JEAN HOUDEBINE

Analyse de copies d’élèves

Publications de l’Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998, fascicule S4
« Produire et lire des textes de démonstration », , p. 231-237
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998___S4_231_0>

Atelier n°11

ANALYSE DE COPIES D'ELEVES

Jean Houdebine

Quand on se trouve devant certaines copies, on a l'impression de n'avoir devant soi qu'un fatras incompréhensible. Il est très difficile dans ces conditions d'apporter une aide à l'élève pour le faire progresser. Comment repérer les fautes principales, comment mettre en valeur ce qui est satisfaisant ? L'idée est donc de se donner un moyen d'analyser les copies de manière plus fine pour répondre à ces questions[1]. C'est le but de la grille d'analyse présentée ci-dessous, largement inspirée d'une proposition de Raymond Duval.

En réalité, l'usage d'une grille d'analyse a plusieurs avantages. Comme nous venons de le dire, elle nous permettra de mieux comprendre ce que fait un élève, mais elle permet aussi, à terme, de changer notre point de vue sur la démonstration et son apprentissage.

Nous ne travaillerons que sur des démonstrations qui peuvent être considérées comme des enchaînements de pas. Il est beaucoup plus difficile de concevoir un outil d'analyse pour celles qui comportent des démarches plus globales.

Un canevas pour l'analyse des copies d'élèves

Le découpage

On segmente le texte en propositions.

On essaie de repérer celles qui peuvent avoir, dans l'esprit de l'élève, le statut de conclusion d'un pas.

Pour chacune de ces conclusions, on essaie de repérer dans le texte les éléments du pas correspondant : le théorème et la définition qui en est le centre et les propositions d'entrée. Souvent, certains de ces éléments sont sous-entendus ; dans ce cas, on essaie de les rétablir en tenant compte de l'ensemble du texte.

Analyse des éléments explicites de chaque pas

L'énoncé du théorème contient-il clairement une ou des hypothèses et une conclusion ?

La conclusion du pas est-elle compatible avec la conclusion du théorème ?

La conclusion du pas est-elle l'une des hypothèses du théorème ?

Une des hypothèses du théorème est-elle explicitement citée comme proposition d'entrée dans ce pas ?

[1] Le contenu de cet atelier est développé dans le livre : *La démonstration ; écrire des mathématiques au collège et au lycée*, Hachette, 1998.

Toutes les hypothèses du théorème sont-elles explicitement citées comme propositions d'entrée dans ce pas ?

Y a-t-il des propositions d'entrée de ce pas qui ne sont pas des hypothèses du théorème ?

Analyse de l'enchaînement des pas

Pour chaque proposition d'entrée d'un pas, on se posera les questions :
- est-elle dans l'énoncé,
- ou a-t-elle été démontrée antérieurement,
- ou est-elle signalée comme devant être démontrée ultérieurement ?
- ou est-elle obtenue par "équivalence sémantique" avec une proposition ayant l'une des propriétés ci-dessus ?

Y a-t-il des conclusions intermédiaires qui ne sont pas utilisées comme propositions d'entrée d'un autre pas ?

Y a-t-il globalisation pour deux pas semblables ?

Analyse des marques du statut des propositions

Les différents statuts des propositions sont-ils marqués par des connecteurs, des expressions ou des dispositions ?

Les marqueurs utilisés sont-ils réutilisés de la même manière dans plusieurs pas de démonstration ?

Quand une conclusion d'un pas est réutilisée comme hypothèse d'un autre pas, le changement de statut est-il marqué explicitement ?

Y a-t-il des marqueurs spécifiques pour le passage d'un pas à un autre ?

Quelques remarques

Une interprétation est le plus souvent inévitable : il y a en effet de nombreux sous-entendus, soit au niveau des propositions soit dans les mots ou les expressions qui articulent les propositions. L'expérience montre que, dans cette interprétation, il est nécessaire d'avoir une attitude très positive ; il faut choisir l'interprétation la plus favorable. L'élève, en effet, ne produit pas ce texte au hasard ; le but est donc de comprendre sa logique et il est raisonnable de partir de l'hypothèse qu'il en a une. D'ailleurs, si l'on discute avec les élèves, après avoir analysé leur démonstration, on constate que l'interprétation la plus favorable est souvent la plus pertinente.

Bien sûr, il faut d'abord segmenter le texte en propositions. On essaie ensuite de repérer les pas. Nous avons choisi de le faire en partant de la conclusion car c'est ce qui est le moins souvent sous-entendu et sans doute ce qui rend le mieux compte de la dynamique du texte.

Deux mots utilisés dans cette analyse doivent être expliqués : équivalence sémantique et globalisation.

Equivalence sémantique

Pour celui qui rédige une démonstration, certaines propositions veulent dire exactement la même chose : par exemple *"ABC est un triangle rectangle en A"* et *"A est un angle droit"*. Dans ce cas, le texte peut comporter un passage d'une formulation à l'autre sans aucun intermédiaire ; il n'y a pas de pas de démonstration sous-entendu, mais simplement reformulation d'une idée. Quand le texte est suffisamment explicite, on peut assez facilement repérer ce type de démarche. Mais, s'il y a des sous-entendus, certaines interprétations ne correspondront nullement à la démarche de l'élève. Par exemple, l'enseignant notera dans son analyse l'absence d'une proposition d'entrée, alors que, dans la démarche de l'élève, elle est présente sous la forme d'une proposition sémantiquement équivalente et qu'il a effectivement énoncée. En résumé, dans l'analyse d'une copie, il faut, à chaque fois que cela est possible, interpréter l'absence de certains éléments comme une équivalence sémantique.

Prenons l'exemple de la copie suivante :

Énoncé : *ABCD est un parallélogramme. E est le symétrique de C par rapport à D. Montrer que ABDE est un parallélogramme.*

Démonstration : *On sait que ED = DC. Comme DC = AB, ED = AB.*
Les droites (ED) et (DC) étant confondues, comme (AB) // (DC), (ED) // (AB).
Donc ABDE est un parallélogramme.

L'élève, faisant des équivalences sémantiques, a pu estimer que les données du problème sont : ED = DC, E, D et C alignés, DC = AB et (AB)//(DC). Dans ces conditions la démonstration ci dessus est évidemment correcte. Dans l'analyse de cette copie il ne faut donc pas comptabiliser de pas manquant.

Globalisation

Nous désignons ainsi le fait de regrouper, dans le texte, plusieurs pas en un seul. Dans la démonstration suivante du résultat : *les milieux I, J, K et L d'un quadrilatère ABCD sont les sommets d'un parallélogramme*, les passages en italiques sont des globalisations.

Démonstration : *Dans les triangles ABC et ADC, les droites (IJ) et (KL) sont parallèles à (AC) car I, J, K et L sont les milieux de [AB], [BC], [DC] et [DA].* Donc (IJ)//(KL). De même *dans les triangles ABD et DBC, les droites (IL) et (KJ) sont parallèles à (BD)* et (IL)//(KJ). Donc IJKL est un parallélogramme.

Pour supprimer la première globalisation, on pourrait remplacer le premier passage en italique par : *"Dans le triangle ABC, la droite (IJ) est parallèle à (AC) car I et J sont les milieux de [AB] et de [BC]. Dans le triangle ADC, la droite (KL) est parallèle à (AC) car K et L sont les milieux de [DC] et de [DA]".*

La copie d'Alexandre

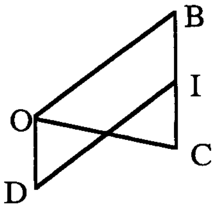
Pour illustrer l'utilisation de cette grille nous avons choisi de l'appliquer à une copie d'un élève de Quatrième dont il est difficile de repérer la structure[2] :

---

[2] Cette copie est citée dans l'article de Marie Agnès Egret et Raymond Duval : Comment une classe de Quatrième a pris connaissance de ce qu'est une démarche de démonstration ; Annales de didactique et de sciences cognitives ; N°2 ; IREM de Strasbourg ; 1989.

La copie d'Alexandre

Exercice : O, B et C sont trois points non alignés. I est le milieu de [BC] et D le point tel que ODIB soit un parallélogramme. Pourquoi M, milieu de [ID] est-il le milieu de [OC] ?



DO = IB	DO // IB
IB = CI	CI // IB
<u>DO = CI</u>	<u>DO // CI</u>
<u>CD // IO</u>	<u>CD = IO</u>

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. DOIC parallélogramme donc elles se coupent en leur milieu.

Le découpage en propositions ne pose pas de problème. En revanche, le manque d'indice sur le statut des propositions, empêche en première lecture de distinguer celles qui peuvent être considérées comme conclusions de pas. Un examen plus attentif permet d'émettre une hypothèse : le souligné indique qu'il s'agit de conclusions. En tenant compte de la disposition, et en essayant de trouver le maximum de cohérence, on peut alors rétablir les pas de plusieurs manières ; en voici une :

1er pas : conclusion : *DO = CI* ; propositions d'entrée : *DO = IB* et *IB = CI* ; théorème implicite : la transitivité de l'égalité. Les deux propositions d'entrée sont sans doute obtenues par équivalence sémantique à partir de "*ODIB* est un parallélogramme" d'une part et de "*I* est le milieu de *[BC]*" d'autre part.

2ème pas : conclusion *DO // CI* ; propositions d'entrée : *DO // IB* et *CI // IB* ; théorème implicite : la transitivité du parallélisme. Là encore les deux propositions sont obtenues par équivalence sémantique à partir des mêmes données.

3ème pas : conclusion *CD // IO* et *CD = IO* ; propositions d'entrée : *DO = CI* et *DO //CI* ; théorème implicite : une propriété des parallélogrammes qui pourrait s'énoncer : si dans un quadrilatère deux côtés opposés sont égaux et parallèles, les deux autres le sont aussi.

4ème pas : conclusion *DOIC* parallélogramme. Pour ce pas, il y a 4 propositions d'entrée candidates, alors qu'il en suffit de deux ; il est difficile d'imaginer le choix fait par l'élève. Il y a au moins deux possibilités pour le théorème : "si un quadrilatère a ses côtés opposés égaux et parallèles, c'est un parallélogramme" ou bien " si un quadrilatère a ses côtés parallèles deux à deux c'est un parallélogramme.

5ème pas : conclusion *[OC]* et *[DI]* se coupent en leur milieu ; proposition d'entrée *DOIC* est un parallélogramme ; théorème : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Faire un diagnostic

L'analyse ne doit pas être confondue avec le diagnostic qui sert à déterminer l'action à entreprendre auprès de l'élève. Ce diagnostic va dépendre de beaucoup de facteurs comme notre connaissance de l'élève, la connaissance de ce qui s'est passé dans la classe, les conditions dans lesquelles la démonstration a été demandée. Il sera plus facile si, au lieu d'analyser une seule copie, on s'efforce de suivre l'évolution de l'élève à travers une série de copies.

Dans notre esprit, le diagnostic est une démarche. Le but n'est pas de faire une simple évaluation du travail de l'élève. Il s'agit d'essayer de repérer ses points forts et ses points faibles pour l'aider à progresser. Souvent, une discussion avec lui sera nécessaire pour éclairer les résultats de l'analyse.

Si l'on essaie de faire un diagnostic sur la copie que nous venons d'analyser, les indices favorables sont beaucoup plus nombreux après analyse qu'avant. Notons d'ailleurs que d'autres interprétations du texte de l'élève ne changent pas cette impression. Il semble que cet élève ait compris les idées qui interviennent dans la solution du problème et qu'il maîtrise à peu près la construction de chaque pas. Par contre, sa principale difficulté semble être l'écriture d'un vrai texte à partir des idées qu'il a sur le problème ; peut-être manque-t-il simplement de motivation pour cette écriture. Mais en tout cas, cela peut expliquer sa difficulté à articuler plusieurs pas entre eux. C'est donc ce point qu'il faut essentiellement travailler, en l'obligeant à écrire des textes "en français", quitte à lui laisser une grande liberté d'expression.

Des idées qui guident le diagnostic

La recherche permet de s'appuyer sur un certain nombre d'idées. Essayons d'énoncer les plus importantes. De nouvelles recherches seront nécessaires pour les confirmer et les affiner.

Les caractéristiques globales du texte

- Le fait que le découpage en propositions du texte de l'élève soit problématique est un indice très négatif. Donner à l'élève la capacité d'écrire des textes compréhensibles doit être, dans ce cas, le premier objectif.

- On trouve des démonstrations qui se présentent comme réduites à un pas : les propositions d'entrée sont toutes les données du problème, la conclusion est la question posée et le théorème est en général complètement absent. Ce genre de disposition est évidemment un indice fortement défavorable.

- La variété des mots, expressions et dispositions indiquant les statuts des propositions ou articulant les pas entre eux est a priori un indice favorable, à condition, bien sûr, qu'il n'y ait pas trop de contresens dans leur usage. Au contraire, l'utilisation de formules très stéréotypées peut être l'indice d'une prudence excessive liée à un manque de maîtrise de la démonstration (ou l'indice d'un contrat didactique trop contraignant).

- L'existence de globalisation est un indice ambigu. Pour un élève qui ne présente pas de difficulté, c'est plutôt un indice très encourageant car il indique une bonne maîtrise des subtilités d'un texte de démonstration. Pour un élève en difficulté, il arrive que cela corresponde à un manque de clairvoyance sur sa capacité à maîtriser ce type de texte : on constate souvent, en effet, l'impossibilité de reformuler des pas globalisés en deux pas distincts.

- Certains élèves semblent n'avoir aucune difficulté à rédiger un texte (phrases correctes, texte facile à découper en propositions, utilisation d'expressions variées...), mais ne semblent pas avoir compris la structure profonde du pas de démonstration ou de la liaison entre les pas (par exemple, la conclusion d'un pas est présentée comme une donnée...). Au contraire, d'autres élèves ont sans doute une bonne maîtrise de la structure, mais sont incapables de la mettre en texte (comme la démonstration d'Alexandre). Dans les deux cas, les productions des élèves semblent mauvaises ; il faut savoir relever l'aspect positif pour travailler plus efficacement l'aspect négatif.

Les sous-entendus

- Le fait que tous les pas contiennent au moins une proposition d'entrée explicitée est un indice positif : cela peut indiquer, en effet, que l'élève a bien conscience que les pas ont trois composantes.

- La présence ou l'absence d'un énoncé explicite des théorèmes a moins de signification : elle dépend en effet beaucoup du contrat didactique et du degré de difficulté des théorèmes rencontrés. Cependant, la présence d'un énoncé simple alors qu'un énoncé complexe est absent est un indice négatif. De même, l'absence de tout théorème explicite est un indice a priori assez défavorable. Il faudrait s'assurer que l'élève a compris que chaque pas comporte obligatoirement un "théorème", énoncé ou sous-entendu.

- Plus généralement, un texte avec beaucoup de sous-entendus peut être un indice favorable pour un élève qui fait peu de fautes : il indique une bonne maîtrise. Au contraire, cela devient un indice défavorable pour un élève faisant beaucoup de fautes.

Les propositions d'entrée

- Quand le théorème utilisé n'est pas une équivalence, retrouver la conclusion du théorème parmi les propositions d'entrée est un indice très défavorable.

- Le fait de donner des propositions d'entrée en excès, ou d'obtenir des conclusions intermédiaires qui ne sont pas réutilisées dans un autre pas, sont des indices défavorables. Pourtant il n'y a pas là de véritables fautes du point de vue de la structure de la démonstration.

Les théorèmes

- La confusion entre théorème direct et théorème réciproque n'est pas un indice fortement défavorable. C'est, en effet, une distinction difficile pour les élèves de Quatrième, d'autant plus qu'à leurs yeux, l'énoncé du théorème a un aspect si stéréotypé qu'ils retiennent seulement l'idée que cet énoncé parle des deux propositions qui les intéressent et qui de toute façon sont équivalentes. Citons cette amusante comparaison : "quand je pousse une porte et qu'elle ne s'ouvre pas, je la tire" ; il est vrai que, dans ces circonstances, on se garde bien de réfléchir avant d'agir pour savoir s'il faut la pousser ou la tirer ; l'attitude des élèves de Quatrième est sans doute la même vis à vis d'un théorème et de sa réciproque. Cette erreur est évidemment plus grave pour un élève de Seconde. A ce niveau, en effet, le contrat didactique est beaucoup plus contraignant et tous les élèves savent que cette erreur sera relevée par l'enseignant. Notons, a contrario, que le fait qu'un élève ne fasse jamais cette faute est un indice très favorable.

- L'énoncé d'un théorème faux inspiré d'un théorème du cours est un indice ambigu. Il n'est pas rare, en effet, que cela corresponde à une simple erreur de formulation ; on peut le constater quand l'élève corrige celle-ci dès qu'on lui indique qu'il y a une faute. Il arrive que le pas correspondant à cet énoncé faux soit parfaitement construit ; on peut alors penser que cet élève commet une "faute de Mathématiques" et non une faute de démonstration. Certains élèves, enfin, introduisent fréquemment dans un pas correct un énoncé de théorème inadapté ; sans doute l'énoncé est ici considéré plus comme un stéréotype qui sert à évoquer certaines idées, que comme un véritable texte.

Pour ces élèves, c'est un changement de point de vue sur les énoncés de théorèmes qu'il faut obtenir par un travail spécifique.

- La présence d'un théorème inventé est une attitude normale pour des débutants. Par contre, pour un élève de Seconde, à qui l'on a maintes fois répété qu'il n'a droit qu'aux théorèmes du cours, c'est un indice nettement défavorable. Le fait que le théorème soit faux doit être interprété avec précaution, si l'on se place du point de vue de la démonstration, car il peut s'agir d'une connaissance fausse mais qui est judicieusement utilisée dans cette démonstration.

- Le fait de citer un théorème dans toute sa généralité, plutôt qu'un théorème instancié est un indice le plus souvent positif.

Conclusion

Le temps nous a manqué pour analyser, dans cet atelier, d'autres copies.

Dans la pratique, le travail d'analyse que nous proposons demande du temps et il n'est donc pas facile de le faire fréquemment. Un objectif raisonnable est de le faire une ou deux fois dans l'année, si possible en travaillant avec d'autres enseignants, pour un ou quelques élèves qui ont des difficultés particulières pour lesquelles l'action à entreprendre n'est pas évidente.