JEAN-PAUL GUICHARD

À partir de quelques textes historiques

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1998, fascicule S4
« Produire et lire des textes de démonstration », , p. 101-121
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998___S4_101_0>

Atelier n°3

A PARTIR DE QUELQUES TEXTES HISTORIQUES

Jean-Paul Guichard

Approcher les textes de démonstration à la lumière de l'histoire comporte de nombreuses difficultés qui se rencontrent immédiatement dès que l'on veut proposer un choix : quels auteurs ? quelles démonstrations ?

Le parti que nous avons pris est de proposer deux regards :
1. l'étude du texte des démonstrations faites par neuf mathématiciens "pédagogues", d'Euclide à Hilbert, à propos du même théorème de géométrie : "Les deux angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux" ;
2. l'étude de cinq textes de cinq mathématiciens choisis pour leurs styles très différents.

Que nous enseigne la variété de ces textes démonstratifs ? Chaque mathématicien a-t-il son style ? Ce style dépend-il de son projet : écrit de référence, manuel d'enseignement, travail de recherche ? Dépend-il de sa conception des mathématiques, et au sein de celles-ci de la place et du rôle qu'y joue la démonstration ?

Un théorème, dix démonstrations

Le texte démonstratif étant souvent rattaché aux démonstrations de propriétés des figures de la géométrie plane, nous sommes restés dans ce cadre et avons choisi un énoncé simple, *"Les deux angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux"*, dont la démonstration ne présuppose pas la connaissance de trop d'énoncés.

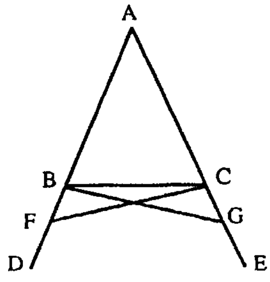
Nous sommes partis du texte d'Euclide tiré des *Eléments* (III^{e} siècle av. J.C.), le plus ancien ouvrage connu contenant une organisation du savoir mathématique validé par des démonstrations. De plus, cet ouvrage sera un modèle et une référence jusqu'au XX^{e} siècle : il sera le socle de l'enseignement des mathématiques pendant au moins vingt siècles. Nous proposons ensuite la réécriture symbolique du *même* texte par Hérigone en 1634. Mais, à partir de cette époque, se font jour des critiques de plus en plus nombreuses contre les *Eléments* d'Euclide. C'est le cas d'Arnauld de Port Royal, qui écrit en 1667 de *Nouveaux Elémens de Géométrie* desquels est extraite la troisième démonstration. Cet ouvrage, fondé sur un nouvel ordre du savoir et une autre conception de la démonstration, aura une grande influence sur les ouvrages d'enseignement du XVIII^{e} siècle. Dans le quatrième texte, écrit un peu moins d'un siècle plus tard par Clairaut, dans ses *Elémens de Géométrie*, prime l'aspect résolution de problèmes ; le souci de l'auteur est d'intéresser et d'éclairer les débutants. Mais en 1794, An II de la République, Legendre publie ses *Elémens de Géométrie* qui vont, à travers d'incessantes rééditions durant tout le XIX^{e} siècle, être la référence de l'enseignement de la géométrie élémentaire : le texte de Legendre marque un retour à la forme euclidienne. Cependant la fin du XIX^{e} siècle et le début du XX^{e} seront marqués par un courant rénovateur qui veut introduire dans le texte démonstratif les notions de mouvement et de transformation afin de le rendre plus clair, plus concis, plus simple : les textes de Hoüel, Hadamard et Borel traduisent ce courant. L'ouvrage d'Hadamard, *Leçons de Géométrie*, deviendra un classique, réédité durant toute la première moitié du XX^{e} siècle. Nous terminons par le texte de Hilbert qui à l'aube du XX^{e} siècle s'était proposé, dans ses *Fondements de la géométrie*, de reconstruire l'édifice euclidien sur de nouvelles bases : c'est l'avènement de l'axiomatique et du formalisme de l'époque moderne.

1. Modèle et référence

[1] **EUCLIDE** (-III^e siècle). *Les Éléments.* Livre I, proposition 5. Traduction VITRAC B., Vol. 1. PUF 1990, pp. 204-205.

5

Les angles à la base des triangles isocèles sont égaux entre eux, et si les droites égales sont prolongées au-delà, les angles sous la base seront égaux entre eux.



Soit un triangle isocèle ABC ayant le côté AB égal au côté AC, et que, les droites BD, CE soient les prolongements en ligne droite de AB, AC.

Je dis que, d'une part l'angle sous ABC est égal à l'angle sous ACB, d'autre part, que celui sous CBD est égal à celui sous BCE.

En effet qu'un point F soit pris au hasard sur BD, et que soit retranchée de la plus grande, AE, la droite AG, égale à la plus petite AF (Prop. 3), et que les droites FC, GB soient jointes (Dem. l).

Or puisque d'une part AF est égale à AG, d'autre part AB à AC, alors les deux droites FA, AC sont égales aux deux GA, AB, chacune à chacune, et elles contiennent l'angle commun, celui sous FAG ; donc la base FC est égale à la base GB, et le triangle AFC sera égal au triangle AGB et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que sous-tendent les côtés égaux, d'une part celui sous ACF à celui sous ABG, d'autre part celui sous AFC à celui sous AGB (Prop. 4).

Et puisque AF tout entière est égale à AG tout entière, que sa [partie] AB est égale à la [partie] AC, la [partie] restante BF est donc égale à la [partie] restante CG (N.C. 3). De plus il a été démontré que FC est égale à GB. Ainsi les deux BF, FC sont égales aux deux CG, GB, chacune à chacune, et l'angle sous BFC [est] égal à l'angle sous CGB ; et BC est leur base commune ; et donc le triangle BFC sera égal au triangle CGB et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent (Prop. 4) ; donc, d'une part celui sous FBC est égal à celui sous GCB, d'autre part celui sous BCF est égal à celui sous CBG.

Or puisque l'angle tout entier sous ABG a été démontré égal à l'angle tout entier sous ACF, que sa [partie], l'angle sous CBG, est égale à la [partie] sous BCF, celui restant sous ABC est donc égal à celui restant sous ACB (N.C. 3). Et ils sont à la base du triangle ABC. Il a aussi été démontré que celui sous FBC est égal à celui sous GCB. Et ils sont sous la base.

Donc les angles à la base des triangles isocèles sont égaux entre eux, et si les droites égales sont prolongées au-delà, les angles sous la base seront égaux entre eux. Ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 3

De deux droites inégales données, retrancher de la plus grande une droite égale à la plus petite.

Demande 1

Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.

Proposition 4

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côté, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est à dire ceux que les côtés sous-tendent.

Notion commune 3

Si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes seront égaux.

La première chose à remarquer est l'*organisation* très structurée du texte euclidien :

Proposition :
- l'énoncé

Exposition *(ou disposition, ou hypothèse)* :
- traduction graphique ou symbolique de l'énoncé
- éléments ou données de la question

Détermination *(ou diorisme ou requis à démontrer)* :
- explique clairement ce qui est cherché

Construction *(ou préparation)* :
- rajoute ce qui manque aux données pour trouver ce qui est cherché

Démonstration

Conclusion :
- retour à la proposition.

Cette présentation se retrouve pour tous les énoncés de l'ouvrage d'Euclide ; c'est un canon à respecter. On ne peut s'empêcher de le rapprocher des pratiques pédagogiques actuelles où l'élève doit inscrire dans sa rédaction, après la figure et avant le texte démonstratif, les deux rubriques : données (ou hypothèses ou ce que je sais) et conclusion (ou ce que je veux démontrer). C'est aussi la présentation de logiciels d'aide à la démonstration comme DEFI ou Mentoniezh.

La *forme* de l'énoncé du théorème est textuelle et générale ; la généralité est marquée par le pluriel : les angles des triangles isocèles.

Dans l'exposition, Euclide exprime verbalement les données en utilisant les notations de la figure et une forme passive particulière, le parfait passif de l'impératif grec rendu par "soit" ou "que soit", forme que l'on ne retrouve plus guère dans notre langue si ce n'est dans les énoncés et solutions d'exercices de géométrie. Pour dire ce que l'on cherche, Euclide utilise par contre, et à ce seul endroit, une forme active à la première personne : "je dis que...". Ces deux marques permettent de bien repérer dans le discours les deux temps préliminaires, qui correspondent aux deux rubriques demandées aux élèves débutant l'apprentissage de la démonstration en géométrie, et dans lesquelles données et conclusion sont instanciées, c'est-à-dire exprimées avec les notations de la figure. Dans le reste du texte c'est en général la forme passive qui est utilisée avec pour sujets des objets mathématiques : le mathématicien s'efface.

Les références aux propositions précédentes (Prop.3, Prop.4), aux demandes ou postulats (Dem.1), aux notions communes (N.C.3), ne figurent pas dans le texte grec : c'est une aide donnée par le traducteur au lecteur moderne. Ce qui permet de repérer les différents énoncés dans le texte de la démonstration, c'est leur instanciation rigoureuse, à la lettre : les énoncés sont repris, comme on peut le constater, dans leur forme et formulation exacte et complète en précisant les noms des objets en jeu : même si une partie de la conclusion n'est d'aucune utilité, elle est énoncée (cf. "et BC est leur base commune" dans le troisième paragraphe de la démonstration). Les références à ce que l'on sait des objets sont marquées par "puisque" ou par un rappel explicite : "il a été démontré que...". La présentation de l'argumentation est de type déductif, des données vers la conclusion (or...donc).

On peut remarquer que le canon euclidien est souvent le modèle donné encore de nos jours dans les classes lors de l'apprentissage de la démonstration.

2. Symbolisme et rigueur absolue

Examinons maintenant la démonstration par Hérigone de la même proposition.(voir ci-après) Cette démonstration est exactement la même que celle d'Euclide dont il ne fait que réécrire le traité. Mais sa mise sous forme symbolique exige une explicitation totale que connaissent bien les informaticiens.

La structure du texte est bien mise en évidence par des "balises" : Hypoth., Req.π.demonstr....

La référence aux énoncés utilisés est faite par un numéro, ce qui suppose une numérotation de tous les énoncés du corpus.

La référence à ce que l'on sait à propos des objets se fait par des abréviations ou des lettres grecques (hyp., constr., α) qui rappellent leur origine.

On peut remarquer que son codage permet à Hérigone de ne garder des énoncés qu'il utilise dans les démonstrations que les conclusions utiles contrairement à ce qui se passait pour Euclide. Nous avons là un texte équivalent à celui qui se retrouve dans l'enseignement actuel dans les classes qui utilisent des organigrammes ou déductogrammes.

Quel est l'intérêt d'une telle rédaction ? Voyons ce qu'en dit Hérigone lui-même. Des arguments apparaissent dans le titre même de son ouvrage : "Cours Mathématique, démontré d'une nouvelle, brève, et claire méthode, par notes réelles et universelles, qui peuvent être entendues facilement sans l'usage d'aucune langue. Par Pierre Hérigone, mathématicien." Préoccupations qui sont toujours d'actualité chez les enseignants confrontés en particulier aux problèmes d'expression des élèves. Puis, dans la préface, il reprend et complète ses arguments : "Il n'y a point de doute aussi qu'elle ne soit plus intelligible que la méthode ordinaire, vu qu'en cette méthode on n'affirme rien qu'il ne soit confirmé par quelque citation ; ce que les autres auteurs n'observent pas exactement, mais chacun mesurant la nécessité des citations, par ce qui leur est manifeste, ou obscur, usent de beaucoup de conséquences sans citations, qui néanmoins seraient nécessaires à ceux qui sont moins avancés... Et parce que chaque conséquence dépend immédiatement de la proposition citée, la démonstration s'entretient depuis son commencement jusqu'à la conclusion, par une suite continue de conséquences légitimes, nécessaires et immédiates, contenues chacune en une petite ligne, lesquelles se peuvent résoudre facilement en syllogismes, à cause qu'en la proposition citée, et en celle qui correspond à la citation, se trouvent toutes les parties du syllogisme... La distinction de la proposition en ses membres, savoir en l'hypothèse, l'explication du requis, la construction, ou préparation, et la démonstration, soulage aussi la mémoire, et sert grandement à l'intelligence de la démonstration.".

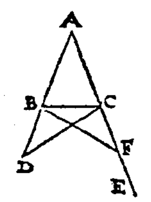
[2] HÉRIGONE P. (1634), *Cours mathématique, tome* 1, Paris. (pp. 5-6)

/.../

THEOR. II. PROPOS. V.

Isoscelium triangulorum qui ad basim sunt anguli, inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt anguli, inter se æquales erunt.

Des triangles isosceles, les angles qui sont à la base, sont égaux entr'eux: Et les lignes droictes égales estans prolongées, les angles qui sont sous la base, seront égaux entr'eux.



Hypoth.
ab 2|2 ac,
abd & ace *snt* ——.
Req. π. demonstr.
<abc 2|2 <acb,
<cbd 2|2 <bce.
Præpar.
ad *est arbitr.*

3.1. af 2|2 ad,
1.p.1. cd & bf *snt* ——.
Demonstr.
constr. ad 2|2 af,
hyp. ac 2|2 ab,
<a *est commun.*
4.1. dc 2|2 bf, α
4.1. <adc 2|2 <afb, β
4.1. <acd 2|2 <abf, γ
constr. ad 2|2 af,
hyp. ab 2|2 ac,
3.a.1. bd 2|2 cf,
α dc 2|2 bf,

A iij

6 ELEM.. EVCLID. LI. I.

β <bdc 2|2 <cfb,
1.concl. 4.1. <dbc 2|2 <fcb,
4.1. <dcb 2|2 <fbc,

γ <acd 2|2 <abf,
1.concl. 3.a.1. <acb 2|2 <abc.

/.../

Explication des abréviations

req. : le requis
π. : à
praepar. : préparation
snt. : sont
——., est une ligne droite
2/2 : égale
∠ : est un angle

3.1.: proposition 3 livre 1
1.p.1. : postulat 1 livre 1
3.a.1. : axiome 3 livre 1
α : "est la citation de quelque conclusion qu'on aura déjà démontré en la même proposition"

Il s'agit donc d'avoir un texte ayant un enchaînement déductif parfait, ce que manifeste la suite des "notes" de la colonne centrale du texte d'Hérigone. Ce travail de rigueur absolue l'amène à critiquer et améliorer le travail d'Euclide : "Or Euclide n'a pas expliqué en ses Eléments tous les principes géométriques, ainsi il y a beaucoup d'autres axiomes, desquels Euclide et ses interprètes se servent sans les avoir expliqués aux prémisses, lesquels s'ils n'étaient concédés, leurs démonstrations ne prouveraient rien. Mais notre méthode, en laquelle on ne peut rien dire qu'il n'ait été expliqué aux prémisses, ni rien affirmer qui ne soit confirmé par la citation de ce qui a été expliqué et concédé auparavant, requiert que tous les principes dont on se veut servir aux démonstrations soient premièrement expliqués."

Pour certains lecteurs d'aujourd'hui, le texte d'Hérigone est d'un accès bien plus facile que celui d'Euclide : objectifs atteints ; objectifs à atteindre ?

3. L'ordre naturel du savoir

[3] **ARNAULD A.** (1667), *Nouveaux élémens de Géométrie*, Livre XIII, Paris. (p. 265)

VIII. SECOND THÉORÈME.

Dans tout triangle le plus grand costé soûtient le plus grand angle, & le plus grand angle est soûtenu par le plus grand costé. Car par 2° lemme, tout triangle peut estre inscrit dans un cercle, & alors la circonference du cercle est partagée en trois arcs, sur chacun desquels est appuyé chacun des angles du triangle.

Or ces trois arcs sont :

/.../

IX. PREMIER COROLLAIRE.

Tous les costez du triangle estant égaux, tous les angles le font aussy : & au contraire tous les angles estant égaux, les cotez le font aussy.

Car estant inscrit dans un cercle, les costez égaux soûtiennent des arcs égaux. Or les angles appuyez sur des arcs égaux, sont égaux. IX, 21.

Que si au contraire on supposoit les trois angles égaux, on prouveroit de la même maniere que les costez sont égaux. Car les angles égaux seront appuyez sur des arcs égaux. IX, 21. Or les arcs égaux sont soûtenus par des costez égaux.

X. SECOND COROLLAIRE.

Tout triangle qui a deux costez égaux à les deux angles soûtenus par ces costez égaux ; & au contraire. En inscrivant ce triangle dans le cercle, on prouvera ce Corollaire de la même sorte que le precedent.

XXI. TROISIEME COROLLAIRE.

Tous les angles inscrits dans le même segment, ou appuyés sur le même arc, ou sur des arcs égaux, sont égaux.

(Livre IX)

Le théorème que nous étudions apparaît dans le texte d'Arnauld comme un corollaire d'un théorème du livre XIII : c'est dire la place mineure qu'il occupe dans l'ouvrage d'Arnauld.

La généralité de l'énoncé marquée par le quantificateur "tout" est à rapprocher de certaines formulations scolaires.

On peut apprécier le changement total de point de vue. L'énoncé devient évident, et la démonstration est simplement suggérée. L'évidence tient au nouvel ordre du savoir : Arnauld a remplacé la laborieuse identification des triangles égaux par la référence au cercle circonscrit et aux propriétés "naturelles" liant dans le cercle cordes et angles. Voir les angles du triangle comme des angles inscrits du cercle circonscrit au triangle éclaire la raison de l'égalité.
Quant au texte lui-même, celui des deux corollaires et du théorème, on peut remarquer qu'il est général et non instancié : aucune référence à une figure, pas de dénomination des objets. Les propriétés utilisées, introduites par "or", sont énoncées de façon générale, accompagnées d'une référence chiffrée permettant de les retrouver dans le corpus de l'œuvre (exemple : IX.21). L'argumentation est de type explicatif : elle commence toujours par un "car" qui donne la raison principale du pourquoi de la propriété à démontrer. Le style est impersonnel.

Le but d'Arnauld en écrivant de *Nouveaux Elémens de Géométrie* est de trouver un ordre plus naturel que celui d'Euclide, donnant des démonstrations plus claires, aidées par des principes féconds, comme il le dit dans sa préface : "Ce qui lui (Arnauld) a donc fait croire qu'il était utile de donner une nouvelle forme à cette science est, qu'étant persuadé que c'était une chose fort avantageuse de s'accoutumer à réduire ses pensées à un ordre naturel, cet ordre étant comme une lumière qui les éclaircit toutes les unes par les autres, il a toujours eu quelque peine de ce que les Eléments d'Euclide étaient tellement confus et embrouillés, que bien loin de pouvoir donner à l'esprit l'idée et le goût du véritable ordre, ils ne pouvaient au contraire que l'accoutumer au désordre et à la confusion."

4. Intéresser et éclairer

[4] CLAIRAUT A. (1753), *Elémens de Géométrie*, Première partie, XXXI, Paris. (pp. 32-33). Reprint, Laval : Siloë, 1987.

XXXI.

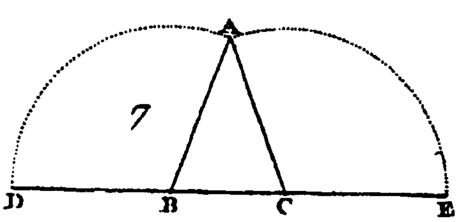
FIG. 7.

Le triangle isocèle est celui qui a deux côtés égaux.

Si des trois côtés du triangle ABC, on ne pouvoit mesurer que la base BC, & qu'on sçût d'ailleurs que ce triangle fût isocele, c'est-à-dire, que les deux côtés AB & AC, fussent égaux : il est évident qu'il suffiroit de mesurer un des deux angles A B C, A C B ; car alors l'autre lui seroit égal.

On en voit aisément la raison, si on se représente ce qui arriveroit, en supposant que les deux côtés A B, A C, du triangle ABC, fussent d'abord couchés sur B D, & sur C E, prolongemens de la base BC, & qu'ensuite on les relevat pour réunir leurs extrémités au point A ; car alors l'égalité de ces deux côtés les empêcherait de faire plus de chemin l'un que l'autre. Donc étant joints, ils pancheraient également sur la base B C. Donc l'angle A B C seroit égal à l'angle A C B.

Les angles que ces côtés font avec la base, sont égaux entr'eux,



La présentation du texte de Clairaut est totalement non traditionnelle. L'énoncé, dont la généralité est ici marquée par l'article défini "le", figure en marge, en deux parties distinctes : la définition de l'objet étudié en début, la propriété étudiée en conclusion de l'étude faite. Clairaut s'en explique dans sa préface : "...j'évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorème ; c'est-à-dire, de ces propositions, où l'on démontre que telle ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir." Clairaut présente donc le théorème, dans sa logique qui est "d'occuper continuellement ses lecteurs à résoudre des problèmes", comme un outil pour construire un triangle dans une situation précisée.

L'argumentation est de type explicatif : Clairaut propose une "expérience" de pensée qui permet de mettre en avant la raison d'être de la propriété. On peut remarquer, pour cet Académicien, un vocabulaire peu académique (arriver, relever, réunir, empêcher, chemin, pencher) et la présence de mots qui insistent sur le rôle de l'évidence (il est évident, on en voit aisément la raison), ce que l'on retrouve tout au long de son ouvrage. Dans le texte lui-même, tous les objets sont instanciés en référence avec une figure donnée. Clairaut est conscient que le style qu'il adopte a tendance à nous faire dénier le statut de démonstration à son texte argumentatif. Mais il s'en défend dans sa préface : "On me reprochera peut-être, en quelques endroits de ces Elémens, de m'en rapporter trop au témoignage des yeux, et de ne m'attacher pas assez à l'exactitude rigoureuse des démonstrations. Je prie ceux qui pourraient me faire un pareil reproche, d'observer que je ne passe légèrement, que sur des propositions dont la vérité se découvre pour peu qu'on y fasse attention. J'en use de la sorte, surtout dans les commencements, où il se rencontre plus souvent des propositions de ce genre, parce que j'ai remarqué que ceux qui avaient de la disposition à la Géométrie, se plaisaient à exercer un peu leur esprit ; et qu'au contraire, ils se rebutaient, lorsqu'on les accablaient de démonstrations, pour ainsi dire inutiles... Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte, et n'est propre qu'à obscurcir la vérité, et à dégoûter les Lecteurs."

Son projet est clair; il est d'ordre pédagogique : "intéresser et éclairer" les débutants, "accoutumer l'esprit à chercher et découvrir". Le texte démonstratif dépendrait-il de son projet : fonder la vérité, ou convaincre de la vérité ?

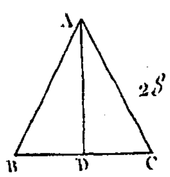
5. Le retour à Euclide

[5] **LEGENDRE A.M.** (1813), *Eléments de Géométrie*, 10° édition, Livre I, proposition 12, Paris : Firmin Didot. (pp. 14-15).

PROPOSITION XII.

THÉORÈME.

fig. 28.



Dans un triangle isoscele, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

Soit le côté AB=AC, je dis qu'on aura l'angle C=B.

Tirez la ligne AD du *sommet* A au point D, milieu de la *base* BC, les deux triangles ABD, ADC, auront les trois côtés égaux chacun à chacun ; savoir AD commun , AB = AC par hypothese, et BD = DC par construction ; donc, en vertu du théorème précédent, l'angle B est égal à l'angle C.

Corollaire. Un triangle équilatéral est en même temps équiangle, c'est-à-dire, qu'il a ses angles égaux.

Scholie. L'égalité des triangles ABD, ACD, prouve en même temps que l'angle BAD = DAC, et que l'angle BDA = ADC ; donc ces deux derniers sont droits ; *donc la ligne menée du sommet d'un triangle isoscele au milieu de sa base, est perpendiculaire à cette base, et divise l'angle du sommet en deux parties égales.*

On peut noter que Legendre marque la généralité de l'énoncé par l'article indéfini "un", donc d'une tout autre façon que dans les textes précédents.
On retrouve les outils d'Euclide, les cas d'égalité des triangles, et le canon euclidien jusque dans les formes verbales ("soit..., je dis que..."), excepté pour les constructions préparatoires pour lesquelles Legendre s'adresse toujours au lecteur ("Tirez..."). Les références aux théorèmes utilisés sont explicites, le plus souvent grâce à un numéro en marge, mais ce qui n'est pas le cas ici : "les nombres mis en marge indiquent les propositions auxquelles on devra recourir pour l'intelligence des démonstrations". On peut noter le mélange du texte et des notations ("l'angle BAD = DAC") qui actuellement fait partie des interdits courants édictés par les enseignants. La nature des données utilisées est également bien précisée : par hypothèse, par construction.

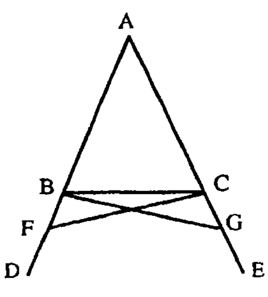
Si sa démonstration est plus courte et simple que celle d'Euclide c'est qu'il utilise une autre méthode sous tendue par l'idée d'axe de symétrie : idée qui sera utilisée explicitement quelques décennies plus tard par Hoüel, puis par Borel.

6. Simplicité et mouvement

[6] HOÜEL J. (1867), *Essai critique sur les principes de la Géométrie élémentaire, Paris* : Gauthier-Villars. (pp. 17-18)

PROPOSITION 5.

Fig. 5.



Dans tout triangle isoscèle ABC (fig. 5), 1° *les angles à la base* ABC, ACB *sont égaux entre eux* ; 2° *si l'on prolonge les côtés égaux* AB, AC *les angles formés au-dessous de la base, BDC, ECB, seront aussi égaux entre eux.*

Sur le prolongement BD de AB, prenons à volonté un point F, et sur AE>AF, prenons une longueur AG = AF [pr.3, note]. Joignons ensuite FC, GB.

1° Dans les triangles ACF, ABG, on a AF = AG, AC = AB, et l'angle A est commun. Donc [pr.4]

FC = GB, ACF = ABG, AFC = AGB.

Comme on a d'ailleurs AF = AG, et AB = AC, il en résulte [ax.3] BF = CG. Par conséquent, dans les triangles FBC, GCB, on a

BF = CG, FC = BG, BFC = BGC.

Donc [pr.4] FBC = GCB, c'est-à-dire que les angles *au-dessous* de la base sont égaux.

2° de plus, BCF = CBG ; et, comme on a d'ailleurs

ABG = ACF, CBG = BCF,

il en résulte [ax.3] ABC = ACB, c'est-à-dire que les angles à *la base* sont égaux.

Ce premier texte de Hoüel est sa traduction de la proposition 5 d'Euclide c'est-à-dire du premier texte que nous avons proposé.

En effet il déplore l'absence d'une bonne traduction des *Eléments* d'Euclide qui "reproduirait les idées de l'auteur dans le langage plus clair et plus précis de la géométrie moderne". Aussi donne-t-il sa traduction des 32 premières propositions du livre I des Eléments "où le langage ordinaire est remplacé autant que possible par les signes algébriques, plus concis et plus clairs".
On peut remarquer que tout le travail préparatoire (exposition-détermination) a été supprimé : il est intégré dans l'instanciation de l'énoncé du théorème. Les énoncés utilisés sont eux aussi instanciés et référencés au moment où s'opère la déduction : nous sommes proches du style d'Hérigone. La forme rédigée de la traduction de Hoüel se limite à l'utilisation de mots d'articulation logique et de repérage des données et acquis.

La confrontation de trois écritures différentes (Euclide, Hérigone, Hoüel) de la même démonstration nous semblait présenter d'autant plus d'intérêt que nous avions la justification des changements par leurs auteurs respectifs.

Le deuxième texte tient compte du changement que propose Hoüel à propos du texte euclidien : "Et cependant, pour un géomètre intimement pénétré de l'esprit de rigueur qui règne dans cet admirable ouvrage, et joignant à cela la connaissance des ressources de la science actuelle, rien ne serait plus aisé que de tirer du livre des *Éléments* un traité aussi correct pour le fond des idées, et débarrassé de ce que la forme offre d'aride et de rebutant. Il lui suffirait de subordonner les propositions à un ordre plus rationnel ; de remplacer autant que possible les démonstrations par l'absurde par des démonstrations directes, plus simples et plus lumineuses ; et enfin d'invoquer, quand il y a lieu, le grand principe des limites, que les anciens n'avaient osé formuler dans toute sa généralité".
Il change en effet l'ordre des notions en mettant en avant la notion d'angle comme l'avait fait Arnauld. Et pour avoir des démonstrations directes et plus claires, il introduit la notion première de mouvement géométrique car " c'est par le mouvement que nous parvenons à l'idée de grandeur".

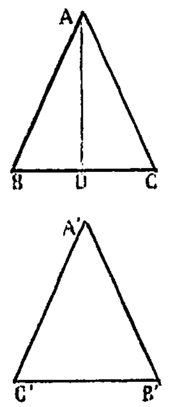
Dans ce texte on retrouve un peu le style de Clairaut : le théorème apparaît en conclusion d'une étude du triangle isocèle présentée sous forme "d'expériences" de pensée. Le langage utilisé est celui de l'action, du mouvement. Il s'en explique dans une note : "Il est avantageux d'introduire cette idée de mouvement géométrique le plus tôt et le plus explicitement possible. On y gagne beaucoup sous le rapport de la clarté et de la précision du langage, et l'on se trouve mieux préparé à introduire plus tard dans le mouvement les notions nouvelles de temps et de vitesse". Le langage insiste sur le rôle de l'évidence (on voit, faire voir) qui n'est pas une évidence visuelle, comme les mots pourraient le faire croire, mais une évidence intellectuelle, liée aux définitions et principes adoptés. Nous ne sommes plus dans la logique d'Hérigone où toute affirmation doit être confirmée par une citation. Ici la référence est considérée comme claire d'elle-même, alors que la formulation que l'on pourrait en donner peut prendre diverses formes. C'est ce qui justifie, par exemple, le passage de l'énoncé du théorème à celui d'un autre énoncé à la fin du texte. C'est ce que l'on trouve aussi dans cette note de Hoüel : "Nous ferons un continuel usage de ce procédé de *retournement* toutes les fois qu'il s'agira de démontrer l'égalité de deux parties d'une même figure. On peut présenter ce procédé autrement, en concevant que l'on plie en deux la figure autour de son axe de symétrie...". Cette note montre bien que le retournement, ou, ce qui revient au même, le pliage, proposés au début du texte par Hoüel sont bien des démonstrations, et l'on peut employer l'un ou l'autre langage.

Le texte de Hoüel nous interroge donc sur les modalités des références au savoir dans l'écriture d'un texte démonstratif. Si ces références peuvent être explicites à l'intérieur d'un ouvrage dont le projet est d'organiser un corpus de savoir à partir de ses éléments de base, qu'en est-il lorsque l'on écrit, ce qui est le cas des élèves, en dehors de ce corpus ? Quelles sont les références ? quelles sont les évidences ? Le texte de Hoüel nous interroge aussi, comme le texte de Clairaut, sur les finalités du texte démonstratif : doit-il simplement chercher à convaincre l'esprit du lecteur, ou doit-il aussi chercher à l'éclairer comme l'affirme Hoüel ?

[7] HOÜEL J. (1867), *Essai critique sur les principes de la Géométrie élémentaire, Paris* : Gauthier-Villars. (pp. 51-52)

§ 20.

Fig. 41.



DU TRIANGLE ISOSCÈLE. — Soit ABC (fig. 41) un triangle isoscèle, dans lequel AB=AC. Retournons le plan de ce triangle, en lui faisant faire une demi-révolution autour de la bissectrice AD de l'angle A ; ou, ce qui revient au même, plions la figure en deux, en faisant tourner une des moitiés autour de AD comme charnière. On voit alors que les deux moitiés de la figure se recouvrent parfaitement.

Si l'on ne veut pas d'abord introduire la bissectrice, on commencera par faire voir que le triangle retourné A'B'C' peut se placer sur sa première position ABC. Alors la bissectrice de l'angle C'B'A' coïncide avec celle de l'angle BAC, le milieu de C'B' avec le milieu de BC, etc. Donc

Théorème.— Dans un triangle isoscèle, 1° les angles opposés aux côtés égaux sont égaux ; 2° la bissectrice de l'angle au sommet est perpendiculaire à la base ; 3° elle partage cette base en deux parties égales.

Autre énoncé. — Si d'un point pris hors d'une droite, on mène à cette droite une perpendiculaire et deux obliques égales entre elles, 1° ces obliques s'écartent également du pied de la perpendiculaire ; 2° elles sont également inclinées sur la perpendiculaire ; 3° elles sont également inclinées sur la base donnée.

7. Simplicité et intuition

[8] HADAMARD J. (1898), *Leçons de Géométrie*, 13° édition (1947), tome 1, chapitre II, Paris, Armand Colin, (p. 23). Réédition Gabay, 1988.

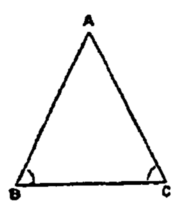


FIG. 20.

23. Théorème. - *Dans tout triangle isoscèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

Soit le triangle isoscèle ABC (*fig.* 20). Retournons l'angle BAC sur lui-même (**10**), AB prenant la direction AC et réciproquement. Puisque AB et AC sont égaux, le point B viendra prendre la place du point C et inversement. L'angle $\widehat{ABC}$ sera donc venu en $\widehat{ACB}$, de sorte que ces deux angles sont égaux. C. Q. F. D.

La concision de la démonstration de Hadamard repose sur l'utilisation de la notion de retournement, et sur la définition de l'égalité de deux figures. Voici comment elles sont présentées dans son ouvrage.

10 (pp. 9-10) ... Deux angles sont dits *égaux*, conformément à la définition des figures égales (**3**), si, en les transportant l'un sur l'autre, on arrive à les faire coïncider.

Deux angles égaux, $\widehat{BAC}$, $\widehat{B'A'C'}$, peuvent être placés l'un sur l'autre de deux façons différentes, savoir : ou bien le côté A'B' prenant la direction de AB et A'C' la direction de AC, ou l'inverse. On passe de l'une à l'autre en retournant l'un des deux angles sur lui-même, par exemple, en déplaçant l'angle $\widehat{BAC}$, de manière à ce que AB vienne dans la direction occupée primitivement par AC, et réciproquement.

3 (p.3) **Figures égales.** — Une figure quelconque peut être transportée d'une infinité de façons dans l'espace sans déformation, comme cela a lieu pour les corps solides usuels.

On nomme FIGURES ÉGALES *deux figures que l'on peut transporter l'une sur l'autre, de manière à les faire coïncider exactement dans toutes leurs parties;* en un mot, *deux figures égales sont une seule et même figure, en deux places différentes.*

Une figure à laquelle on ne fait subir que des déplacements sans la déformer, est encore dite figure *invariable.*

On retrouve dans l'organisation du texte de Hadamard celle d'Euclide avec des raccourcis et des omissions : pas d'annonce de ce qu'il faut démontrer, non explicitation des côtés égaux (renvoi à la figure sur laquelle est "notée" la conclusion, contrairement aux usages actuels), abréviation C.Q.F.D. en lieu et place de la conclusion.
L'argumentation est de type déductif. Les références aux énoncés utilisés sont explicitées par leurs numéros en caractères gras mis entre parenthèses (cf. ici (**10**)).

Par contre, comme Hoüel, Hadamard s'appuie sur la notion de mouvement, plus proche de l'intuition, et commence son ouvrage par les angles. Dans l'avertissement de la deuxième édition, il se réjouit de voir qu'il avait anticipé, dès 1898 date de la première édition de ses *Leçons de Géométrie*, la réforme des programmes de 1902 : "Depuis l'apparition de cet ouvrage, l'enseignement des mathématiques et, particulièrement, de la géométrie, a subi, non plus seulement dans ses détails, mais dans tout son esprit, des modifications profondes, depuis longtemps attendues et universellement réclamées. On tend à la faire reposer, pour les commençants, sur la pratique et l'intuition, et non plus sur la méthode euclidienne dont ils sont incapables de comprendre l'utilité.

Il est intéressant de savoir que la méthode utilisée par Hadamard, et que nous avons trouvée comme variante dans la démonstration de Hoüel, était connue dans l'Antiquité comme étant celle de Pappus (300 après J.C.).

8. Simplicité et transformations

Si on compare les intentions affichées par Borel dans la préface de son livre et le texte de sa démonstration, on peut dire qu'on ne peut guère faire plus simple. Comme chez Clairaut ou chez Hoüel, l'énoncé du théorème arrive après sa démonstration. On peut remarquer un reliquat d'instanciation des données ("les deux extrémités B et C", en référence à une figure précédente) dont Borel aurait pu se passer.

La démonstration fait une référence implicite à des propriétés vues dans les pages précédentes :
- le triangle isocèle admet un axe de symétrie
- la symétrie conserve les angles.

Pour Borel, l'évocation d'une symétrie connue inclut toutes ses propriétés. Certaines choses sont si claires qu'il n'est point besoin de les expliciter (cf. "il est visiblement symétrique").

[9] BOREL E. (1905), *Géométrie*, Paris : Armand Colin. (p. 34)

On appelle *base* d'un triangle isoscèle le côté opposé au sommet; les deux extrémités B et C de la base sont symétriques par rapport à l'axe de symétrie du triangle, il en résulte que :

Théorème II. — Les deux angles à la base d'un triangle isoscèle sont égaux.

Réciproquement, *si les angles à la base d'un triangle sont égaux, le triangle est isoscèle*, car il est visiblement symétrique par rapport à la perpendiculaire élevée au milieu de la base.

***Préface** (Extrait)*

C'est pourquoi j'ai cherché à écrire une Géométrie plus concrète, où les considérations de symétrie, de déplacements, sont invoquées le plus souvent possible. Les démonstrations qui en résultent sont plus simples et me paraissent plus claires que les démonstrations euclidiennes...

On pourra retrouver dans le point de vue adopté par Borel, tant sur le fond que sur la forme, l'esprit des programmes en vigueur dans le premier cycle depuis 1980 pour la géométrie ; et les réticences que peuvent éprouver certains lecteurs à conférer à un tel texte le label de démonstration, se retrouvent chez un certain nombre d'enseignants qui veulent maintenir à tout prix un style euclidien, et évacuent donc les transformations des textes démonstratifs.

9. La rigueur axiomatique

Il est intéressant de voir que d'emblée Hilbert donne deux formulations du théorème qui nous occupe, ce qui est une pratique assez rare, mais que nous avons déjà trouvée chez Hoüel.

La démonstration est considérée comme la conséquence immédiate de deux axiomes dont Hilbert donne les références explicites. Donner les raisons de la vérité du théorème est considéré ici comme suffisant. Pour des théorèmes moins "évidents", Hilbert retrouve un style plus "euclidien". Mais la forme du texte démonstratif reste, chez Hilbert, assez souple : il n'y a point de canon rigide. Par exemple la démonstration du théorème 18 débute par une indication de méthode : "Puisque la congruence des segments est symétrique, il suffit de démontrer que le triangle ABC est congruent au triangle A'B'C'".

Quant au contenu de la démonstration, il s'agit en fait de la même idée que celle d'Hadamard, mais sans utiliser de mouvement ou de transformation, qui cependant réapparaissent dans les gloses de l'axiome (III, 4).

[10] HILBERT D. (1899), Les *fondements de la géométrie*, chapitre 1. Traduction ROSSIER P., Paris : Dunod, 1971. (pp. 22 & 25)

2 Démontrons quelques théorèmes :

3 **Théorème 11.** Dans un triangle, si deux côtés sont congruents entre eux, les angles opposés à ces côtés sont congruents entre eux, ou brièvement : les angles à la base d'un triangle isocèle sont congruents.

4 Ce théorème résulte de l'axiome (III, 5) et de la dernière partie de l'axiome (III, 4).

18 **Définition**. Entre les angles, il existe certaines relations désignées par les termes congruent ou égal.

19 (III, 4) *Soient un angle (h, k) d'un plan α et une droite a' d'un plan α' ainsi qu'un côté donné de a' dans α'. Désignons par h' une demi-droite portée par a' issue du point O'. Dans le plan α', il existe une unique demi-droite k' telle que l'angle (h, k) est congruent, ou égal, à l'angle (h', k') et dont l'intérieur est du côté donné de la droite a'. En résumé,* $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h', k')$.

20 *Tout angle est congruent à lui-même* ; *autrement dit* $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h, k)$ et $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (k, h)$.

21 Plus brièvement, tout angle donné peut être reporté dans un plan donné, d'un côté donné d'une demi-droite donnée et cela d'une façon unique.

22 Le sens de rotation n'est, ici, pas plus considéré que le sens ne l'était dans le cas des segments. Donc les symboles $\sphericalangle (h, k)$ et $\sphericalangle (k, h)$ désignent la même chose.

23 **Définition.** Un angle de sommet B dont les côtés portent chacun un point A et C est aussi désigné par $\sphericalangle ABC$ ou brièvement par $\sphericalangle B$. Nous désignons aussi des angles par des minuscules grecques.

24 (III, 5) *Si dans deux triangles ABC et A'B'C' les congruences suivantes sont satisfaites* :

$$AB = A'B',\ AC = A'C',\ \sphericalangle BAC = \sphericalangle A'B'C',$$

la congruence $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$ *l'est aussi.*

***

Ces dix textes à propos du même théorème montrent bien la variété des styles et de la forme même des textes. Mais on peut noter, que ce soit pour s'y conformer ou s'y opposer, la référence constante au texte d'Euclide, qui sert encore, à l'insu de nombreux enseignants, de norme pour le texte démonstratif dans notre enseignement du second degré. Et les textes plus "libres" des réformateurs (Arnauld, Clairaut, Hoüel, Hadamard, Borel) sont souvent mal reçus, mal perçus : or le changement de point de vue adopté par ces auteurs met toujours en avant une réflexion épistémologique et pédagogique qui questionne la nature et le statut du texte démonstratif, questions qui sont toujours d'actualité.

Cinq mathématiciens, cinq styles.

Dans la première partie nous avions choisi de porter notre regard sur des écrits liés à l'enseignement de la géométrie : si l'on excepte le livre d'Hilbert, qui a néanmoins servi de référence pour l'écriture de nouvelles présentations scolaires de la géométrie, tous les autres ouvrages ont été des manuels pour l'enseignement de la géométrie "élémentaire". En tant que manuels, ils ont une fonction et une autonomie propres : le savoir géométrique y est construit de A à Z, les liens logiques entre les démonstrations et les énoncés utilisés peuvent être explicités par des renvois internes, l'auteur peut utiliser, pour faire ses démonstrations, une foule de résultats intermédiaires (propositions, lemmes, corollaires) qu'il a pris soin d'établir, mais qui ne pourront servir de référence pour le lecteur quand il aura à écrire des démonstrations. Il nous semblait donc important de regarder comment des mathématiciens "découvreurs" utilisaient ces éléments de géométrie pour écrire leurs démonstrations. Ceci nous paraissait d'autant plus intéressant que les élèves sont, toute proportion gardée, plutôt dans leur situation que dans celle d'un rédacteur de manuel.

Les trois premiers textes de Pappus, Descartes, Desargues, illustrent ce point de vue. Pour le quatrième nous avons pris un autre extrait du traité de Clairaut, qui tout en étant un manuel, est écrit dans l'esprit de la découverte et de la résolution de problèmes. Le cinquième et dernier, bien que provenant d'un traité d'analyse de Dieudonné, nous semblait illustrer autrement notre problématique dans la mesure où son style vise à faire du lecteur un découvreur et un rédacteur potentiel des démonstrations des propositions et théorèmes du traité.

1. Le style euclidien adapté à la recherche

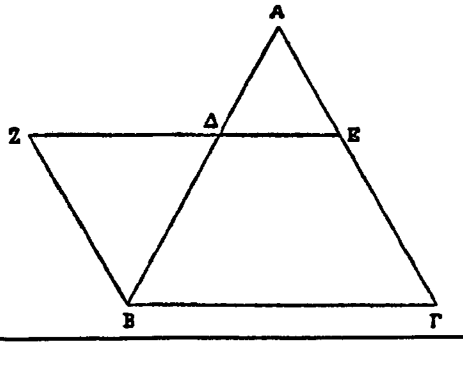
[11] **PAPPUS d'Alexandrie** (IV^e siècle), La collection mathématique, traduction VER EECKE P., tome 2, Paris : Blanchard, 1982. (pp. 649-650)

POUR LE VINGT-CINQUIÈME PROBLÈME.

XVI.

PROPOSITION III. - La droite AB étant égale à la droite BΓ, la droite AΔ égale à la droite ΔE et la droite ΔE parallèle à la droite BΓ, il faut démontrer que la ligne qui passe par les points A, E, Γ est droite.

Menons les droites de jonction AE, EΓ ; menons la droite BZ parallèle à la droite AE et prolongeons la droite EΔ jusqu'au point Z ; il s'ensuit que la droite ΔZ est égale à la droite ΔB. Or, la droite AΔ est aussi égale à la droite ΔE ; donc, la droite entière AB est égale à la droite entière ZE. Mais, la droite AB est égale à la droite BΓ ; donc, la droite BΓ est aussi égale à la droite ZE. Mais, ces droites sont parallèles ; donc, la droite ΓE est aussi parallèle à la droite BZ. Mais, la droite AE est aussi parallèle à la droite BZ ; donc, la ligne AEΓ est droite ; car cela est manifeste.



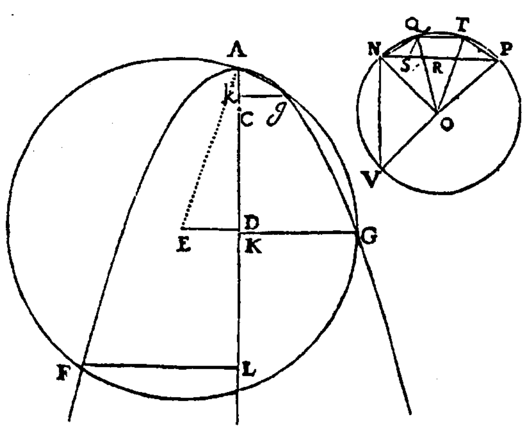
Comme pour les exercices proposés aux élèves, il s'agit ici d'un problème dont l'énoncé est instancié, contrairement à celui d'un théorème de cours, tel celui que nous avons étudié dans la première partie.

La préparation ("Menons...jusqu'au point Z;") enchaîne directement ("il s'ensuit que...") avec la démonstration. L'argumentation est de type déductif, mais il n'y a aucune référence explicite aux hypothèses et aux théorèmes utilisés. Néanmoins le style syllogistique ("Or...; donc....Mais...; donc....") rend claires ces références : "or" ou "mais" renvoie aux hypothèses utilisées, et "donc" à un théorème ou un axiome. On peut remarquer la présence de l'adjectif "entière" ("la droite entière") qui explicite un peu la référence à l'axiome utilisé, ainsi que l'utilisation fréquente de l'adverbe "aussi" qui met en évidence la conclusion de la propriété utilisée, et par là même manifeste son utilisation.

Remarquons l'intérêt didactique que pourrait apporter la lecture par des élèves d'un tel texte, assortie d'une consigne du type : "Enoncer les cinq propriétés qu'utilise Pappus pour faire sa démonstration".

2. Les raccourcis de l'analyse

[12] **DESCARTES R.** (1637), *La Géométrie*, Livre troisième, Leyde. (pp. 396-397). Fac-similé : The Geometry of René Descartes, New York : Dover, 1954.



La façon de diviser un angle en trois.

Tout de mesme si on veut diviser l'angle NOP, oubien l'arc, ou portion de cercle NQTP, en trois parties esgales ; faisant NO ∞ 1, pour le rayon du cercle, & NP ∞ q, pour la subtendue de l'arc donné, & NQ ∞ z, pour la subtendue du tiers de cet arc ; l'Equation vient,

$z^3 \infty * 3z -- q$. Car ayant tiré les lignes NQ, OQ, OT ; & faisant S parallele a TO, on voit que comme NO est a NQ, ainsi NQ a QR, & QR a RS ; en sorte que NO estant 1, & NQ estant z, QR est zz, & RS est z^3 : Et a cause qu'il s'en faut seulement RS, ou z^3, que la ligne NP, qui est q, ne soit triple de NQ, qui est z, ou à $q \infty * 3z -- z^3$ ou bien,

$z^3 \infty * 3z -- q$.

Là encore il s'agit d'un problème à résoudre, et l'énoncé est donc instancié.
La préparation fixe les notations et donne la solution du problème : l'équation $z^3 = 3z - q$.
La démonstration se présente comme une explication, c'est-à-dire une explicitation des raisons en deux grands moments :

1) "Car..." qui donne la suite des proportions permettant de calculer QR et RS en fonction de z. Le lien entre les données et l'écriture des proportions reste dans l'implicite : "on voit que"; cette formule permet de décliner ce lien (la similitude des triangles ONQ, NQR, QRS) sur le mode de l'évidence. Le lien entre les proportions et les expressions de QR et RS en fonction de z est présenté comme une quasi traduction algébrique : "en sorte que" fait une référence implicite aux règles de calcul sur les proportions.
2) "Et à cause qu'il..." donne la provenance géométrique de l'équation : NP = 3NQ - RS, mais n'explicite pas les raisons qui font que NR = NQ, que la partie centrale de NP est égale à QT - SR... Notons par contre que la non explicitation des règles qui permettent de passer de $q = 3z - z^3$ à $z^3 = 3z - q$ va de soi, et que leur explicitation est rarement exigée des enseignants.

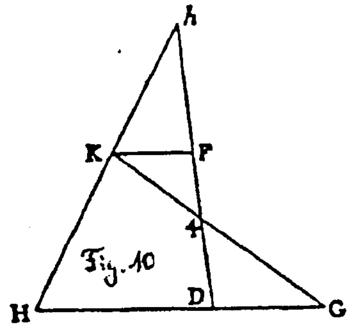
Comme pour le texte précédent nous pouvons voir l'intérêt qu'il y aurait à faire lire de tels textes par des élèves dans la perspective d'apprendre à écrire des textes de démonstration. Mais nous pouvons noter la différence de style entre les deux textes : style pauvre, répétitif chez Pappus, style riche et varié chez Descartes, où raisons, déductions, références, s'imbriquent. Une écriture centrée sur la déduction, une autre sur l'explication, sur la mise en avant des raisons.

3. Un style imagé

[13] **DESARGUES G.** (1639), *Brouillon project*, in TATON R., L'œuvre mathématique de G. Desargues, Paris : PUF, 1951. (pp. 125-126)

La proposition qui suit au long avec sa demonstration est la mesme que celle du hault de la page 3 et dont il est dit qu'elle est enoncée autrement en Ptolémée.

Quand en une droicte H, D, G, comme tronc à trois poincts H, D, G, comme nœuds passent trois droictes comme rameaux déployez HK*h*, D4*h*, G4K, le quelconque brin D*h*, du quelconque de ces rameaux D4*h*, contenu entre son nœud D, & le quelconque des deux autres rameaux HK*h*, est à son accouplé le brin D4, contenu entre le mesme nœud D, & l'autre troisiesme des mesmes rameaux G4K, en raison mesme que la composée des raisons d'entre les deux brins de chacun des autres deux rameaux convenablement ordonnez, à sçavoir de la raison du brin comme H*h*, au brin comme HK, & de la raison du brin comme GK, au brin comme G4 (fig. 10).



Car ayant par le poinct K, but de l'ordonnance d'entre les deux autres brins H*h*, G4, mené une droicte KF, parallele au tronc HDG, laquelle donne le poinct F, à ce rameau D4*h*, puisprenant le brin D*f*, pour mitoyen entre les deux brins D*h*, & D4, & consideré le parallelisme d'entre K*f*, HG, le brin D*h*, est au brin D4, en raison mesme que la composée des raisons du brin D*h*, au brin D*f*, ou du brin H*h*, au brin HK, & de celle du brin D*f*, au brin D4, ou du brin GK, au brin G4.

Il y a plusieurs choses à remarquer de cette enonciation, quand deux des trois rameaux sont parallels entre eux, quand au tronc il y a deux nœuds unis en un, & ce qui en depend où l'entendement ne void goutte.

La converse de cette proposition bien enoncée, & concluant que trois poincts sont en une mesme droicte est aussi vraye.

Dans ce texte présentant le théorème de Ménélaus et sa réciproque, on reste encore, malgré les apparences, dans le registre du problème, car si cette propriété existe bien dans le corpus mathématique ("il est dit qu'elle est énoncée autrement en Ptolémée"), Desargues en a besoin, et prend donc la peine de la démontrer en utilisant son langage propre et des outils élémentaires connus de tous, ici le lien entre parallèles et proportions. Son langage imagé, très botanique (tronc, nœud, brin, rameau), s'il surprend, ne nuit en rien à la rigueur de sa démonstration, à la compréhension du texte, peut-être même la facilite-t-elle.

Si l'énoncé est instancié, comme dans les problèmes précédents, Desargues veut bien marquer sa généralité : "le quelconque brin Dh, du quelconque..."; et avant d'exprimer le produit des deux rapports avec les notations de la figure, il en donne une formulation générale : "en raison mesme que la composée des raisons d'entre les deux brins de chacun des autres deux rameaux convenablement ordonnez".

La démonstration se présente comme une explication donnée en une seule phrase.

La première partie de la phrase contient tout à la fois la construction utile, l'idée qui va permettre d'obtenir le résultat (le brin moyen Df) et la référence à l'hypothèse utile.

La deuxième partie en tire les conséquences et la conclusion en menant conjointement la décomposition du rapport en produit de rapports, et l'utilisation de la propriété de "Thalès", sans que celle-ci ne soit explicitée.

Le morcellement en pas déductifs du style euclidien est délaissé au profit d'une explication globale cherchant à maintenir proches tous les éléments du problème et de sa solution.

Les deux derniers paragraphes du texte proposent au lecteur des corollaires et une réciproque à formuler par lui-même.

4. L'art d'expliquer au service de l'invention

La démonstration de la similitude des deux pyramides, qui occupe les quatre paragraphes proposés, est un maillon d'un problème plus vaste que Clairaut propose au lecteur de résoudre : trouver le volume d'une pyramide.

Le paragraphe 32 expose les similitudes qu'il va falloir démontrer en explicitant ce que signifie la similitude de deux figures ; et par là même, Clairaut indique la méthode à suivre.

Le paragraphe 33 établit un lemme qui va être la clé de toute la suite : c'est une propriété que Clairaut pourrait supposée être connue du lecteur, mais dont la raison n'est pas évidente et mérite donc démonstration. Celle-ci se présente comme une explication qui utilise un raisonnement par l'absurde, dans un langage proche du langage courant, avec ses redondances et ses mots imagés.

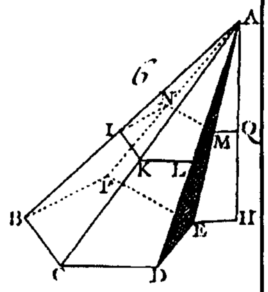
Le paragraphe 34 débute dans un style hypothético-déductif : "Si on suppose...il s'ensuivra...Si on prend...". Il enchaîne les résultats, chaque pas marquant, sans l'expliciter, l'utilisation d'une propriété, les déductions étant exprimées avec un vocabulaire varié. Dans tout le texte la conjonction "donc" n'apparaît que trois fois. La deuxième partie du paragraphe utilise un style explicatif : résultat, puis explicitation de la raison, qui est ici, fait rare chez Clairaut, entièrement énoncée sous forme générale.

Le paragraphe 35 allie styles déductif et explicatif.

A travers ce texte on mesure bien les objectifs de Clairaut ; il ne s'agit pas d'articuler pas à pas les hypothèses à la conclusion ; il s'agit d'expliquer les raisons de la similitude des figures, de les rendre claires (notez l'utilisation des verbes voir et observer), en utilisant toutes les ressources de la langue tant au niveau du vocabulaire que de l'argumentation.

[14] CLAIRAUT A. *Elémens de Géométrie*, Paris, (1753), (pp. 170-173). Reprint, Laval : Siloë, 1987.

XXXII.

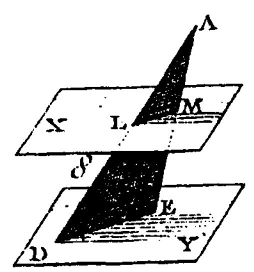


Reprenons la pyramide ABCDEF, & supposons-la coupée par un plan IKLMN, parallele à la base, nous allons démontrer que la section, ou la coupe formée par ce plan dans la pyramide, est un poligone parfaitement semblable au poligone BCDEF ; & que la pyramide AIKLMN est elle-même entierement semblable à la pyramide ABCDEF, c'est-à-dire, que les angles que forment toutes les lignes de ces deux figures sont respectivement égaux, & que tous les côtés de la petite pyramide auront le même rapport entr'eux que ceux de la grande.

En quoi consiste la simili-tude de deux pyrami-des.

XXXIII.

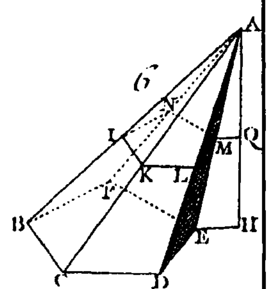
FIG. 8



Commençons par observer que si deux plans X & Y sont paralleles, & que deux lignes quelconques ALD, AME, partant d'un même point A, traversent ces deux plans, les droites LM, DE, qui joindront les points L, M, D, E, seront parallèles. La raison en est, que si ces deux lignes n'étoient pas paralleles, elles se rencantreroient quelque part, étant prolongées ; mais si elles se rencontraient, les plans dans lesquels elles sont, & dont elles ne peuvent pas sortir, en les prolongeant autant qu'il serait nécessaire, se rencontreroient donc aussi. Donc ils ne seraient pas paralleles, ainsi qu'on le suppose.

XXXIV.

FIG. 6



Si on suppose donc que le plan IKLMN soit parallele au plan BCDEF, il s'ensuivra que toutes les lignes ML, LK, KI, IN, NM, seront paralleles aux lignes ED, DC, CB, BF, FE , & par conséquent, que les triangles ALM, AKL, AIK, &c. seront semblables aux triangles ADE, ACD, ABC, &c. Si on prend l'un des côtés de ces triangles, AM par exemple, pour commune mesure, ou pour échelle de tous les côtés de la petite pyramide, pendant que le côté correspondant AE servira d'échelle aux côtés de la grande, on verra, sans peine, que les côtés ML, LK, KI, &c. du poligone JKLMN seront, proportionnels aux côtés ED, DC, GB, &c. du poligone BCDEFG, On verra aussi facilement que tous les angles IKL, KLM, &c. seront respectivement égaux aux angles BCD, CDE, puisque les premiers feront formés par des lignes paralleles aux côtés des seconds. Donc les deux poligones IKLMN, BCDEF, seront semblables.

XXXV.

OR les côtés AM, AL, AK, &c. étant proportionnels aux côtés AE, AD, AC, &c. & les angles ALM, ALK, &c. respectivement égaux aux angles ADE, ADC, &c. à cause de la ressemblance des triangles ALM, ADE ; ALK , ADC , &c, les deux pyramides AIKLMN, ABCDEF, seront entierement semblables.

5. Le lecteur acteur

[15] **DIEUDONNE J.** (1969), *Eléments d'Analyse*, tome 1, Paris : Gauthier-Villars. (pp.22, 62-63)

(2.2.15) *L'ensemble* **Q** *des nombres rationnels est dénombrable.*

Comme **Q** est la réunion de $\mathbf{Q}\cap\mathbf{R}_+$ et de $\mathbf{Q}\cap(-\mathbf{R}_+)$, il suffit de démontrer que $\mathbf{Q}\cap\mathbf{R}_+$ est dénombrable. Mais il existe une application surjective $(m,n) \rightarrow m/n$ du sous-ensemble de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ formé des couples tels que $n \neq 0$, sur $\mathbf{Q}\cap\mathbf{R}_+$, d'où le résultat, d'après **(1.9.2)**, **(1.9.3)** et **(1.9.4)**.

/.../

(3.17.6) (Théorème de Borel-Lebesgue) *Pour qu'un sous-ensemble de la droite réelle soit relativement compact, il faut et il suffit qu'il soit borné.*

En vertu de **(3.17.1)**, **(3.17.4)** et **(3.17.5)**, il nous reste à montrer que tout intervalle fermé $[a, b]$ est précompact. Pour tout entier n, soit $x_k = a + k\,(b - a)/n$ $(0 \leq k \leq n)$; alors les intervalles ouverts de centre x_k et de longueur $2/n$ forment un recouvrement de $[a, b]$, C.Q. F.D.

L'intérêt de ces textes est de voir à l'œuvre, dans le texte démonstratif, la démarche de recherche.

2.2.15. La mise en place de la démonstration se fait par conditions suffisantes : argumentation de recherche de type ascendant, où l'on remonte de cause en cause à une vérité connue, ici **N$N** est dénombrable **(1.9.3.)**. Ce chaînage arrière est suffisant pour assurer la vérité du théorème : "d'où le résultat". Les propositions qui assurent les trois pas de la démonstrations sont citées, en désordre, par leurs références, mais peuvent être aisément retrouvées par le lecteur grâce à la structuration du texte.

3.17.6. La démonstration ici ne consiste pas à détailler les liens entre hypothèse et conclusion, mais à traiter le seul point non évident : là aussi, la méthode prime, et elle se lit dans le texte ("il nous reste à montrer que..."). La réduction à l'essentiel se fait par référence aux propositions qui la permettent : à charge au lecteur de faire explicitement ce travail de réduction à partir des indications fournies, ou alors de connaître assez clairement les liens entre les concepts de borné, précompact, et relativement compact, pour pouvoir se dispenser de ce travail. Le "en vertu de" permet de dire au lecteur : "c'est clair", ou "vous pouvez le démontrer" ; et donc de s'adresser à deux types différents de lecteurs. Le C.Q.F.D. final rappelle le modèle euclidien.

Dans les deux textes proposés, la démonstration met en avant la méthode.

***

Ces cinq textes montrent une grande variété de styles. Mais par rapport à ceux de la première partie, on peut y relever une plus grande personnalisation du discours, la part beaucoup plus grande faite à l'implicite quant aux références, une argumentation davantage tournée vers l'explication et l'analyse, vers le pourquoi et le comment, la présence d'indication de méthodes. La rédaction des élèves ne devrait-elle pas s'apparenter davantage à ces styles, comme elle le fait naturellement, plutôt qu'au style expositif destiné à l'apprenant ? Car il s'agit pour l'élève, comme pour le mathématicien chercheur, de résoudre des problèmes et d'exposer leurs solutions, et non d'exposer un savoir.

Conclusion

Ce qui nous semble ressortir de l'étude de ces divers textes historiques est que la forme même du texte démonstratif dépend essentiellement du rôle que son auteur lui assigne : l'exposition de résultats favorise le style synthétique, déductif, alors que la résolution de problèmes favorise le style analytique, explicatif. L'explicitation maximale des pas de déduction et des références vise à mettre en évidence le principe axiomatique d'organisation du savoir : nous l'avons vue poussée à son paroxysme chez Hérigone dont le texte pourrait être utilisé pour programmer un logiciel de démonstration automatique. Mais de telles rédactions imposent à leurs auteurs une autoréférence (cf. Euclide, Hérigone, Arnauld, Legendre, Hadamard) qui utilise le plus souvent un codage chiffré. Or celui qui cherche à résoudre des problèmes, élève ou mathématicien, utilise des résultats figurant chez des auteurs de référence ou dans des manuels, mais ne peut emprunter la même technique d'écriture ; il doit travailler la forme de son discours pour être compris de son lecteur, en sachant que :
- moins il y a d'implicite, plus les énoncés utilisés sont repérables, mais éventuellement peuvent ne pas faire partie, sous la forme donnée, des références du lecteur ;
- plus il y a d'implicite, moins la forme sous laquelle le lecteur connaît les références évoquées a d'importance ; mais il doit y avoir des indicateurs assez forts pour que le lecteur puisse faire les liens logiques indiqués par le texte. Comprendre, pour le lecteur, c'est voir qu'il y a des liens logiques, et lesquels. C'est combler les trous, identifier les maillons intermédiaires, les reconstruire avec ses propres outils.

Il y aurait peut-être là un travail intéressant au niveau didactique : faire lire aux élèves de tels textes démonstratifs, et faire expliciter les énoncés utilisés. Tisser des liens entre l'écriture et la compréhension du texte pourrait faire partie, pour les élèves, des prolégomènes à l'écriture de textes démonstratifs. Et alors, les meilleurs textes à utiliser seraient ceux des chercheurs.