NICOLE BELLARD
MARTINE LEWILLION

Analyse de productions d'élèves de 4ème

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998, fascicule S4 « Produire et lire des textes de démonstration », , p. 209-230
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998___S4_209_0>

Atelier n°10

ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ELEVES DE 4ème

Nicole Bellard
Martine Lewillion

Les productions d'élèves que nous avons examinés ont été obtenues dans le cadre d'une expérimentation qui s'est déroulée durant l'année scolaire 1994-1995.

I - *Présentation de l'expérimentation*

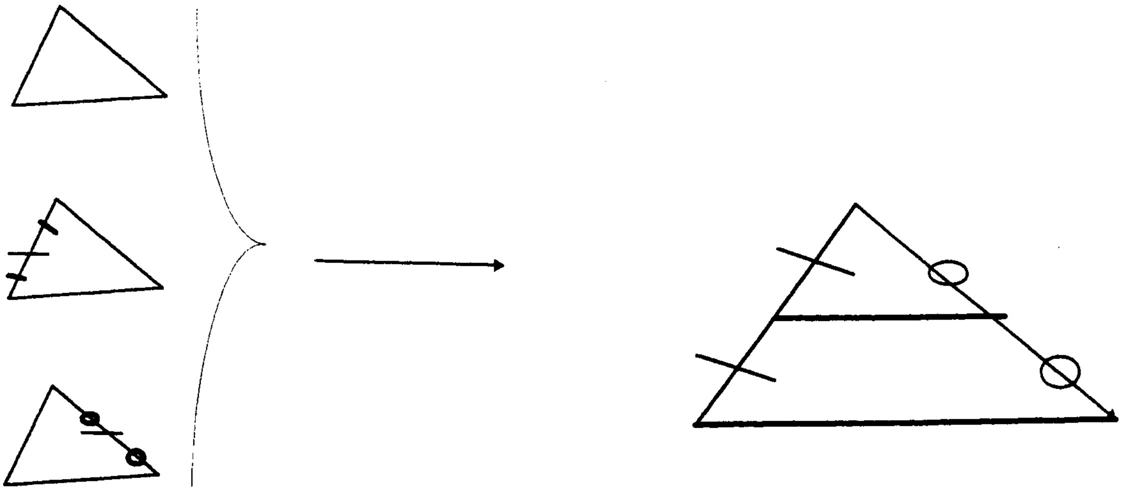
L'expérimentation s'appuie sur des travaux dont vous trouverez une bibliographie très partielle en annexe.

Le travail a lieu dans une classe de 4ème moyenne de 26 élèves. Il porte sur l'élaboration du "*sens*" d'un théorème "classique" de géométrie (il n'est pas question de théorème d'existence).
Dans cette classe, de nombreux théorèmes de géométrie s'obtiennent à partir d'essais et d'observations de dessins qui conduisent à l'élaboration d'une **conjecture**. Puis, soit le professeur valide cette conjecture en précisant, conformément au programme, que la possibilité d'en donner une preuve est admise, soit une ébauche de démonstration non formalisée est réalisée par les élèves, soit une démonstration en est faite et notée sur les cahiers. Chaque résolution de problème développe la **fonctionnalité** d'un ou de plusieurs théorèmes.

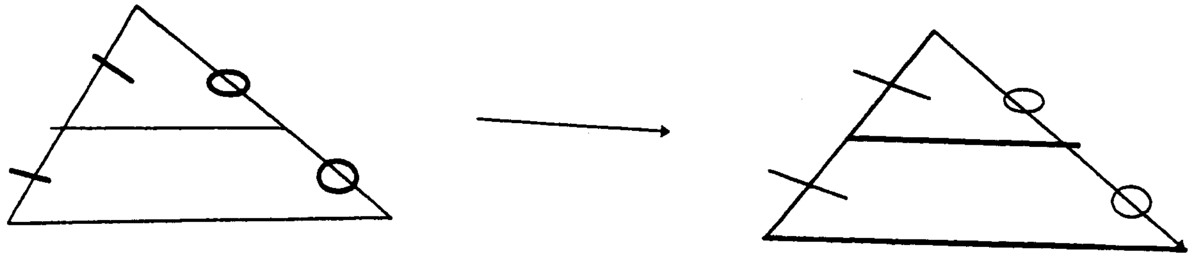
Afin de faciliter la connaissance d'un théorème indépendamment de sa formulation, une illustration de ce théorème par un **schéma** est utilisée : ces schémas ont été d'abord proposés aux élèves à partir de théorèmes simples de la classe de 5ème. Chaque fois qu'un nouveau théorème est introduit, les élèves peuvent proposer son illustration par des schémas, en plus d'une formulation en langue naturelle.

En fait, les deux types de schémas suivants ont été utilisés selon le moment de leur introduction et leur fonctionnalité.

Ce *premier type*, introduit dès le début de l'année à propos d'un travail sur des triangles isocèles, montre plus particulièrement le fait qu'un théorème est constitué de deux parties, les "**prémisses**" et la "**conclusion**", et il montre aussi que l'une rend l'autre obligatoire (nécessaire : caractère d'apodicticité).



Le *deuxième type*, apparu plus tardivement (un mois après), met plus en valeur **chacune des conditions d'utilisation** d'un théorème. Ici, par exemple, il permet d'illustrer que son utilisation nécessite la connaissance de trois choses : un triangle et les deux milieux de deux côtés de ce triangle.
Ceci est peut être moins visible pour certains élèves avec un schéma du premier type comme :



Il faut encore préciser que ces schémas se font à main levée et que les renseignements ici marqués en gras le sont en couleur sur les schémas des élèves. On remarque aussi que pour les deux derniers schémas proposés, la partie conclusion reprend, mais sans couleur, des informations du premier dessin (prémisses). C'est ce qui rend le dernier dessin obtenu souvent semblable à une partie du dessin illustrant le problème dans la résolution duquel le théorème interviendra.

Ces schémas ne sont utilisés qu'à titre *transitoire* (les élèves les abandonnent d'eux-mêmes lorsqu'ils n'éprouvent plus la nécessité de leur utilisation alors que l'enseignant continue par contre à les utiliser dans chaque exercice) et ils sont aussi des *outils transitionnels* entre "l'essence" du théorème et sa formulation en langue naturelle.

II - Présentation succinctes de quelques éléments de séquences

SEQUENCE 1 (4 séances de classe de 55 minutes)

Il s'est agit de faire le point avec les élèves sur les codages des dessins de géométrie [Bellard et coll 1998] qu'ils connaissent et sur la lecture qu'ils en font. Ceci a été l'occasion de vérifier leur savoir à propos des triangles isocèles, équilatéraux et rectangles.

SEQUENCE 2 (4 séances de classe de 55 minutes)

Nous avons introduit la notion de schéma illustrant un théorème en reprenant une partie d'un travail précédent et en faisant expliciter des raisonnements sur les triangles isocèles mis en œuvre implicitement par les élèves. Les schémas utilisés sont tous du premier type.

Nous avons ensuite proposé des exercices de *traitement* sur ces schémas et de *conversion* entre ce registre et celui de la langue naturelle [Duval 1995]. Le travail n'a pas été très approfondi pour des formulations avec "quand" par crainte d'y passer trop de temps.

SEQUENCE 3 (10 séances de classe de 55 minutes dont une pour un devoir surveillé)

Pour débuter un apprentissage en 4ème sur le "sens" d'un théorème, nous avons choisi dans le programme le thème "théorèmes des milieux" pour les raisons suivantes :

- les théorèmes de ce thème ne nécessitent aucun calcul pour être utilisés, ce qui n'est pas le cas du théorème de Pythagore ou de la définition du cosinus d'un angle. Or nous voulions surtout travailler sur des passages du registre de la langue naturelle à celui des figures et des passages inverses, en rejetant momentanément le cadre numérique ;
- ce thème n'est pas familier aux élèves alors que certains d'entre eux ont parfois déjà vu, en classe de 5ème, des théorèmes concernant le triangle rectangle et son cercle circonscrit. Nous espérions donc bénéficier de l'attrait de la nouveauté.

Nous avons retenu les trois théorèmes suivants :

1 - Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux des côtés alors cette droite est parallèle au troisième côté de ce triangle

2 - Si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux des côtés alors la longueur de ce segment est la moitié de celle du troisième côté.

3 - Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors cette droite passe par le milieu du troisième côté.

Nous n'avons pas utilisé la projection d'une droite sur une autre droite comme le préconise le programme qui était en vigueur à cette époque (94/95). Cela nous paraissait compliquer inutilement le travail sur le thème.

Plan de la séquence 3

- Introduction, à partir de *conjectures* élaborées par les élèves et validées par le professeur, des théorèmes 1 et 2 (les deux premières séances).
- Utilisation du théorème 1 dans une *situation particulière* (troisième séance).
- Comparaison, *en dehors d'une situation particulière*, des théorèmes 1 et 3, ce dernier étant présenté pour la première fois (troisième et quatrième séances).
- Comparaison, dans la *situation particulière* déjà vue, des théorèmes 1 et 3 (quatrième séance).
- Exercices d'utilisation en *situations particulières*, en classe, de ces théorèmes (cinquième et sixième séances).

- Correction d'un devoir rédigé sur feuille, à la maison (septième et huitième séances).

- Devoir surveillé 1, en classe, bilan du travail en géométrie, depuis le début de l'année scolaire (neuvième séance).

- Correction du devoir surveillé.

FIN DE TRIMESTRE

Un exercice du devoir surveillé 2, bilan de tout le trimestre, porte sur la géométrie de la séquence 3

SEQUENCE 4 (12 séances de classe)

Le thème de cette séquence est "le triangle rectangle et la médiane relative à l'hypoténuse. Elle s'est déroulée entre la fin du mois de janvier et celle du mois de mars, avec les vacances d'hiver en février.

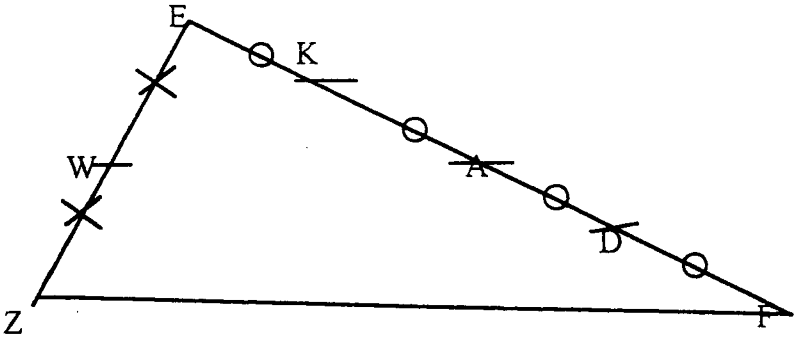
III Analyse de productions d'élèves au cours de ces séquences

Nous avons proposé aux participant d'analyser plus particulièrement les productions de 7 élèves au cours de cinq tâches différentes ; chacun de ces élèves est appelé par un numéro pour conserver son anonymat.

TACHE 1

Ceci se passe pendant la séquence 3. Les théorèmes 1 et 2 ont été vus. Un problème (voir ci-dessous) a permis de commencer à s'exercer à rechercher, dans une figure complexe, des triangles dans lesquels on peut utiliser le théorème 1 et des triangles dans lesquels on ne peut pas l'utiliser.

Voici une figure à main levée.



Cite tous les triangles dans lesquels tu peux utiliser le théorème 1 du cahier en n'utilisant que les points <u>nommés</u> de la figure.
Cite un triangle dans lequel tu ne peux pas utiliser ce théorème, en n'utilisant que les points <u>nommés</u> de la figure ".

Arthur et Noémie

L'activité "Arthur et Noémie", mettant en oeuvre une situation très différente de la précédente, a été alors présentée aux élèves. Il s'agit de les faire travailler sur des formulations discursives, *en dehors du contexte de figures particulières,* avec les objectifs suivants :

- reconnaître que deux théorèmes comportant les mêmes mots, pouvant être illustrés par un même dessin (comme dans certains livres et nous le verrons aussi, comme par quelques élèves), peuvent être différents,
- distinguer la partie “prémisses ” de la partie “conclusion ” du théorème 1,
- reconnaître leurs fonctions différentes,
- introduire le théorème 3 : *Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors cette droite passe par le milieu du troisième côté.*

Voici l'énoncé exact, proposé en travail individuel :

> Arthur et Noémie sont élèves de 4ème avec des professeurs différents.
> Dans son classeur de fiches, Arthur a écrit le théorème suivant :
> "*Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de 2 côtés alors cette droite est parallèle au 3ème côté du triangle*".
>
> Dans son cahier de cours, Noémie a écrit le théorème suivant :
> "*Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté, et est parallèle à un 2ème côté alors cette droite passe par le milieu du 3ème côté du triangle*".
>
> Arthur a fait des dessins et déclare :
> "*Tout compte fait, nous avons le même théorème*".
> Noémie n'est pas d'accord avec lui.
>
> **Qu'en penses-tu ? Explique pourquoi.**

Description succincte

Deux théorèmes, réciproques dans un certain univers (celui des triangles dont on connaît le milieu d'un côté) sont proposés aux élèves alors que ceux-ci ne connaissent que l'un des deux.

C'est par choix délibéré que :

- le texte de l'activité évoque des dessins. La plupart des livres illustrent, quand cela est possible, les théorèmes par un seul dessin sur lequel sont indistinctement codées les données et la conclusion. Cette pratique se retrouve bien sûr chez les élèves et nous voulons pouvoir en discuter et comparer de tels dessins aux "schémas" proposés voire imposés à la classe.
- la validité de théorèmes dont il est dit qu'ils sont écrits dans le cahier ne peut être mise en doute. Seule peut l'être la possibilité que ces deux théorèmes signifient la même chose (sans plus de précision).

La tâche de l'élève consiste à dire, en argumentant, si oui ou non il s'agit du même théorème. La discussion permettra alors de se mettre d'accord sur un sens à accorder à "même théorème" et à "théorèmes différents".

L'analyse des réponses

Elle permet de constater que, par rapport à la production de schémas, de nombreux élèves (19) dessinent des schémas qui résument chacun de ces théorèmes ; on pourrait donc penser que le fait que ces schémas soient différents devraient conduire les élèves à affirmer que les théorèmes sont eux aussi différents.

Parmi ces 19 élèves, 14 font des schémas et pourtant considèrent que les théorèmes ne sont pas différents.

Parmi ces 14 élèves, 6 ont fait des schémas différents pour chacun des théorèmes et un autre a fait un seul schéma mais évoque sa différence avec la partie prémisses du deuxième théorème. Ceci n'a pas suffi à ces 7 élèves pour dire que les théorèmes sont différents. On peut penser que la similarité des termes utilisés l'a emporté sur les différences dans l'ordre d'exposition, à l'écrit comme sur le dessin.

Il semble que le travail entrepris juste avant (exercice avec le triangle EZF), entre autre recherche de cas d'utilisation du théorème 1 avec explicitation systématique des conditions dans le cadre de l'exercice et recherche de cas d'impossibilité d'utilisation de ce théorème, ne suffit pas pour que les élèves puissent décider si un autre énoncé représente ou non le même théorème 1. Cet autre énoncé a sans doute besoin d'être utilisé pour qu'il puisse être perçu comme différent du précédent.

5 de ces élèves donnent une réponse correcte ; l'un fonde sa réponse sur les différences entre prémisses et les différences entre conclusions, un autre ne se fonde que sur les différences entre les conclusions, deux autres ne semblent prendre en compte que les différences entre les prémisses et un seul évoque explicitement le changement d'ordre entre prémisses et conclusion.

D'autre part, 4 élèves ne font pas de schéma mais font des dessins codant indistinctement données et conclusion : ils sont alors en mesure de répondre que ces deux énoncés représentent le même théorème puisque le dessin obtenu au bout du compte est le même ; 2 élèves ne présentent aucun schéma ni dessin mais explicitent très clairement qu'ils distinguent des prémisses différentes et des conclusions différentes ; 1 élève ne présente ni schéma ni dessin, précise qu'on ne démontre pas la même chose avec les deux énoncés mais conclut qu'ils sont pareils car ils parlent de la même chose.

On constate que 12 élèves évoquent la similarité globale entre ces énoncés pour affirmer qu'il s'agit du même théorème, qu'ils aient réalisé ou non des dessins ou des schémas parfois reconnus par eux comme différents.

TACHE 2

Il s'agit d'un devoir sur feuille, à faire à la maison et à remettre trois jours après, lors d'une séance qui ne portera pas sur la géométrie.

Objectifs

- Il s'agit du premier exercice mettant en jeu les trois théorèmes découverts dans cette séquence.
- Il s'agit du premier exercice qui, pour la dernière question, requiert de prendre en compte comme donnée un résultat d'une question antérieure.
- Il s'agit d'un devoir d'évaluation formative.

Enoncé

EBD est un triangle tel que : EB = 4 cm, ED = 6 cm et BD = 7,5 cm. On appelle A le symétrique du point E par rapport au point B. On appelle H le symétrique du point E par rapport au point D.

a - Fais une figure à main levée et code les renseignements donnés par l'énoncé.
b - Voici un théorème : "Si dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors cette droite passe par le milieu du dernier côté".
- Avec les renseignements de l'énoncé, peux-tu utiliser ce théorème ?
- Explique ta réponse.
c - Voici un autre théorème : "Si dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors cette droite est parallèle au dernier côté".
- Avec les renseignements de l'énoncé, peux-tu utiliser ce théorème ?
- Explique ta réponse.

d - Dans ton cahier, y a-t-il un théorème qui te permettrait de calculer la longueur AH ?
- Peut-il effectivement être utilisé ici ? Explique ta réponse.

Remarques

- L'énoncé demande le tracé d'une figure à main levée afin de favoriser la prise en compte des seules propriétés codées.
- Des dimensions sont précisées, elles permettront des calculs avec l'utilisation du théorème 2, pour la première fois.
- On retrouve des difficultés déjà abordées :
  * il manque un segment pour visualiser le triangle dans lequel on peut ou non appliquer les théorèmes 1, 2 et 3 actuellement étudiés,
  * il faut lire et interpréter soigneusement les phrases évoquant des symétries par rapport à des points de la figure.

Analyse des réponses

L'examen des copies des 24 élèves sur 26 qui ont rendu le devoir, permet les constatations suivantes.

- En ce qui concerne la symétrie centrale

5 élèves confondent *symétrie par rapport au point E* et *symétrique du point E.* Ceci les empêche de répondre correctement aux questions suivantes mais leurs explications montrent qu'ils ont bien compris comment on utilise un théorème : ils précisent les données manquantes pour utiliser chacun des théorèmes.

- En ce qui concerne les codages des données

5 élèves ajoutent des renseignements codés qui ne sont pas des données de l'énoncé mais seul deux les utilisent dans leurs démonstrations. Deux d'entre eux précisent qu'il s'agit d'ajout et ne s'en servent pas en tant que données.

- En ce qui concerne la question b (théorème 3)

Sur 19 élèves qui ont fait un dessin correct du point de vue des symétriques, 9 ne répondent pas de manière satisfaisante à la question : 8 d'entre eux utilisent à tort le parallélisme comme donnée.

En ce qui concerne la question c (théorème 1)

Sur les 19 élèves qui ont fait un dessin correct, 4 ne répondent pas correctement. Ils n'avaient pas déjà répondu correctement à la question b. Il semble que deux d'entre eux aient eu des difficultés en raison du côté [AH] non tracé.

En ce qui concerne la question d (théorème 2)
Sur les 14 élèves qui évoquent le bon théorème, 5 d'entre eux ne justifient pas son utilisation.

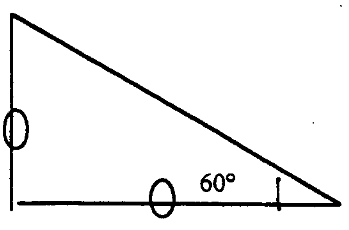
En ce qui concerne les schémas
7 élèves dessinent ou évoquent des schémas, 3 d'entre eux dessinent seulement la conclusion du théorème 2 et un les prémisses du théorème 1 comme si cela leur évitait de donner des explications en langue naturelle.

TACHE 3

Il s'agit d'un devoir d'une heure, noté sur 20, réalisé en classe, en temps limité et individuellement. Les exercices 1 et 3 n'ont pas été examinés dans cet atelier.

- **L'exercice 1** porte sur la lecture d'un dessin codé, fait à main levée (ceci a été traité dans la partie 1, cf.IV). Les apparences sont trompeuses car le triangle apparaît comme rectangle et il ne l'est pas.

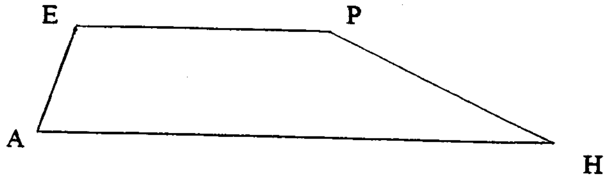
Exercice 1 : Voici une figure à main levée.



Ce triangle est-il rectangle ? Entoure la réponse.
- Je sais que je ne peux pas répondre.
- Oui.
- Non.

Ce triangle est-il équilatéral ? Entoure la réponse.
- Je sais que je ne peux pas répondre.
- Oui.
- Non.

Exercice 2 : AEPH est un trapèze de bases [AH] et [EP].
Par la symétrie de centre A, le point E a pour symétrique le point G.

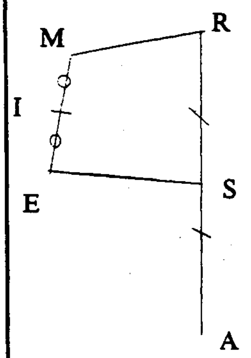


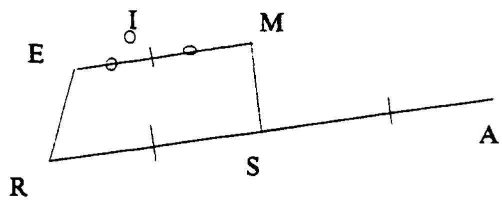
a) complète cette figure pour illustrer cet énoncé (sans oublier les codages)

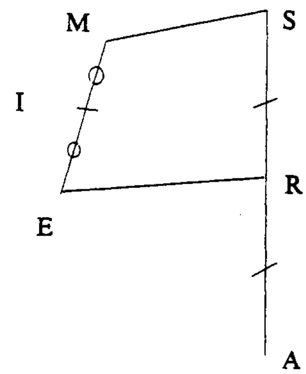
b) Cherche dans cette figure un triangle dans lequel on peut utiliser un des trois théorèmes appris en classe

Quel triangle as-tu trouvé ?................
Ecris le théorème que tu peux utiliser dans ce triangle.
....
....
....
....
....
Quel renseignement nouveau obtiens-tu ?
....

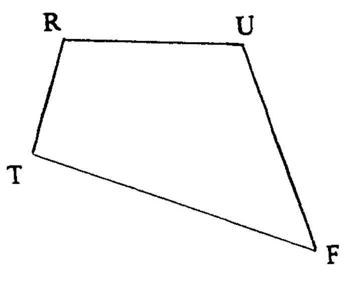
Exercice 3 : MERS est un quadrilatère. Le milieu du segment [ME] s'appelle I. Par la symétrie de centre S, le point R a pour symétrique le point A.
Parmi les figures suivantes, laquelle ou lesquelles n'illustre(nt) pas cet énoncé ? Explique ta réponse :







Exercice 4 : RTFU est un quadrilatère. A est le milieu de [RT]. B est le milieu de [RU].



a) Complète la figure pour illustrer cet énoncé.
b) Cherche dans cette figure un triangle dans lequel on peut utiliser un des théorèmes appris en classe.

Quel triangle as-tu trouvé ?
....

Ecris le théorème que tu peux utiliser dans ce triangle :
....
....
Pourquoi peux-tu utiliser ce théorème dans le triangle que tu as choisi ?
....
....
Quel renseignement nouveau obtiens-tu ?
....
....

- **L'exercice 2** propose une figure incomplète et non codée, accompagnée d'un texte. Il s'agit de repérer si le parallélisme des bases est codé par les élèves et si la lecture d'un texte évoquant la symétrie par rapport à un point est correcte. Enfin, les élèves doivent repérer, dans une figure complexe et incomplète, une sous-figure dans laquelle les données permettent d'utiliser l'un des théorèmes 1, 2 ou 3. Ils doivent énoncer ce théorème et indiquer quelle conclusion il permet d'obtenir.

- **L'exercice 3** demande de choisir parmi trois dessins codés celui ou ceux qui n'illustrent pas le texte donné. Les difficultés sont liées à la prise en compte de l'ordre des sommets pour nommer un quadrilatère (point qui n'a pas été un objet d'enseignement cette année là) et sur les positions relatives d'un point et de son image par une symétrie centrale (point qui a été revu cette année).

- **L'exercice 4,** comme l'exercice 2, demande de compléter une figure illustrant un texte et de trouver dans cette figure complexe, mais plus simple que celle de l'exercice 2, un triangle dans lequel les données permettent d'utiliser un des théorèmes 1, 2 ou 3. Les élèves doivent aussi préciser pourquoi ce théorème est utilisable et ce qu'il permet de conclure.

A ce stade, les élèves n'ont pas encore résolu d'exercice du type "Démontrer que", cela viendra à un autre moment de l'année.
Les deux exercices analysés (2 et 4) testent les compétences des élèves
- à choisir le bon théorème,
- à dire les données correspondant aux conditions d'utilisation du théorème,
- à fournir la conclusion en relation avec celle du théorème.

Lorsque ces trois étapes seront chacune mieux comprises, on pourra alors donner des exercices " plus classiques ", mais dans un premier temps ne comportant qu'un seul pas déductif.

Exercice 2

Il s'agit de faire utiliser le théorème :
"*Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors cette droite passe par le milieu du troisième côté*".

Objectifs

- Faire coder une figure avec les renseignements donnés par l'énoncé et en particulier repérer si le renseignement "trapèze de bases... " est codé par le parallélisme des droites (EP) et (AH).
- Faire tracer le symétrique d'un point donné par rapport à un autre point donné à partir d'un texte écrit.
- Faire identifier, dans une figure complexe, une partie de celle-ci permettant d'utiliser un théorème que l'on vient d'apprendre.
- Faire formuler par écrit un théorème que l'on peut utiliser.
- Faire expliciter une conclusion obtenue par utilisation d'un théorème.

Analyse

Question a)

- Le quadrilatère AEPH est dessiné afin d'éviter que des élèves, dès le début du problème, n'aient une figure incorrecte en ne plaçant pas les sommets dans le bon ordre (l'exercice 3 se préoccupe de cette question de l'ordre des sommets).
- De l'espace est laissé tout autour de la figure afin de ne pas risquer de guider l'élève dans le positionnement du point G. On pourra ainsi repérer ceux qui liront mal la phrase définissant G (phrase qui reprend une formulation utilisée lors de la correction d'un devoir précédent). Cette phrase met en avant la transformation "symétrie de centre A ".

- Cette question propose un travail de conversion du registre de la langue naturelle vers celui des figures ; deux codages sont attendus : celui du parallélisme des droites (EP) et (AH) et celui du fait que A est le milieu du segment [EG]. Dans les classes antérieures, aucun codage du parallélisme n'a été proposé. Pour la plupart des élèves, cette activité n'est pas encore très familière de même que celle de coder la figure associée à un énoncé de problème mais elles ont été un des objectifs de l'enseignement proposé car elles nous paraissent une aide importante à la résolution de problèmes de géométrie. Difficulté supplémentaire, le mot "parallèles " n'est pas explicité puisque qu'il faut le déduire de "trapèze de bases... ", ce qui n'est pas nouveau mais est difficile et pas encore habituel.

- Nous cherchons à repérer si des données supplémentaires, en dehors des conclusions des raisonnements, sont ajoutées sur le dessin par les élèves. Ces ajouts permettent le plus souvent l'utilisation de l'un des théorèmes appris. Ils seront nécessaires pour les élèves qui, voulant utiliser un des théorèmes appris, ne prennent pas en compte dans leur raisonnement le parallélisme des bases et sont alors obligés d'ajouter d'autres données. Cela ne traduit pas une incompréhension des théorèmes.

Questions b)

- Un triangle possible aura pour côté [EG], seul segment dont on connaisse un milieu. Il manque encore un sommet pour avoir un triangle. Il est à choisir parmi les seuls autres points P ou H, non alignés avec E et G. Le point P n'est pas relié à G mais il l'est à E. Le point H n'est relié ni à P ni à H. Les élèves doivent prendre l'initiative de joindre des points de la figure. L'enseignement des années antérieures n'a pas favorisé cette initiative. Elle a été sollicitée cette année mais elle est peut-être en conflit avec le fait que, pour l'instant, les activités proposées imposent de ne pas ajouter de données "particulières " (milieu, parallèles, nouveau point) qui permettent d'utiliser des théorèmes appris et de n'utiliser que les points déjà désignés par une lettre de la figure.

- Les triangles possibles sont donc EGP et EGH.

Avec le triangle EGH un ajout est indispensable : le milieu de [EH] ou celui de [GH] ou le tracé d'une parallèle issue de A à l'un des côtés autre que [EG]. Ce choix n'est donc pas possible du point de vue de la coutume mise en place, **pour l'instant,** dans la classe.

Avec le triangle EGP, si le parallélisme de (EP) et (AH) n'est pas pris en compte, un ajout de données est à nouveau indispensable (milieu de [EP] ou de [GP] ou parallèle issue de A à l'un des côtés [GP] ou [EP]).

- Le seul théorème utilisable avec les seules données du problème est le théorème 3. Par contre, dès qu'un autre milieu de côté est ajouté, on peut choisir entre les deux théorèmes 1 et 2.

- La question sur le "renseignement nouveau obtenu " doit permettre de repérer les élèves qui ont compris à quoi sert le théorème utilisé : la cohérence entre les diverses réponses est importante.

Analyse des réponses des élèves

- Relativement à la figure

  Tous les élèves placent correctement le point G et codent le fait que A soit le milieu de [EG].

  10 élèves ne codent pas le parallélisme de (EP) et de (AH)

  6 élèves dont 3 parmi les 10 précédents ont ajouté des données qui n'étaient pas indispensables à la résolution du problème ; néanmoins deux d'entre eux ont correctement appliqué le théorème.

- Relativement à la question b)

  En ce qui concerne le choix du triangle, seule question laissant une part d'initiative aux élèves, deux élèves seulement ne choisissent pas le triangle EPG

  En ce qui concerne l'utilisation du théorème choisi par l'élève, 3 élèves supplémentaires ne l'appliquent pas correctement.

Finalement, on obtient :

		réponses b) correctes		
		oui	non	Total
parallélisme codé	oui	12	4	16
	non	4	6	10
	Total	16	10	26

Parmi ceux qui ont codé le parallélisme (61%), les trois-quarts ont une réponse correcte.

Parmi ceux qui ont une réponse correcte (61%), les trois-quarts ont codé le parallélisme.

Relativement au renseignement nouveau obtenu, 2 élèves n'ont pas donné un renseignement correct ou cohérent avec le théorème choisi, compte tenu du travail déjà fait.

Exercice 4

Il s'agit du même type d'exercice que l'exercice 2 mais ce sont les deux autres théorèmes qui peuvent être utilisés :

Théorème 1 : "*Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors cette droite est parallèle au troisième côté du triangle*"

Théorème 2 : "*Si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux des côtés alors ce segment est parallèle au troisième côté du triangle*".

Il est ajouté de préciser pourquoi on peut utiliser le théorème choisi.

Analyse

Question a)

- Le quadrilatère RTFU est dessiné, à main levée, comme un quadrilatère quelconque. Les élèves doivent placer et coder les milieux des deux côtés [RT] et [RU], consécutifs mais non explicitement présentés comme tels.
- Les points T et U ne sont pas joints, ce qui nécessite à nouveau, comme dans l'exercice 2, un tracé supplémentaire pour trouver un triangle dans lequel un des trois théorèmes appris peut être utilisé.
- Les codages à mettre en œuvre sont d'un usage plus habituels puisqu'il s'agit de coder des milieux et qu'il n'y a pas de codage de parallélisme.

Questions b)

Les questions portent sur le choix d'un triangle, le choix du théorème à lui appliquer, la justification de l'utilisation de ce théorème et la précision du renseignement nouveau ainsi obtenu. Lorsque les milieux A et B sont bien placés ces choix semblent assez faciles bien que le côté [TU] ne soit pas dessiné ainsi que la droite passant par les deux milieux A et B. Lors de l'enseignement, l'utilisation du théorème 1 nous a semblé plus aisée que celle du 3 peut-être parce que les deux prémisses sont de même nature : deux points milieux de deux côtés. L'explicitation du "pourquoi le théorème choisi est utilisable " peut poser des difficultés du point de vue de la formulation, les élèves ne disposent pas de phrases modèles pour cela.

Analyse des réponses obtenues

- En ce qui concerne la figure

Tous les élèves sauf un (il a mal placé le point B) placent les milieux correctement mais deux ne les codent pas.

Quatre élèves codent des éléments supplémentaires : rien ne permet de savoir à quelle question ceci est fait. Pour trois les écrits montrent une bonne compréhension du problème et on peut penser que cet ajout n'est pas une donnée mais la conclusion.

- En ce qui concerne les questions b)

Tous les élèves sauf un ont répondu correctement au choix du triangle et d'un théorème applicable accompagné d'explications cohérentes.

Parmi ces élèves deux qui avaient choisi le théorème 1 poursuivent avec le théorème 2 et donnent la longueur du segment [AB].

On remarque que :

- 16 élèves justifient l'utilisation du théorème choisi par l'instanciation de trois prémisses et non deux, reprenant dans leur formulation les trois prémisses du "schéma détaillé" du théorème (triangle, milieu et autre milieu).
- 2 élèves dessinent des parties de schémas non détaillés.

Finalement, cet exercice est bien réussi (23 élèves sur 26 réussissent la question b).

		réponses b) correctes		
		oui	non	Total
milieux bien placés	oui	23	2	25
	non	0	1	1
	Total	23	3	26

		réponses b) correctes		
		oui	non	Total
milieux bien placés et codés	oui	21	2	23
	non	2	1	3
	Total	23	3	26

Il était nettement plus facile que l'exercice 2. Cela semble tenir particulièrement au fait que l'une des prémisses (le parallélisme) n'est pas explicitée dans l'énoncé de l'exercice 2.

Comparons les réussites à ces deux exercices (questions b seulement prise en compte).

		réponses b) correctes à l'exercice 2		
		oui	non	Total
réponses b) correctes à l'exercice 4	oui	14	9	23
	non	2	1	3
	Total	16	10	26

- 14 élèves les réussissent tous les deux.
- 1 seul (322) n'en réussit aucune.
- 2 élèves seulement réussissent l'exercice 2 et pas l'exercice 4.
- 9 élèves réussissent l'exercice 4 mais pas l'exercice 2. Parmi eux, 5 n'ont pas codé le parallélisme et n'ont pas su énoncer correctement le théorème à utiliser (l'un n'a pas formulé la conclusion du théorème). Parmi les quatre autres qui ont pourtant codé le parallélisme, l'élève 317 ne donne pas le renseignement nouveau obtenu, l'élève 328 ne formule aucun théorème, l'élève 336 ne formule pas le bon théorème et l'élève 338 fait de même en ajoutant un codage de milieu qu'il utilise comme prémisse dans le théorème.

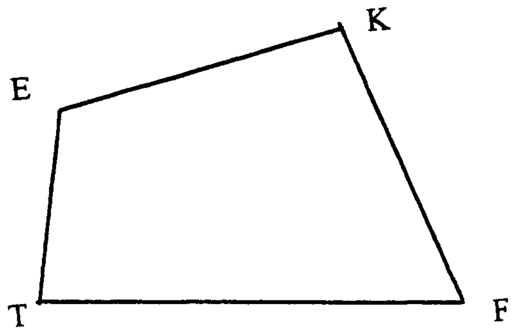
TACHE 4

Il s'agit du premier exercice du bilan du premier trimestre.
Voici son énoncé.

Exercice 1

Voici un quadrilatère EKFT ; L est le milieu du segment [EK], S est le milieu du segment [KF], R est le milieu du segment [FT] et V est le milieu du segment [TE].

Les droites (LS) et (RV) sont-elles parallèles ? Explique le mieux possible en t'aidant des théorèmes déjà vus cette année.



Analyse

Il s'agit là encore d'un problème classique à ce niveau de classe. Les élèves peuvent placer et coder les quatre milieux des côtés du quadrilatère. Ils peuvent alors dessiner les droites (LS) et (VR). Le parallélisme de ces droites peut sembler évident mais une explication de la réponse est demandée, avec l'aide des théorèmes appris.

La solution nécessite l'utilisation d'une droite intermédiaire non dessinée : la droite (EF). On peut utiliser alors deux fois de suite le théorème 1 dans les triangles EFK et EFT et ainsi démontrer que les droites (LS) et (VR) sont toutes les deux parallèles à la droite (EF), donc elles sont parallèles. Peut-être ne donneront-ils pas alors le dernier théorème utilisé : il a été étudié en classe de 6^e et fait partie des "évidences ".

Nous désirons savoir :

- si le codage des données du problème a été fait,
- s'il est encore à ce moment de l'année un élément facilitateur de la résolution du problème,
- si le théorème utilisé est explicité,
- si les noms des triangles sont cités,
- si l'énoncé du théorème sur le parallélisme de deux droites parallèles à une même troisième est décontextualisé.

Remarques sur les réponses

- A propos des dessins qui illustrent l'énoncé :

  21 élèves codent toutes les données et 5 n'en codent aucune

  10 élèves codent d'autres renseignements, dont la conclusion demandée pour 9 d'entre eux

2 élèves codent des renseignements non donnés et non demandés (les longueurs LS et RV sont égales pour l'un et les côtés EK et TF sont parallèles pour l'autre sans qu'il l'utilise par la suite)

Presque tous dessinent la droite ou le segment EF, c'est là une des clés du problème et elle est laissée à leur initiative.

- A propos des réponses :

tous les élèves sauf un donnent la bonne réponse.

- Quels sont les arguments donnés ?

Les trois pas du raisonnement prévu sont présents chez 20 élèves.

En ce qui concerne les deux premiers pas qui utilisent le même théorème dans deux triangles différents, ces même 20 élèves sauf un explicitent les noms des triangles, mais le quart ne précisent pas les noms des milieux des côtés utilisés. Selon le triangle considéré 16 ou 18 élèves explicitent la conclusion partielle obtenue.

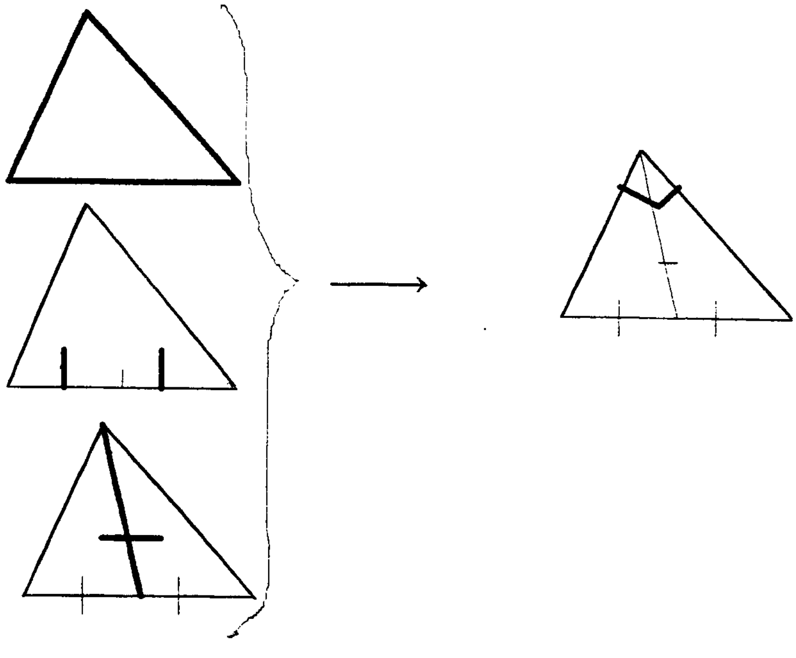
Pour le dernier pas, un seul cite le théorème employé décontextualisé. Les 20 autres montrent qu'ils ont compris et la plupart reprennent mot pour mot ce théorème en l'adaptant au contexte.

TACHE 5

Cette tâche se situe à la troisième séance de la séquence 4. Un travail préalable a permis de dégager le théorème

"Si dans un triangle une médiane est égale à la moitié du côté auquel elle se rapporte alors ce triangle est rectangle et l'angle droit est l'angle opposé à ce côté".

Il est illustré par le schéma suivant :



Objectifs de la tâche

- Repérer si les élèves ont compris à quoi sert un théorème et comment on l'utilise pour résoudre un problème. Il s'agit, en particulier, pour les élèves de vérifier si des données de l'exercice proposé sont bien des instanciations des prémisses de ce théorème. En fait ici, l'une des données est la conclusion instanciée du théorème et donc celui-ci ne peut pas s'appliquer.
- Introduire le théorème 2 "réciproque" du théorème précédent :

"Si un triangle est rectangle alors la médiane relative à l'hypoténuse a une longueur moitié de celle de l'hypoténuse".

Déroulement prévu

- Recherche individuelle de la situation "Blaise".
- Mise en commun, en groupe, de ce travail et rédaction d'une affiche présentant la position du groupe à propos de cette situation.
- Bilan, à partir des affiches des différents groupes.

Situation "Blaise"

Voici la fiche proposée à chacun des élèves individuellement :

> EXERCICE DE GEOMETRIE
>
> Blaise, élève d'une autre 4^{e}, a un exercice à faire mais il ne sait pas du tout comment s'y prendre.
>
> L'énoncé est le suivant : "Soit un triangle EGW rectangle en W et la médiane [WU]. L'hypoténuse de EGW mesure 7cm. Trouve la longueur WU."
>
> Et toi, peux-tu l'aider en utilisant le dernier théorème de ton cahier ?
>
> *Si oui, écris le théorème et dis pourquoi tu as le droit de l'utiliser
> *Si non, explique pourquoi.

Analyse de la tâche

L'exercice proposé à Blaise ne se résout pas avec le nouveau théorème mais avec sa réciproque.

Quelles sont les démarches déjà mises en œuvre par les élèves pour utiliser un *théorème donné* ?

Démarche descendante
- Analyser les données du texte ou du dessin codé associé à l'énoncé. On peut remarquer que le dessin codé est soit identique au dessin de départ du schéma non détaillé soit ce dessin de départ en est une sous-figure.
- Analyser les prémisses du théorème ou le dessin de départ du schéma.
Comparer données de l'énoncé et prémisses du théorème sous la forme que l'on préfère.

Démarche ascendante
- Analyser la conclusion proposée ou induite par l'énoncé.
- Analyser la conclusion du théorème.

- Comparer conclusion de l'énoncé et conclusion du théorème, là aussi dans les textes ou dans les dessins.

Quelles démarches imaginer pour chercher si le dernier théorème appris est ou non utilisable dans l'exercice que Blaise doit faire ?
Démarche descendante
- Analyser les données de l'énoncé.
- Rechercher les prémisses du dernier théorème appris et les comparer aux données ou une partie d'entre elles (sous forme verbale ou par le dessin associé à l'énoncé et la partie "départ" du schéma du théorème).
- Si toutes les prémisses se retrouvent dans les données, appliquer le théorème et conclure.

Démarche ascendante :
- Analyser la conclusion recherchée par l'énoncé.
- Rechercher dans le théorème la conclusion et la comparer à celle de l'énoncé.

Comment savoir qu'un théorème donné n'est pas utilisable ?
On peut bien sûr regarder s'il est utilisable comme il a été dit auparavant mais on peut aussi, par exemple, regarder si une donnée de l'énoncé n'est pas prémisse mais conclusion du théorème ou si une prémisse du théorème n'est pas donnée de l'énoncé mais la conclusion cherchée ou encore si la conclusion du théorème n'est pas une "donnée" de l'énoncé.

Les élèves, à ce moment de l'année peuvent-ils utiliser de telles démarches ? Ils n'ont pas encore beaucoup d'expérience dans ce domaine. De plus, leur temps d'appropriation d'un énoncé de théorème est plus long que celui des experts que nous sommes.

Analyse des réponses

- A propos du dessin illustrant l'énoncé du problème

Une grande majorité des élèves (plus de 80%) a codé le fait que le triangle WEG est donné rectangle en W et que U est le milieu de [EG]. On remarque que l'énoncé dit que [WU] est médiane et que les élèves ont bien traduit cela en U milieu de [EG]. Le travail du 28/01 a peut être aidé à la familiarisation avec ce mot et il est peut être plus facile de le comprendre une fois qu'il est donné que de le citer de soi même.

La moitié d'entre eux codent la conclusion attendue (WU = Ω EG) et un seul le fait d'une couleur différente des autres codages mais cela ne traduit pas une bonne compréhension de la situation. Coder ou non la conclusion n'est pas significatif de la compréhension de l'utilisation du théorème appris : seuls 5 élèves(318, 330, 331, 337 et 340), sur les 9 qui finalement comprennent qu'on ne peut appliquer le théorème, n'ont pas codé cette conclusion.

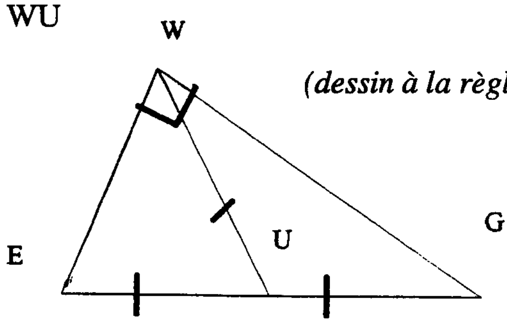
- A propos des explications données

Une grande majorité des élèves (81%) pensent que le théorème appris peut aider à résoudre le problème. Les explications consistent le plus souvent à citer le théorème utilisé (69%) et/ou donner la longueur de la médiane comme moitié de celle de l'hypoténuse. Ce n'est que lorsque les élèves essaient de contrôler qu'ils peuvent effectivement bien utiliser le théorème que quelques élèves (les élèves 315, 322 et 331) constatent qu'ils savent déjà que le triangle est rectangle et que ce n'est pas la conclusion attendue. Ces élèves concluent quand même en indiquant qu'on utilise "l'inverse" ou "le contraire" ou "la réciproque" du théorème.

IV Productions des élèves choisis, pour la tâche 5

Elève 316 :

Hyp : triangle rectangle en W
EG = 7 cm
Trouver WU



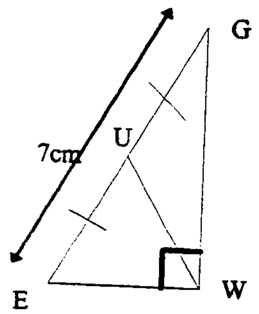
(dessin à la règle)

Oui je peux aider "Blaise" car grâce au théorème que l'on a vu en classe l'hypothénuse de EWG fait 7 cm donc sa médiane [UW] est égal à la moitié de sa mesure donc

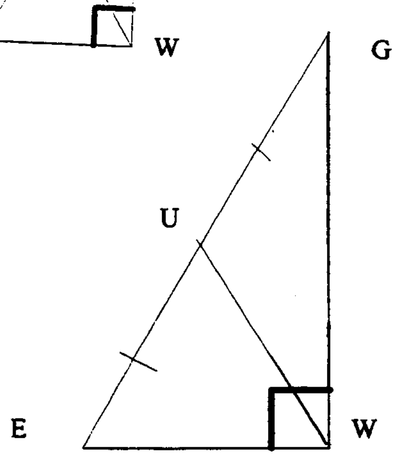
7/2 = 3.5
[UW] = <u>3.5 cm</u>

Elève 317

(premier et troisième dessin à main levée)



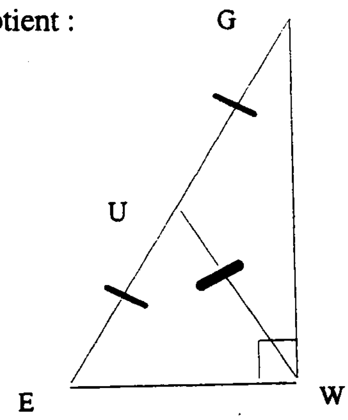
(dessin à la règle)



Oui, car Si EU = UG et que UW est la médiane alors l'hypoténuse de EGW est EG = 7 cm. EU = 3.5 cm.

On applique le théorème suivant : Si, dans un triangle, la médiane est égale à la moitié du côté auquel elle se rapporte alors ce triangle est rectangle et l'angle droit est l'angle opposé à ce côté".

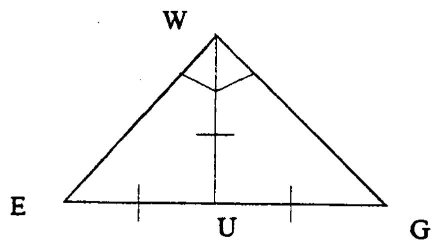
donc on obtient :



donc UW = 3.5 cm.

Elève 322 :

(dessin à la règle)



Oui, je peux utiliser le théorème car dans le triangle EGW nous avons un triangle qui est rectangle

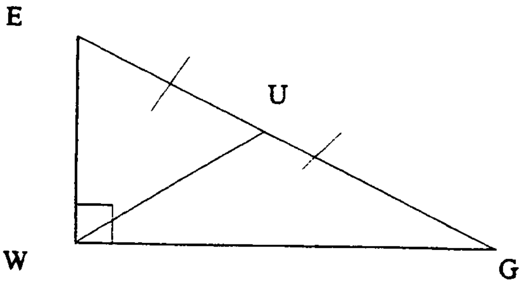
- le côté [EG] opposé à l'angle droit a un milieu qui est le pt U.

Donc comme : "<u>Si</u> dans un triangle, la médiane est égale à la moitiée du côté auquel elle se rapporte <u>alors</u> ce triangle est rectangle et l'angle droit est l'angle opposé à ce côté".

Mais comme nous savons déjà que le triangle EGW est déjà rectangle donc après ce th, on peut dire la longueur (WU) qui est 3.5 qui à la ^m longueur que [EU] et que [UG].

Elève 331 :

(dessin à la règle)



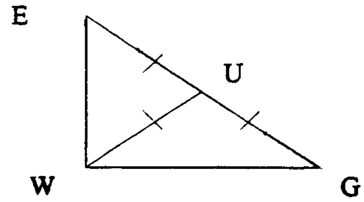
Je peux aider Blaise en utilisant le dernier théorème mais comme réciproque car dans le théorème du cahier on sait que [WU] = [EU] = [UG] alors que ici nous ne le savons pas. Mais nous savons que EWG rectangle en W alors qu'on le sait pas sur le théorème. Nous avons les bonnes informations donc nous pouvons l'appliquer. On a :

- un triangle EWG

- le milieu U de [EG]
- EWG rectangle en W   donc [WU] = [EU] = [UG] = 3.5 cm

Elève 334

(dessin à main levée)

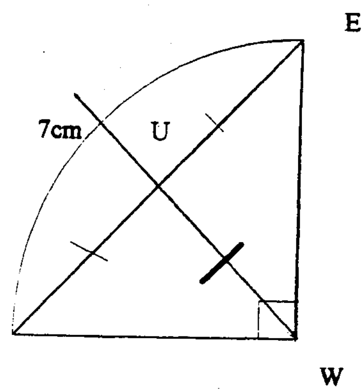


WU = 3.5 cm je peux l'aider
car Si dans un triangle, la médiane est egale à la moitié du côté auquel elle se rapporte alors ce triangle est rectangle et l'angle droit est l'angle opposé à ce cote. Donc on peut appliquer ce théorème : car on a bien un triangle WEG, la médiane en faisant la réciproque de ce théorème : comme on a un triangle rectangle, et que W est rectangle et opposé à l'hypoténuse EG alors la médiane égale la moitié de EG

comme EG = 7 cm
WU = 3.5 cm

Elève 336

(dessin à main levée)

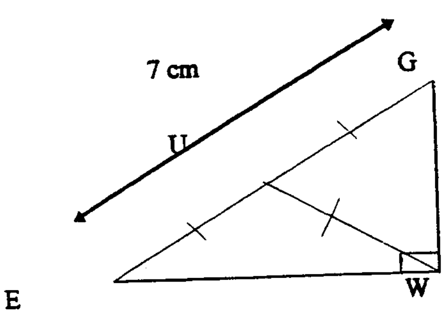


[UW] = [EU] = [GU]
Si [GE] est égal à 7 cm alors [GU] est égal à :
7 : 2 = 3,5
Donc [WU] est égal à 3,5 cm.

"Si dans un triangle, la médiane est égale à la moitié du grand côté auquel elle se rapporte, alors ce triangle est rectangle.

Elève 339

(dessin à main levée)



Oui je peux aider Blaise car on peut appliquer le théorème car on a une médiane et un angle droit donc EU = UW et UG = UW donc UW = 7cm : 2 = 3.5 cm.

III - Bilan de l'atelier

L'étude (sur cinq tâches) de cinq biographies d'élèves plutôt en difficultés et l'analyse de l'avancement de tous les élèves de cette classe moyenne montrent que :

- l'apprentissage de la démonstration correspond tout à fait au schéma constructiviste fait de déstabilisations et de remontées : alors que les résultats à certaines tâches donnent à penser que les élèves ont compris le "sens" du théorème en jeu, des tâches postérieures le contredisent,
- alors que tout semble montrer que l'élève sait se débrouiller dans des situations complexes relativement à un certain thème, qu'il sait différencier des théorèmes dont les énoncés comportent les mêmes mots (comme des théorèmes dits réciproques l'un de l'autre), dès qu'un autre thème est abordé, l'apprentissage doit reprendre pour de nombreux élèves; le transfert des acquis d'un contexte dans un autre ne se fait pas toujours de façon satisfaisante.

Nous rajouterons qu'en particulier, la distinction entre départ et arrivée d'un théorème n'est pas acquise rapidement même avec une formulation classique en "si...alors". Il a fallu attendre le mois de mai de la même année pour que tous les élèves distinguent les deux phrases "si A alors B et "si B alors A" ; c'est encore plus difficile pour des énoncés avec " quand " ou d'autres " petits mots ".

Références bibliographiques

BELLARD Nicole et GUIN Dominique (1994) Quels types de schémas pourraient être une aide à la compréhension des énoncés de théorèmes de géométrie ? *Représentation graphique et symbolique de la maternelle à l'université, Tome 1*, pp 60 à 68, Actes de la 46e CIEAEM, Editeur IREM de Toulouse.

BELLARD Nicole et LEWILLION Martine (1996) Représentations non discursives de théorèmes de géométrie, *Actes du Colloque Inter-IREM de Géométrie*, Editeur IREM de Bordeaux.

BELLARD Nicole et LEWILLION Martine (1998) Théorème, contraposée, réciproque (seconde), *Journées APMEP d'Albi*, Plot numéro 80.

BELLARD ET COLL (1998) *Le codage : Quand ? Comment ? Pourquoi ?* Préprint Irem de Montpellier.

DAMM Regina (1992) *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de textes*, Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

DUVAL Raymond (1993) Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, vol 5, Editeur IREM de Strasbourg.

DUVAL Raymond (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche mathématique, *Repères IREM* numéro 17, Topiques éditions.

EGRET Marie Agnès et DUVAL Raymond (1989) Comment une classe de 4e a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives,* vol 2, Editeur IREM de Strasbourg.

GUIN Dominique (1989) Réflexions sur l'aide à la démonstration, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, vol 2, Editeur IREM de Strasbourg.

LEGRAND Marc (1990) Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à la communauté scientifique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 9.3 Editions La Pensée Sauvage.

NOIRFALISE Robert (1991) Figures prégnantes en géométrie, *Repères IREM*, vol 2 Topiques éditions.

NOIRFALISE Robert (1993) Contribution à l'étude didactique de la démonstration, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 13.3, Editions La Pensée Sauvage.