

JEAN-PIERRE CONZE

YVES GUIVARC'H

ALBERT RAUGI

**Dépassement des sommes partielles pour des v.a.  
indépendantes sans moment**

*Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, 1998, fascicule 2  
« Fascicule de probabilités », , p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1998\\_\\_2\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1998__2_A1_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,  
1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Dépassement des sommes partielles pour des v.a. indépendantes sans moment

Jean-Pierre Conze, Yves Guivarc'h, Albert Raugi

IRMAR, Université de Rennes I

Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

Si  $(X_n)$  est une suite stationnaire de v.a. positives intégrables, le théorème ergodique implique que, presque sûrement,  $X_{n+1}$  ne dépasse la somme  $X_1 + \dots + X_n$  qu'un nombre fini de fois. On se propose de démontrer que, pour des v.a. i.i.d non intégrables telles que  $\mathbb{P}(X_n > t)$  soit en  $\frac{1}{t}$ , le dépassement  $X_{n+1} > X_1 + \dots + X_n$  a lieu, presque sûrement, une infinité de fois.

**Théorème :** Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes strictement positives identiquement distribuées, de loi commune  $\mu$ , définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On suppose qu'il existe des réels strictement positifs  $C_1$  et  $C_2$  tels que :

$$\frac{C_1}{1+t} \leq \mu(]t, +\infty[) \leq \frac{C_2}{1+t}, \quad \forall t > 0.$$

Alors la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{X_1 + \dots + X_n}$  diverge  $\mathbb{P}$ -p.s. et

$$\sum_{n \geq 1} 1_{\{X_{n+1} > X_1 + \dots + X_n\}} = +\infty, \quad \mathbb{P} - p.s..$$

La démonstration de ce théorème va se faire en plusieurs étapes.

Nous appelons  $G$  la fonction définie pour  $t > 0$  par :  $G(t) = \mu(]t, +\infty[)$ .

*Première étape*

Rappelons d'abord une extension classique du lemme de Borel-Cantelli (cf. Neveu [1], corollaire de la proposition IV-6-3).

**Lemme 1 :** Soit  $(\mathcal{A}_n)_{n \geq 0}$  une suite croissante de sous-tribus de  $\mathcal{F}$ . Soit  $(Z_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a.r. définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  telles que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $0 \leq Z_n \leq 1$  et  $Z_n$  est  $\mathcal{A}_n$ -mesurable.

Alors 
$$\left\{ \sum_{n \geq 1} Z_n < +\infty \right\} = \left\{ \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}[Z_n | \mathcal{A}_{n-1}] < +\infty \right\} \mathbb{P} - p.s..$$

Appelons  $\mathcal{F}_0$  la tribu triviale et, pour  $n \geq 1$ , désignons par  $\mathcal{F}_n$  la tribu engendrée par les v.a.r.  $X_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , nous avons :

$$\mathbb{E}[1_{\{X_{n+1} > X_n + \dots + X_1\}} | \mathcal{F}_n] = G(X_1 + \dots + X_n).$$

Du lemme 1, il résulte alors que les deux assertions du théorème sont équivalentes. Dans la suite, nous prouverons la première.

*Deuxième étape*

Le lemme suivant est inspiré du lemme 2 de [2] (H. Diamond et J. Vaaler) :

**Lemme 2 :** Soit  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ . Pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega_0$ , il existe un entier  $N(\omega)$  tel que, pour tout entier  $n \geq N(\omega)$ , il existe au plus un entier  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$  pour lequel  $X_k \geq n (\log_2 n)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$ .

*Preuve :* Considérons un réel  $\alpha > 0$ . Pour tout entier  $p \geq 1$ , posons :

$$A_p = \bigcup_{1 \leq \ell < k \leq p} \{X_\ell > \alpha p (\log_2 p)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}\} \cap \{X_k > \alpha p (\log_2 p)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}\}.$$

Nous avons

$$\mathbb{P}[A_p] \leq \sum_{1 \leq \ell < k \leq p} G^2(\alpha p (\log_2 p)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}) \leq \frac{C_2^2}{2\alpha^2} \frac{1}{(\log_2 p)^{1+2\varepsilon}},$$

et donc  $\sum_{m \geq 0} \mathbb{P}[A_{2^m}] < +\infty$ .

Par suite pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega$ , il existe un entier  $N_1(\omega)$  tel que, pour tout entier  $m \geq N_1(\omega)$ , il existe au plus un entier  $k$  de  $\{1, \dots, 2^m\}$  pour lequel  $X_k \geq \alpha 2^m (\log_2 2^m)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$ . Il s'ensuit que pour tout entier  $n > 2^{N_1(\omega)}$ , il existe au plus un entier  $k$  de  $\{1, \dots, 2^{\lceil \log_2 n \rceil + 1}\}$  pour lequel  $X_k \geq \alpha 2^{\lceil \log_2 n \rceil + 1} (\log_2 2^{\lceil \log_2 n \rceil + 1})^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$ .

Ceci implique qu'il existe au plus un entier  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$  tel que  $X_k \geq \alpha 2^{\frac{3}{2} + \varepsilon} n (\log_2 n)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$ . D'où le résultat, en prenant  $\alpha = 2^{-(\frac{3}{2} + \varepsilon)}$ .

□

Troisième étape

**Lemme 3 :** Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , il existe un réel  $C(\omega) > 1$  tel que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\frac{n \log_2 n}{C(\omega)} \leq \sum_{k=1}^n X_k 1_{\{X_k \leq n (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\}} \leq C(\omega) n \log_2 n.$$

*Preuve.* Pour tout entier  $n \geq 1$ , notons  $T_n$  les sommes tronquées :

$$T_n = \sum_{k=1}^n X_k 1_{\{X_k \leq n (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\}}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_n] &= n \mathbb{E}[X_1 1_{\{X_1 \leq n (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\}}] \\ &= n \int_0^{n (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \mathbb{P}[t < X_1 \leq n (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}] dt \\ &= n \int_0^{n (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} G(t) dt - n^2 (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} G(n (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}). \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que

$$C_1 \leq \liminf_n \frac{\mathbb{E}[T_n]}{n \log_2 n} \leq \limsup_n \frac{\mathbb{E}[T_n]}{n \log_2 n} \leq C_2. \quad (1)$$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{var}(T_n) &= n \text{var}(X_1 1_{\{X_1 \leq n (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\}}) \\ &\leq n \mathbb{E}[X_1^2 1_{\{X_1 \leq n (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\}}] \\ &\leq n \int_0^{n (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} 2t \mathbb{P}[t < X_1 \leq n (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}] dt \\ &\leq n \int_0^{n (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} 2t G(t) dt \\ &\leq 2 C_2 n^2 (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \end{aligned}$$

D'où la majoration :

$$\text{var}\left(\frac{T_n}{n \log_2 n}\right) \leq \frac{2 C_2}{(\log_2 n)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}, \quad \forall n \geq 2.$$

On en déduit la convergence de la série  $\sum_{p \geq 1} \text{var}\left(\frac{T_{2^p}}{2^p \log_2 2^p}\right)$  et par suite la convergence  $\mathbb{P}$ -p.s. vers zéro de la suite de v.a.r.  $\left(\frac{T_{2^p} - \mathbb{E}[T_{2^p}]}{2^p \log_2 2^p}\right)_{p \geq 0}$ .

Compte tenu des inégalités (1), il s'ensuit que :

$$C_1 \leq \liminf_p \frac{T_{2^p}}{2^p \log_2 2^p} \leq \limsup_p \frac{T_{2^p}}{2^p \log_2 2^p} \leq C_2; \quad (2)$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{1}{2} C_1 \leq \liminf_n \frac{T_n}{n \log_2 n} \leq \limsup_n \frac{T_n}{n \log_2 n} \leq 2 C_2.$$

□

**Remarque :** Lorsque  $G(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{C}{t}$ , pour un réel  $C > 0$ , alors nous obtenons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_n}{n \log_2 n} = C.$$

Il suffit dans la démonstration de remplacer la suite d'entiers  $(2^p)_{p \geq 0}$  par les suites  $([a^p])_{p \geq 0}$  avec  $a$  réel  $> 1$ . ( $[a^p]$  désigne la partie entière du réel  $a^p$ ).

*Quatrième étape*

Nous avons :

$$\sum_{k=1}^n X_k = T_n + \sum_{k=1}^n X_k 1_{\{X_k > n (\log_2 n)^{\frac{1}{2} + \epsilon}\}}.$$

Posons  $M_n(\omega) = \max\{X_k(\omega) : 1 \leq k \leq n\}$  D'après le lemme 2, pour  $\mathbb{P}$ -presque tout  $\omega \in \Omega$ , il existe un entier  $N(\omega)$  tel que, pour tout  $n \geq N(\omega)$ , la somme

$$\sum_{k=1}^n X_k(\omega) 1_{\{X_k > n (\log_2 n)^{\frac{1}{2} + \epsilon}\}}(\omega)$$

soit réduite à au plus un terme et donc majorée par  $M_n(\omega)$ .

Compte tenu du lemme 3, nous avons donc, pour  $n$  assez grand,  $X_1 + \dots + X_n \leq M_n + C(\omega) n \log_2 n$ . Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{M_n + n \log_2 n}$  diverge  $\mathbb{P}$ -p.s..

Nous avons, pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{M_k + k \log_2 k} &\geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{M_k + k \log_2 k} 1_{\{M_k \leq k \log_2 k\}} \\ &\geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{2 k \log_2 k} 1_{\{M_k \leq k \log_2 k\}} \\ &\geq \sum_{k=2}^n \frac{2}{2 k \log_2 k} \\ &\quad - \sum_{k=2}^n \frac{1}{2 k \log_2 k} 1_{\{M_k > k \log_2 k\}}. \end{aligned}$$

Or nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{2 k \log_2 k} \mathbb{P}[\{M_k > k \log_2 k\}] &\leq \sum_{k=2}^n \frac{1 - (1 - G(k \log_2 k))^k}{2 k \log_2 k} \\ &\leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{2 k (\log_2 k)^2} < +\infty. \end{aligned}$$

La série  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{2 k \log_2 k} 1_{\{M_k > k \log_2 k\}}$  converge donc  $\mathbb{P}$ -p.s..

D'où le résultat.

□

**Remarque :** Si la fonction  $G$  est de l'ordre de  $\frac{1}{t^\alpha}$  avec  $0 < \alpha < 1$ , ou plus généralement si la fonction  $\frac{1}{G}$  est sous-additive, nous avons

$$\sum_{k \geq 1} 1_{\{X_{n+1} > X_1 + \dots + X_n\}} = +\infty \quad \mathbb{P} - p.s.$$

En effet les v.a.r.  $\frac{1}{G(X_k)}$ ,  $k \geq 1$ , vérifient  $\mathbb{P}(\frac{1}{G(X_k)} \geq t) = \frac{1}{t}$ .

Le théorème implique alors que :

$$\sum_{k \geq 1} 1_{\{\frac{1}{G(X_{n+1})} > \frac{1}{G(X_1)} + \dots + \frac{1}{G(X_n)}\}} = +\infty \quad \mathbb{P} - p.s$$

et la sous-additivité de la fonction  $\frac{1}{G}$  donne le résultat voulu.

*Nous remercions Christian Bonatti et Bernard Schmitt d'avoir attiré notre attention sur le problème des dépassements  $X_{n+1} > X_1 + \dots + X_n$  pour des variables sans moment.*

## Références

H. G. Diamond, J. D. Vaaler : Estimates for partial sums of continued fraction partial quotients, Pacific J. of Math., Vol. 122, no 1, 1986.

J. Neveu : *Calcul des Probabilités*, Masson.

le 7 décembre 1998