MARLÈNE ALVES DIAS

Gestion par les étudiants français et brésiliens de l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique en algèbre linéaire

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1997-1998, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , p. 91-108
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1997-1998___3_91_0>

Gestion par les étudiants français et brésiliens de l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique en algèbre linéaire

Marlene ALVES DIAS*
Equipe DIDIREM, Université Paris 7

Résumé : Nous essayerons de présenter ici différentes articulations qui jouent un rôle essentiel en algèbre linéaire et de prendre en compte, plus particulièrement, l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique. Puis, nous préciserons la méthodologie de la recherche et présenterons une synthèse de ce qui ressort de l'analyse mathématique et de la façon dont l'articulation entre les deux points de vue cartésien et paramétrique est gérée institutionnellement. Finalement, nous présenterons les instruments d'analyse construits dans la recherche pour étudier l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique et nous essayerons de montrer leur efficacité pour l'analyse de tâches intervenant dans un premier cours d'algèbre linéaire ainsi que pour l'analyse de productions des étudiants.

I. Introduction

Cette recherche est issue de notre mémoire de DEA qui concernait l'analyse des productions des étudiants de première année en algèbre linéaire, dans le cadre d'un enseignement expérimental. Lors de cette étude, notre attention a été attirée par les difficultés rencontrées par les étudiants dans la résolution de tâches demandant d'articuler les points de vue cartésien et paramétrique dans la représentation de sous-espaces vectoriels.

Nous avons décidé d'étudier plus précisément ce phénomène d'articulation de points de vue. Cette question nous apparaissait d'autant plus intéressante que, si les travaux didactiques mettent de plus en plus l'accent sur le rôle joué par certaines **flexibilités** dans le développement des connaissances, la question de leur gestion didactique est loin d'être résolue. De plus, même si une articulation entre points de vue comme celle concernée ici peut paraître essentielle, la notion de point de vue reste elle-même, d'un point de vue didactique, peu travaillée.

Nous nous sommes attaquée à ce problème en essayant d'apporter des éléments de réponse aux **questions** suivantes :

1. En quoi consiste exactement cette articulation sur le plan mathématique et comment s'est-elle historiquement mise en place ?
2. Quels rapports entretient-elle avec les articulations de cadres et des registres qui, au sein de la didactique, sont des articulations déjà bien théorisées ?
3. Sur quelles connaissances peut-elle se fonder aux différents niveaux : technique, technologique et théorique, tels qu'identifiés par Y. Chevallard ?
4. Dans quels systèmes de tâches et de pratiques peut-elle trouver à se développer ?
5. Comment est-elle gérée institutionnellement ?
6. Quels rapports personnels les étudiants développent-ils vis-à-vis d'elle au cours de leurs études universitaires ?
7. En quoi ces rapports personnels portent-ils la marque des rapports institutionnels ?

* Etudiante en thèse de doctorat à l'Université de Paris VII dans le cadre d'une convention CAPES/COFECUB

II. Cadre théorique de la recherche

Nous nous sommes appuyée principalement sur :

- les approches théoriques développées à propos des notions de cadre et registre par R. Douady (1992) et R. Duval (1995) respectivement,

- l'approche anthropologique d'Y. Chevallard, en particulier pour ce qui concerne les notions de rapport institutionnel et personnel, ainsi que l'analyse du fonctionnement du savoir en termes de technique, technologie et théorie.

Nous nous appuyons également bien sûr sur les différentes recherches menées en didactique de l'algèbre linéaire et en particulier sur les travaux de J.L. Dorier sur le développement historique de la notion de rang.

II.1. Points de vue cartésien et paramétrique

Pour un sous-espace donné, nous dirons que nous adoptons :

- un **point de vue paramétrique** lorsque nous concevons ce sous-espace comme sous-espace engendré par un ensemble de vecteurs, que cet ensemble soit ou non minimal,

- un **point de vue cartésien** quand nous concevons ce sous-espace comme l'ensemble des vecteurs solutions d'une équation ou d'un système d'équations linéaires.

En accord avec ce cadre théorique, l'analyse de l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique s'appuie sur un certain nombre de distinctions entre cadres, registres, types de représentation paramétriques et cartésiennes. En particulier, nous distinguons cinq cadres : le cadre de l'algèbre linéaire, le cadre des systèmes linéaires, le cadre des matrices, le cadre de déterminants et le cadre de la géométrie affine euclidienne, et six types de représentations qui sont les suivants :

Représentations paramétriques

1) représentations paramétriques « explicites-intrinsèques » : $A = \mathrm{lin}\{a, b\} = \{v / v = \alpha a + \beta b$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2\}$. Le sous-espace est caractérisé par une représentation où la combinaison linéaire est apparente et les vecteurs générateurs sont donnés dans le registre symbolique intrinsèque.
2) représentations paramétrique « explicites-tableaux » : $A = \mathrm{lin}\{(1,0,0), (0,1,0)\} = \{\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. Le sous-espace est caractérisé par une représentation où la combinaison linéaire est apparente et les vecteurs générateurs sont donnés dans le registre tableau, en ligne ou en colonne.
3) représentations paramétriques « implicites-tableaux » : $A = \{(\alpha,\beta,0)$ avec $\alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. Le sous-espace est caractérisé par une représentation où il y a condensation des vecteurs générateurs en un seul vecteur donné sous la forme de tableau. L'interprétation suivant le point de vue paramétrique suppose alors une décondensation.
4) représentations paramétriques « implicites-équations » : $A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 / x=\alpha \wedge y=\beta \wedge z=0$ avec $\alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$. Le sous-espace est caractérisé par une représentation sous forme d'un système d'équations exprimant les coordonnées en fonction des paramètres.

Représentations cartésiennes

1) représentations cartésiennes intrinsèques : A = {v / T(v) = 0}, T étant un opérateur linéaire, le sous-espace est caractérisé comme noyau d'une application linéaire, les vecteurs étant représentés dans le registre symbolique intrinsèque.

2) représentations cartésiennes explicites : $A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ / \ z=0 \wedge 2x+y=0\}$. Le sous-espace est caractérisé par un système d'équations linéaires et homogènes.

Au **niveau théorique**, l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique se fonde aujourd'hui sur la théorie de la **dualité**. Au **niveau technique**, elle passe nécessairement par l'articulation du cadre de l'algèbre linéaire avec celui des systèmes linéaires.

III. La méthodologie de la recherche

Nous avons croisé différentes approches :

1) Une analyse mathématique de l'articulation, en prenant en compte son développement historique, et en essayant de préciser les systèmes de connaissances (techniques, technologiques et théoriques) dans lesquels cette articulation est a priori susceptible de s'inscrire.

2) Une analyse des différentes tâches intervenant dans un premier enseignement d'algèbre linéaire et des besoins en termes d'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique liés à leur résolution, en fonction des variables de ces tâches.

3) Une analyse de la façon dont cette articulation est gérée institutionnellement, via l'analyse de manuels, en essayant d'étudier les régularités et différences existant dans les rapports institutionnels entre la France et le Brésil notamment.

4) Une étude du fonctionnement d'étudiants français et brésiliens de différents niveaux pour comprendre comment se construit cette articulation dans le cadre des rapports institutionnels existants et quelles difficultés elle pose. Cette étude s'est effectuée via la passation de questionnaires, la réalisation d'entretiens, l'analyse d'examen de DEUG.

L'analyse mathématique a mis en évidence :

- une organisation complexe de l'articulation des points de vue cartésien et paramétrique mettant en jeu plusieurs cadres et registres, mais non réductible à l'articulation de ces derniers,

- un développement historique qui met en évidence le décalage entre les deux sens de l'articulation, le passage cartésien/paramétrique étant premier par rapport au passage paramétrique/cartésien, le premier s'inscrivant dans la résolution des systèmes linéaires, le second nécessitant de se centrer sur les conditions de résolubilité des systèmes,

- le rôle joué dans le développement de l'articulation par la capacité à considérer une équation comme un vecteur,

- les différents niveaux d'expression de cette articulation et la mise en place tardive du cadre théorique qui lui est aujourd'hui associé : celui de la dualité, le décalage existant entre la résolution technique de l'articulation via le cadre des systèmes linéaires (en dimension finie) et sa résolution théorique via la théorie de la dualité, qui peut conduire à l'hypothèse de difficultés didactiques sérieuses si ne se met pas en place un niveau technologique intermédiaire adéquat.

L'analyse de la façon dont cette articulation est gérée institutionnellement nous a permis de montrer :

- la diversité de rapports institutionnels semble-t-il existants dans le différentes cultures prises en compte et à l'intérieur d'une même culture dans la période récente,
- dans tous les cas cependant une gestion quasi-inexistante de l'articulation, et ce même si les éléments techniques et théoriques en sont présents,
- l'absence du développement d'un intermédiaire technologique susceptible de pallier le décalage entre technique et théorie,
- une très faible exploitation de l'espace de tâches nécessitant l'articulation.

Pour l'analyse des différentes tâches intervenant dans un premier enseignement d'algèbre linéaire, des rapports institutionnels ainsi que des rapports personnels nous avons construit :

- une grille d'analyse de l'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique,
- un ensemble de tâches diagnostic.

III.1. Les instruments d'analyse

La grille d'analyse est un outil permettant d'analyser les connaissances liées à l'articulation obligatoirement ou potentiellement en jeu :

- en fonction des notions d'algèbre linéaire concernées ;
- en fonction de tâches habituellement rencontrées à ce niveau ;
- en fonction des variables de ces tâches, au nombre desquelles figureront notamment des variables associées aux registres de représentation utilisés dans la définition de la tâche ou utilisables dans la résolution.

Elle doit aussi nous permettre de prendre en compte les différents niveaux de fonctionnement de l'articulation dans une tâche donnée.

III.1.1. Mise en fonctionnement de la grille

Nous allons mettre la grille en fonctionnement sur une tâche en essayant de mettre en évidence par le choix des exemples, la diversité des rapports possibles à l'articulation suivant les caractéristiques des tâches.

- Au **niveau des notions**, nous distinguons les notions suivantes :

- espace vectoriel ;
- sous-espace vectoriel et opérations entre sous-espaces (en incluant les notions de combinaison linéaire, de sous-espace engendré, d'égalité, d'intersection, de somme, de somme directe et de sous-espaces supplémentaires) ;
- base et dimension (en incluant les notions de dépendance et indépendance linéaire, de rang) ;
- application linéaire (en incluant les notions de noyau, d'image, d'isomorphisme, de représentation matricielle des opérateurs linéaires) ;

- systèmes d'équations linéaires.

- Au **niveau** de tâches, par exemple, lorsque nous considérons la notion de sous-espace vectoriel et les opérations entre sous-espaces, nous distinguons les tâches suivantes où les tâches en caractère gras sont celles qui mettent en jeu, au moins potentiellement, de l'articulation :

- Vérifier qu'un sous-ensemble d'un espace vectoriel est ou n'est pas un sous-espace vectoriel.

- Décrire le sous-espace solution d'un système linéaire et homogène.

- Savoir si un objet défini explicitement (pouvant ou non dépendre de paramètres) appartient ou non à un sous-espace vectoriel donné.

- Montrer qu'un vecteur est ou n'est pas de combinaison linéaire de certains vecteurs donnés.

- Vérifier qu'un vecteur appartient au sous-espace engendré par d'autres vecteurs.

- Caractériser le sous-espace engendré par des vecteurs donnés.

- Trouver une partie génératrice d'un ensemble de vecteurs donnés ou d'un sous-espace donné.

- Passer d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne et/ou d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique.

- Montrer qu'un sous-espace est inclus dans un autre ou que deux sous-espaces sont égaux.

- Déterminer l'intersection de deux sous-espaces.

- Déterminer la somme de deux sous-espaces.

- Montrer que deux sous-espaces sont en somme directe.

- Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires.

- Au **niveau des variables de tâches**, nous distinguons les variables suivantes :

- le ou les types d'espaces concernés.

- le type des représentations données pour les vecteurs considérés.

- le type des représentations données pour les sous-espaces considérés.

- le type de la ou des représentations éventuellement demandées.

- les dimensions de l'espace et des sous-espaces concernées.

- le caractère nécessaire ou seulement potentielle de l'articulation.

- les connaissances impliquées, en distinguant les types de connaissances et leur(s) rôle(s).

Comme annoncé, nous allons mettre la grille en fonctionnement pour la tâche : Déterminer l'intersection de deux sous-espaces. Exemples :

a) Considérez dans $\mathbf{R}^3$ les vecteurs :

$a = (2,3,-1) \qquad b = (1,-1,-2) \qquad c = (3,7,0) \qquad d = (5,0,7) \qquad e = (0,0,1)$

On désigne par E (resp. F) les sous-espaces engendrés par {a, b} (resp. {e, b}). Déterminez une partie génératrice de $E \cap F$. (Liret / Zisman)

b) Soient U et V les sous-espaces de $\mathbf{R}^3$:

$U = \{(x,y,z) \,/\, x + 2y = 0\}$

$V = \{(x,y,z) / x + z = 0 \wedge x - 2y = 0\}$
Déterminer $U \cap V$. *(Callioli et al.)*

Dans ce type de tâche, les besoins d'articulation sont a priori réduits sauf si un type particulier de représentation de l'intersection est demandé.

- Si les deux sous-espaces sont définis par des représentations paramétriques, la stratégie naturelle consiste à chercher à quelle condition un vecteur quelconque peut appartenir aux deux sous-espaces, ce qui conduit, via la résolution d'un système, à une représentation paramétrique de l'intersection. Il n'y aura articulation que si l'énoncé demande une représentation cartésienne de l'intersection.
- Si les deux sous-espaces sont définis par des représentations cartésiennes, le système obtenu en groupant les deux systèmes d'équations caractérise l'intersection. Si la tâche « déterminer l'intersection » est comprise comme : « en donner une représentation cartésienne minimale », il n'y a pas de nécessité d'articulation. Par contre, s'il est demandé une partie génératrice de l'intersection, il y aura nécessairement articulation par passage cartésien/paramétrique.
- Si un des sous-espaces est défini par une représentation paramétrique et l'autre par une représentation cartésienne, il est facile de trouver un système générateur de l'intersection en testant l'appartenance des vecteurs générateurs associés à la représentation paramétrique au sous-espace défini par des équations. Il n'y a donc pas d'articulation nécessaire sauf si on demande une représentation cartésienne de l'intersection.

Pour les exemples proposés, les variables de la tâche sont les suivantes :

- <u>type d'espace</u> : $\mathbf{R}^3$
- <u>type de représentations données pour les vecteurs</u> : représentation dans le registre tableau
- <u>type de représentations données</u> : représentation paramétrique intrinsèque en langue naturelle, représentation symbolique intrinsèque, représentation cartésienne explicite
- <u>type de représentations demandées</u> : non précisé
- <u>dimension de l'espace et de sous-espace</u> : 3, 2 et 1 pour l'intersection, 3, 2 et 1, 0 pour l'intersection
- <u>articulation obligatoire/potentielle</u> : non obligatoire ici. Pour l'exemple a, E et F sont trivialement de dimension 2 et leur intersection au moins de dimension 1. Pour montrer qu'elle est réduite à lin{b}, il suffit de vérifier que les sous-espaces sont distincts, ce qui ne nécessite pas de changement de point de vue. Dans l'exemple b, on obtient une caractérisation cartésienne de l'intersection en écrivant le système formé des trois équations ; c'est un système de Cramer admettant donc comme solution unique le vecteur nul.

L'analyse de tâches nous a permis de montrer : l'existence d'un espace limité pour la mise en place de l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique.

Ici, nous faisons l'hypothèse qu'il est nécessaire que cette articulation se mette en place à un niveau technique explicite en petite dimension, avant de pouvoir fonctionner à un niveau plus métaphorique en dimensions supérieures ou infinie.

Nous soulignons la nécessité de construire de tâches spécifiques si l'on veut obliger un travail mathématique qui ne se réduise pas à la seule composante technique de cette articulation. Pour ceci, nous pouvons utiliser les tâches usuelles et simples, mais de façon à ce que cette simplicité si prise en compte de façon raisonnée puisse conduire à un fonctionnement de l'articulation tout à fait intéressant.

IV. L'analyse des productions d'étudiants

En ce qui concerne l'étude des rapports personnels à l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique nous présenterons l'analyse des productions d'étudiants français pour une des questions d'un de tests diagnostic.

Question : On considère dans R^3 *les vecteurs suivants :*
$a = (2,3,-1)$ $\quad b = (1,-1,-2)$ $\quad c = (5,0,-7)$ $\quad d = (0,0,1)$
Trouver une représentation cartésienne de l'intersection des sous-espaces engendrés par {a, b} et {c, d}.

Les populations concernées ici sont 122 étudiants de DEUG Sciences première année (cette question faisait partie d'un partiel) et 6 étudiants de maîtrise qui avaient cette question dans un test.

IV.1. L'analyse a priori de la tâche

La tâche consiste à déterminer une représentation cartésienne de l'intersection de deux sous-espaces de $\mathbf{R}^3$, définis chacun par deux vecteurs linéairement indépendants. Les quatre vecteurs sont donnés dans le registre tableau. Dans les tests les vecteurs sont désignés par une lettre, dans le partiel ils sont désignés par une lettre surmontée d'une flèche.

Il s'agit d'une tâche classique mais où l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique est rendue obligatoire par la demande d'une représentation cartésienne du sous-espace intersection.

Le choix de variables a été fait pour favoriser le recours à une interprétation géométrique (choix de $\mathbf{R}^3$), limiter la complexité des calculs, fournir différents moyens de contrôle, permettre des résolutions très diverses, et enfin étudier le comportement des étudiants face à la perturbation introduite dans l'algorithme standard par le fait que l'un des sous-espaces considérés est simplement le plan vectoriel d'équation $y = 0$, ce qui est directement inférable de la donnée des vecteurs c et d.

Nous souhaitons à travers cette tâche, étudier les techniques utilisées par les étudiants et les justifications qui les accompagnent, en essayant de déterminer à quel niveau fonctionne pour eux l'articulation, quel rôle y jouent respectivement travail technique, théorèmes généraux, interprétation géométrique.

Méthodes de résolution a priori envisagées :

- <u>Méthodes basées sur la détermination de la dimension</u>

- **Méthode 1** : Elle consiste à déterminer le rang de la famille de vecteurs {a, b, c, d}, ce qui conduit à la constatation que ces quatre vecteurs sont linéairement indépendants, puis à repérer que $c = a + 3b$ et $d \notin \text{lin}\{a, b\}$. D'où la relation $\text{lin}\{c\} \subseteq \text{lin}\{a, b\} \cap \text{lin}\{c, d\} \subseteq \text{lin}\{c, d\}$. Il en résulte que l'intersection est forcement de dimension 1 et donc égale à lin{c}. On peut ensuite écrire une représentation paramétrique de lin{c} et faire le passage à une représentation cartésienne, mais, dans ce cas, la détermination d'une représentation cartésienne peut se faire par lecture directe des composantes du vecteur c.

- **Méthode 2** : Elle consiste à déterminer, comme dans la méthode 1, le rang de la famille des quatre vecteurs puis à en déduire que la somme des deux sous-espaces vectoriels est de dimension 3 et à appliquer le théorème de la dimension et de l'intersection pour déduire que $\dim(\mathrm{lin}\{a, b\} \cap \mathrm{lin}\{c, d\}) = 1$. On peut alors caractériser l'intersection $\mathrm{lin}\{a, b\} \cap \mathrm{lin}\{c, d\}$ comme $\mathrm{lin}\{c\}$.

- <u>Méthodes où il y a recours au cadre géométrique</u>

- **Méthode 3** : Elle consiste à observer que les deux sous-espaces donnés sont deux plans vectoriels de $\mathbf{R}^3$, puisque les deux vecteurs qui les engendrent ne sont pas colinéaires, et que le vecteur $d = (0,0,1)$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs a et b. Les deux plans vectoriels sont donc distincts leur intersection est une droite vectorielle et la dimension du sous-espace intersection est égale à 1. Comme dans la méthode 2, on peut aussi caractériser l'intersection $\mathrm{lin}\{a, b\} \cap \mathrm{lin}\{c, d\}$ comme $\mathrm{lin}\{c\}$.

- **Méthode 4** : Les sous-espaces donnés étant deux plans vectoriels de $\mathbf{R}^3$, les étudiants peuvent aussi déterminer une représentation cartésienne de ces deux sous-espaces, en utilisant une technique de géométrie analytique mise en place au lycée, à savoir :

  - soit passer par les déterminants et écrire que $\det(\vec{X}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$ et $\det(\vec{X}, \vec{c}, \vec{d}) = 0$, où $\vec{X}$ est un vecteur quelconque du plan et $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ et $\vec{d}$ sont les vecteurs donnés.

  - soit passer par le produit vectoriel, c'est-à-dire déterminer l'équation de chacun des plans vectoriels donnés en déterminant d'abord un vecteur normal au plan, c'est-à-dire par exemple $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, et ensuite en déterminant l'équation via le produit scalaire, c'est-à-dire en écrivant $\vec{X}.\vec{n} = 0$, $\vec{X}$ étant un vecteur quelconque du plan.

- <u>Méthodes de détermination d'une représentation cartésienne de l'intersection</u>

- **Méthode 5** : Elle consiste à appliquer la définition de sous-espace engendré à un vecteur quelconque de chacun des sous-espaces donnés, écrire l'égalité de ces vecteurs et résoudre le système. Après détermination d'une base de l'intersection, on passe alors à une représentation cartésienne de l'intersection.

- **Méthode 6** : Elle consiste à appliquer la définition de sous-espace engendré à un vecteur quelconque de chacun des sous-espaces donnés et à écrire une représentation paramétrique associée. On passe ensuite de chacune de ces représentations à une représentation cartésienne et on conclut directement sur l'intersection par réunion des équations de chacun des sous-espaces.

- **Méthode 7** : Elle consiste à appliquer la définition de sous-espace engendré et à écrire une représentation paramétrique des sous-espaces, ensuite à passer à la représentation cartésienne d'un des sous-espaces et à déterminer une représentation paramétrique du sous-espace intersection en substituant les expressions paramétriques de l'un dans les équations de l'autre. Enfin, on passe de la représentation paramétrique trouvée pour l'intersection à une représentation cartésienne.

IV.2. Résultats deug / maîtrise

1) Résultats Globaux

Les tableaux qui suivent donnent un bref aperçu des résultats obtenus par les étudiants.

	Méthode 5	Méthode 6	
correcte	7	2	correcte
erreur interprétation	28	19	erreur interprétation
erreur calcul	6	13	erreur calcul
recours cadre géométrique	3	2	recours cadre géométrique
erreur paramètre	11		
inachevée, repr. param. correcte	4		
inachevée, résolution système correcte	2		

Tableau 1 : Résultats étudiants DEUG (122 étudiants)

	Méthode 5	Méthode 6	
correcte	0	0	correcte
erreur interprétation	1	1	erreur interprétation
erreur calcul	0	0	erreur calcul
recours cadre géométrique	0	0	recours cadre géométrique
erreur paramètre	0		
inachevée, repr. param. correcte	1		
inachevée, résolution système correcte	0		
inachevée, système sans résolution	1		

Tableau 2 : Résultats étudiants maîtrise (6 étudiants)

2) Réussite

La réussite est très faible pour les étudiants de DEUG et il n'y a aucune réussite pour les étudiants de maîtrise, ce qui montre que cette tâche pose des difficultés sérieuses aux étudiants de n'importe quel niveau.

3) Choix de méthodes

Parmi les sept méthodes prévues, les méthodes 5 et 6 dominent très largement[29] .

En effet, les méthodes 2, 3, 4 et 7 ne sont utilisées ni en DEUG, ni en maîtrise, et un seul étudiant de DEUG détermine une représentation paramétrique correcte de l'intersection par la méthode 1.

Ceci confirme les difficultés qu'ont ces étudiants de recours efficace :

- aux raisonnements portant sur la dimension, l'inclusion et le recours aux théorèmes généraux (méthodes 1 et 2).
- au cadre géométrique (méthodes 3 et 4).

[29] Pour cette raison nous n'avons considéré que ces deux méthodes lors de la présentation des résultats globaux. On remarque encore que, parmi les 6 étudiants de maîtrise, un n'aborde pas la question et l'autre commet l'erreur d'associer directement une équation aux coordonnées des vecteurs. (copie F)

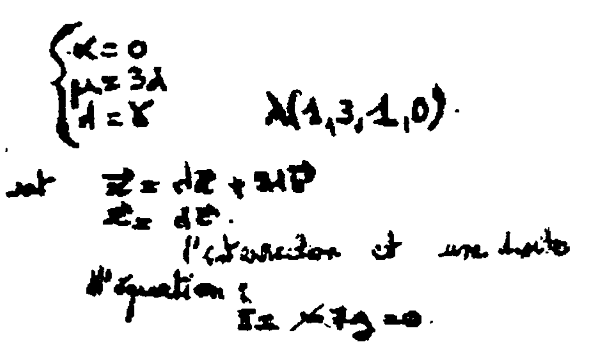
L'absence de recours à la méthode 7 était relativement prévisible puisqu'elle oblige à gérer différemment les deux sous-espaces.

4) Le faible recours au cadre géométrique

Il y a un faible recours au cadre géométrique et seulement de la part des étudiants de DEUG puisqu'aucun étudiant de maîtrise ne fait référence à ce cadre. De plus, si nous rencontrons en DEUG cinq étudiants qui ont recours à ce cadre, il faut souligner que quatre commettent des erreurs :

- trois, après avoir identifié correctement l'intersection comme une droite, ne lui associent qu'une équation. Illustrons-le par un exemple :

Extrait de la copie de l'étudiant 41

	**Commentaire :** - résolution correcte du système et détermination d'une représentation paramétrique correcte de l'intersection. - l'étudiant reconnaît correctement que l'intersection est une droite, mais lui associe une seule équation sans être capable de contrôler son erreur.

- un associe à lin{c, d} l'ensemble des points tels que x=0 et z=0 (au lieu de y=0) qu'il identifie ensuite comme le plan vectoriel de face.

5) La faible exploitation de résultats sur la dimension

Il y a quinze étudiants de DEUG qui ont étudié l'indépendance linéaire soit de 2 vecteurs, soit de 4 vecteurs. Mais ces résultats ne sont pas exploités et n'empêchent pas la production des résultats incohérents avec les dimensions.

Parmi les étudiants de maîtrise, un seul pose la question de la dimension des deux sous-espaces donnés mais, dans ce cas aussi, il y a incohérence entre le résultat trouvé pour lin{c, d} et la dimension. Cet étudiant utilise une nouvelle technique (les techniques en DEUG sont la méthode des substitutions successives (63 étudiants) ou la méthode du pivot de Gauss). Mais il rencontre lui aussi des difficultés de mise en place de sa technique avec le sous-espace lin{c, d} pour lequel l'équation y=0 pouvait être déterminée directement, rappelons-le. (cf. copie D)

6) Analyse d'erreurs

Les erreurs de calcul. Elles sont limitées. Comme nous l'avions prévu, les résultats obtenus montrent que cette tâche ne pose pas de difficultés liées aux calculs, ou au choix d'une méthode adaptée pour résoudre le système puisque celui-ci pouvait même être résolu par des bricolages sur les équations. La simplicité du système donné semble amener les étudiants à ne pas utiliser la méthode du pivot de Gauss, ce qui est compréhensible. En général, ils utilisent des méthodes où l'équivalence n'est pas explicitement gérée et ceci peut contribuer sans doute à limiter leurs possibilités de contrôle vis-à-vis des interprétations produites.

<u>Les difficultés d'interprétation des résultats trouvés</u> : ces difficultés se traduisent en particulier via la perturbation liée à l'équation y=0 (copie D)[30], les blocages et l'erreur « paramètres »[31] (copies 3 et 7). Il y a également des erreurs liées aux associations diverses et erronées d'équations ou de systèmes aux données du problème ainsi que des associations et résolutions difficilement interprétables. (cf. copie F).

- <u>Exemple perturbation y = 0</u>.

Extrait de la copie de l'étudiant D

<table>
<tr>
<td>
Cherchons l'équation du sous-espace engendré par (a,b)
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & y \\ -1 & -2 & z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2y-3x \\ -1 & 3 & 2z+x \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 9x-6y+5x+10z \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 14x-6y+10z \end{bmatrix}$$
la dimension du sev engendré par {a,b} est 2 donc il faut que $14x-6y+10z=0$
Cherchons les équations du s.e.v engendré par {c,d}
$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ -7 & 1 & z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5y \\ -7 & 1 & 5z+7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5y \\ -7 & 1 & 5z+7 \end{bmatrix}$$
la dimension du s.e.v engendré par {c,d} est 2 donc il nous faut pour que (x, y, z) appartienne au s.e.v
$5y=0$
$5z+7=0$
l'intersection des 2 s.e.v est
$$\begin{cases} y=0 \\ 5z+7=0 \\ 14x-6y+10z=0 \end{cases}$$
</td>
<td>
Commentaire :

- détermination du rang du système des vecteurs données et des relations entre les cordonnées d'un vecteur générique qui appartient au sous-espace par application de la méthode du pivot de Gauss sur les colonnes du tableau des coordonnées des vecteurs disposés en colonnes complété par les coordonnées d'un vecteur générique du sous-espace.

- la technique est perturbée par y = 0. L'étudiant détermine la dimension correcte de lin{c, d}, mais ne repère pas l'incohérence entre nombre d'équations et dimension.
</td>
</tr>
</table>

- <u>Exemples erreur paramètre</u>.

Extrait de la copie de l'étudiant 3

[30] Les étudiants identifiés par des nombres sont les étudiants de DEUG et ceux identifiés par des lettres sont les étudiants de maîtrise. Les étudiants brésiliens sont identifiés par des lettres grecques.

[31] erreur « paramètre » : Cette erreur consiste à caractériser l'intersection par rapport aux paramètres introduits, que les étudiants aient utilisé ou non les mêmes paramètres pour les deux sous-espaces. Dans la plupart des cas, elle se traduit par un glissement de dimension dans l'intersection qui aurait du alerter les étudiants. Il y a ici une confusion paramètre/coordonnées. Le choix des lettres semble déterminant et l'on peut se demander si le choix des lettres x, y, z ... pour les paramètres est lié déjà à une non distinction claire paramètre/coordonnée ou si c'est le choix x, y, z ... qui enduit ensuite la confusion.

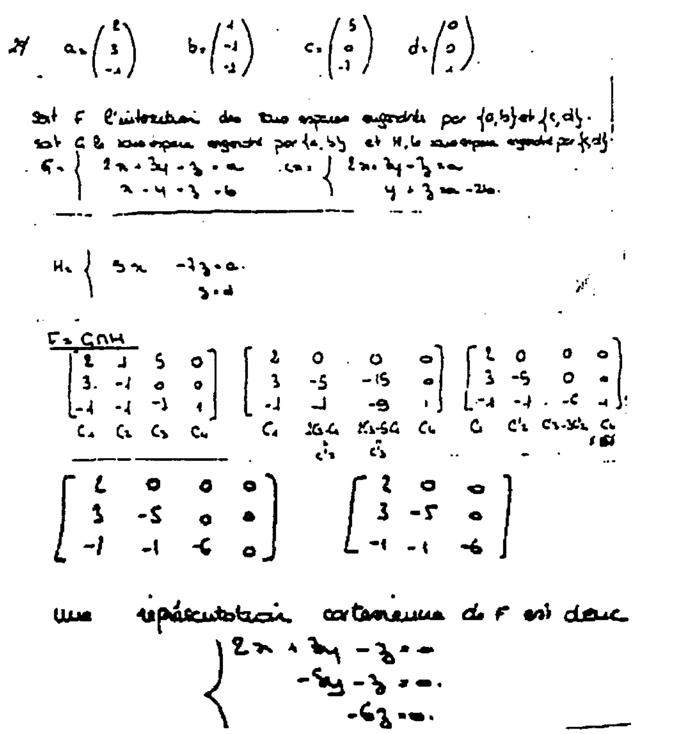
<table>
<tr>
<td>
* On cherche l'intersection : $A \cap B$
On considère un élément $\vec{u}$ de A, $\vec{u}$ s'écrit sous la forme :
$\vec{u} = (2x+y, 3x-y, -x-2y)$
Si $\vec{u}$ appartient aussi à B, $\vec{u}$ s'écrit sous la forme :
$\vec{u} = (5z, 0, -7z+t)$
En identifiant, on obtient :
$\begin{cases} 2x+y = 5z \\ 3x-y=0 \\ -x-2y = -7z+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=y \\ 4x=5z \\ -7x=-7z+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=y \\ \frac{4}{5}x=z \\ -\frac{7}{5}x=t \end{cases}$
Tout élément $\vec{u}$ de $A \cap B$, s'écrit donc sous la forme :
$\vec{u} = (x, 3x, \frac{4}{5}x, -\frac{7}{5}x)$
On a donc $A \cap B = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, 3x-y=0 \text{ et } \frac{4}{5}x - z = 0 \text{ et } \frac{7}{5}x - t = 0\}$
</td>
<td>
Commentaire :
- écriture correcte d'un vecteur $\vec{u}$ appartenant à chacun des sous-espaces avec x, y, z et t comme paramètres.
- résolution correcte du système.
- écriture d'une représentation paramétrique erronée de l'intersection avec un vecteur générique dans R^4.
- donnée d'une représentation cartésienne erronée de l'intersection avec prise en compte des quatre paramètres introduits et équations déterminées après réduction du système.
</td>
</tr>
</table>

Extrait de la copie de l'étudiant 7

<table>
<tr>
<td>
donc $\vec{u} = (2x+y, 3x-y, -x-2y)$
or $\vec{u} = (5x, 0, -7x+y)$
$\vec{u} \in Vect\{\vec{a},\vec{b}\} \cap Vect\{\vec{c},\vec{d}\} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=5x \\ 3x-y=0 \\ -x-2y=-7x+y \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 3x-y=0 \text{ idem} \\ 6x-3y=0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3x \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2x \\ y=2x \end{cases}$
$\Leftrightarrow x(3-2)=0 \Leftrightarrow x=0$
$Vect\{\vec{a},\vec{b}\} \cap Vect\{\vec{c},\vec{d}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x=0\}$
$= Vect\{(0,0), (0,1)\}$
</td>
<td>
Commentaire :
- écriture des vecteurs de chacun des sous-espaces avec les paramètres x et y.
- résolution du système et détermination de l'équation x = 0 avec oubli de l'équation y =0.
- détermination d'une représentation cartésienne erronée de l'intersection avec la seule équation x=0.
- détermination d'un ensemble de vecteurs générateurs contenant le vecteur nul.
</td>
</tr>
</table>

- <u>Association équation / vecteur.</u>

Extrait de la copie de l'étudiant F

	**Commentaire :** - l'étudiant démarre en associant directement les vecteurs à des équations et construit ainsi un système pour chacun des sous-espaces avec seconds membres non nuls et représentés par les mêmes lettres que les vecteurs. - abandon de ce raisonnement. - détermination du rang des quatre vecteurs donnés. - détermination d'un système homogène par association vecteur / équation. Ce système est considéré comme une représentation cartésienne erronée de l'intersection.

Remarquons encore que les difficultés liées à l'articulation des points de vue apparaissent dans les réponses aux autres questions proposées dans les tests, à la fois chez les étudiants de DEUG et de maîtrise. Ceci confirme les résultats rencontrés pour cette question particulière.

Ces résultats montrent bien les difficultés rencontrées par les étudiants dans l'articulation de deux points de vue au niveau de l'action, dans les différents cadres identifiés pour cette articulation : le cadre des systèmes linéaires, le cadre géométrique, le cadre linéaire, ainsi que l'absence de liens entre les formes d'articulation dans les différents cadres.

V. Le dispositif construit pour fonctionner à distance

Pour l'étude du fonctionnement des étudiants brésiliens, nous avons cherché des volontaires parmi les étudiants du cours de « mestrado » en enseignement de mathématiques (qui avaient tous dans leur scolarité suivi et validé au moins un enseignement d'algèbre linéaire) puisque dans la première passation, dans des conditions analogues aux conditions de passation en France, avec des étudiants débutants, ces derniers s'étaient trouvés tout à fait déstabilisés par les exercices proposés, très inhabituels pour eux. De plus, les productions des étudiants déjà recueillies nous avaient confrontée à des successions de calculs peu expliquées et justifiées. Et, en particulier dans le cas brésilien, elles semblaient très difficile à interpréter compte-tenu peut-être des déstabilisations mentionnées. C'est pourquoi nous avons organisé pour les étudiants de « mestrado » un dispositif en trois temps, prenant en compte également notre éloignement géographique du terrain.

V.1. Le dispositif prévu et la réalisation effective

Le dispositif prévu était le suivant :

Dans un premier temps, les étudiants, en petits groupes de 2 ou 3, avaient à résoudre les tests pendant une séance de TD de 2 heures à l'université. Ils rendaient alors une production pour le groupe.

Dans un deuxième temps, ils avaient à reprendre le test chez eux individuellement, avec tous les documents souhaités et ceci se traduisait par une nouvelle production écrite. Les ensembles de productions et les enregistrements audio des fonctionnements des groupes nous étaient transmis par les enseignants en charge de la passation et, sur la base de leur analyse, nous construisions :

- une analyse détaillée de ces productions;

- un scénario d'entretien basé sur cette analyse.

L'ensemble[32] était renvoyé à une enseignante du cours de mestrado qui se chargeait des entretiens et nous en retransmettait ensuite les enregistrements audio pour analyse. Les questions, qui servaient de base aux entretiens avaient trois objectifs principaux :

- nous aider à reconstituer le fonctionnement des étudiants lors de la résolution des tâches proposées, les productions écrites des étudiants laissant souvent la porte ouverte à diverses interprétations,
- nous aider à comprendre les changements intervenus entre travail en groupes et travail individuel,
- nous aider à mieux saisir plus généralement le rapport à l'articulation des deux points de vue cartésien et paramétrique développé par les étudiants.

V.2. L'intérêt du dispositif construit

Il nous semble intéressant de souligner ici quelque points qui semblent montrer l'intérêt du dispositif construit :

- le travail en deux temps (en classe puis à la maison) a permis de montrer comment, suivant le contexte, le rapport personnel à l'articulation des points de vue des étudiants pouvait se donner à voir de façon différente même si des régularités évidentes se manifestaient. Ceci nous incite à la prudence dans les interprétations.

Illustrons-le par un exemple portant sur la même tâche que précédemment.

- le travail en groupe

$F_1 = \{(2,3,-1), (1,-1,-2)\}$ [illegible] $F_2 = \{(5,0,-7), (0,0,1)\}$ $(x,y,z) \in F_1 : (x,y,z) = \alpha_1(2,3,-1) + \beta_1(1,-1,-2) = (2\alpha_1+\beta_1,$ $3\alpha_1-\beta_1, -\alpha_1-2\beta_1)$ $(x,y,z) \in F_2 : (x,y,z) = \alpha_2(5,0,-7) + \beta_2(0,0,1) =$ $= (5\alpha_2, 0, -7\alpha_2+\beta_2)$	**Commentaire :** - écriture correcte d'un vecteur générique de chacun des sous-espaces, sans aucune quantification avec les paramètres α_1, β_1 et α_2, β_2. - annonce de résultat, reconnaissance que le

[32] Pour des raisons diverses, en particulier des raisons de temps, le dispositif initialement prévu a du être en partie modifié. Le test n'a pu être proposé aux étudiants qu'à la fin du mois d'octobre 96 et ceci a imposé de préparer les premiers entretiens, qui devaient impérativement être terminés avant la fin de l'année universitaire en décembre, sur la seule base des productions écrites des étudiants. Les enregistrements des groupes, qui ont été difficiles à décrypter, ne l'ont été qu'a posteriori.

<table>
<tr>
<td>
Représentation cartésienne :
$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 7x - 3y + 5z = 0\}$
$x = 2\alpha_1 + \beta_1$ $k_1x - k_2y - k_3z = 0$
$y = 3\alpha_1 - \beta_1$ $k_1(2\alpha_1+\beta_1) + k_2(3\alpha_1-\beta_1) + k_3(-\alpha_1-2\beta) = 0$
$z = -\alpha_1 - 2\beta_1$ $\alpha_1(2k_1+3k_2-k_3) = 0$
$\beta_1(k_1-k_2-2k_3) = 0$
$\begin{cases} 2k_1 + 3k_2 - k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 - 2k_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k_1 - k_2 - 2k_3 = 0 \\ 5k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases}$
$k_2 = -\frac{3}{5}k_3$ $k_1 = k_2 - 2k_3$
$k_1 = -\frac{3}{5}k_3 + 2k_3 = \frac{7}{5}k_3$
$(k_1, k_2, k_3) = (\frac{7}{5}k_3, -\frac{3}{5}k_3, k_3)$
ex : $(7, -3, 5)$ $(k_3 = 5)$
$7x - 3y + 5z = 0$

$(2\alpha_1 + \beta_1, 3\alpha_1 - \beta_1, -\alpha_1 - 2\beta_1) = (1, 0, 0)$
$\begin{cases} 2\alpha_1 + \beta_1 = 1 \\ 3\alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ -\alpha_1 - 2\beta_1 = 0 \end{cases}$ $\rightarrow 5\alpha_1 = 1$ $\alpha_1 = \frac{1}{5}$ $\beta_1 = \frac{3}{5}$
</td>
<td>
sous-espace engendré par les vecteurs a et est caractérisé par une équation du type $k_1x+k_2y+k_3z=0$ et substitution de x, y et z. Ensuite, l'étudiant regroupe les termes en fonction de α_1, β_1 et construit un système en égalant à zéro les coefficients de α_1 et β_1.

- écriture du système $\begin{cases} 2k_1 + 3k_2 - k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 - 2k_3 = 0 \end{cases}$ et résolution par la méthode de pivot de Gauss.

- détermination de k_1 et k_2 en fonction de k_3 et choix de $k_3 = 5$.

- obtention d'une équation correcte $7x-3y+5z=0$.

- en bas de la même page, « détermination » de α_1 et β_1 pour le vecteur (1,0,0) sans aucune indication sur les calculs.
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">
Remarquons que le vecteur (1,0,0) n'appartient pas au sous-espace considéré.

Même méthode pour le sous-espace engendré par les vecteurs c et d sans perturbation par l'équation y = 0.

- écriture de l'intersection sous forme cartésienne par la réunion des deux équations trouvées sans aucun commentaire.
</td>
</tr>
</table>

Les productions du travail en groupe donnaient toujours à voir des calculs sans quantifications ou explicitations. Ceci nous a incité à poser plusieurs questions. Illustrons ici par un exemple d'une des questions soulevées par cette production.

Qu'est-ce qui conduit les étudiants à écrire l'équation $k_1x+k_2y+k_3z=0$?

Notre hypothèse était que les étudiantes avaient compris que le sous-espace engendré par les vecteurs a et b linéairement indépendants était un sous-espace de dimension 2 de $\mathbf{R}^3$, c'est-à-dire un plan de $\mathbf{R}^3$.

En fait, ce n'est pas ainsi qu'elles avaient raisonné. L'entretien confirme ce que montrait l'enregistrement : la recherche de l'équation qui caractérise chacun des sous-espaces a été faite en s'appuyant sur la définition d'une représentation cartésienne donnée en début de test et non sur le fait qu'il s'agissait d'un plan vectoriel.

- <u>la production individuelle de l'étudiant Bêta</u>.

L'étudiante ne reproduit pas à la maison le travail effectué en classe même si elle garde la même stratégie.

$F_2 = \{(5,0,-7), (0,0,1)\}$

$(x,y,z) = \alpha(5,0,-7) + \beta(0,0,1)$

$$\begin{cases} 5\alpha = x \\ 0 = y \\ -7\alpha + \beta = z \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ -7 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x/5 \\ 0 & 0 & y \\ -7 & 1 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x/5 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & z + \frac{7x}{5} \end{array}\right) \quad \therefore y = 0$$

$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$

$\therefore \boxed{F_1 \cap F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 7x - 3y + 5z = 0 \text{ e } y = 0\}}$

Questão 1 :

$F_1 = \{(2,3,-1), (1,-1,-2)\}$

$(x,y,z) = \alpha(2,3,-1) + \beta(1,-1,-2)$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = x \\ 3\alpha - \beta = y \\ -\alpha - 2\beta = z \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 3 & -1 & y \\ -1 & -2 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x+z \\ 3 & -1 & y \\ -1 & -2 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x+z \\ 0 & 2 & y-3x-3z \\ 0 & -3 & x+2z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x+z \\ 0 & 2 & y-3x- \\ 0 & 0 & -7x+3y \end{array}\right)$$

$\therefore 7x - 3y + 5z = 0$

$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 7x - 3y + 5z = 0\}$

Commentaire :

- écriture correcte des composantes d'un vecteur générique du sous-espace engendré par les vecteurs a et b, sans quantification, et traduction par un système d'équations linéaires.

- résolution du système par triangulation de la matrice construite à partir des coefficients du système et des seconds membres de l'équation.

- détermination d'une équation correcte du plan vectoriel engendré par les vecteurs a et b.

Même méthode pour le sous-espace engendré par les vecteurs c et d sans perturbation par l'équation y = 0.

- donnée d'une représentation cartésienne correcte de l'intersection par conjonction des deux équations.

L'étudiante ne donne à voir que des calculs, il n'y a aucun commentaire et la quantification est toujours absente. Ceci nous a incité à poser plusieurs questions. Donnons-en deux exemples :

- Quels raisonnements pilotent ces calculs ?

- Quels moyens éventuels d'anticipation, de contrôle ont été utilisés ?

L'entretien de cette étudiante montre, par exemple :

- qu'elle reconnaît l'équation du sous-espace comme condition de résolubilité du système, même si les quantifications restent implicites dans son discours,

- qu'elle interprète bien la question sur la prévision en faisant la liaison avec le rang du système (même si le terme rang n'est pas prononcé) et si la formulation reste relativement floue : trois équations, deux inconnues, ceci lui permet de prévoir l'existence d'une condition au moins.

Soulignons encore que :

- le travail en groupe, réellement effectif dans le cas des binômes s'est révélé riche lors des séances en classe, par les discussions qu'il a générées, mais aussi par l'influence qu'il semble avoir eu dans certains cas sur le travail à la maison.

- les enregistrements du travail en classe, les entretiens individuels ensuite, montrent bien les limites d'un travail expérimental qui, comme pour les étudiants français, ne peut se baser que sur des productions écrites standard.

En guise de conclusion

Ces résultats confirment notre conviction selon laquelle l'articulation entre les points de vue cartésien et paramétrique a un rôle fondamental à jouer dans l'apprentissage de l'algèbre linéaire et le fait que cette articulation ne peut pas être réduite à des aptitudes de type sémiotique.

Elle est composée à la fois d'éléments techniques et conceptuels, qui interagissent dans le processus de résolution de problèmes, la dimension conceptuelle jouant un rôle essentiel dans le processus d'anticipation, de contrôle et d'interprétation.

Nos résultats montrent aussi que cette articulation n'est pas d'un accès facile et que les étudiants tendent à la réduire à ses aspects les plus algorithmiques, ce qui les conduit à toutes sortes de dérapages formels.

Cela confirme notre hypothèse que la mise en place de compétences liées à cette articulation ne peut être laissée à la seule charge des étudiants, comme c'est le cas semble-t-il actuellement. Elle doit être prise en compte dans le processus d'enseignement et gérée sur le long terme.

Références bibliographiques

ARTIGUE, M. et ROBINET, J. (1982) : Conceptions du cercle chez l'enfant de l'école élémentaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* n° 3.1, La Pensée Sauvage, Grenoble, 5-64.

ARTIGUE M., DIAS, M.A. (1995) : Articulation problems between different systems of symbolic representations in linear algebra, in *The proceeding of the 19th annual meeting of Internatinal group for Psychology of Mathematics Education,* Universidades Federal de Pernambuco, Recife, Brasil, 3 vols, 2 : 34-41.

CHEVALLARD, Y. (1995) La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. *Actes de la VIII école d'été de Saint-Sauves D'Auvergne*, 83-122.

DIAS, M.A. (1998) : *Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*, Thèse de Doctorat, Université Denis Diderot, Paris VII.

DORIER J.L. (1993) : L'émergence du concept de rang dans l'étude des systèmes d'équations linéaires, *Cahier du séminaire d'histoire des mathématiques* (2e série) 3, 159-190.

DOUADY, R. (1992) : Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement, *Repères - IREM,* n° 6, 132-158.

DUVAL, R. (1995) : *Sémiosis et pensée humaine.* Peter Lang, Paris

ROBERT, A. et TENAUD, I. (1989) : Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9.1, La Pensée Sauvage, Grenoble, 31-70.

ROBINET, J. (1986) : *Esquisse d'une genèse des concepts d'algèbre linéaire*, Cahier de Didactique des Mathématiques 29, IREM de Paris VII.

ROGALSKI, M. (1991) : *Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année,* Cahier Didirem, n° 11, IREM de Paris VII.