MICHEL GUILLEMEAU

Quelques résultats de convergence en loi vers des processus de Lévy α-stables

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1996-1997, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1996-1997___2_A2_0>

Quelques résultats de convergence en loi vers des processus de Lévy α-stables

Michel Guillemeau

---

1. Introduction

Nous présentons ici quelques résultats, dans des situations simples, de convergence en loi vers des processus α-stables. Certains sont sûrement connus, d'autres le sont moins. Le premier est de type Donsker pour les lois α-stables, où nous remplaçons les conditions sur les moments par la connaissance d'équivalents pour les queues de probabilité. Ce résultat, découlant indirectement d'un théorème de Skorokhod (1957), n'est pas nouveau ; la démonstration donnée ici est directe et permet d'obtenir quelques généralisations. Le deuxième concerne la convergence de certaines formes quadratiques et en passant on montre un résultat qui donne le comportement en probabilité des sommes $\sum \frac{|X_i|^\alpha}{n \log n}$ où les variables aléatoires X_i sont symétriques et dont les fonctions de répartition ont de bonnes propriétés à l'infini.

Dans le deuxième paragraphe, nous rappellerons quelques notions tirées de l'ouvrage "*Limit Theorems for Stochastic processes*" de Jacod et Shiryaev concernant les caractéristiques locales des semimartingales, puis nous verrons brièvement dans un troisième paragraphe les quelques propriétés des lois stables qui nous seront utiles. Le paragraphe quatre énoncera les résultats de type Donsker tandis que dans le cinquième, nous donnerons un résultat de convergence pour des formes quadratiques assez particulières.

Le paramètre α sera toujours compris strictement entre 0 et 2, autrement dit on n'étudiera pas la situation où l'on a un théorème central limite fonctionnel.

2. Caractéristiques des semimartingales

Les caractéristiques des semimartingales sont destinées à remplacer les trois notions : dérive, variance de la partie Gaussienne, et mesure de Lévy, qui caractérisent la loi d'un processus à accroissements indépendants.

L'idée générale est la suivante : soit X un PAI avec $X_0 = 0$ et sans instants fixes de discontinuité. Pour chaque $t > 0$, X_t a une loi infiniment divisible et on peut écrire sa fonction caractéristique

$$E\left(\exp iuX_t\right) = \exp\left[iub_t - \frac{u^2}{2}c_t + \int \left(e^{iux} - 1 - iuh\left(x\right)\right) F_t\left(dx\right)\right] = \exp\psi_t\left(u\right)$$

(Formule de Lévy-Khintchine)

où $b_t \in \mathbf{R}, c_t \in \mathbf{R}_+, F_t$ est une mesure positive qui intègre $1 \wedge x^2$, et h est n'importe quelle fonction borélienne bornée à support compact qui se comporte comme x au voisinage de zéro.

De plus, les accroissements indépendants donnent :

$$\left(\frac{\exp iuX_t}{\exp\psi_t\left(u\right)}\right)_t \text{ est une martingale.}$$

Alors, si X est maintenant une semimartingale, on va définir deux processus B et C et une mesure aléatoire v tels que la formule suivante soit vérifiée :

$$E\left(\exp iuX_t\right) = E\left[\exp\left[iuB_t - \frac{u^2}{2}C_t + \int \left(e^{iux} - 1 - iuh\left(x\right)\right) \nu\left(\left[0,t\right] \times dx\right)\right]\right]$$

2.1. Définition des Caractéristiques

On suivra ici la présentation donné dans le livre de Jacod et Shiryaev.

Considérons une semimartingale d-dimensionnelle $X = \left(X^1, X^2, \ldots, X^d\right)$ définie sur une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$. On écrira $X \in \mathcal{S}^d$.

Définition 1. *On appellera C^d la classe des fonctions $h : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ qui sont bornées, à support compact et satisfont $h\left(x\right) = x$ sur un voisinage de zéro.*

Soit $h \in C^d$. Alors $\Delta X_s - h\left(\Delta X_s\right) \neq 0$ seulement si $|\Delta X_s| > b$ pour un certain $b > 0$, et la formule suivante :

$$\begin{cases} \tilde{X}\left(h\right)_t = \sum_{s \leq t}\left[\Delta X_t - h\left(\Delta X_x\right)\right] \\ X\left(h\right) = X - \tilde{X}\left(h\right) \end{cases}$$

définit un processus d-dimensionnel $X\left(h\right)$ à variation finie et une semimartingale d-dimensionnelle $X\left(h\right)$. De plus $\Delta X\left(h\right) = h\left(\Delta X\right)$ est bornée donc $X\left(h\right)$ est une semimartingale spéciale ([JS] p.44) et on peut considérer sa décomposition canonique :

$$X\left(h\right) = X_0 + M\left(h\right) + B\left(h\right)$$

où $M\left(h\right)$ martingale locale partant de 0, $B\left(h\right)$ prévisible et à variation finie.

Définition 2. *Soit $h \in \mathcal{C}_t^d$ fixé. On appelle caractéristiques de X le triplet (B, C, ν) tel que :*

(i) $B = (B^i)_{i\leq d}$ est un processus prévisible à variation finie, exactement le processus $B = B(h)$ ci-dessus.

(ii) $C = (C^{i,j})_{i,j\leq d}$ est un processus continu à variation finie, tel que $C^{i,j} = \langle X^{i,c}; X^{j,c}\rangle$ (X^c est la partie martingale locale continue de X).

(iii) ν est une mesure aléatoire prévisible sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$, qui est le compensateur prévisible de la mesure μ^X associée aux sauts de X.

Lorsque M et N sont des martingales locales, localement de carré intégrable, on note par $\langle M, N\rangle$ la covariation quadratique prévisible de M et N, c'est à dire le processus à variation finie prévisible, nul en 0, tel que $\langle M, N\rangle - MN$ est une martingale.

Définition 3. *On appelle seconde caractéristique modifiée de X (associée à h) le processus prévisible $\tilde{C}$ à variation finie défini par :*

$$\tilde{C}^{i,j} = \left\langle M(h)^i, M(h)^j \right\rangle \text{ où } M(h) \text{ est définie ci-dessus}$$

Théorème 4 (JS). *Il y a équivalence entre*

a) X est une semimartingale avec pour caractéristiques (B, C, v)

b) Les processus suivants sont des martingales locales :

(i) $M(h) = X(h) - B - X_0$;

(ii) $M(h)^i M(h)^j - \tilde{C}^{i,j}$ $\forall i, j \leq d$;

(iii) $g * \mu^X - g * \nu$ $\forall g \in \mathcal{C}^+\left(\mathbf{R}^d\right)$ où $W * \mu_t$ représente $\int_{[0,t]\times R} W(\omega, s, x)\, \mu(\omega, ds, dx)$ lorsque W est intégrable et $+\infty$ sinon,

et où $\mathcal{C}^+\left(\mathbf{R}^d\right)$ est n'importe quelle famille de fonctions boréliennes bornées sur R^d, s'annulant sur un voisinage de zéro, avec la propriété suivante : si deux mesures positives η et η' avec $\eta(\{0\}) = \eta'(\{0\}) = 0$ et $\eta(x : |x| > \epsilon) < \infty$ et $\eta'(x : |x| > \epsilon) < \infty$ pour tout $\epsilon > 0$ sont telles que $\eta(f) = \eta'(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}^+\left(\mathbf{R}^d\right)$, alors $\eta = \eta'$.

Avec les définitions précédentes, X est une semimartingale à accroissements indépendants si et seulement si ses caractéristiques locales B, C, v sont déterministes.

2.2. Le cas d'une somme discrète

Commençons avec une base discrète $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_k, P)$, et considérons un processus adapté $X = (X_n)_{n\in N}$, avec les accroissements $U_n = X_n - X_{n-1}$ (et $U_0 = X_0$).

Dans le cas qui nous intéresse, on aura besoin de "normaliser en temps" le processus X. Considérons donc le processus en temps continu suivant :

$$Y_t = \sum_{0 \leq k \leq \sigma_t} U_k = X_{\sigma_t}$$

où σ_t est un processus adequat, croissant, à valeurs dans N ou $\bar{N}$ (dans ce dernier cas un problème de convergence se pose). Le processus σ_t devra satisfaire quelques exigences :

Définition 5. *Un changement de temps sur la base $\mathcal{B}$ est une famille $\sigma = (\sigma_t)_{t \geq 0}$ telle que :*

(i) tout σ_t est un temps d'arrêt sur $\mathcal{B}$;

(ii) $\sigma_0 = 0$;

(iii) toutes les trajectoires $t \to \sigma_t$ sont croissantes, continues à droite, avec des sauts égaux à 1.

On associera à ce changement de temps une base stochastique en temps continu $\mathcal{B}' = \left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}, P\right)$, avec $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\sigma_t}$.

On pose $\tau_k = \inf (t : \sigma_t \geq k)$, $k \in N$.

Nous posons maintenant

$$\begin{cases} Y_t = \sum_{1 \leq k \leq \sigma_t} U_k = \sum_{k \geq 1} U_k 1_{\{\tau_k \leq t\}} \\ Y_t^n = \sum_{1 \leq k \leq \sigma_t \wedge n} U_k = \sum_{1 \leq k \leq n} U_k 1_{\{\tau_k \leq t\}} \end{cases}$$

Théorème 6 (JS). *Soit $h \in \mathcal{C}^d$ une fonction de troncation quelconque.*

a) La formule ci-dessus définit une semimartingale Y sur $\mathcal{B}'$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{cases} \sum_{1 \leq k \leq \sigma_t} \left| E\left(h\left(U_k\right) | \mathcal{F}_{k-1}\right) \right| < \infty \text{ p.s.} \\ \sum_{1 \leq k \leq \sigma_t} E\left(\left|U_k\right|^2 \wedge 1 | \mathcal{F}_{k-1}\right) < \infty \text{ p.s.} \end{cases}$$

(Ces conditions, tout comme la propriété de martingale, sont évidemment vérifiées lorsque $\sigma_t < \infty$ p.s. pour tout $t \in \mathbb{R}_+$).

b) Dans ce cas, les caractéristiques (B, C, ν) de Y relativement à h sont :

$$\begin{cases} B_t = \sum_{1 \leq k \leq \sigma_t} E\left(h\left(U_k\right) | \mathcal{F}_{k-1}\right) \\ C_t = 0 \\ v\left([0,t] \times g\right) = \sum_{1 \leq k \leq \sigma_t} E\left(g\left(U_k\right) 1_{\{U_k \neq 0\}} | \mathcal{F}_{k-1}\right), \text{ pour } g \geq 0 \text{ borélienne.} \end{cases}$$

2.3. Convergence en loi de semimartingales vers des PAI représentés par leurs caractéristiques

Les notations des sections précédentes sont reprises. De plus,on considère X^n une semimartingale de caractéristiques locales B^n, C^n, v^n avec $X_0^n = 0$ et X est un PAI de caractéristiques locales B, C, v. Pour obtenir un théorème limite (en loi) à partir des caractéristiques locales, on regardera la convergence des mesures compensatrices des sauts ν^n vers ν sur une classe de fonctions notée $C_2(\mathbb{R})$ constituée des fonctions continues bornées, s'annulant sur un voisinage de zéro.

On introduit une classe de fonctions simples déterminante pour étudier les convergences des sommes dans les cas explicites :

Définition 7. *On notera $C_1(\mathbb{R})$ la classe des fonctions de la forme : $x \to g_{a,\eta}(x) = \frac{(|x|-a)_+}{\eta} \wedge 1$ et $x \to f_{a,\eta}(x) = g_{a,\eta}(x)\operatorname{sgn}(x)$ pour tous les rationnels $a \neq 0$ et $\eta \neq 0$.*

Lemme 8. *La classe $C_1(\mathbb{R})$ est déterminante pour la convergence des mesures sur $C_2(\mathbb{R})$.*

Preuve. En effet, soient ν^n et ν des mesures positives sur $R_+ \times R$ qui ne chargent pas $\{0\}$, qui sont finies sur tout complémentaire d'un voisinage de zéro et telles que $\forall f \in C_1, \forall t \in R_+, \nu^n([0,t] \times f) \to \nu([0,t] \times f)$ avec f de la forme $f_{a,\epsilon}$ ou $g_{a,\epsilon}$. Alors, on a

$$\forall f \in C_2, \forall t \in \mathbb{R}_+, \nu^n([0,t] \times f) \to \nu([0,t] \times f)$$

Soient $a, b \in Q_+^*$, on montre facilement que $\nu^n([0,t] \times [a,b]) \to \nu([0,t] \times [a,b])$ pour deux nombres a et b qui ne sont pas chargés par la mesure ν. En outre, on a bien sûr $v^n([0,t] \times [a,+\infty[) \to v([0,t] \times [a,+\infty[)$.

De même pour $a, b \in Q_-^*$. On a donc la propriété. □

On a le théorème suivant qui donne des conditions suffisantes de convergence en loi de X^n vers X, en termes de comportement de caractéristiques locales. La convergence en loi considérée correspond à la convergence étroite des lois des processus X^n vers celle de X, sur l'espace de Skorokhod, $(D, \mathcal{D})$, muni de la topologie J_1 de Skorokhod :

Théorème 9. *([JS], p.423) Supposons que X n'a pas de temps fixe de discontinuité, et que D est un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}_+$.*

$$\text{Alors } \begin{cases} \sup_{s \leq t} |B_s^n - B_s| \xrightarrow{P} 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \\ \tilde{C}_t^n \xrightarrow{P} \tilde{C}_t \text{ pour tout } t \in D \\ g * \nu_t^n \xrightarrow{P} g * \nu_t \text{ pour tout } t \in D,\ g \in C_1\left(\mathbb{R}^d\right) \end{cases}$$

implique

$$X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

où $\tilde{C}^n = C^n + h^2 * v^n - \sum_{s \leq \cdot} (\Delta B_s^n)^2$

Ce théorème sera l'outil principal pour montrer la convergence des sommes considérées dans les sections suivantes.

3. Quelques rappels sur les processus α−stables

Commençons par deux définitions élémentaires sur les lois stables.

Définition 10. *Une variable aléatoire réelle X a une loi stable si et seulement si*

$$\forall n \geq 2, \exists c_n \geq 0, d_n \in R \text{ tels que } \sum_{i=1}^{n} X_i \stackrel{\mathcal{L}}{=} c_n X + d_n$$

où $X, X_1, \ldots, X_n$ ont la même loi et sont iid.

Définition 11. *On appelle domaine d'attraction* **normal** *d'une loi α−stable X (noté $DNA(X)$), l'ensemble des variable aléatoires Y telles que si $Y^1, Y^2, \ldots$ sont des copies indépendantes de Y :*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y^i}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X \text{ en loi.}$$

Ce n'est pas la notion la plus générale de domaine d'attraction d'une loi stable. En général, (lorsque ce n'est pas le domaine d'attraction *normal*), la normalisation des variables Y^i est une fonction de n variant lentement à l'infini (telle que $f(ux)/f(x) \to 1$) que multiplie $n^{1/\alpha}$.

Pour montrer des résultats asymptotiques, on utilisera la caractérisation suivante du domaine d'attraction normal d'une loi α-stable. On peut trouver ce résultat dans Feller (tome 2, page 547), on la redémontrera en fait dans la section suivante :

Proposition 12. *La v.a. X est dans le domaine d'attraction normal d'une loi α-stable de paramètres d'échelle σ et de dissymétrie β (rappelons que $\alpha < 2$) si et seulement si :*

$$\lambda^\alpha P(X > \lambda) \to \sigma \frac{1+\beta}{2} C_\alpha$$
$$\lambda^\alpha P(X < -\lambda) \to \sigma \frac{1-\beta}{2} C_\alpha$$

où la loi stable limite Z a pour fonction caractéristique

$$E(\exp i\theta Z) = \exp\left[-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}\theta \tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]$$

et où $C_\alpha = \left(\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx\right)^{-1}$.

4. Convergence d'une somme vers un processus α−stable

4.1. Somme de v.a. indépendantes $\sum X_k$

Des résultats analogues à ceux présentés ici existent pour les variables aléatoires au lieu de processus, notamment dans l'ouvrage de Gnedenko-Kolmogorov [GK] au chapitre concernant les lois stables.

4.1.1. Cas non symétrique avec $\alpha \neq 1$

Prenons $(X_k)_{k \in N}$ une suite de v.a.r. indépendantes telles que :
(i) $\lambda^\alpha P(X_k \geq \lambda) \underset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1+\beta}{2} C_\alpha$ uniformément en k, avec $C_\alpha = \left(\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right)^{-1}$,
(ii) $\lambda^\alpha P(X_k \leq -\lambda) \underset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1-\beta}{2} C_\alpha$ uniformément en k.

On notera L^α le mouvement de Lévy α−stable et d'intensité de décalage β, c'est à dire le PAI dont la loi de la variable L_t^α est une loi α−stable, donnée par la fonction caractéristique suivante :

$$E\left(\exp iuL_t^\alpha\right) = \exp\left[-|u|^\alpha t \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}(u) \tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right] \quad \text{pour } \alpha \neq 1$$

Appelons B, C, ν les caractéristiques de L_t^α. La formule de Lévy-Khintchine pour les PAI permet de les identifier :

$$E\left(e^{iuL_t^\alpha}\right) = \exp\left[iuB_t - \frac{1}{2}u^2 C_t + \int_R \left(e^{iux} - 1 - iuh(x)\right) \nu([0,t] \times dx)\right]$$

D'où l'on tire $C = 0$, $\nu(dt, dx) = dt.dx \left[\frac{1}{K|x|^{\alpha+1}} + \operatorname{sgn} x \frac{\beta}{K|x|^{\alpha+1}}\right]$ où K est défini comme suit :

$$K = 2\int_0^\infty \frac{1-\cos v}{|v|^{\alpha+1}} dv$$

Avec de plus : $B_t = \frac{2t\beta}{|1-\alpha|K}$ lorsqu'on choisit $h(x) = x1_{|x|\leq 1}$.

Théorème 13. *Si $\alpha < 1$, le processus*

$$\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k\right) \text{ converge en loi vers } L^\alpha.$$

Preuve. Calculons le triplet de caractéristiques associé à $S_t^n = \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k$.
On a

$$\begin{aligned}
B_t^n &= \textstyle\sum_1^{[nt]} E\left(h\left(\frac{X_k}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right) \\
&= \textstyle\sum \left[\int_0^\infty P\left(\frac{X_k}{n^{1/\alpha}} 1_{\left|\frac{X_k}{n^{1/\alpha}}\right| \le 1} \ge y\right) dy - \int_0^\infty P\left(\frac{X_k}{n^{1/\alpha}} 1_{\left|\frac{X_k}{n^{1/\alpha}}\right| \le 1} \le -y\right) dy\right] \\
&= \textstyle\sum \left[\int_0^1 \left(P\left(\frac{X_k}{n^{1/\alpha}} \ge y\right) - P\left(\frac{X_k}{n^{1/\alpha}} \le -y\right)\right) dy + \underbrace{P\left(X \le -n^{1/\alpha}\right) - P\left(X \ge n^{1/\alpha}\right)}_{\to -tC_\alpha\beta}\right]
\end{aligned}$$

Or

$$\int_0^1 \left(P\left(\frac{X_k}{n^{1/\alpha}} \ge y\right) - P\left(\frac{X_k}{n^{1/\alpha}} \le -y\right)\right) dy =$$
$$\int_{\frac{M}{n^{1/\alpha}}}^1 \left(P\left(\frac{X_k}{n^{1/\alpha}} \ge y\right) - P\left(\frac{X_k}{n^{1/\alpha}} \le -y\right)\right) dy + \int_0^{\frac{M}{n^{1/\alpha}}} \left(P\left(\frac{X_k}{n^{1/\alpha}} \ge y\right) - P\left(\frac{X_k}{n^{1/\alpha}} \le -y\right)\right) dy$$

et pour M assez grand, on voit que $B_t^n \to tC_\alpha\beta \left[\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right]$
De plus $C_t^n = 0$.

$$\text{Et } v([0,t] \times g) = \sum_1^{[nt]} E\left(g\left(\frac{X_k}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right) \mid \mathcal{F}^{k-1}\right) = \sum_1^{[nt]} E\left(g\left(\frac{X_k}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right).$$

Montrons que $\nu^n([0,t] \times g) \longrightarrow \nu([0,t] \times g)$ pour tout g de la forme $\frac{(|x|-a)_+}{\eta} \wedge 1$, $a, \eta \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
\nu([0,t] \times g) &= \tfrac{2t}{K} \int_{R_+} \tfrac{(|x|/\eta - a/\eta)_+ \wedge 1}{|x|^{\alpha+1}} dx \\
&= \tfrac{2t}{K} \left[\int_a^{a+\eta} \tfrac{x-a}{\eta |x|^{\alpha+1}} dx + \int_{\frac{2}{a}}^\infty \tfrac{1}{|x|^{\alpha+1}} dx\right] \\
&= \tfrac{2}{K\alpha\eta} \tfrac{t}{1-\alpha} \left[(a+\eta)^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right]
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\nu^n([0,t] \times g) &= \textstyle\sum_1^{[nt]} E\left(\frac{1}{\eta}\left(\frac{|X_k|}{n^{\frac{1}{\alpha}}} - a\right)_+ \wedge 1\right) \\
&= \textstyle\sum_1^{[nt]} \int_0^\infty P\left(\frac{1}{\eta}\left(\frac{|X_k|}{n^{\frac{1}{\alpha}}} - a\right)_+ \wedge 1 \ge x\right) dx \\
&= \textstyle\sum_1^{[nt]} \int_0^1 P\left(|X_k| \ge (x\eta + a) n^{\frac{1}{\alpha}}\right) dx \\
&= \textstyle\sum_1^{[nt]} \int_a^{a+\eta} \frac{1}{\eta} P\left(|X_k| \ge x n^{\frac{1}{\alpha}}\right) dx
\end{aligned}$$

La convergence uniforme $\lambda^\alpha P(|X_k| \ge \lambda) \to C_\alpha$ nous donne immédiatement

$$\nu^n([0,t] \times g) \to \frac{t}{\eta} \int_a^{a+\eta} \frac{C_\alpha}{x^\alpha} dx = \frac{C_\alpha t}{(1-\alpha)\eta} \left[(a+\eta)^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right]$$

(une condition plus faible que l'uniformité, comme la convergence au sens de Césaro, conviendrait également).

En outre, on trouve : $K = 2\int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^{\alpha+1}} dx$ d'où la relation $C_\alpha = \frac{2}{\alpha} K^{-1}$.

$$\text{Ainsi } v^n([0,t] \times g) \to \nu([0,t] \times g) \text{ et } B_t^n \to B_t$$

Montrons de même que $\nu^n([0,t] \times g) \to \nu([0,t] \times g)$ pour tout g de la forme $\left(\frac{(|x|-a)_+}{\eta} \wedge 1\right) \operatorname{sgn}(x)$, $a, \eta \in \mathbf{R}^*$.

$$\begin{aligned}
\nu([0,t] \times g) &= \frac{2t}{K} \int_{R_+} \frac{\beta \operatorname{sgn}(x)(|x|/\eta - a/\eta)_+ \wedge 1}{|x|^{\alpha+1}} dx \\
&= \frac{2t\beta}{K} \left[\int_a^{a+\eta} \frac{x-a}{\eta |x|^{\alpha+1}} dx + \int_{a+\eta}^\infty \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} dx \right] \\
&= \frac{2}{K\alpha\eta} \frac{t\beta}{1-\alpha} \left[(a+\eta)^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} \right]
\end{aligned}$$

On a de même pour ν^n : $\nu^n([0,t] \times g) \to \frac{t\beta}{\eta} \int_a^{a+\eta} \frac{C_\alpha}{x^\alpha} dx = \frac{C_\alpha t\beta}{(1-\alpha)\eta} \left[(a+\eta)^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} \right]$

Il reste donc seulement à montrer que $\tilde{C}^n = h^2 * v^n \to h^2 * \nu = \tilde{C}$. On a déjà $v([0,t] \times h^2) = \frac{2tK^{-1}}{2-\alpha}$.

$$\begin{aligned}
v^n([0,t] \times h^2) &= \sum_{k=1}^{[nt]} E\left(h^2\left(\frac{X_k}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{[nt]} \int_0^\infty P\left(\frac{X_k^2}{n^{\frac{2}{\alpha}}} 1_{\left|\frac{X_k}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right| < 1} \geq x\right) dx \\
&= 2\sum \int_0^1 x \left[P\left(|X_k| \geq n^{\frac{1}{\alpha}} x\right) - P\left(|X_k| \geq n^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right] dx
\end{aligned}$$

Posons $\phi_n^k(x) = P\left(|X_k| \geq x n^{\frac{1}{\alpha}}\right) - P\left(|X_k| \geq n^{\frac{1}{\alpha}}\right)$. Comme $\phi_n^k(x) \leq 1$ et $n\phi_n^k(x) \to (x^{-\alpha} - 1)$, $\forall x > 0$, on a par le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \nu^n([0,t] \times h^2) &= 2tC_\alpha \int_0^1 \left[x^{1-\alpha} - x \right] dx \\
&= \frac{t\alpha}{2-\alpha} C_\alpha
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne la dernière condition de convergence. □

Théorème 14. *Si $\alpha > 1$, le processus*

$$\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{k=1}^{[nt]} (X_k - E(X_k)) \right) \text{ converge en loi vers } L^\alpha.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
B_t^n &= \sum_1^{[nt]} E\left(h\left(\frac{X_k}{n^{\frac{1}{\alpha}}} - E\left(\frac{X_k}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right)\right) \\
&= \sum_1^{[nt]} E\left(\frac{X_k - E(X_k)}{n^{1/\alpha}} - \frac{X_k - E(X_k)}{n^{1/\alpha}} 1_{\left|\frac{X-E(X)}{n^{1/\alpha}}\right| \geq 1}\right) \\
&= -\sum \left[\int_1^\infty P\left(\frac{X_k - E(X_k)}{n^{1/\alpha}} \geq y\right) dy - \int_1^\infty P\left(\frac{X_k - E(X_k)}{n^{1/\alpha}} \leq -y\right) dy\right] \\
&\quad -P\left(X_k - E(X_k) \geq n^{1/\alpha}\right) + P\left(X_k - E(X_k) \leq -n^{1/\alpha}\right) \\
&\to \frac{tC_\alpha \beta \alpha}{(\alpha-1)}
\end{aligned}$$

Le calcul de la convergence des ν^n est le même que dans le cas $\alpha < 1$ car $\lambda^\alpha P(|X - EX| \geq \lambda) \to C_\alpha$ □

4.1.2. Cas symétrique

Dans la situation où les variables aléatoires X_k sont symétriques, il n'y a plus lieu de considérer les cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$ de manière différente. De plus, on a aussi facilement le résultat pour $\alpha = 1$.

Prenons $(X_k)_{k \in N}$ une suite de v.a.r. indépendantes telles que :

(i) $\lambda^\alpha P(|X_k| \geq \lambda) \underset{\lambda \to \infty}{\to} C_\alpha$ uniformément en k, avec $C_\alpha = \left(\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx\right)^{-1}$,

(ii) $\forall k \in N$, X_k est symétrique.

On notera L_t^α le mouvement de Lévy symétrique $\alpha-$stable, c'est à dire le PAI dont les lois de dimension finie sont des lois symétriques $\alpha-$stables, de fonction caractéristique

$$E(\exp iuL_t^\alpha) = \exp\left[-|u|^\alpha t\right]$$

Théorème 15. *Le processus*

$$\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k\right) \text{ *converge en loi vers* } L^\alpha.$$

Preuve. On se limite au cas $\alpha = 1$, non traité dans le cas dissymétrique.

Calculons le triplet de caractéristiques associé à $S_t^n = \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k$.

On a $B_t^n = 0$ car les X_k sont symétriques et $B_t^n = \sum_1^{[nt]} E\left(h\left(\frac{X_k}{n}\right)\right)$, en choisissant $h(x) = x 1_{|x| \leq 1}$.

De plus $C_t^n = 0$.

$$\text{Et } \nu([0,t] \times g) = \sum_1^{[nt]} E\left(g\left(\frac{X_k}{n}\right) \mid \mathcal{F}^{k-1}\right) = \sum_1^{[nt]} E\left(g\left(\frac{X_k}{n}\right)\right).$$

Montrons que $\nu^n([0,t] \times g) \to \nu([0,t] \times g)$ pour toute fonction borélienne g de la forme $\frac{(|x|-a)_+}{\eta} \wedge 1$, $a, \eta \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
\nu([0,t]\times g) &= \tfrac{t}{K}\int_R \frac{\frac{(|x|-a)_+}{\eta}\wedge 1}{|x|^2}dx \\
&= \tfrac{2t}{K}\left[\int_a^{a+\eta}\tfrac{x-a}{\eta|x|^2}dx + \int_{a+\eta}^{\infty}\tfrac{1}{|x|^2}dx\right] \\
&= \tfrac{2t}{K}\left[\tfrac{\ln(a+\eta)-\ln a}{\eta} + \tfrac{a(a+\eta)^{-1}-1}{\eta} + (a+\eta)^{-1}\right] \\
&= \tfrac{2t}{K\eta}\left[\ln(a+\eta)-\ln a\right]
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
\nu^n([0,t]\times g) &= \sum_1^{[nt]} E\left(\left(\tfrac{|X_k|}{\eta n}-\tfrac{a}{\eta}\right)_+\wedge 1\right) \\
&= \sum_1^{[nt]}\int_0^\infty P\left(\left(\tfrac{|X_k|}{\eta n}-\tfrac{a}{\eta}\right)_+\wedge 1 \geq x\right)dx \\
&= \sum_1^{[nt]}\int_0^1 P\left(|X_k|\geq (x\eta+a)\,n\right)dx \\
&= \sum_1^{[nt]}\int_a^{a+\eta}\tfrac{1}{\eta}P\left(|X_k|\geq xn\right)dx
\end{aligned}$$

La convergence uniforme $\lambda P(|X_k|\geq\lambda)\to C_1$ nous donne immédiatement

$$\nu^n([0,t]\times g)\to\frac{t}{\eta}\int_a^{a+\eta}\frac{C_1}{x}dx=\frac{C_1 t}{\eta}\left[\ln(a+\eta)-\ln a\right]$$

En outre, on trouve : $K=2\int_0^\infty\frac{\cos x-1}{x^2}dx$ d'où la relation $C_1=2K^{-1}$.

Ainsi $v^n([0,t]\times g)\to\nu([0,t]\times g)$

Il reste donc seulement à montrer que $\tilde{C}^n=h^2*v^n\to h^2*\nu=\tilde{C}$. On a déjà $v([0,t]\times h^2)=\frac{2}{K}t$.

$$\begin{aligned}
v^n([0,t]\times h^2) &= \sum_{k=1}^{[nt]}E\left(h^2\left(\tfrac{X_k}{n}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{[nt]}\int_0^\infty P\left(\tfrac{X_k^2}{n^2}1_{\left|\frac{X_k}{n}\right|<1}\geq x\right)dx \\
&= 2\sum\int_0^1 x\left[P(|X_k|\geq nx)-P(|X_k|\geq n)\right]dx
\end{aligned}$$

Posons $\phi_n^k(x)=P(|X_k|\geq xn)-P(|X_k|\geq n)$.

Comme $\phi_n^k(x)\leq 1$ et $n\phi_n^k(x)\to C_1(x^{-1}-1)$, $\forall x>0$, on a par le théorème de convergence dominée :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\nu^n([0,t]\times h^2) &= 2tC_1\int_0^1[1-x]\,dx \\
&= tC_1
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne la dernière condition de convergence. □

Remarque : La classe des fonctions de $C_1(\mathbf{R})$ est une *classe déterminant la convergence* pour la convergence faible dans l'ensemble des fonctions continues bornées de $R\to R$ qui sont nulles autour de zéro et qui admettent une limite à l'infini, c'est à dire que si l'on considère η,η^n des mesures ne chargeant pas

$\{0\}$, finies sur les complémentaires de tout voisinage de 0, alors $\eta^n(f) \to \eta(f)$ pour tout $f \in C_1(\mathbb{R})$ implique $\eta^n(h^2) \to \eta(h^2)$ pour toute fonction h continue, bornée, nulle en zéro.([JS], p.354-357)

Ainsi, à condition de choisir une fonction h continue et bornée, la convergence $\tilde{C}^n \to \tilde{C}$ découle en fait de la convergence des $v^n([0,t] \times g)$ vers $v([0,t] \times g)$ pour tous les $g \in C_1(\mathbb{R})$. ([JS])

Remarque : On obtient de même le résultat de convergence suivant en posant

$$Y_t^n = \sum_{i=1}^{[nt]} Z_{n,i}$$

où $(Z_{n,i})_{i \in N}$ sont indépendants :

Théorème 16. *Si*

$$(i')\ \lambda^\alpha \sum_{j=1}^{[nt]} P(|Z_{n,j}| \geq \lambda) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} tC_\alpha$$
$$(ii')\ Z_{n,j} \text{ est symétrique } \forall n, i \in N$$

Proposition 17. *Alors*

$$\sum_{k=1}^{[nt]} Z_{n,k} \xrightarrow{\mathcal{L}} L_t^\alpha$$

Remarque : Notamment, si les (X_i) sont iid et tels que $X_i \in DNA(S\alpha S)$ et $\lambda^\alpha P(|X_i| \geq \lambda) \to C_\alpha$, on a pour une suite de réels (a_i) non tous nuls :

Proposition 18. *Posons* $\alpha_n = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.
Si

$$\sup_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} \frac{|a_i|}{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Alors

$$\frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=1}^{k_n(t)} a_i X_i \xrightarrow{J_1} L_t^\alpha$$

où $k_n(t)$ est tel que

$$\frac{\alpha_{k_n(t)}}{\alpha_n} \leq t < \frac{\alpha_{k_n(t)+1}}{\alpha_n}$$

Preuve. On pose simplement le calcul de la quantité

$$Q = \left| \lambda^\alpha \sum_{i=1}^{k_n(t)} P\left(\left| \frac{a_i}{\alpha_n} X_i \right| > \lambda \right) - tC_\alpha \right|$$

que l'on majore pour n assez grand :

$$\begin{aligned} Q &\leq \textstyle\sum_{i=1}^{k_n(t)} \left| \lambda^\alpha P\left(|X_i| > \frac{|\alpha_n|}{|a_i|}\lambda\right) - \frac{|a_i|^\alpha}{\alpha_{k_n(t)}^\alpha} t C_\alpha \right| \\ &\leq \textstyle\sum_{i=1}^{k_n(t)} \frac{|a_i|^\alpha}{\alpha_{k_n(t)}^\alpha} \left| \frac{\alpha_{k_n(t)}^\alpha}{|a_i|^\alpha} \lambda^\alpha P\left(|X_i| > \frac{|\alpha_n|}{|a_i|}\lambda\right) - t C_\alpha \right| \\ &\leq \textstyle\sum_{i=1}^{k_n(t)} \frac{|a_i|^\alpha}{\alpha_{k_n(t)}^\alpha} \epsilon = \epsilon \text{ pour } n \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

□

4.2. Somme de variables indépendantes $\sum |X_i|^\alpha$

Le résultat présenté ici peut être vu comme une conséquence indirecte d'un théorème donné par Feller ([F], p.544) ou par Paul Lévy [L].

Considérons ici encore $(X_k)_{k\in N}$ une suite de v.a.r. indépendantes telles que :

(i) $\lambda^\alpha P(|X_k| \geq \lambda) \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} C_\alpha$ uniformément en k, avec $C_\alpha = \left(\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx\right)^{-1}$,

(ii) $\forall k \in N$, X_k est symétrique.

Soit $(a_i)_{i\in N}$ une suite de nombre réels, tels que $u_n = \sum_{i=1}^n |a_i|^\alpha$ tende vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Soit $k_n(t)$ une fonction à valeurs réelles telle que $\forall t \in R_+$, $\frac{u_{k_n(t)}}{u_n} \leq t < \frac{u_{k_n(t)+1}}{u_n}$, $\sup_{i\leq n} \frac{|a_i|^\alpha}{u_n \log u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\sup_{i\leq n} \frac{\log |a_i|^\alpha}{\log u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Proposition 19. *Sous ces conditions*

$$\textit{la somme } \sum_{i=1}^{k_n(t)} \frac{|a_i|^\alpha |X_i|^\alpha}{u_n \log u_n} \textit{ converge vers } tC_\alpha$$

Preuve. Séparons la somme en deux termes :

$$\sum_1^{k_n(t)} \frac{|a_i X_i|^\alpha}{u_n \log u_n} 1_{|X_i|^\alpha > u_n \log u_n} + \sum_1^{k_n(t)} \frac{|a_i X_i|^\alpha}{u_n \log u_n} 1_{|a_i X_i|^\alpha \leq u_n \log u_n}$$

On a alors pour le premier terme

$$\begin{aligned} P\left[\textstyle\sum_{i=1}^{k_n(t)} \frac{|a_i X_i|^\alpha}{u_n \log u_n} 1_{|a_i X_i|^\alpha > u_n \log u_n} > \epsilon\right] &\leq P\left[\bigcup_{i=1}^{k_n(t)} \left\{ \frac{|a_i X_i|^\alpha}{u_n \log u_n} 1_{|a_i X_i|^\alpha > u_n \log u_n} > 1 \right\}\right] \\ &\leq \textstyle\sum_{i=1}^{k_n(t)} P\left[|a_i X_i|^\alpha > u_n \log u_n\right] \\ &\sim \frac{1}{u_n \log u_n} \textstyle\sum_{i=1}^{k_n(t)} |a_i|^\alpha \to 0 \end{aligned}$$

On sépare à nouveau en deux le second terme

$$\frac{1}{u_n \log u_n} \sum_1^{k_n(t)} \left[|a_i X_i|^\alpha 1_{|a_i X_i|^\alpha \leq u_n \log u_n} - E\left(|a_i X_i|^\alpha 1_{|a_i X_i|^\alpha \leq u_n \log u_n}\right)\right] + \frac{1}{u_n \log u_n} \sum_1^{k_n(t)} E\left(|a_i X_i|^\alpha 1_{|a_i X_i|^\alpha \leq u_n \log u_n}\right)$$

Or,

$$\begin{aligned}
A &= \tfrac{1}{u_n \log u_n} \textstyle\sum_1^{k_n(t)} E\left(|a_iX_i|^\alpha 1_{|a_iX_i|^\alpha \le u_n \log u_n}\right) \\
&= \textstyle\sum_1^{k_n(t)} \int_0^\infty P\left(\frac{|a_iX_i|^\alpha}{u_n \log u_n} 1_{|a_iX_i|^\alpha \le u_n \log u_n} \ge y\right) dy \\
&= \textstyle\sum_1^{k_n(t)} \int_0^1 P\left(|a_iX_i|^\alpha \ge y u_n \log u_n\right) - P\left(|a_iX_i|^\alpha \ge u_n \log u_n\right) dy \\
&= \textstyle\sum_1^{k_n(t)} \int_0^1 P\left(|a_iX_i|^\alpha \ge y u_n \log u_n\right) dy - \sum_1^{k_n(t)} P\left(|a_iX_i|^\alpha \ge u_n \log u_n\right)
\end{aligned}$$

Comme $\sum_1^{k_n(t)} P\left(|a_iX_i|^\alpha \ge u_n \log u_n\right) \to 0$, il ne restera que le premier terme :

$$\begin{aligned}
B &= \textstyle\sum_1^{k_n(t)} \int_0^1 P\left(|a_iX_i|^\alpha \ge y u_n \log u_n\right) dy \\
&= \textstyle\sum_1^{k_n(t)} \int_O^{\frac{1}{u_n}} P\left(|X_i|^\alpha \ge \frac{y u_n \log u_n}{|a_i|^\alpha}\right) dy + \sum_1^{k_n(t)} \int_{\frac{1}{u_n}}^1 P\left(|X_i|^\alpha \ge \frac{y u_n \log u_n}{|a_i|^\alpha}\right) dy
\end{aligned}$$

Le deuxième terme de cette nouvelle somme converge vers tC_α car

$$P(|a_iX_i|^\alpha \ge y u_n \log u_n) \sim \frac{t\,|a_i|^\alpha C_\alpha}{y u_n \log u_n} ,$$

quant au premier on peut voir qu'il tend vers zéro, par exemple en le séparant à nouveau en deux :

$$\begin{aligned}
D &= \textstyle\sum_1^{k_n(t)} \int_0^{\frac{1}{u_n}} P\left(|a_iX_i|^\alpha \ge y u_n \log u_n\right) dy \\
&= \textstyle\sum_1^{k_n(t)} \int_0^{\frac{|a_i|^\alpha}{K u_n}} P\left(|a_iX_i|^\alpha \ge y u_n \log u_n\right) dy + \sum_1^{k_n(t)} \int_{\frac{|a_i|^\alpha}{K u_n}}^{\frac{1}{u_n}} P\left(|a_iX_i|^\alpha \ge y u_n \log u_n\right) dy \\
&= \textstyle\sum_1^{k_n(t)} \frac{|a_i|^\alpha}{K u_n} + \sum^{k_n(t)} \frac{|a_i|^\alpha(\log K + \log u_n - \log|a_i|^\alpha - \log u_n)}{u_n \log u_n} \\
&\le \tfrac{1}{K} + \tfrac{\log K}{\log u_n} - \textstyle\sum_{i=1}^{k_n(t)} \frac{|a_i|^\alpha \log|a_i|^\alpha}{u_n \log u_n} \\
&\le \tfrac{1}{K} + \tfrac{\log K}{\log u_n} + \sup_{i \le n} \tfrac{|\log|a_i|^\alpha|}{\log u_n}, \text{ } K \text{ étant choisi arbitrairement grand.}
\end{aligned}$$

Donc, $\frac{1}{u_n \log u_n} \sum_1^{k_n(t)} E\left(|a_iX_i|^\alpha 1_{|a_iX_i|^\alpha \le u_n \log u_n}\right) \to C_\alpha$. On va maintenant montrer que $\frac{1}{u_n \log u_n} \sum_1^n \left[|a_iX_i|^\alpha 1_{|a_iX_i|^\alpha \le u_n \log u_n} - E\left(|a_iX_i|^\alpha 1_{|a_iX_i|^\alpha \le u_n \log u_n}\right)\right]$ tend vers zéro en prouvant que sa variance tend vers zéro (sa moyenne étant déjà nulle, on aura le résultat) :

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{(u_n \log u_n)^2} \sum_1^{k_n(t)} \left[E\left(|a_i X_i|^{2\alpha} 1_{|a_i X_i|^\alpha \le u_n \log u_n} \right) - E^2\left(|a_i X_i|^\alpha 1_{|a_i X_i|^\alpha \le u_n \log u_n} \right) \right] \\
&= \sum_1^{k_n(t)} \int P\left(|a_i X_i|^\alpha \ge \sqrt{y} u_n \log u_n \right) dy \\
&\quad - \sum_1^{k_n(t)} \left(\int_0^1 P\left(|a_i X_i|^\alpha \ge y u_n \log u_n \right) dy \right)^2 + o\left(\frac{1}{\log u_n} \right) \\
&\le \underbrace{\sum_1^{k_n(t)} \int_0^1 P\left(|a_i X_i|^\alpha \ge \sqrt{y} u_n \log u_n \right) dy}_{\to 0 \text{ car } \sqrt{y} > y} + \\
&\quad + \underbrace{\left[\sup_{i \le n} \int_0^1 P\left(|a_i X_i|^\alpha \ge y u_n \log u_n \right) dy \right]}_{\to 0 \text{ par hypothèse}} \underbrace{\sum_1^{k_n(t)} \left(\int_0^1 P\left(|a_i X_i|^\alpha \ge y u_n \log u_n \right) dy \right)}_{\to t C_\alpha} \\
&\quad + o\left(\frac{1}{\log u_n} \right)
\end{aligned}$$

D'où $\sum_1^{k_n(t)} \frac{|a_i|^\alpha |X_{i-1}|^\alpha}{u_n \log u_n} \to t C_\alpha$ □

Remarque 1 : On a le même résultat si l'on ne considère pas forcément que X_k est symétrique puisque dans ce cas $\lambda^\alpha P(|X_k| \ge \lambda) \to C_\alpha$ de toutes façons.

C'est ce type de résultat qui peut être déduit de [F] ou de [L] ; on n'a évidemment pas la convergence presque sûre de la somme en question.

Remarque 2 : La proposition précédente ne donne pas la convergence de sommes du type $\sum \frac{|X_k|^\alpha / k}{(\log n)(\log \log n)}$ car la condition $\sup_{i \le n} \frac{\log |a_i|^\alpha}{\log u_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ n'est pas vérifiée. En revanche, lorsque $a_i = 1$, les hypothèses sur les a_i sont satisfaites et on obtient

$$\frac{\sum_{i=1}^{[nt]} |X_i|^\alpha}{n \ln n} \xrightarrow{P} t C_\alpha$$

De même, on a la convergence de cette somme lorsque $\exists m > 0, M > 0$,tels que $\forall i, m < a_i < M$ ou bien pour $a_i = \frac{1}{i^\beta}$,pour $\beta < 1$.

5. Convergence de certaines formes quadratiques

5.1. Convergence vers une intégrale stochastique itérée

5.1.1. Cas non-symétrique

Ici, nous nous plaçons dans le cas où $\alpha \neq 1$. Considérons des variables aléatoires réelles (X_i) iid et telles que X_i soit dans le domaine d'attraction normal d'une variable aléatoire α-Stable, avec $\lambda^\alpha P(X_i \geq \lambda) \to \frac{1+\beta}{2} C_\alpha$, et $\lambda^\alpha P(X_i \leq -\lambda) \to \frac{1-\beta}{2} C_\alpha$ alors on a pour une suite de réels (a_i) non tous nuls, en posant encore $\alpha_n = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ et $k_n(t)$ défini comme dans la section précédente :

Proposition 20. *Si $\alpha < 1$ et $\sup_{i \in \{1,2,\dots,n\}} \frac{|a_i|}{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ alors l'expression*

$$\frac{1}{\alpha_n^2} \sum_{j=1}^{k_n(t)} \sum_{i<j} a_i X_i a_j X_j$$

converge vers le processus

$$\int_0^t L_{s-}^\alpha dL_s^\alpha$$

Preuve. En posant $X_s^n = \frac{1}{\alpha_n} \sum_1^{k_n(s)} a_i X_i$, on a exactement $\frac{1}{\alpha_n^2} \sum_{j=1}^{k_n(t)} \sum_{i<j} a_i X_i a_j X_j = \int_0^t X_{s-}^n dX_s^n$ et $X_s^n \xrightarrow{J_1} L_s^\alpha$, il suffit donc de passer à la limite sous le signe somme. On peut le faire notamment en utilisant la condition U.T. pour X^n introduite par [JMP] : X^n est un PAI et une semimartingale. Si l'on pose

$$\begin{aligned} \hat{X}_t^{n,a} &= \textstyle\sum_{s \leq t} \Delta X_s^n 1_{|\Delta X_s^n| > a} \\ &= \textstyle\frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=1}^{k_n(s)} a_i X_i 1_{|X_i| > \frac{\alpha_n}{a_i} a} \end{aligned}$$

alors $\tilde{X}_t^{n,a} = X_t^n - \hat{X}_t^{n,a} = \frac{1}{\alpha_n} \sum_{i=1}^{k_n(s)} a_i X_i 1_{|X_i| \leq \frac{\alpha_n}{a_i} a}$ est une martingale locale, sa caractéristique $B_t^{n,1} = \sum_1^{k_n(t)} E\left(h\left(\frac{a_i}{\alpha_n} X_i\right)\right) = \frac{\alpha_{k_n(t)}}{\alpha_n} B^n$ comme nous l'avons vu précédemment (avec $B^n \to B$ une constante), converge vers tB. Sa variation est donc bornée et le lemme 3.1 de [JMP] nous donne la condition U.T. pour X^n. □

On a pour $\alpha > 1$, le résultat analogue :

Proposition 21. *Si $\alpha > 1$ et $\sup_{i \in \{1,2,\dots,n\}} \frac{|a_i|}{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ alors l'expression*

$$\frac{1}{\alpha_n^2} \sum_{j=1}^{k_n(t)} \sum_{i<j} a_i \left(X_i - E(X_i)\right) a_j \left(X_j - E(X_j)\right)$$

converge vers le processus

$$\int_0^t L_{s-}^\alpha dL_s^\alpha$$

5.1.2. Cas symétrique

Ici, $\alpha \in]0,2[$. Considérons des variables aléatoires réelles (X_i) iid et telles que X_i soit dans le domaine d'attraction normal d'une variable aléatoire Symétrique α-Stable, avec $\lambda^\alpha P(|X_i| \geq \lambda) \to C_\alpha$ et X_i symétrique pour tout i, alors on a pour une suite de réels (a_i) non tous nuls, avec $\alpha_n = (\sum_{i=1}^n |a_i|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$:

Proposition 22. *Si* $\sup_{i\in\{1,2,\dots,n\}} \frac{|a_i|}{\alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *alors l'expression*

$$\frac{1}{\alpha_n^2}\sum_{j=1}^{k_n(t)}\sum_{i<j} a_i X_i a_j X_j$$

converge vers le processus

$$\int_0^t L_{s-}^\alpha dL_s^\alpha$$

Preuve. Dans la preuve précédente, on a exactement $B_t^{n,a} = 0$. □

5.2. Somme de produits de 2 v.a. indépendantes $\sum X_{i-1}X_i$

Soit $(X_i)_{i\in N}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et appartenant au domaine d'attraction normal d'une loi $\alpha - stable$. Les X_i sont supposées de plus symétriques. Soit $(a_i)_{i\in N}$ une suite de nombre réels, tels que $u_n = \sum_{i=1}^n |a_i|^\alpha$ tende vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Proposition 23. *Si* $k_n(t)$ *est tel que* $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\frac{u_{k_n(t)}}{u_n} \leq t < \frac{u_{k_n(t)+1}}{u_n}$,

si $\sup_{i\leq n} \frac{|a_i|^\alpha}{u_n \log u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *et* $\sup_{i\leq n} \frac{\log|a_i|^\alpha}{\log u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *alors la suite* (S_n) *de processus définie par*

$$S_n(t) = \frac{1}{(u_n \log u_n)^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^{k_n(t)} a_{i-1} X_{i-1} X_i$$

converge en loi vers un P.A.I. $\alpha - stable$.

Preuve. Appelons B_t^n, C_t^n, et ν_t^n les caractéristiques de S_n.
On a :

$$B_t^n = \sum_{i=1}^{k_n(t)} E(h(\frac{a_{i-1}}{(u_n \log u_n)^{1/\alpha}} X_{i-1}X_i) \mid \mathcal{F}^{i-1})$$

Posons alors $m(x) = E\left(h\left(\frac{1}{(u_n \log u_n)^\alpha} x X_i\right)\right) = 0$ car X_i est symétrique. On obtient donc $B_t^n = \sum_{i=1}^{k_n(t)} m(a_{i-1}X_{i-1}) = 0$. De plus $C_t^n = 0$. Il reste à calculer ν_t^n.

$$\begin{aligned}
\nu_t^n([0,t]\times g) &= \sum_{i=1}^{k_n(t)} E\left(g\left(\frac{a_{i-1}X_{i-1}X_i}{(u_n\log u_n)^{1/\alpha}}\right)1_{X_{i-1}X_i\neq 0}\mid \mathcal{F}^{i-1}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k_n(t)} E\left(g\left(\frac{a_{i-1}X_{i-1}X_i}{(u_n\log u_n)^{1/\alpha}}\right)\mid \mathcal{F}^{i-1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Posons } f(x) &= E\left(g\left(\frac{xX_i}{(u_n\log u_n)^{1/\alpha}}\right)\right)\\
&= E\left(\left(\frac{1}{\eta}\left|\frac{xX_i}{(u_n\log u_n)^{1/\alpha}}\right| - \frac{a}{\eta}\right)_+ \wedge 1\right)\\
&= \int_0^1 P\left(\left(\frac{1}{\eta}\left|\frac{xX_i}{(u_n\log u_n)^{1/\alpha}}\right| - \frac{a}{\eta}\right)_+ \geq y\right)dy\\
&= \int_a^{a+\eta}\frac{1}{\eta}P\left(|X_i| \geq \frac{(u_n\log u_n)^{1/\alpha}y}{|x|}\right)dy\\
&= \int_a^{a+\eta}\frac{C_\alpha|x|^\alpha}{\eta u_n\log u_n y^\alpha}dy + o\left(\frac{1}{u_n\log u_n}\right)\\
&= \frac{C_\alpha}{u_n\log u_n}|x|^\alpha\left(\frac{(a+\eta)^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\eta}\right) + o\left(\frac{1}{u_n\log u_n}\right)\\
&= \frac{Q|x|^\alpha}{u_n\log u_n} + o\left(\frac{1}{u_n\log u_n}\right)
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que $\nu^n([0,t]\times g) = Q\sum_1^{k_n(t)}\frac{|a_{i-1}|^\alpha|X_{i-1}|^\alpha}{u_n\log u_n} + o\left(\frac{1}{\log u_n}\right)$.

Or, on connait la limite de cette somme : $\sum_1^{k_n(t)}\frac{|X_{i-1}|^\alpha}{u_n\log u_n} \to tC_\alpha$, ce qui nous donne $\nu^n([0,t]\times g) \to QtC_\alpha$. Le calcul de $\tilde{C}^n \to \tilde{C}$ se réalise de même. On a donc bien la proposition. □

Remarque : On a le même résultat en considérant les sommes $\frac{1}{(n\log n)^{1/\alpha}}\sum X_{2k-1}X_{2k}$ sans changement dans la démonstration, ou en considérant la somme $\frac{1}{(n\log n)^{1/\alpha}}\sum X_iY_i$ où les variables aléatoires X_i et Y_i sont indépendantes et vérifient les mêmes conditions que les X_i ci-dessus. On peut voir ceci, par exemple, directement dans le cas où ces variables aléatoires suivent une loi de Pareto de densité $\frac{\alpha}{2}\frac{1}{|x|^{\alpha+1}}1_{|x|>1}$ puisqu'alors $\frac{\lambda^\alpha}{\ln\lambda}P(|XY|\geq\lambda) \to \gamma_\alpha$ et on se retrouve dans la situation d'une somme de variables aléatoires appartenant au domaine d'attraction (non normal, cependant) d'une loi stable.

On n'est donc pas très loin d'un cas d'indépendance.

REFERENCES

[F] W.Feller : *"An introduction to probability theory and its applications"*, tome 2, Wiley Publications in statistics, 2nd edition, 1957.

[GI] I.I.Gikhman-A.V.Skorokhod : *"Introduction to the theory of random processes"*, Philadelphia, W.B. Saunders co, 1969.

[GK] B.V.Gnedenko-A.N.Kolmogorov : *"Limit distributions for sums of independant random variables"*, Addison-Wesley mathematic series, 1954.

[JMP] A.Jakubowski-J.Mémin-G.Pagès : *"Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace D^1 de Skorokhod"*, Probability Theory and related fields 81, 111-137, 1989.

[JS] J.Jacod-A.N.Shiryaev (JS) : *"Limit theorems for stochastic processes"*, Springer-Verlag, 1980.

[L] P.Lévy : *"Fractions continues aléatoires"*, F.C.A. : Rend. d. circ. math dit Palermo s, 2, 1, 1952, p.170-208

[ST] Samorodnitsky-M.S.Taqqu : *"Stable non-gaussian random processes"*, Chapman & Hall, 1994.

[SK] A.V. Skorokhod : *"Limit theorems for stochastic processes with independent increments"* , Theory of probability and its applications, 1957.

Michel GUILLEMEAU
IRMAR
Campus de Beaulieu
35042 Rennes.