(x) - f'(x)$ selon x. On remarque que les étudiants restent ici souvent « bloqués » du fait qu'ils ne pensent pas à situer c par rapport à x, et certains estiment pouvoir déduire directement de la stricte croissance de f et des égalités précédentes le fait que α_0 est strictement croissante sur R^*_+ et R^*_-(ils postulent la croissance de c selon x).



Ce sont là des difficultés liées au théorème des accroissements finis (existence d'un « c » *qu'on ne peut déterminer, en général,* et qui est lui-même une fonction *implicite* de la variable x), qui sont bien <u>spécifiques du post-bac</u>, tout comme celle que représente la dérivation de α_0 dans le cas général[23], la dérivée de $x \to f(x)-f(0)$ étant $x \to f'(x)$ et non $x \to f'(x)-f'(0)$ comme l'affirment certains. Dans le <u>cas particulier</u> (étudié préalablement) de la fonction exponentielle les étudiants sont confrontés à un autre obstacle, celui de l'étude des variations de la fonction $x \to (e^x-1)/x$, dont la dérivée se trouve être la fonction $x \to (xe^x-e^x+1) / x^2$. Il convient ici de considérer la fonction $u : x \to u(x) = xe^x-e^x+1$, et d'étudier son signe par re-dérivation[24], ce

[23] En vue de prouver la stricte croissance de la fonction α_0 à partir du signe de $\alpha_0(x)-f'(x)$ selon x, attendu que la dérivée de $\alpha_0(x)$ est : $(\alpha_0)'(x) = (f'(x)-\alpha_0(x)) / x$.

[24] Certains étudiants finissent par re-dériver la fonction $x \to (xe^x-e^x+1) / x^2$, ce qui ne résout rien, l'expression obtenue étant trop complexe pour que son signe soit aisément décelable. Cette démarche, bien que maladroite, constitue cependant un signe d'évolution par rapport aux seuls automatismes acquis au lycée.

qui demande encore une prise d'initiative importante pour des étudiants en cours de première année de DEUG Sciences, comme le montrent nos expérimentations.

Pour conclure, il faut dire que ces ateliers permettent d'observer *davantage* de microruptures cachées que les tests écrits, et de prendre la mesure des difficultés réelles des étudiants, de les *désamalgamer*. Leur gestion restant souvent délicate en raison de ces difficultés, ces ateliers restent, selon nous, *à reconstruire*. A cette fin, ils doivent faire selon nous l'objet d'un *cahier des charges* pour une meilleure viabilité. D'autre part, ces ateliers peuvent donner lieu à des prolongements utiles et intéressants (fiches de synthèse rédigées par les étudiants, reprises en cours : par exemple, concernant le second atelier, le lien avec la convexité peut être effectué).

VIII/ CONCLUSIONS : PROLONGEMENTS ET PERSPECTIVES.

1°) Des prolongements à cette recherche, au niveau didactique.

Cette recherche a dévoilé un *très grand nombre* de microruptures dans la transition entre le lycée et l'université, bon nombre de ces microruptures devant être gérées individuellement ou sur le *long terme*, comme l'a bien montré le travail effectué lors des ateliers en petits groupes. Des choix sont alors à effectuer parmi ces microruptures, en vue de déterminer celles d'entre elles qui méritent d'être gérées *en priorité*, car le temps dont on dispose en DEUG Sciences ne permet sûrement pas de *toutes* les gérer. Lesquelles doit-on privilégier à l'université dans l'optique d'un apprentissage de l'analyse en DEUG Sciences première année ? Pour quelles raisons et comment s'y prendre ? Voilà autant de questions qui constituent des pistes de recherche à explorer.

Par ailleurs, il convient sans doute, au terme de cette recherche, de *nuancer* les résultats qui concernent la partie de notre étude institutionnelle relative au lycée. En effet, les tâches issues d'un manuel de première S ou de terminale S ne sont pas toutes traitées en classe, donc une analyse prenant en compte la globalité de ces tâches peut être en décalage avec la *réalité* de cette classe. Notre *hypothèse* est ici que notre étude risque de s'avérer optimiste par rapport à cette réalité, car le choix de l'enseignant, selon nous, se porte plutôt vers des tâches standards (notamment en vue de la préparation à l'examen du Baccalauréat), que vers des tâches plus complexes, nécessitant une certaine réflexion, donc aussi plus marginales.
Une enquête, menée auprès d'enseignants de première S et de terminale S, visant à déterminer quels exercices, au sein de divers manuels de lycée, sont réellement travaillés en classe, nous permettrait ici d'affiner notre diagnostic des *pratiques effectives* du lycée. Il faut d'ailleurs s'attendre, en l'espèce, à de grandes disparités d'un établissement à l'autre.

Du côté des enseignants de DEUG Sciences (première année), on pourrait envisager, comme prolongement intéressant de cette recherche, de leur présenter un échantillon de tâches plutôt complexes, susceptibles d'être proposées à ce niveau d'enseignement, en leur demandant dans quelles conditions ils soumettraient ces tâches à leurs étudiants, et de quelles indications ils les assortiraient.

2°) <u>Un réinvestissement pédagogique pour ce travail de recherche : le système de tutorat mis en place à l'université de Marne-la-Vallée</u>.

A l'université de Marne la Vallée, un système de <u>tutorat</u>, mis en place il y a trois ans, est proposé au mois de *septembre* aux étudiants entrant en première année de DEUG Sciences, officiellement pour un travail de révisions avant le début des cours. Fondé sur la correction d'exercices qui ont été fournis aux néo-étudiants à leur inscription à l'université, au mois de juillet, ce tutorat (facultatif) est assumé par quelques uns de leurs aînés, déjà titulaires d'une licence ou d'une maîtrise dans la discipline concernée, et encadrés au niveau <u>pédagogique</u> par un enseignant unique (nous-même pour ce qui est des mathématiques).

En mathématiques, le travail porte sur des exercices théoriquement réalisables avec les seules connaissances de terminale S, mais déjà situés, selon nous, à la <u>transition des deux cultures</u>, du lycée et de l'université, en raison de difficultés *transversales* telles que celles décrites dans notre recherche. L'objectif est de montrer aux nouveaux étudiants l'évolution <u>qualitative</u> des pratiques mathématiques à laquelle ils doivent s'attendre en DEUG Sciences, en dehors de toute considération de *contenus* (complexité des tâches et du degré d'autonomie sollicités, en hausse, difficulté nouvelle des problématiques soulevées, etc.).
En fait, la banque d'exercices est subdivisée en *deux listes* (exercices standards de terminale/ exercices d'approfondissement), et d'une liste à l'autre, des <u>associations</u> entre deux exercices, a priori similaires, sont envisageables, ce qui facilite la *comparaison* entre les pratiques des deux institutions, comparaison que les tuteurs doivent orchestrer en faisant travailler ces nouveaux étudiants. Les <u>intentions pédagogiques</u> qui sont les nôtres, exercice par exercice, inspirées par ce principe, sont préalablement signalées aux tuteurs, oralement et par écrit.

<u>Annexe</u> : <u>Le calcul des limites ; un exemple du travail de distanciation, de capitalisation et de réorganisation des connaissances à mener dans la transition terminale S / DEUG Sciences</u>.

Concernant la détermination de limites de fonctions usuelles, diverses questions se posent à propos des savoir-faire de l'élève au sortir de terminale S. En particulier, quelles techniques est-il capable d'appliquer de manière autonome ? D'appliquer avec indications ? Quel est son niveau de « *distanciation* » par rapport à ces techniques : sait-il identifier les situations où il faut appliquer telle ou telle technique ? Quelles *restructurations* des connaissances seraient nécessaires à ce sujet en DEUG Sciences ?

On recense au lycée trois techniques élémentaires (factorisation par le terme prépondérant, utilisation des quantités conjuguées, reconnaissance d'un taux d'accroissement) constamment utilisées et susceptibles d'être sollicitées sans indications, ainsi que deux types de théorèmes pouvant être à utiliser avec indications (le théorème de composition des limites, les théorèmes d'encadrement). La technique du changement de variable, forme opérationnelle du théorème de composition des limites n'est pas exigible au lycée. Celle du « passage au logarithme népérien », qui permet de calculer des limites de produits ou de fonctions du type $u(x)^{v(x)}$ et de dénouer de nouvelles formes indéterminées (non mentionnées au lycée, notamment du type « 1^{∞} ») n'est pas dans les objectifs du programme de terminale S.

Le travail de distanciation à réaliser au sujet de ces différentes techniques peut être cerné assez précisément : apprendre ce que l'on peut attendre de telle ou telle technique, distinguer ainsi des techniques qui relèvent d'une simple *transformation algébrique* (factorisation par le terme prépondérant, utilisation des quantités conjuguées) de celles qui touchent davantage au *champ de l'analyse* (utilisation de théorèmes d'encadrement, reconnaissance d'un nombre dérivé), comprendre que les deux changements de variables : $u = x-x_0$ (translation) et $u = 1/x$ (inversion) peuvent permettre de ramener un calcul de limite en n'importe quel point réel ou en l'infini mais que, par nature même, un changement de variable ne peut aider à lever une indétermination (il peut seulement la déplacer), etc.

Il y a bien là quelques avancées possibles, non seulement dans la connaissance de techniques de calcul, mais aussi dans la *prise de recul* vis à vis de ces techniques. Ces avancées s'inscrivent dans la continuité de l'enseignement du lycée et pourraient légitimement prendre place en première année de DEUG. La nécessité de situer le *rôle* des développements limités, qui constituent une notion emblématique de la transition avec le lycée, dans le calcul de limites, par rapport à des techniques plus anciennes, le justifierait également ; il n'y a pas lieu de faire « table rase » de ces techniques apprises en terminale S, les développements limités constituant un outil puissant qui les *complète* sans toutefois s'y substituer totalement.

Toutes ces avancées sont dans l'ensemble assez peu travaillées de façon *explicite* en DEUG Sciences, l'effort principal de l'enseignement portant en général davantage sur ce qui est plus spécifiquement *nouveau* ; les ruptures conceptuelles fortes occultent, en quelque sorte, ces microruptures d'ordre technique. Sans doute cette « distanciation » évoquée plus haut est-elle considérée aussi comme relevant du travail privé de l'étudiant qui, sous la pression de calculs de limites techniquement plus délicats (et moins aidés) qu'au lycée, est censé s'adapter à cette situation, porteuse en germes de nouvelles microruptures.

Bibliographie sommaire :

Artigue, M., 1996a : Teaching and Learning Elementary Analysis, in C. Alsina & al. (eds), *8th International Congress on Mathematical Education*, SAEM Thalès, 15-29.
Artigue, M., 1996b : *L'enseignement des débuts de l'analyse, problèmes épistémologiques cognitifs et didactiques*, J.A Dorta, Diaz et alii (eds), La Universidad de la Laguna, Tenerife, 27-53.
Artigue, M., 1998 : L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 18.2, La Pensée Sauvage, Grenoble, 231-261.
Aymes, J., 1996 : Bac : Passage ou rupture ? *La gazette des mathématiciens, n°70*, 3-28.
Castela, C., 1995 : Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures – un exemple concret : celui de la tangente, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 15.1, 7-47.
Chevallard,Y., 1989 : Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, institutionnel, officiel, *Actes du séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, CNRS-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble, 211-236.

Chevallard, Y., 1992 : Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 12.1, La Pensée Sauvage, Grenoble, 73-112.

Cornu, B., 1983 : *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Deledicq, A., 1996 : Est-il possible d'enseigner l'analyse aujourd'hui ? *Repères-Irem vol 24*, 79-99.

Douady, R. 1986 : Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 7.2, 5-31.

Dubinsky, E., 1991 : Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking, in *Advanced Mathematical Thinking*, D. Tall (ed.), Dordrecht: Kluwer, 95-123.

Duval, R., 1993 : Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, vol 5*, IREM de Strasbourg, 37-65.

Hauchart, C., Schneider, M., 1996 : Une approche heuristique de l'analyse, groupe A.H.A, *Repères-Irem vol 25*, 35-62.

I.C.M.I., 1997 : On the Teaching and Learning of Mathematics at University Level, Discussion Document, in M. Niss (ed.), *ICMI Bulletin*, n°43, 3-13.

Legrand, M., 1996 : A la recherche de la pierre philosophale pour enseigner l'analyse, *Repères-Irem vol 24*, 9-10.

Perrin-Glorian, M.J., 1999 : La tangente est-elle vraiment la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage d'un point ? *Repères-Irem vol 34*, 5-12.

Praslon, F., 1994 : *Analyse de l'aspect méta dans un enseignement de DEUG A concernant le concept de dérivée et étude des effets sur l'apprentissage*, Mémoire de DEA, Université de Paris 7.

Robert, A., Rogalski, J., Samurçay, R., 1987 : Enseigner des méthodes, *Cahier de Didactique des Mathématiques, n°38*, IREM Paris 7.

Robert, A., 1998 : Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 18.2, La Pensée Sauvage, Grenoble, 139-190.

Rogalski, M., 1994 : Les concepts de l'E.I.A.O sont-ils indépendants du domaine ? L'exemple de l'enseignement de méthodes en Analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 14.1.2, 43-66.

Rogalski, M., 1996 : Le nouveau public en sciences : quels choix stratégiques ? *Gazette de la SMF n°69*, 13-43.

Rogalski, M., 1998 : Analyse épistémologique et didactique des connaissances à enseigner à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 18.2, Editions La pensée sauvage, Grenoble, 135-137.

Schneider, M., 1991a : Un obstacle épistémologique soulevé par des découpages infinis de surfaces et de solides, *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol 11.2/3, 241-294.

Schneider, M., 1991b : Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente, *Repères-Irem vol 5*, 65-81.

Schneider, M., 1992 : A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané, *Educational Studies in Mathematics*, vol.23, 317-350.

Sfard, A., 1991 : On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on process and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.

Tall, D. (ed), 1994 : A versatile theory of visualisation and symbolisation in mathematics, *Invited plenary lecture at the CIAEM Conference*, Tome I, Toulouse, France, 15-26.

Tall, D., 1996 : Functions and Calculus, in A.J.Bishop et al (eds), *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325, Kluwer Academic Publisher.

Trouche, L., 1999 : Variations sur la dérivation. *Repères Irem vol 34*, 111-126.