PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

JEAN HOUDEBINE

La diversité des textes de démonstration

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998, fascicule S4 « Produire et lire des textes de démonstration », , p. 23-37

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998___S4_23_0>

LA DIVERSITE DES TEXTES DE DEMONSTRATION

Jean Houdebine

La signification du mot "démonstration" dépend beaucoup du contexte. Quand on lit des articles, des polycopiés, des documents IREM, quand on écoute une conférence, quand on assiste à un atelier sur ce sujet, il n'est pas toujours facile de savoir exactement de quelle "démonstration" on veut parler. S'intéresse-t-on à la preuve ? La résolution de problème est-elle au centre de la réflexion ? Veut-on parler d'un texte de forme particulière ?

Même quand c'est ce dernier point de vue qui est choisi, l'ambiguïté demeure. En effet, ce sont des textes de formes très différentes qui vont être rangés sous le mot "démonstration". C'est ce dernier point que je voudrais développer. Mon but n'est pas de faire une étude historique ou épistémologique. Il est de travailler sur les textes explicitement proposés aux élèves de Collège et de Lycée. Du coup, les conséquences didactiques de cette diversité font partie de mon propos.

Dans un premier temps je vais donner des exemples montrant la diversité des démonstrations, d'abord en Géométrie, puis dans les autres domaines mathématiques abordés au collège et au lycée. Une deuxième partie sera consacrée à la variabilité. Des questions didactiques serviront de conclusion.

Des textes de démonstration variés en géométrie

C'est le domaine où la démonstration est la plus présente dans notre enseignement. Nous allons voir que, même en se restreignant à ce domaine, on trouve des démonstrations assez nettement différentes.

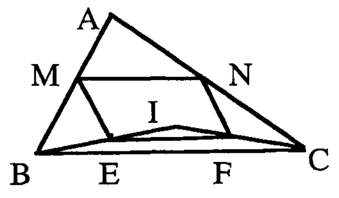
Une démonstration de quatrième

La démonstration présentée ci-dessous est caractéristique de ce qui est proposé aux élèves de Quatrième. C'est à ce type de texte que font le plus souvent référence les articles qui s'intéressent à la démonstration en Quatrième (par exemple ceux de Raymond Duval et Marie Agnès Egret ou les travaux de l'IREM de Poitiers). Ces textes sont clairement composés d'un enchaînement de pas. On peut représenter leur structure par un organigramme. Les statuts que prennent les propositions sont : proposition d'entrée, théorème, conclusion d'un pas.

Un enchaînement de pas

Énoncé

Soient ABC un triangle et M et N les milieux de [AB] et de [AC]. On choisit un point I intérieur à ce triangle. On désigne par E et F les milieux de [IB] et de [IC]. Montrer que MNFE est un parallélogramme.



Démonstration

On sait que M et N sont les milieux de [AB] et de [AC]. En utilisant le théorème des milieux dans le triangle ABC, on obtient (MN)//(BC). De même, on sait que E et F sont les milieux de [IB] et [IC]. En utilisant le même théorème pour le triangle IBC, on obtient (EF)//(BC). La transitivité du parallélisme permet d'en déduire que (MN)//(EF).

On sait que M et E sont les milieux de [AB] et de [BI]. En utilisant le théorème des milieux dans le triangle ABI on obtient (ME)//(AI). De même, on sait que N et F sont les milieux de [AC] et [IC]. En utilisant le même théorème dans le triangle IAC, on obtient (NF)//(AI). La transitivité du parallélisme permet d'en déduire que (ME)//(NF).

Comme le quadrilatère MNEF a ses côtés opposés parallèles deux à deux, c'est un parallélogramme.

Les statuts des propositions dans ce type de démonstration

Cette démonstration est un enchaînement de pas de démonstration. Chacune des propositions qu'elle contient va avoir un statut correspondant à cette structure.

Proposition d'entrée	Donnée Proposition déjà démontrée Proposition à démontrer
Théorème (ou définition)	
Conclusion	intermédiaire finale

Un texte de géométrie plus complexe

Certaines démonstrations de géométrie ne se réduisent pas à un enchaînement de pas. Nous allons examiner un exemple extrait du livre de Coxeter : redécouvrons la géométrie. On ne propose plus guère de texte de ce genre en Collège ni même en Lycée. Je l'ai choisi parce qu'il est suffisamment complexe pour contenir les démarches que je souhaite illustrer ici.

Un texte de géométrie plus complexe

Théorème de Steiner[1]

Un triangle qui a deux bissectrices égales est isocèle.

Démonstration

Supposons que dans le triangle ABC les bissectrices de $\hat{B}$ et de $\hat{C}$ soient égales. Si le triangle n'était pas isocèle, l'un des angles $\hat{B}$ ou $\hat{C}$ serait plus grand que l'autre ; par exemple, $\hat{C}$ serait plus grand que $\hat{B}$.

Soient [BM] et [CN] les bissectrices des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$. Nous allons montrer que CN < BM, ce qui est contraire à l'hypothèse.

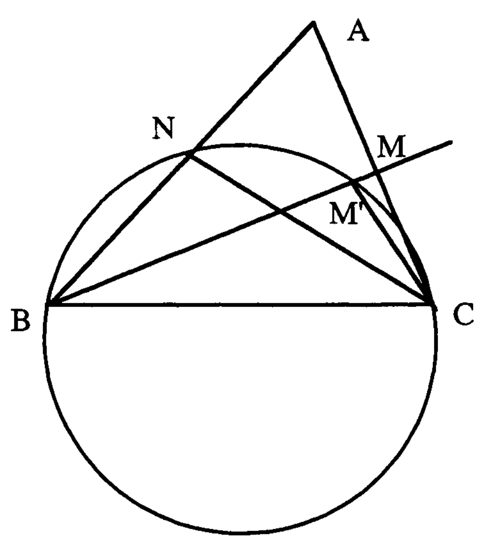
Soit M' le point de [BM] tel que $\widehat{M'CN} = 1/2\hat{B}$. Cet angle est égal à $\widehat{M'BN}$; il s'ensuit que les quatre points N, B, C et M' sont situés sur un cercle. Et, puisque

$$\hat{B} < 1/2(\hat{B} + \hat{C}) < 1/2\,(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}),$$

on a : $\widehat{CBN} < \widehat{M'CB} < \pi/2.$

Or, si dans un cercle deux cordes sous-tendent des angles inscrits aigus et inégaux, le plus petit angle correspond à la plus petite corde. Donc CN < BM'.

Il en résulte donc : CN < BM' < BM.



La démonstration commence par l'introduction d'un triangle ABC qui ne fait pas partie des données ; un peu plus loin, ce sont les points M, N et M' qui sont dans le même cas. Ainsi, dans cette démonstration, de nouveaux objets vont être introduits, contrairement à ce qui se passe dans les démonstrations réduites à un enchaînement de pas qui ne s'intéressent qu'aux objets introduits par l'énoncé ou construits de manière simple à partir de ceux-ci.

[1] Cette démonstration est tirée de Coxeter, *Redécouvrons la géométrie,* Dunod, 1971.

Dès le début du texte, on s'engage dans un raisonnement par l'absurde. Le texte est construit pour obtenir la conclusion "*ABC est isocèle*". Pour cela, il commence par une expression du type "*si ABC n'est pas isocèle*". "*ABC n'est pas isocèle*" devient alors une proposition qui pourra servir de proposition d'entrée à un pas, alors qu'elle n'est ni une donnée ni une proposition démontrée et qu'on est même sûr qu'elle est fausse. La démonstration se poursuit alors jusqu'à obtenir comme conclusion deux propositions contradictoires (ici CN = BM et CN < BM). On en déduit alors que "*ABC est isocèle*" est démontrée.

Ce n'est qu'à partir de : "*Cet angle est égal ...*" que l'on va retrouver un enchaînement de pas.

Décrivons succinctement d'autres démarches rencontrées dans ce texte :

- On veut démontrer une propriété pour un triangle quelconque ; on va la démontrer pour un triangle ABC ; on parlera de généralisation.

- On se trouve devant 2 cas possibles $\hat{B} < \hat{C}$ ou $\hat{C} < \hat{B}$; on va faire une démonstration pour l'un des cas ; l'autre cas étant tout à fait semblable n'est pas examiné.

- On donne des noms à des objets dont on connaît l'existence : les points M, N et M'.

- Pour démontrer la proposition "*le triangle ABC a deux angles égaux implique ABC est isocèle,*" on ajoute "*ABC a deux angles égaux*" aux données et on démontre "*ABC est isocèle*".

De nouveaux statuts	
Statut à l'intérieur d'un pas :	- Proposition d'entrée - Théorème - Conclusion
Statut dans l'ensemble du texte :	- Donnée du problème - Proposition démontrée à la place où elle se trouve dans la démonstration - Proposition ajoutée aux données pour débuter un raisonnement par l'absurde - proposition ajoutée aux données pour introduire un cas - Proposition ajoutée aux données pour démontrer une implication - Proposition ajoutée aux données dans le cadre du choix d'un nom pour un objet dont on connaît l'existence

On voit qu'il s'agit de démarches plus globales. Dans ces démarches, deux phénomènes importants vont se produire : des objets qui ne sont pas nommés dans l'énoncé sont introduits et des propositions qui ne sont ni des données, ni des théorèmes, ni des conclusions de pas vont pour un moment être ajoutées aux données. De ce fait, de nouveaux statuts apparaissent pour les propositions, que l'on peut décrire brièvement dans le tableau ci-dessus.

Notons que l'on rencontre ce type de démarche dans des démonstrations très simples et très facile à comprendre pour les élèves comme celle-ci :

Un triangle non rectangle

Énoncé : Un triangle ayant des côtés de longueur 5, 10 et 11 est-il rectangle ?

Démonstration : Soit ABC un triangle tel que AB = 10, BC = 5 et AC = 11. Supposons que ce triangle soit rectangle. Comme [AC] est le plus grand côté, [AC] serait l'hypoténuse. On aurait donc :
$AC^2 = BC^2 + AB^2$,
c'est-à-dire : $11^2 = 5^2 + 10^2$,
ce qui donnerait : $121 = 25 + 100 = 125$.
On obtient donc une contradiction ; le triangle ABC n'est donc pas rectangle.

Notons aussi qu'un seul théorème est vraiment énoncé explicitement : *"Si dans un cercle deux cordes sous-tendent des angles inscrits aigus et inégaux, le plus petit angle correspond à la plus petite corde"*. Parmi ceux qui sont sous-entendus, il y en a qui sont franchement complexes : "*Si A, B, C, D sont des points tels que ABC = ADC et que B et D sont situés du même côté de la droite (AC), alors A, B, C, D sont situés sur un même cercle*". Cela se produit souvent dès que la démonstration présente une certaine complexité.

Les démonstrations avec des transformations

Les démonstrations de géométrie qui concernent des problèmes sur les transformations sont assez nettement différentes des précédentes. Illustrons-le par deux exemples.

Une démonstration avec des translations

La composée de deux translations est une translation

Démonstration

Soient t_1 et t_2 deux translations de vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$.

Si $M \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} M_2$, alors $\overrightarrow{MM_1} = \vec{V_1}$ et $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{V_2}$.
Comme pour tout point M du plan $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$, on en déduit :
$\overrightarrow{MM_2} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$.

Or : $M_1 \xrightarrow{t_2 \circ t_1} M_2$.

Donc $t_2 \circ t_1$ est la translation de vecteur $\vec{V_1} + \vec{V_2}$.

Ce premier texte frappe par la présence de symboles. Bien sûr, on en a déjà rencontrés dans la démonstration la plus simple : (MN)//(EF) ; mais l'expression correspondante sous forme de texte français est très proche de l'expression symbolique.

Par contre si l'on veut exprimer $M \xrightarrow{t_1} M_1$ par une phrase, elle sera du type : “M_1 est l’image par la transformation t_1 du point M”. Il y a ici un vrai changement de registre : le symbole employé à une efficacité beaucoup plus grande que le texte pour exprimer les propriétés de la composée de transformations.

Une autre caractéristique est une présence significative du signe =. Celui-ci est peu présent entre des objets géométriques dans les démonstrations de Quatrième ; on le rencontre essentiellement entre des nombres ou des mesures.

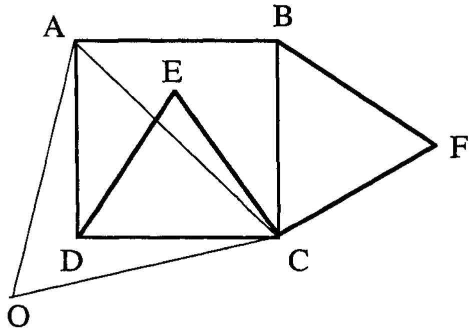
On retrouve dans cette démonstration des démarches qui ne sont pas des pas : par exemple l’introduction de noms pour désigner les translations et un point quelconque (on veut démontrer une proposition générale), et l’introduction de M_1, M_2, $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ pour désigner des objets dont on connaît l'existence

Enfin des énoncés de théorèmes sont sous-entendus et certains sont assez complexes : Si M_1 est l’image de M par t_1, et M_2 l’image de M_1 par t_2 alors M_2 est l’image de M par $t_2 \circ t_1$.

On ne retrouve pas, dans l’exemple suivant, les deux premières caractéristiques : il n’y a qu’un seul signe = entre deux points et il n’y a pas de symbole servant à construire des propositions complexes. En revanche on retrouve des théorèmes sous-entendus et, très nettement mise en valeur, la démarche qui consiste à nommer des objets dont on connaît l’existence : la rotation r et le point O.

Une démonstration avec une rotation d’angle $\pi/3$

ABCD est un carré. DEC est un triangle équilatéral intérieur au carré. BFC est un triangle équilatéral extérieur au carré. Montrer que A, E et F sont alignés.



Démonstration

Considérons la rotation r de centre C qui transforme D en E. Elle transforme B en F puisque les triangles CDE et CBF sont équilatéraux et de même sens.

Pour que A, E et F soient alignés, il suffit que A soit l’image par r d’un point de la droite (BD). Or il existe un unique point O du plan vérifiant r(O) = A : il est tel que COA soit équilatéral, de même sens que CDE.

Montrons que O appartient à (BD). (BD) est la médiatrice de [AC] puisque ABCD est un carré. Or OA = OC puisque OAC est équilatéral. Donc O, B et D sont alignés et par suite leurs images par r, A, E et F le sont aussi.

Des textes particuliers pour chaque domaine des mathématiques

Nous venons de voir une diversité de textes dans un domaine restreint : la géométrie. Qu'en est-il quand on change de domaine ?

L'algèbre et la résolution d'équations et d'inéquations

Souvent, dans ce domaine, on ne demande pas de démontrer mais de résoudre des équations ou des inéquations. Il est donc assez naturel que les textes produits ne soient pas de même nature. Par exemple, la résolution d'une équation du premier degré en Quatrième se présente le plus souvent comme une suite d'égalités avec très peu de texte. Même quand il s'agit du problème plus complexe de la résolution d'une inéquation, on retrouve un phénomène analogue. Examinons, par exemple, une solution extraite du livre de Quatrième de chez Istra (1992). On n'y voit aucun indice d'une structure d'enchaînement de pas. Pourtant, on peut imaginer un texte qui, sur le plan du sens, est très voisin et qui est structuré fortement comme une succession de pas ; on voit immédiatement les différences entre ces deux textes.

Plus profondément, il est vraisemblable que l'attitude sémantique sous-jacente à ces deux textes est un peu différente. L'idée de "raisonner", qui accompagne sans doute le deuxième texte, rend assez naturelle la présence d'une réciproque ; chacun sait en effet les erreurs que l'on peut faire en raisonnant par équivalence. Dans le premier texte, l'idée d'appliquer une méthode paraît plus probable : cette méthode a été décrite plus ou moins explicitement dans le cours et le texte s'efforce d'indiquer dans quelles conditions on peut l'appliquer.

Résoudre une inéquation en appliquant une méthode

Résoudre l'inéquation : 1 - 2x < 3x + 4

Solution

1) $1 - 2x < 3x + 4$

$-3x$ $\quad 1 - 5x < 4 \quad$ $-3x$

-1 $\quad -5x < 3 \quad$ -1

$:(-5)$ $\quad x > -\dfrac{3}{5} \quad$ $:(-5)$

Attention ! Le coefficient de x est négatif. Je dois changer le sens de l'inégalité.

Faire une démonstration pour résoudre la même inéquation

Si 1 - 2x < 3x + 4, on a 1 - 5x < 4.
On en déduit - 5x < 3 et x > - 3/5.

Réciproquement si x > -3/5, - 5x < 3, 1 - 5x < 4 et 1 - 2x < 3x + 4.

Donc x est solution de l'inéquation si et seulement si x > -3/5.

Même si, comme dans le texte suivant, la rédaction est orientée vers le "raisonnement", on observe des différences avec les démonstrations dans les autres domaines. Par exemple, est spécifique la démarche globale qui consiste à rechercher les solutions de l'équation dans trois domaines disjoints dont la réunion est R. Si l'on veut éviter cette démarche, le texte est sensiblement changé ; une démonstration directe séparée de la démonstration réciproque est pratiquement inévitable.

Une inéquation avec un radical (Terminale)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x^2+5} \leq x+1$.

Comme x^2+5 est strictement positif, $\sqrt{x^2+5}$ est toujours défini.

Afin d'utiliser la propriété : 2 nombres positifs sont dans le même ordre que leurs carrés, nous examinerons trois cas : $x+1 > 0$, $x+1= 0$ et $x+1 < 0$.

1 - Si $x+1 < 0$, le membre de gauche est positif, celui de droite est négatif ; donc il n'y a pas de solution à l'inéquation.

2 - si $x = - 1$, $x^2+5 = 6$ et $x+1 = 0$; -1 n'est pas solution de l'inéquation.

3 - Si $x > -1$, les deux membres de l'inéquation sont positifs. Les solutions de l'inéquation sont donc les solutions du système :

$x > -1$
$x^2+5 \leq (x+1)^2$

Ou encore des systèmes équivalents :

$x > -1$ $\qquad$ $x > -1$
$x^2 + 5 \leq x^2 + 2x + 1$ $\qquad$ $x \geq 2$

Les solutions de l'inéquation sont donc les éléments de l'intervalle $[2 ; +\infty [$.

En résumé, les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont les éléments de l'intervalle $[2 ; +\infty [$.

L'analyse

La différence apparente entre une démonstration d'analyse et une de géométrie vient de l'utilisation très fréquente de propositions ayant plusieurs quantificateurs imbriqués, ce qui explique l'utilisation répétée et visible de toutes les règles de démonstration associées aux quantificateurs. Ainsi, dans la démonstration ci-dessous, on utilise le théorème des accroissements finis qui peut s'écrire :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle [a ; b], si sur cet intervalle $m \leq f'(x) \leq M$, on a, pour tout x appartenant à l'intervalle :

$$m(x - a) \leq (f(x) - f(a)) \leq M(x - a)$$

c'est-à-dire, en faisant mieux apparaître le rôle des quantificateurs :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle [a ; b] et si m et M sont des réels on a :

$$(\forall x)(x \in [a ; b] \Rightarrow m \leq f'(x) \leq M) \quad \Rightarrow$$
$$(\forall x)(x \in [a ; b] \Rightarrow m(x - a) \leq (f(x) - f(a)) \leq M(x - a)).$$

Cet énoncé comporte une implication entre deux expressions ayant chacune un quantificateur "quel que soit" . C'est une situation que l'on ne rencontre pratiquement pas en géométrie. Cela se traduit dans la démonstration ci-dessous par l'expression : "pour tout x dans [0 ; 1/2]" située juste après l'inégalité : "$1/6 \leq f'(x) \leq 1/2$". Il s'agit ici de la fin d'une généralisation commencée plus haut par : "Or, de $0 \leq x \leq 1/2$,...". Une difficulté importante apparaît ici : le x qui intervient dans la partie centrale de la démonstration n'est pas "le même" que celui qui apparaît dans la fin. Pour s'en convaincre il suffit de constater que cette démonstration reste correcte si l'on remplace x par y dans la partie centrale.

Encadrer une fonction

Si f est la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$, montrez que, pour tout x de l'intervalle [0 ; 1/2], $1 + x/\sqrt{6} \leq f(x) \leq 1 + x/2$.

Démonstration

La fonction f est définie sur $[-1 ; +\infty[$. Elle est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1 ; +\infty[$ et pour tout $x > -1$, $f'(x) = 1/2\sqrt{x+1}$.

Or, de $0 \leq x \leq 1/2$, on déduit que
$1 \leq 1 + x \leq 3/2$,
et puisque la fonction racine carré est croissante, que :
$1 \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{3/2}$.
D'où : $2 \leq 2\sqrt{1+x} \leq 2\sqrt{3/2}$.
On sait que les inverses de nombres strictement positifs sont dans l'ordre inverse de ces nombres, donc :
$1/2\sqrt{3/2} \leq 1/2\sqrt{1+x} \leq 1/2$.
En remarquant que $1/2\sqrt{3/2} = 1/\sqrt{6}$, on obtient donc :
$1/\sqrt{6} \leq f'(x) \leq 1/2$, pour tout x dans [0 ; 1/2].

Utilisons l'inégalité des accroissements finis avec a = 0 et b = 1/2. Alors :
$(1/\sqrt{6})x \leq f(x) - f(0) \leq (1/2)x$.
Or $f(0) = 1$ d'où :
$1+x/\sqrt{6} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + x/2$.

Étudier les variations d'une fonction

Montrer que la fonction $x \longmapsto x^4 - 2x^2 + 2$ est croissante sur l'intervalle [-1,0].

Étudions les variations de la fonction f telle que : $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$
Pour cela, calculons la dérivée f' :
$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x + 1)(x - 1)$
Étudions le signe de la dérivée à l'aide d'un tableau de signes :

x	-	-1	-	0	+	1	+
x+1	-	0	+		+		+
x-1	-		-		-	0	+
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+

D'où le tableau de variations :

x		-1		0		1	
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	↘		↗		↘		↗

f est donc bien une fonction croissante sur l'intervalle [-1,0].

Une autre particularité des démonstrations d'analyse est la présence de nombreuses méthodes. Ainsi, dans le texte ci-dessus, l'aspect méthode l'emporte sur l'aspect raisonnement déductif : calcul d'une dérivée, tableau de signes, tableau de variations.

Notons que l'on rencontre souvent, en analyse, des quantificateurs "il existe" correspondant à des objets qui ne sont pas uniques : par exemple, dans le théorème des valeurs intermédiaires ou la définition de la continuité.

L'arithmétique

On parle de réintroduire l'arithmétique dans l'enseignement secondaire. Je ne parlerai pas des particularités de la démonstration par récurrence. Mais on voit sur l'exemple suivant que les démonstrations dans ce domaine comportent souvent de nombreuses démarches globales. Comme en analyse, il n'est pas rare d'utiliser des théorèmes d'existence où il n'y a pas unicité : par exemple, dans la phrase *soit p un facteur premier de n.*

La suite des nombres premiers est illimitée

Supposons qu'il existe un entier n plus grand que tous les nombres premiers. Considérons le nombre q = n! + 1. q étant plus grand que 1 possède un diviseur premier p. Comme p est premier, il est plus petit que n, donc il divise n! Comme il divise aussi q, il divise leur différence, c'est-à-dire 1. p serait égal à 1, ce qui est impossible.

Les probabilités

Au lycée, la principale difficulté des problèmes de probabilités est de modéliser une situation concrète. Cela se traduit sur la forme des textes de démonstration. Quand il s'agit d'une classe de terminale S, la démarche déductive est encore apparente ; dans un classe de première L, la solution se présente comme la succession d'un texte expliquant la modélisation et d'un texte décrivant l'application d'une méthode (voir la fiche ci-dessous).

Diversité et variabilité

Les différences que nous avons essayé de mettre en évidence sont en fait, le plus souvent, des différences de structure. Il est intéressant de réfléchir maintenant sur les modifications que l'on peut faire sur les textes de démonstration sans modifier leur structure. Je parlerai de variabilité pour passer d'un texte à un autre sans changer ni les pas de démonstrations ni les démarches plus globales qui en font la structure en tant que démonstration.

La variabilité est très grande : elle se situe à plusieurs niveaux :

- **Les sous-entendus** : pratiquement, il y a une grande liberté et celle-ci est d'autant plus grande que la démonstration est complexe. Simplement il y a des règles générales du genre : "on ne sous-entendra pas un théorème si, dans la même démonstration, un théorème moins complexe a été cité explicitement", ou encore : "les conclusions de pas sont rarement sous-entendues".

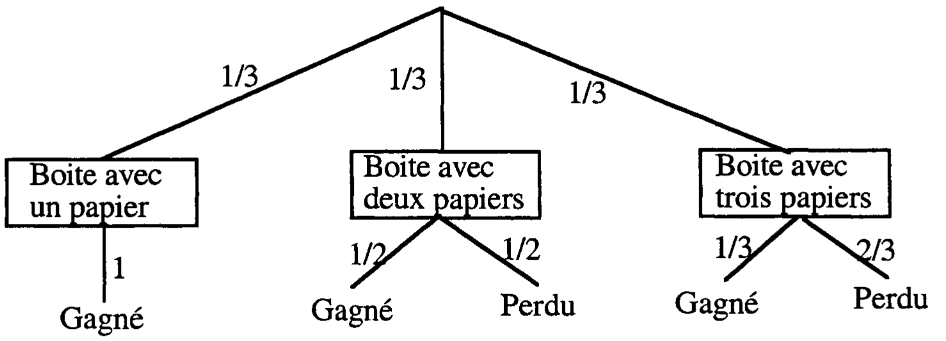
Démonstrations en probabilités

Énoncé

Dans un jeu forain, on dispose de trois boîtes d'apparence identique. Elles contiennent respectivement un, deux et trois papiers. Dans chacune des boîtes un seul papier est marqué. Une partie consiste pour un joueur à désigner au hasard une boîte et à tirer également au hasard un papier dans cette boîte. Quelle est la probabilité pour que le papier tiré soit marqué.

Une solution pour une classe de première L

Les trois boîtes sont identiques, donc elles ont la même probabilité d'être tirées : 1/3. Ensuite, dans la boîte avec deux papiers, un papier sur deux est gagnant, et, dans la dernière, un papier sur trois est gagnant :



P("gagné") = 1/3 + 1/6 + 1/9 = 11/18 = 61,1%

Une rédaction adaptée à la Terminale

On appelle B1 (respectivement B2, B3) les événements : "choisir la boîte avec un papier (respectivement 2 papiers, 3 papiers)". Il y a équiprobabilité, car les boîtes sont identiques. Donc p(B1) = p(B2) = p(B3) = 1/3.
Soit M l'événement : "tirer un papier marqué". D'après les données :

p(M/B1) = 1, p(M/B2) = 1/2 et p(M/B3) = 1/3.

$P(M \cap B1) = 1/3$

$p(M \cap B2) = p(M/B2) \times p(B2) = 1/6$

$p(M \cap B3) = p(M/B3) \times p(B3) = 1/9$

or $p(M) = p(M \cap B1) + p(M \cap B2) + p(M \cap B3)$.

D'où p(M) = 11/18

- **Les mots et les expressions décrivant l'articulation** : il y a de très nombreuses manières d'exprimer le statut des propositions ; on pense souvent au mots de liaison, mais on peut utiliser aussi des tournures comme le participe présent, ou des dispositions dans la page.

- **L'ordre des propositions** : non seulement il peut être modifié à l'intérieur de chaque pas, mais aussi on peut présenter les pas dans des ordres différents, à condition de changer les mots ou les expressions.

Un texte qui part de la conclusion

La démonstration sur le quadrilatère des milieux, proposée au début de cet exposé, pourrait être rédigée comme suit :

On veut démontrer que MNFE est un parallélogramme. Pour cela, nous allons utiliser la définition du parallélogramme : pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il suffit qu'il ait des côtés opposés parallèles. Nous allons donc prouver successivement que (MN) est parallèle à (EF) et que (ME) est parallèle à (NF).

Pour montrer que (MN) est parallèle à (EF), on utilise le fait que (MN) et (EF) sont parallèles à (BC).

Montrons que ces deux dernières propositions sont vraies. (MN)//(BC) se déduit de l'utilisation du théorème des milieux dans le triangle ABC. On sait, en effet, d'après l'énoncé du problème, que M et N sont les milieux des côtés de ce triangle. De la même façon, on obtient (EF)//(BC), en utilisant le théorème des milieux dans le triangle IBC et les données du problème : E est le milieu de [IB] et F est le milieu de [IC].

Une démarche analogue permet de montrer que (ME)//(NF) en utilisant les triangles AIB et AIC.

- **Tout ce qui accompagne la démonstration proprement dite** : il n'est pas rare qu'une réflexion heuristique se mêle à la démonstration. C'est souvent le cas quand on fait des démonstrations en partant de la conclusion. Mais on peut aussi trouver d'autres commentaires ou des constructions de figure, etc.

Une réflexion heuristique

La démonstration sur le quadrilatère des milieux citée au début de l'exposé pourrait être précédée du texte suivant :

On veut démontrer que MNFE est un parallélogramme. Les milieux des diagonales ne semblent pas ici jouer un rôle particulier. Au contraire l'existence de nombreux milieux peut faire penser que le théorème des milieux sera un outil efficace pour montrer le parallélisme. Essayons donc de démontrer que les côtés opposés de MNFE sont parallèles.

Des questions didactiques

Beaucoup de questions didactiques se posent à partir des constats que nous venons de faire. Peu ont été vraiment étudiées.

Le travail sur les enchaînement des pas est-il une préparation suffisante pour la maîtrise des démarches plus globales ?

La réponse à cette question a beaucoup de chance d'être négative. On a déjà de bonnes raisons de penser (travail de Bahia El Gass) que l'apprentissage de la construction d'un pas se fait "théorème par théorème". Plus précisément, on observe que, quand un élève maîtrise la construction d'un pas dans lequel un certain théorème intervient, il fait peu de fautes sur les pas qui suivent quand il s'agit du même théorème ou d'un théorème "voisin" comme la réciproque. En revanche, cela ne semble pas lui donner, dans un premier temps, de meilleurs atouts pour aborder des pas avec un théorème différent.

On peut aussi se demander si la maîtrise de telle démarche globale, comme le raisonnement par l'absurde, est un soutien pour telle autre démarche, comme l'examen de cas. Si la recherche confirmait cette hypothèse, la conséquence pratique serait à deux niveaux.

- D'une part , dès la quatrième, dans le cadre de problèmes simples, la rencontre de telles démarches devrait être favorisée. Ce n'est pas toujours le cas actuellement. Par exemple, le raisonnement par l'absurde, qui semble pourtant assez facilement compris par les élèves, est souvent évité. Ou encore, quand on donne l'énoncé d'un problème de géométrie, la figure est donnée et tous ses éléments utiles sont nommés. Poser une question sous une forme générale, conduirait au contraire l'élève à choisir des noms pour les éléments de sa figure en vue d'une généralisation ou pour nommer un objet dont il connaît l'existence.

- D'autre part au niveau de la seconde, qui est le niveau où vont apparaître les démarches globales, il faut que les enseignants sachent qu'ils ont un travail spécifique à faire à ce propos, et sans doute pour chaque domaine des mathématiques.

Quel rôle dans l'apprentissage peut jouer la variabilité des textes ?

Beaucoup d'enseignants de Quatrième proposent à leur élèves des textes très stéréotypés. Leur but est évidemment de simplifier la tâche de l'élève. Quelques-uns, au contraire, proposent des textes variés avec l'idée que, de cette façon, les traits de surface des textes de démonstration ne l'emporteront pas sur sa structure profonde. Quelle est la stratégie la plus efficace ?

Il y a beaucoup d'arguments a priori en faveur de la seconde et les résultats des recherches sur le sujet vont dans le même sens.

- D'abord un argument pratique : dans l'état actuel, les stéréotypes varient beaucoup d'un enseignant à l'autre, d'un établissement à l'autre.
- Ensuite, on peut penser que l'apprentissage de la démonstration sera facilité s'il s'appuie sur les capacités d'écriture que possèdent déjà l'élève : lui laisser la liberté d'écrire avec son style favorise cette démarche.
- Le travail de lecture de ces textes variés peut provoquer une véritable démarche cognitive sur les structures profondes du texte. Ce n'est pas forcément le cas d'un texte trop standardisé. Pour ne citer qu'un fait : dans certains lots de copies, on trouve beaucoup plus de fautes dans l'utilisation du mot *donc* que dans celle de mot plus "compliqué " comme *par conséquent* ; à force d'intervenir dans des textes pauvres, le mot *donc* n'a-t-il pas perdu peu à peu sa signification ?
- Enfin le texte de démonstration jouera d'autant plus son rôle d'explication ou de preuve qu'il sera adapté à la manière de s'exprimer de chaque élève.

Quelles corrections apporter aux copies de nos élèves ?

Plus que pour d'autres apprentissages, celui de la maîtrise du texte passe par les corrections apportées aux productions de celui qui apprend. Le choix de ces corrections est donc un enjeu didactique important. La recherche sur ce sujet est évidemment à entreprendre, mais on peut déjà en mesurer la difficulté quand on voit les réactions provoquées par certaines copies d'élèves.

Examinons par exemple les deux démonstrations suivantes. Le premier texte est clairement incorrect du point de vue de la démonstration. Il est très probable que l'élève a clairement compris la solution du problème ; mais le "supposons que" semble annoncer un raisonnement par l'absurde qui est ici inadapté. Des discussions vives ont eut lieu entre enseignants de Quatrième pour savoir s'il fallait oui ou non pénaliser gravement cette faute. Les uns disent : il a bien compris, on ne peut donc le pénaliser ; les autres estiment que l'incorrection du texte doit être sanctionnée.

Le second est un raisonnement par l'absurde correct ; mais, aux yeux de certains enseignants, la suite d'égalités sans aucun mot d'articulation est dangereuse. On sait que beaucoup d'élèves se retrouvent au cours de démonstration devant des égalités de ce type et ne savent plus ce qu'ils doivent en faire. Là encore, les désaccords sont importants. Les uns vont considérer cette démonstration comme sans problème, les autres vont la défavoriser fortement.

Deux copies problématiques

Première copie

Énoncé : Soit un triangle ABC tel que AB = 10, BC = 4 et AC = $5\sqrt{5}$. Ce triangle est-il rectangle ?

Démonstration

AC est le plus grand côté.

Supposons que ce triangle soit rectangle, on aura $AC^2 = BC^2 + AB^2$.

$(5\sqrt{5})^2 = 100 + 25$

$125 = 125$

Comme cette dernière égalité est vraie, le triangle est rectangle en B.

Deuxième copie

Énoncé : Un triangle ayant des côtés de longueur 5, 10 et 11 est-il rectangle ?

Démonstration : Soit ABC un triangle tel que AB = 10, BC = 5 et AC = 11. Supposons que ce triangle soit rectangle. Comme [AC] est le plus grand côté, [AC] serait l'hypoténuse. On aurait donc :

$AC^2 = BC^2 + AB^2$,

$11^2 = 5^2 + 10^2$,

$121 = 25 + 100 = 125$.

On obtient donc une contradiction ; le triangle ABC n'est donc pas rectangle.

Faut-il distinguer les "méthodes" des "textes de démonstration" ?

Comme nous l'avons vu sur les exemples, la "solution" d'un problème se présente souvent comme une méthode plutôt que comme une démonstration. C'est le cas, par exemple, pour les équations. Plusieurs fois, la question suivante m'a été posée : faut-il, dans les résolutions d'équations, obliger les élèves à mettre des signes d'équivalence entre les différentes équations obtenues. Dans ma vision actuelle de ce type de textes, il me semble qu'une résolution d'équation est souvent ressentie par les élèves comme l'application d'une méthode. Il est donc, dans ce cas, naturel qu'ils ne mettent pas de signe équivalent entre les différentes équations. Si on tient à leur faire préciser les choses, une phrase comme "appliquons la méthode de résolution" serait plus adéquate. Ce sont alors les conditions d'application de la méthode qui doivent être explicitées dans le texte.

Faut-il, dès la quatrième faire apparaître clairement, aux yeux des élèves, la différence entre ces deux types de textes ou doit-elle rester implicite ?

Références bibliographiques

On trouvera une description plus explicite des diverses structures des textes de démonstrations dans le livre : *La démonstration : écrire des mathématiques au collège et au lycée,* Hachette, 1998.

Pour plus de détails sur l'idée de statut on pourra lire l'article de Raymond Duval et Marie Agnès Egret : *Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif,* Repères IREM, N°12, 1993.