PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

GHISLAINE CHARTIER
JEAN-PIERRE ESCOFIER

L'algèbre linéaire en DEUG

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1999-2000, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , exp. nº 1, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1999-2000___3_A1_0>

Séminaire du Laboratoire de Didactique des Mathématiques
7 avril 1999

Ghislaine Chartier - Jean-Pierre Escofier
Laboratoire de didactique des mathématiques de Rennes

L'algèbre linéaire en DEUG

Introduction : Idée d'un travail sur l'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG et méthode retenue

Les travaux des membres du laboratoire concernent essentiellement l'enseignement secondaire et sont des réflexions plus théoriques que celles menées avec des groupes de l'IREM. Nous avons proposé que le laboratoire s'occupe de problèmes d'enseignement en DEUG. Nous avons choisi de travailler sur le tout début de l'enseignement de l'algèbre linéaire. Un groupe de l'IREM avec Roger Le Roux et Jean Mémin avait déjà abordé ce sujet quelques années plus tôt et Roger Le Roux a accepté de diriger un petit groupe de réflexion en 1996-1997, avant son départ à la retraite[1]. Le but de ce nouveau groupe de travail était de voir si nous étions capables de dire quelque chose qui permette d'éclairer un peu un sujet sur l'importance duquel tout le monde s'accorde et auquel d'autres collègues avaient déjà apporté, année après année, leur pierre.
Notre démarche a été guidée par différents travaux d'orientation didactique ayant trait à l'enseignement supérieur d'une manière générale, ou plus particulièrement à l'algèbre linéaire.
Un questionnaire, portant sur l'algèbre linéaire en DEUG, a été soumis aux enseignants de l'UFR de Mathématiques à la fin de l'année universitaire 1996-1997 ; puis un enseignement expérimental a été réalisé au premier semestre de l'année 1997-1998.

I - Le questionnaire aux enseignants

Nous avons demandé dans une petite enquête à nos collègues de l'Institut de nous faire part de leurs idées sur le sujet. C'est sans doute l'occasion de remercier tous ceux, une trentaine, qui nous ont répondu, parfois longuement.

Deux types de réponses

Commençons par analyser les réponses au questionnaire. Nous avions proposé deux types de questions. Des questions précises et vagues à la fois sur ce qui doit être traité en algèbre linéaire en MIAS, en SM, des exemples d'erreurs d'élèves, etc. et une page de réponse libre que certains ont préférée.

Contenu du cours d'algèbre linéaire

Ce que doit être le contenu d'un cours d'algèbre linéaire en premier semestre de DEUG fait l'objet d'un consensus dans les réponses reçues. Il reste deux problèmes. Le premier : faut-il commencer par les matrices ou par les espaces vectoriels et les applications linéaires ? S'il semble y avoir une préférence pour ne pas aborder les matrices en premier, c'est une préférence

---

[1] Le groupe était constitué de : Ghislaine Chartier, Jean-Pierre Escofier, Italo Giorgiutti, Gérard Guidevay, Jean Houdebine, Hervé Lanneau, Marie-Pierre Lebaud, Roger Le Roux , Jean Mémin et Annette Paugam.
Roger Le Roux est décédé fin août 1999.

non marquée, peut-être parce que la question n'était pas explicitement posée. Le second : où couper exactement l'enseignement entre les deux semestres ; c'est une question plus technique qui dépend du contexte de chaque année.

Erreurs grossières

Peu d'erreurs grossières sont indiquées dans les réponses. Les plus citées sont des confusions sur les définitions constitutives de la théorie, des mauvais réflexes, des contradictions entre la dimension d'un espace et le nombre de vecteurs d'une de ses bases, des fautes de logique sur la négation d'une conjonction, d'une implication, sur des quantificateurs ; des réponses signalent des erreurs d'étudiants de licence fréquentes comme AX = 0 implique X = 0 ou encore parler d'une matrice A non carrée et inversible.

Raisons immédiates

Les raisons que nous donnons aux difficultés des étudiants sont nombreuses et certains d'entre nous en donnent de très générales. D'abord, beaucoup insistent sur les lacunes de logique des étudiants, en particulier sur la négation et sur ce que sont une démonstration et une rédaction. Les raisonnements ensemblistes ne sont pas naturels à beaucoup d'étudiants. Dans ces deux domaines, des réflexes élémentaires ne sont pas acquis. Certains soulignent que les étudiants ne savent presque que calculer sans être capables de réfléchir et qu'on leur a demandé peu d'efforts de mémoire pour le bac. On écrit aussi que l'algèbre linéaire propose le maniement d'objets nouveaux en grand nombre : les vecteurs, les espaces vectoriels, etc. Quelqu'un souligne la difficulté de nombre d'étudiants à pouvoir envisager la moindre démarche devant une question, ne fut-ce que pour comprendre ce qui est demandé et l'exprimer sous une forme préparant une démarche de recherche. Le manque de connaissances sur les domaines d'application que nous donnons, comme les polynômes, est aussi une raison des difficultés des étudiants. Quelqu'un pense que la situation de l'algèbre linéaire n'est pas aussi catastrophique que la situation en analyse, ou en algèbre abstraite à la fin du DEUG.

Les solutions proposées

Nous demandions de proposer des solutions à ces difficultés. Elles sont souvent dans l'exigence de mieux mesurer ce que nous faisons. D'abord, limiter les objectifs, et quelqu'un précise qu'il faut apprendre en première année à penser linéairement et faire de l'algèbre linéaire plus tard. Il faut prendre le temps de travailler les ensembles et la logique, partir des connaissances réelles des étudiants venant du bac, faire plus de calculs et manipulations sur des objets simples pour faire mieux comprendre les idées, généraliser après. Plusieurs soulignent la nécessité de travailler dans des domaines plus concrets comme l'analyse des données, l'optimisation, pour y chercher des motivations. On suggère aussi des groupes de travail dans le cadre de l'IREM, ce qui nous semble effectivement souhaitable pour les années à venir.

L'examen

Enfin, l'examen est souvent donné comme le moment crucial où se définissent nos exigences. La plupart des collègues insistent pour que les exercices de l'examen correspondent à ceux faits en TD, ce qui suppose une bonne coordination entre nous, coordination qui est loin d'être respectée par tous, si nous en croyons l'une des réponses, mais il s'agit sans doute de cas isolés. Beaucoup sont d'accords pour poser des questions de cours aux contrôles. L'examen de fin de DEUG remplit deux fonctions différentes : c'est un examen de fin d'études et on peut s'arrêter là ; mais c'est aussi en l'obtenant qu'on est admis en licence ; alors, pourquoi le jury de DEUG ne donnerait-il pas un avis sur la capacité à poursuivre des études ?

Réflexions globales

L'enquête a été le point de départ de réflexions plus globales où l'algèbre linéaire n'apparaît plus en tant que telle. Il est assez difficile de les résumer ensemble. Seul un collègue se demande si la qualité de notre enseignement n'est pas un facteur marginal dans la réussite ou l'échec des étudiants ; la plupart des réponses paraissent poser le même problème. Les étudiants qui rentrent à l'Université sont en DEUG par défaut d'avoir pu rentrer dans une classe préparatoire aux grandes écoles ou un IUT. Ils ne sont pas sélectionnés, sinon par l'échec à trouver ailleurs une voie de poursuite d'études. Seuls, 10 à 15 % d'entre eux sont capables de suivre l'enseignement que nous souhaitons. Il faut, dit un collègue, savoir à quel moment de leur scolarité il faut dire la vérité à ceux d'entre eux qui sont incapables de faire des mathématiques ; qu'ils s'en aperçoivent au bout de 3 ans paraît bien tardif, mais comment maintenir le niveau du diplôme avec des taux de réussite "obligés" de 50%, voire plus. Le responsable de la licence pourra confirmer que les étudiants sortant du DEUG ont un taux de réussite très faible en licence et qu'une bonne partie des reçus de licence ne vient pas du DEUG, nous reviendrons sur ce problème par la suite.

Nous allons rendre compte de l'enseignement expérimental qui a eu lieu en 1997-1998, ainsi que certains résultats de celui-ci ; mais nous débuterons par une présentation rapide de travaux de didactique sur lesquels nous nous sommes appuyés.

II - Travaux susceptibles de guider un enseignement en DEUG

Notre démarche a été guidée d'une part par les réponses au questionnaire évoqué ci-dessus, et d'autre part par différents travaux d'orientation didactique ayant trait à l'enseignement supérieur d'une manière générale, ou plus particulièrement à l'algèbre linéaire.

1) Les difficultés liées à l'enseignement supérieur en DEUG Sciences

Nous reprenons ici des extraits des propos tenus par Aline Robert en introduction au Colloque Didirem de Mars 98, intitulé : "L'enseignement des mathématiques en DEUG scientifique : réussite ou apprentissage ?"

"Une grande partie des difficultés nous semble tenir à une inadéquation entre :
- les contenus (et pratiques associées) à enseigner en DEUG, qu'il est difficile de beaucoup changer, même si certaines suppressions ont eu lieu (du côté des fondements)
- les acquisitions possibles des étudiants, compte tenu de leur connaissances effectives quand ils arrivent, des progrès qu'ils se donnent les moyens de faire, et de l'enseignement qu'ils reçoivent, examen compris."

Tout enseignant qui est récemment intervenu en DEUG scientifique (et les réponses au questionnaire posé à Rennes ne font pas exception) aura été confronté à de telles difficultés. Celles-ci conduisent à une diminution des exigences aux examens, et à un repli vers des exercices techniques aux dépens d'une véritable compréhension en profondeur des notions enseignées.
Comment remédier à ces problèmes ?
Différentes expériences ont été menées en France, dont les caractéristiques communes sont explicitées ainsi par A. Robert :

" Les résolutions proposées nécessitent l'introduction de démarches plus *plurielles*, plus riches qu'en Terminale, soit parce qu'il faut penser à plusieurs choses à la fois, ou penser en plusieurs temps, soit parce qu'il faut changer de domaine de travail, ou de point de vue, etc. ; cela nécessite aussi d'avoir de nouveaux garde-fous (moyens de contrôle) car l'intuition, le concret, ne suffisent plus pour des notions trop généralisatrices (espaces vectoriels par exemple), il faut donc se construire des situations de référence (exemples d'espaces vectoriels faciles mais non banaux)."

Cette autonomie des étudiants, leur capacité à changer de point de vue, à faire appel à des connaissances antérieures, à résoudre des problèmes pour lesquels ils ne disposent que de peu d'indications nous semble être le but essentiel à atteindre, quitte à limiter la quantité de sujets enseignés.

2) Analyse des contenus à enseigner

Pour atteindre cet objectif d'organisation des connaissances chez les étudiants, nous retenons les concepts suivants, dégagés par différents travaux de didactique (et exposés en détail dans [Robert 98]) : changements de cadre et de registre ; niveaux de conceptualisation.

Cadres et registres en algèbre linéaire

En algèbre linéaire, on peut travailler dans le cadre de $\mathbb{R}^n$, dans celui des fonctions, des suites, dans un cadre formel...
D'autre part on distingue trois registres : le registre graphique, celui des tableaux, et celui de l'écriture symbolique.

Ainsi l'exercice suivant, fréquemment posé en première année de DEUG, est formulé dans un cadre formel, avec le registre de l'écriture symbolique :

Soit E un espace vectoriel et u, v, w trois vecteurs de E deux à deux non colinéaires. *La famille {u,v,w} est-elle libre ?*

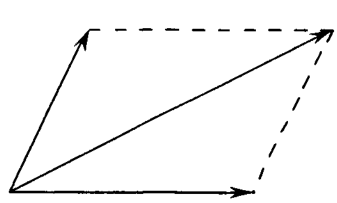
Les étudiants qui tentent d'y répondre en demeurant dans le cadre formel échouent la plupart du temps, alors qu'un changement de cadre et/ou de registre leur fournit un contre-exemple simple, comme dans les réponses ci-dessous (réponses qui, par ailleurs, ne seront pas nécessairement considérées comme correctes) :

Registre tableau-Cadre de $\mathbb{R}^2$

Non , les vecteurs $u=(1,0)$, $v=(0, 1)$ et $w=(1,1)$ fournissent un contre-exemple

Registre graphique (cadre non précisé)

Non, les vecteurs dessinés ci-dessous donnent un contre-exemple :



Les différents niveaux possibles de mise en fonctionnement des connaissances

Ces niveaux fournissent un outil d'analyse des tâches proposées. On distinguera :

a) *Le niveau technique*
Application immédiate de propriétés, d'algorithmes, ou de définitions, comme par exemple : calculer les coordonnées d'un vecteur dans une base, effectuer un produit de matrices...

b) *Le niveau mobilisable*
Des indications dans l'énoncé de l'exercice, mais l'exercice n'est pas une application immédiate du cours. Ainsi pour résoudre l'exercice suivant :

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ *une famille génératrice de* $\mathbb{R}^3$. *La famille* $\{e_1, e_2\}$ *est-elle libre ?*

Un étudiant doit être capable de mobiliser et d'associer seul les connaissances suivantes :
- Une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ qui comporte trois vecteurs est une base de $\mathbb{R}^3$
- Une base est une famille libre
- Une sous-famille d'une famille libre est libre.

c) *Le niveau disponible*
Résolution sans indication, recherche de contre-exemples, changements de cadre et de registre non
indiqués.
Par exemple dans l'exercice suivant :

Soit E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Donner une condition nécessaire ett suffisante pour que F ♦ G soit un sous-espace vectoriel de E

Un étudiant doit d'abord conjecturer la condition cherchée à l'aide de situations de référence, puis mettre en place une démonstration complexe.

Les recherches en didactique montrent que les connaissances de niveau technique sont très fragiles (notamment du point de vue de la mémorisation) ; elles sont donc insuffisantes, mais ne sont pas à négliger pour autant ; il est nécessaire de soumettre aux étudiants des tâches de ces trois niveaux.

3) Recherches didactiques sur l'enseignement de l'algèbre linéaire

De nombreuses études ont été menées en France et à l'étranger sur l'enseignement de l'algèbre linéaire. La plupart d'entre elles sont rassemblées dans le livre intitulé : "*L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*", coordonné par Jean-Luc Dorier (La Pensée Sauvage, 1997).

On peut citer notamment :

- Les travaux de Jean-Luc Dorier.
  Outre la partie historique de ce travail, l'auteur s'intéresse notamment aux liens entre logique formelle et réussite en algèbre linéaire (les difficultés en logique formelle sont fréquemment citées comme facteur d'échec en algèbre linéaire dans les réponses au questionnaire soumis aux enseignants de Rennes); il montre que les capacités en logique et en algèbre linéaire sont en fait peu corrélées.

- L'expérience menée à Lille à l'initiative de Marc Rogalski.
  Cette expérience d'enseignement d'algèbre linéaire en première année a duré une dizaine d'années (à partir de 1984) ; elle reposait notamment sur la méthode de Gauss et la notion de rang.
  Elle a donné lieu à une étude approfondie des difficultés des étudiants concernant l'algèbre linéaire et des moyens permettant d'améliorer l'enseignement de celle-ci, bien que, d'après les participants à cette expérience, il ne puisse exister au niveau du DEUG première année de "vrai problème" pour lequel l'algèbre linéaire se présente comme l'outil optimal de résolution.
  On peut retrouver une partie des fiches de travaux dirigés d'algèbre linéaire dans les fiches de l'USTL (disponibles à la bibliothèque de l'IREM de Rennes).

- Les travaux déjà menés à Rennes : la brochure IREM (1993) intitulée "*Les débuts de l'algèbre linéaire en DEUG A* ", et la thèse de Ousman Rabiou.

D'autre part la brochure de la commission Inter-Irem Université :
"Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A Première année" comporte une interrogation et des suggestions portant sur l'algèbre linéaire (et bien d'autres éléments utiles à l'enseignant de DEUG).

III - Les conditions de l'expérience

1) L'enseignement classique au premier semestre 1997-1998 (MIAS1)

Au premier semestre 1997-1998, la première année du DEUG MIAS de l'Université Rennes1 comportait un module intitulé "Mathématiques 1" dont la moitié environ était consacrée à l'algèbre linéaire et à la géométrie.

L'algèbre linéaire était donc enseignée à raison de 1h30 de cours magistral et 2h30 de travaux dirigés par semaine, durant 12 semaines.

Cet enseignement débutait par l'étude des systèmes linéaires et leur résolution par la méthode de Gauss ; on abordait ensuite l'algèbre linéaire, mais uniquement dans le cadre des sous-espaces vectoriels de K^n (avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

La notion d'espace vectoriel n'était pas définie, et la définition donnée pour un sous-espace vectoriel était celle de sous-espace engendré : un sous-espace vectoriel de K^n est l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs et est noté $\mathrm{Vect}(v_1,\dots v_n)$.

Les matrices et les opérations sur les matrices étaient ensuite vues, sans qu'il soit fait mention d'applications linéaires ; on passait rapidement aux techniques d'échelonnement selon les lignes ou les colonnes, et à leur utilisation pour déterminer d'une part le rang d'un système de vecteurs, et d'autre part les équations d'un sous-espace.

Venait ensuite un enseignement de géométrie affine et affine euclidienne en dimension 2 et 3, dans lequel on utilisait les résultats d'algèbre linéaire pour étudier les positions relatives de plans et de droites dans l'espace, pour calculer la distance d'un point à un plan ou une droite...

En milieu d'enseignement (novembre) avait lieu un partiel d'une durée de trois heures, et les étudiants passaient en janvier l'examen correspondant.

Ainsi la partie algèbre linéaire de ce cours se situait uniquement dans le cadre de K^n et dans le registre tableau ; le cours de géométrie ne permettait pas de changement de cadre, car les connaissances d'algèbre linéaire n'y étaient réinvesties que dans les démonstrations du cours, et non dans les exercices proposés aux étudiants.

Quant aux tâches proposées en travaux dirigés comme à l'examen, elles étaient essentiellement de niveau technique.

Ce contenu d'enseignement, initialement conçu pour aider les étudiants en débutant par l'étude des objets qui leur sont familiers : les systèmes linéaires, et en limitant l'étude des espaces vectoriels au cas particulier de $\mathbb{R}^n$, a conduit à des difficultés spécifiques.

Les étudiants, en particulier les plus faibles d'entre eux, se sont repliés vers la méthode de Gauss et les techniques d'échelonnement ; renonçant à comprendre une structure qui restait trop abstraite, et remarquant en outre que les exercices consistaient principalement à déterminer le rang d'un système de quatre ou cinq vecteurs à quatre ou cinq coordonnées, ils ont systématisé l'emploi de l'échelonnement sans y associer de sens.

Ainsi, lors d'un questionnaire posé au second semestre 1996-1997 à des étudiants en difficulté, nous avions demandé la définition mathématique de la dimension ; parmi les seize étudiants ayant proposé une réponse, six font mention de "matrice échelonnée" ou de "réduction".

Au deuxième semestre de la première année, les étudiants revoyaient l'algèbre linéaire dans un module intitulé "Mathématiques 2", il s'agissait alors de l'algèbre linéaire générale, avec les différents cadres et registres évoqués ci-dessus, et les tâches associées étaient exclusivement de niveau mobilisable ou disponible.

La structure de l'enseignement a été depuis modifiée, mais le schéma ci-dessus a été reproduit (au moins en 1998-1999), sur un seul semestre cette fois : six semaines de travail sur $\mathbb{R}^n$ et six sur l'algèbre linéaire générale.

2) Le dispositif de l'expérience

Nous disposions pour notre expérience d'un amphi constitué de cinq groupes de TD. Nos étudiants devaient passer le même contrôle continu et le même examen que ceux des quatre autres amphis ; contrainte forte, qui, conjuguée à la faible durée de l'enseignement, ne nous a pas permis de mener une expérience aussi radicale que nous l'aurions souhaitée...

L'équipe enseignante se réunissait toutes les deux semaines environ pour confronter les expériences et élaborer les feuilles de travaux dirigés et les textes des devoirs.

IV - Les choix faits pour le cours

Nous présentons ici les principaux choix faits pour le cours et les raisons de ces choix.

1) Commencer par la géométrie

Comme nous l'avons signalé ci-dessus, le cours "normal" comportait un enseignement de géométrie, qui devait suivre celui d'algèbre linéaire.

Nous avons choisi de débuter par une partie de cet enseignement de géométrie affine, en étudiant en particulier les plans et les droites dans $\mathbb{R}^3$: équations, positions relatives ...

La résolution de systèmes linéaires 3x3 a été présentée comme l'étude de l'intersection de trois plans.

Ce choix nous permettait :

- de partir d'un cadre familier aux étudiants, dans lequel il était en outre possible d'effectuer des tâches nouvelles qui seront réinvesties en algèbre linéaire, comme notamment l'utilisation de paramètres, le calcul d'équations d'un sous-espace et le passage paramétrique-cartésien (voir à ce sujet la thèse de Marlène Alvez-Diasz "*les problèmes d'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire* "),
- d'introduire progressivement le vocabulaire de l'algèbre linéaire : nous avons parlé dans le cours de géométrie de dépendance linéaire, de droite et de plan vectoriel,
- d'inciter les étudiants à s'aider de représentations graphiques.

Il s'agissait en fait d'introduire une géométrie plus "linéaire" que celle vue en Terminale, et donc plus à même de servir de support à l'algèbre linéaire ; par exemple, la détermination de l'équation cartésienne d'un plan faite en Terminale à l'aide du vecteur normal occulte l'aspect générateur, qu'on retrouve si on passe par l'équation paramétrique.

Toutefois il ne faut pas surestimer l'aide de la géométrie ; la limitation à la dimension 3 ne permet pas de donner un sens suffisant à certains notions centrales, comme celle de rang ; d'autre part le passage du point de vue affine au point de vue vectoriel est une difficulté supplémentaire pour les étudiants.

2) Donner des exemples variés d'espaces vectoriels

La limitation à $\mathbb{R}^n$ ne nous semblait pas aller dans le sens d'une meilleure compréhension par les étudiants de l'algèbre linéaire ; en effet l'importance de celle-ci réside notamment dans ses aspects unificateurs ; le constat de similarités peut aider les étudiants à dégager la structure sous-jacente, ou au moins à disposer de situations de référence.

Nous avons donc dès le départ parlé de vecteurs du plan et de l'espace pointés (plan et espace affines vectorialisés en un point), de carrés magiques, de suites, de fonctions et de polynômes.

3) Travailler longuement la notion de combinaison linéaire

La notion de combinaison linéaire est nouvelle pour les étudiants. Cette expression n'évoque guère pour eux que la résolution de systèmes "par la méthode de la combinaison linéaire". Elle nous a semblé nécessiter un travail spécifique ; ce travail a aussi permis de soulever des problèmes qui nous paraissent essentiels, et d'attirer l'attention des étudiants sur les similarités entre les différents domaines cités
ci-dessus.

Nous avons ainsi amené les étudiants à se poser la question de la stabilité par combinaison linéaire pour un ensemble donné ; à se demander si certains objets peuvent s'écrire comme combinaison linéaire d'autres (ce qui conduisait à poser des problèmes d'existence, particulièrement difficiles et entièrement nouveaux pour les étudiants) ; à examiner l'unicité des coefficients d'une combinaison linéaire.

Ce n'est qu'à la suite de ce travail que nous avons introduit le vocabulaire : famille génératrice, famille libre et base.

4) Eviter l'introduction précoce des méthodes d'échelonnement

Nous avons déjà mentionné plus haut l'attirance naturelle des étudiants, en particulier les plus faibles d'entre eux, pour les procédures algorithmiques.

Afin de remédier à ce problème, nous avons choisi d'éviter de nous centrer sur la méthode de recherche du rang d'une famille de vecteurs utilisant l'écriture en colonnes dans une matrice ; nous avons montré en cours l'invariance, par les opérations élémentaires, du sous-

espace engendré ; dans les exercices, les étudiants conservaient l'écriture « Vect », par exemple on écrivait :
Vect $(e_1, .., e_n) = \text{Vect}(e_1, e_2 - e_1, ..., e_n - 3e_1)$.

5) Introduire les applications linéaires

Nous avons choisi de ne pas introduire les matrices comme simples tableaux de nombres, mais de donner quelques brèves notions sur les applications linéaires afin de donner un sens notamment au produit matriciel.

La notion d'application linéaire et plus particulièrement celle d'isomorphisme permettait également de terminer la partie purement algèbre linéaire du cours en parlant de l'isomorphisme entre espaces de même dimension.

6) Utiliser des dessins

Tout au long de ce cours, nous avons utilisé beaucoup de dessins, en essayant de poser au départ des conventions de dessin suffisamment claires pour éliminer l'essentiel de l'ambiguïté. Nous souhaitions que les étudiants aient une bonne idée de la représentation d'un sous-espace vectoriel du plan ou de l'espace pointé, de l'effet d'une application linéaire... Mais cela ne va pas de soi. Beaucoup d'étudiants ne notent même pas les dessins qu'on leur propose, expliquant que ces dessins ne leur évoquent rien, ce qui est une grosse difficulté pour l'enseignant.

V - Les résultats de l'expérience

1) Questionnaire

Nous avons soumis à nos étudiants en décembre 1997 le questionnaire que nous avions proposé l'année précédente, d'une part aux étudiants en difficulté, d'autre part à des étudiants du module "Maths2".
Nous examinons ici les réponses à la dernière question :

"Donner la définition mathématique de la dimension et un exemple "

Pour l'analyse des réponses des étudiants, nous avons retenu les critère suivants :
- « définition acceptable » : nous caractérisons ainsi les définitions qui sont justes d'un point de vue mathématique, même si elles sont mal formulées ou surabondantes (ex : « c'est le nombre de vecteurs d'une base génératrice de l'espace »)
- « la base » : nous caractérisons ainsi les réponses dans lesquelles les étudiants mentionnent « la base » de l'espace considéré au lieu « d'une base ». Ceci peut indiquer une difficulté à considérer qu'il existe une infinité de bases pour un même espace.
- « exemple » : étudiants ayant fourni un exemple
- « Vect théorique » : nous caractérisons ainsi les réponses dans lesquelles les étudiants donnent un exemple non explicite, du type : *$F= Vect\{e_1, e_2, e_3)$*
- « Vect dans IR^n » : nous caractérisons ainsi les réponses dans lesquelles les étudiants donnent un exemple du type F=Vect $\{(1,0)\}$
- « Autre » : autres exemples

Nous comparons dans le tableau ci-dessous les réponses des deux populations :

	Maths2 1996 (30 éts.)	Maths1exp 1997 (40 éts.)
Définition acceptable	14 (47 %)	20 (50%)
La base	8 (27%)	7 (17,5%)
Exemple	22 (73 %)	29 (72 %)
$\mathbb{R}^n$	5	5
Vect théorique	12 (40%)	2
Vect dans $\mathbb{R}^n$	1	16 (40%)
Autre	1	3

Le pourcentage de définitions acceptables est sensiblement le même dans les deux populations. En revanche, on note un écart assez net sur l'emploi de l'article "la" devant le mot base. En arrivant du lycée, les bacheliers ont souvent l'idée qu'il n'existe qu'une seule base pour l'espace géométrique qu'il ont rencontré. Notre hypothèse est que cette conception est renforcée par l'emploi de la méthode d'échelonnement et les exercices proposés en Maths1 "classique" : les exercices sont formulés de façon telle que tous les étudiants vont aboutir à la même base.
Il semblerait que les étudiants ayant suivi notre enseignement soient moins soumis à cette tendance.

D'autre part, si le même pourcentage d'étudiants propose effectivement un exemple, le type d'exemple majoritaire chez les étudiants de Maths2 reste très théorique ; on trouve beaucoup de réponses du genre :
"Si F= Vect{e_1, e_2,e_3} et si la famille {e_1, e_2, e_3} est libre, alors la dimension de F est 3"

Les étudiants ayant suivi l'expérience proposent en revanche des exemples dans un registre tableau, et dans le cadre de $\mathbb{R}^n$. Ces exemples sont donc plus concrets que les précédents ; en revanche, les changements de cadre souhaités n'ont pas eu lieu ; les étudiants n'ont pas tenté d'utiliser un autre cadre que celui de $\mathbb{R}^n$ (notons qu'ils avaient été prévenus que tout ce qui avait trait aux suites, aux polynômes etc... ne ferait pas partie de l'examen).

2) A l'examen

L'examen de Maths1, janvier 1998, comportait un seul exercice d'algèbre linéaire, noté sur six points.

Exercice 3

1) Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique, on considère les vecteurs :
$v_1=(1,-1,3,2)$ $v_2=(3,-1,0,1)$ $v_3=(1,1,-6,-3)$ $v_4=(0,2,-9,-5)$
On appelle F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.
a) Déterminer la dimension de F et en donner une base.
b) Donner un système d'équations cartésiennes de F.
2) Soit $G=\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 , x-y+2z-4t=0\}$.
a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
b) Donner une base de G.
3) Montrer que $G \supset F$. A-t-on F=G ?

On peut résumer ce texte de la façon suivante :

1)a) Détermination de la dimension et d'une base d'un sous-espace donné par une famille génératrice
1)b) Détermination d'un système d'équations d'un sous-espace connaissant une base de ce sous-espace
2)a) Montrer qu'un ensemble défini par une équation cartésienne est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$
2)b) Déterminer une base d'un tel sous-espace
3)a) Montrer qu'un sous-espace est inclus dans un autre, sachant que l'on dispose d'une base et d'un système d'équations cartésiennes pour chacun
3)b) Conclure que l'inclusion est stricte

Nous avons tenté d'analyser séparément les résultats des étudiants ayant suivi l'expérience et ceux des autres étudiants ; cependant il est dans la pratique extrêmement difficile de réaliser une telle séparation, certains étudiants ayant changé de groupe en cours de semestre ; il s'agit donc de conserver une grande prudence vis-à-vis des résultats ci-dessous.
Les résultats portent sur 155 copies que nous avons analysées ; 57 copies proviennent d'étudiants ayant suivi l'expérience, et 98 d'autres étudiants.

a) Résultats bruts

Maths1, janvier 1998

	Note examen	Note ex3	Réussite 1)a)	Réussite 1)b)	Réussite 2)a)	Réussite 2)b)	Réussite 3)a)	Réussite 3)b)
Exp.	10,8	2,5	67 %	18%	48%	26%	32%	39%
N.exp.	9,1	2,7	50%	22%	54%	37%	38%	52%

Le tableau ci-dessus donne les performances des étudiants à l'examen, à l'exercice 3 (exercice d'algèbre linéaire), puis question par question[2].
Il en ressort que, si les résultats de l'examen sont meilleurs pour nos étudiants, leurs résultats en algèbre linéaire sont moins bons. Ceci est, nous semble-t-il, une conséquence normale des choix d'enseignement effectués, et qui privilégiaient notamment une logique d'apprentissage par rapport à une logique de réussite. Nos étudiants avaient déjà rencontré ce type d'exercice, mais beaucoup moins systématiquement que les autres étudiants.

En examinant les résultats au partiel du Module de second semestre : Maths2, nous pouvons constater que nos étudiants ont des résultats supérieurs à ceux des autres (et aussi que la partie Analyse, sur 10 points, a posé au moins autant de problèmes aux étudiants que la partie Algèbre Linéaire) :

	Moyenne au partiel	Moyenne Alg.Lin. (10 pts.) (% note totale)
Exp.	7,5	4,2 (56%)
N.exp.	5,58	3,08 (55%)

[2] Exp. désigne les étudiants ayant suivi l'enseignement expérimental, et N.exp. les autres étudiants.

Afin d'obtenir des résultats plus fins, nous avons constitué une grille d'analyse des copies et effectué l'analyse implicative correspondante à l'aide du logiciel Chic. Nous n'attendions pas du logiciel des conclusions irréfutables, mais la mise à jour de phénomènes, vérifiés ensuite sur les grilles d'analyse, qui auraient échappé à une analyse des données brutes.

c) Analyse implicative et mise en évidence de filiations

Nous avons choisi de ne présenter ici que les traits les plus caractéristiques mis en évidence par l'analyse (les liens retenus indiquent des implications d'au moins 97%).

- La question 1) a) est la seule que nos étudiants réussissent mieux que ceux n'ayant pas suivi l'expérience ; d'autre part les liens implicatifs sont différents pour les deux populations.

-La question 2)b) : démontrer qu'un ensemble donné par une équation cartésienne est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ présente un lien fort, pour les deux populations, avec la capacité des étudiants à donner des explications sur la méthode employée. Ce lien, inattendu, semble indiquer que la réussite à cette tâche à laquelle on porte en général peu d'attention est peut-être significative d'une certaine compréhension des étudiants.

Si on examine les réponses proposées, on note d'abord que la méthode privilégiée est celle de la stabilité par combinaison linéaire. En dehors de cette méthode, les étudiants disposent de deux théorèmes du cours pour répondre à cette question : l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel, et un ensemble de la forme $\mathrm{Vect}\{e_1, ..., e_n\}$ est un sous-espace vectoriel. Le premier théorème n'est pratiquement pas employé, ou très maladroitement ; le second est employé par moins de 20% des étudiants.

Quant à l'emploi de la méthode de stabilité par combinaison linéaire, il donne lieu à plusieurs confusions, dont les plus fréquentes sont :
-Confusion entre G et $\mathbb{R}^4$
-Confusion vecteur-équation

Certains correcteurs ne tiennent pas compte de ces confusions, tandis que d'autres refusent la réponse correspondante.

Conclusion

En ce qui concerne ce que nous retirons de ce groupe de travail, nous dirions que ce n'est pas une solution miracle, ni même une ébauche de solution. Plutôt le plaisir d'avoir participé à un petit groupe de travail, d'avoir discuté de la présentation et des exercices comme nous ne l'avions encore jamais fait, d'avoir pu nous sentir un peu différents vis à vis des étudiants. Mais le temps nous a souvent manqué pour préparer des textes de devoirs et de TD et certains que nous avons mis longuement en chantier, n'ont pas vu le jour.

Les étudiants actuels

C'est en 1984 que les premiers élèves issus de la réforme Haby sont arrivés à l'Université. Ils avaient eu une heure de mathématiques de moins par semaine au collège, ce qui correspond à une année de mathématiques sur 4 ans. D'autre part, les programmes de sciences naturelles, d'histoire, etc., en lycée ont été alourdis et des allégements de programme en mathématiques en ont résulté, en particulier l'algèbre linéaire a disparu. En 1990, les Terminales

C avaient 9 heures de mathématiques, les Terminales D avaient 6 heures. Puis, en 1994-1995, elles ont été plus ou moins fondues ensemble avec un enseignement revu à la baisse : 6 heures pour les Terminales S et 2 heures de plus pour ceux qui font la spécialité mathématiques, l'articulation de ces deux enseignements posant de nombreux problèmes.

A la lecture des programmes de Terminale on notait, il y a dix ans, les garde-fous qui sont mis en place : "on se limitera à ...", "on entraînera à la pratique", "tout exposé de logique mathématique est exclu", "aucune connaissance spécifique ne peut être exigée", "les différents énoncés sur la continuité ne constituent pas un objectif en soi", etc. Il s'agissait à l'époque d'éviter que certains en fassent trop en précisant les niveaux d'approfondissement, et l'accent était mis sur le travail personnel, la pratique de la démarche scientifique, les capacités d'organisation, la formation de *tous* les élèves de chaque classe. Les programmes actuels conservent le même esprit. On peut apprécier en particulier leur souci d'introduire un minimum de perspective historique en regrettant leur appauvrissement.

Capacités des étudiants

Nous voudrions souligner une impression générale. On peut lire beaucoup de passages tout à fait incohérents dans les copies des étudiants. Il nous semble que cela montre que nombre d'étudiants ne maîtrisent pas ou plus les bases logiques des mathématiques qu'on leur demande d'appliquer à l'Université, et tout ce qu'on va chercher à leur apprendre sera construit sur un terrain peu sûr et s'écroulera. Ils ont encore des notes correctes et supérieures à la moyenne, car leurs capacités de calcul leur permettent de résoudre les équations différentielles, les systèmes linéaires ou d'effectuer les calculs d'intégrales de fractions rationnelles qu'on leur propose. Ils font encore illusion, mais ce ne sera plus pour très longtemps, car l'absence de ces capacités ne leur permettra plus d'avancer. Il est sans doute trop tard pour tout reprendre à la base, mais que faire pour eux ?

Répéter et prendre le temps

Beaucoup pensent qu'en répétant, en décortiquant, en réexpliquant dix fois un cours, un exercice, nous finirons par faire comprendre ce que nous voulons à un étudiant. Il nous semble que ceci n'est pas vrai pour pallier à ces difficultés des étudiants de DEUG, pour eux, les difficultés sont bien en amont : il leur faudrait peut-être d'abord revenir en arrière pour enfin maîtriser des réflexes que nous considérons comme évidemment acquis depuis longtemps. Nous pouvons encore ajouter que nous ne pensons pas qu'un petit cours de logique les sauverait, car il leur donnerait un mode d'emploi sans formation pratique et les réflexes ne seraient toujours pas acquis. En suivant le travail d'un étudiant en séance de TD, on voit souvent s'ouvrir ainsi des gouffres de lacunes dans le savoir faire de base. Enfin, ces étudiants sont incapables de travail de synthèse et ils n'ont pas les moyens de consolider ce que nous venons de leur expliquer, peut-être même l'oublient-ils sur le champ.

La licence

La catastrophe qui se prépare n'est pas forcément pour les semaines à venir ni pour la seconde année, où des exercices de niveau technique, du type de ceux qu'ils ont bien appris à résoudre dans le secondaire, leur permettent encore d'avoir des points et d'obtenir la moyenne.

Le saut fatal a lieu lors du passage en licence de mathématiques. Les exercices qu'on leur propose à l'examen sont encore souvent faciles, mais ils demandent une maîtrise du langage et de la pensée mathématique qui leur manquait déjà deux ans auparavant.

Voici les statistiques de la licence de mathématiques de Rennes en 1999 : 52 étudiants viennent cette année du DEUG MIAS de Rennes ; ils ont obtenu leur DEUG avec une moyenne de 11. En avril, la moyenne de Licence est autour de 7 et 13 d'entre eux seulement dépassent 10. Quant aux 6 DEUG MASS, ils avaient obtenu leur DEUG avec des moyennes de 10,4 à 12,3 et leurs moyennes en avril sont entre 2,8 et 4,6 !

Cette analyse est certainement trop tournée vers la licence de mathématiques, ce à quoi nous a entraîné l'enquête auprès des enseignants, puisque ceux qui y ont répondu sont des enseignants de mathématiques qui enseignent en licence ou maîtrise. En fait, plus de la moitié des étudiants sortant du DEUG MIAS s'orientent vers d'autres formations où leur réussite est meilleure : 30 vers la licence pluridisciplinaire qui vient de se mettre en place, 30 vers la licence d'informatique, 10 vers une licence de physique, 19 vers le diplôme d'ingénieur en informatique, 6 vers un IUP.

Pour des groupes de travail

Nous souhaiterions, en dehors des problèmes d'organisation difficiles du DEUG, que soient mis en place un ou deux groupes de recherche financés conjointement par l'IREM et l'IMR. Comme pour les groupes habituels de l'IREM, il faudrait définir a priori des thèmes de travail. On pourrait se proposer, toujours dans le contexte d'un enseignement précis, de chercher à caractériser ce qui manque à beaucoup d'étudiants pour réussir. Il faudrait aussi prendre le temps de voir ce que font d'autres Universités. La distribution de feuilles de TD et de cours communs à tous les groupes est un obstacle au travail de ce type de groupe et il faudrait trouver une solution convenable.

Ceci étant dit en espérant :

- que l'IREM survive à la crise actuelle ; ce serait une idée pour le remissionner ;
- que l'Institut Mathématique de Rennes trouve une solution acceptable par l'Université pour allouer suffisamment d'heures de service pour que les conditions de travail propres aux groupes IREM soient réunies ; sans ces heures de décharge, ce ne sera pas possible de travailler sans être débordé rapidement par le temps ; mais comment trouver une solution du point de vue institutionnel ?

Espoirs

Que le travail de notre petit groupe puisse continuer avec l'appui de tous et être utile.

Qu'une vision plus globale de l'enseignement des mathématiques, du DEUG MIAS à tous ses débouchés, se dessine, avec toutes les difficultés de nos étudiants.

Que ce que nous venons de dire permette des discussions et l'émergence ou la clarification de bonnes idées.

BIBLIOGRAPHIE

BARDY P., LE BELLAC D., LE ROUX R., MEMIN J. et SABY D. (1993) : *Les débuts de l'algèbre linéaire en DEUG A,* Irem de Rennes.

DIAS M. (1998) *Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire,* Thèse de doctorat de l'université Paris 7.

DORIER J.L. (1990) *Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approche historique et didactique.* Thèse de doctorat, université de Grenoble.

DORIER J.L. (1997) Ed., *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question,* La pensée sauvage, Grenoble.

OUSMAN R. (1996) *Contribution à l'enseignement d'algèbre linéaire en première année d'université.* Thèse de doctorat, université de Rennes1.

ROBERT A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 18.2, pp139-190, 1998.