B. COURBOT

Inégalités exponentielles pour semimartingales : la méthode du cumulant

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1995, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1995___2_A3_0>

Inégalités exponentielles pour semimartingales : la méthode du cumulant

B. Courbot

IRMAR
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu 35 Rennes

Le comportement asymptotique des processus stochastiques sous forme d'inégalités exponentielles a été étudié par divers procédés, des transformées de Laplace des lois au calcul stochastique. Nous nous proposons de montrer ici que l'outil proposé par Liptser et Shiryayev dans *[LS]*, légèrement généralisé, semble être particulièrement adapté à ce but : il s'adapte en effet à des processus très généraux, les semimartingales et il permet de retouver de façon élégante des résultats classiques, tant sur les martingales continues que sur les processus discrets, voire de les préciser et de les affiner par des versions uniformes.

Après une première partie consacrée aux notations et à quelques résultats préliminaires, le processus-clé, le W-cumulant sera défini dans la seconde partie, où figure le théorème de base qui nous fournira la martingale locale positive Z^W. L'application d'inégalités de Markov ou de Doob à ce processus pour des semimartingales générales nous donnera les inégalités de la troisième partie. Leurs conséquences pour les processus croissants localement intégrables et les martingales locales de carré intégrables sont consignées dans les quatrième et cinquième parties. La sixième est consacrée aux processus à accroissements indépendants, pour lesquels les inégalités s'écrivent plus simplement, tandis que la dernière fournit des applications aux processus discrets, en particulier aux sommes de variables indépendantes et aux U-statistiques.

1. NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

Dans l'espace des processus réels définis sur un espace filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P}\right)$, adaptés, càd-làg et nuls en 0 nous désignerons par :

- $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P}_{l.b.}$)l'espace des processus prévisibles (des processus prévisibles localement bornés),
- $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S}p$) l'ensemble des semimartingales (des semimartingales spéciales),
- $\mathcal{V}$ ($\mathcal{V}^+$) l'espace des processus à variation finie (des processus non-décroissants),
- $\mathcal{A}_{loc}$ l'espace des processus à variation localement intégrable,
- $\mathcal{M}_{loc}$ ($\mathcal{M}^2_{loc}$) l'espace des martingales locales (des martingales locales dont le carré est localement intégrable).

U_0 sera l'ensemble des fonctions convexes sur $\mathbb{R}^+$, nulles en 0 et bornées inférieurement.

Considérons une semimartingale X nulle en 0 de triplet caractéristique (B, C, ν) avec les notations suivantes :

- B est un processus prévisible à variation bornée et à sauts bornés par le réel strictement positif fixé a,
- si X^c est la partie martingale continue de X, sa variation quadratique est $\langle X^c \rangle = C$,
- si μ est la mesure de sauts de X, ν est une version du compensateur de μ telle que $\nu(\{t\} \times \mathbb{R}^*)$ soit inférieur ou égal à 1 pour tout $(\omega; t)$ de $\Omega \times \mathbb{R}^+$.

Il sera noté :
$f(x,.) \star \mu_t$, $f(x,.) \star \nu_t$, $f(x,.) \star (\mu - \nu)_t$ pour :
$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} f(x,s) d\mu_s$, $\int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} f(x,s) d\nu_s$, $\int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} f(x,s) d(\mu - \nu)_s$
Rappelons alors les conditions de ν-intégrabilité : *([JS], pp.77, 82 par exemple)* :
pour $X \in \mathcal{S}$, de triplet caractéristique (B, C, ν), pour tout $a > 0$:

- $(x^2 \wedge 1) \star \nu$, et par conséquent $x^2 \mathbf{1}_{\{|x| \leq a\}} \star \nu$ et $\mathbf{1}_{\{|x|>a\}} \star \nu$ appartiennent à $\mathcal{A}_{loc}$;
- si $X \in \mathcal{S}p$, $(x^2 \wedge |x|) \star \nu$ et donc $|x| \mathbf{1}_{\{|x|>a\}} \star \nu$ appartiennent à $\mathcal{A}_{loc}$;
- X est de carré localement intégrable si et seulement si $x^2 \star \nu$ appartient à $\mathcal{A}_{loc}$.

Considérons un processus prévisible localement borné g et, pour un processus X de triplet caractéristique $\left(B^X, C^X, \nu^X\right)$, examinons le compensateur ν^Y du processus $Y = g \bullet X$.

Reprenons les notations de *[JS]* et *[LS]* : soit $\widetilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et soit $\widetilde{\mathcal{P}}$ la tribu $\mathcal{P} \otimes \mathcal{R}$ où $\mathcal{P}$ est la tribu prévisible sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$ et $\mathcal{R}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Nous avons alors :

Lemme 1. *Pour tout processus $\widetilde{\mathcal{P}}$-mesurable W : $W(\omega,.,x) \star \nu^Y = W(\omega,.,gx) \star \nu^X$.*

Preuve du lemme : Puisque $\Delta Y = g \Delta X$, nous avons : $W(\omega,.,x) \star \mu^Y = W(\omega,.,gx) \star \mu^X$. Comme $W(\omega,.,gx) \star (\mu^X - \nu^X)$ est une martingale locale,

$$\mathbb{E}\left[|W| \star \mu^Y_\infty\right] = \mathbb{E}\left[|W(\omega,.,gx)| \star \mu^X_\infty\right] = \mathbb{E}\left[|W(\omega,.,gx)| \star \nu^X_\infty\right]$$

et ν^Y est donc bien définie par la relation ci-dessus. □

L'obtention de majorations optimales passera par l'utilisation de la transformée de Young d'une fonction convexe, dont nous rappelons la définition.

Définition 1. *Soit ϕ une fonction convexe d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; la transformée de Young de ϕ est la fonction $\mathcal{Y}_\phi$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathcal{Y}_\phi(x) = \sup_{t \in I}(tx - \phi(t))$.*

Pour K, c, x strictement positifs, nous poserons :

$$\Psi(K,x) = (x+K)\log\left(\frac{x}{K}+1\right) - x,$$

fonction homogène en (K,x) et équivalente à $x \log x$ quand x tend vers $+\infty$.

Pour $\lambda \geq 0$, nous noterons Φ_λ la fonction : $\Phi_\lambda(x) = e^{\lambda x} - 1 - \lambda x = \sum_{k \geq 2} \frac{\lambda^k x^k}{k!}$,
et ϕ_x la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\phi_x(\lambda) = \frac{\Phi_\lambda(x)}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $\phi_0(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2}$ sinon.
Les propriétés suivantes sont immédiates :

* Φ_λ et ϕ_x sont convexes et $x \mapsto \phi_x(\lambda)$ est croissante;
* pour tout $K, c > 0$, la transformée de Young de $K\phi_c$ est : $\mathcal{Y}_{K\phi_c}(x) = \Psi(\frac{K}{c^2}, \frac{x}{c})$.
* pour $x \geq 0$, $\Phi_\lambda(x) \geq \frac{\lambda^2 x^2}{2}$, soit $\phi_x(\lambda) \geq \frac{\lambda^2}{2}$;
* pour $c > 0$, si $x \leq c$, alors $\Phi_\lambda(x) \leq x^2 \phi_c(\lambda)$;
* pour tout $c > 0$, pour tout $|x| \leq c$, $\Phi_\lambda(xy) \leq \frac{x^2}{c^2}\Phi_\lambda(c|y|)$.

Nous allons maintenant définir les outils de base pour l'obtention des inégalités les plus générales.

2. LE W-CUMULANT

Soit W un processus prévisible localement borné.
Nous noterons $\mathcal{S}^W$ l'ensemble des semimartingales de triplet (B, C, ν) qui vérifient la condition :

$$\exists \lambda_0 > 0,\ \forall \lambda \in]0; \lambda_0],\quad \Phi_\lambda(Wx) \star \nu \in \mathcal{A}_{loc} \tag{1}$$

Lemme 2. *Toute semimartingale de $\mathcal{S}^1$ est spéciale.*

Preuve du lemme : $\Phi_\lambda(x)$ est équivalent à $\frac{\lambda^2 x^2}{2}$, au voisinage de 0, à $\lambda|x|$ au voisinage de $-\infty$, et à $e^{\lambda x}$ au voisinage de $+\infty$. Donc $\Phi_\lambda(x) \star \nu \in \mathcal{A}_{loc}$ implique $(x^2 \wedge |x|) \star \nu \in \mathcal{A}_{loc}$. □

Considérons une semimartingale X de $\mathcal{S}^W$ et λ vérifiant la condition *(1)*; $W \bullet X$ se décompose alors canoniquement sous la forme $W \bullet X = B^W + M^W$, avec B^W prévisible à variation finie et $M^W \in \mathcal{M}_{loc}$. Puisque $X \in \mathcal{S}^W$, la définition suivante est valide :

Définition 2. *Soient W un processus de $\mathcal{P}_{l.b.}$ et X une semimartingale de $\mathcal{S}^W$; écrivons $W \bullet X = B^W + M^W$, avec $B^W \in \mathcal{P} \cap \mathcal{V}$ et $M^W \in \mathcal{M}_{loc}$. Notons C la variation quadratique prévisible $\langle X^c \rangle$ et ν une "bonne" version du compensateur de la mesure μ de sauts de X.*

Pour λ vérifiant la condition (1), le W-cumulant de X est le processus prévisible $G^{W,\lambda}$ défini par :

$$G_t^{W,\lambda}(X) = \lambda B_t^W + \frac{\lambda^2}{2} W^2 \bullet C_t + \Phi_\lambda(Wx) \star \nu_t$$

Remarque 1. *Pour tout processus W de $\mathcal{P}_{l.b.}$, tout processus X de $\mathcal{S}^W$ vérifie : $W \bullet X \in \mathcal{S}^1$ (et donc $W \bullet X \in \mathcal{S}p$) et $G_t^{W,\lambda}(X) = G_t^{1,\lambda}(W \bullet X)$.*

En effet, posant $Y = W \bullet X$, le lemme 1 montre que $\Phi_\lambda(x) \star \nu^Y = \Phi_\lambda(Wx) \star \nu$ est localement intégrable par le choix de X, d'où $Y \in \mathcal{S}^1$. Comme la composante prévisible à variation finie de Y est B^W et comme $\langle Y^c \rangle = W^2 \bullet \langle X^c \rangle$, il vient $G^{1,\lambda}(Y) = G^{W,\lambda}(X)$.

Remarque 2. *Dans [LS], p.345, Liptser et Shiryayev ont introduit la notion de cumulant pour une semimartingale vérifiant une condition de Cramèr convenable sous la forme :*

Si X a pour forme canonique $B + X^c + x\mathbf{1}_{|x| \leq a} \star (\mu - \nu) + \mathbf{1}_{|x|>a} x \star \mu$, le cumulant de X est le processus : $\lambda B + \frac{\lambda^2}{2} C + \left(e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbf{1}_{\{|x| \leq a\}}\right) \star \nu$.

Le 1-cumulant est donc une adaptation de cette définition, où il est tenu compte des sauts non bornés.

Intéressons-nous dans un premier temps aux sauts du W-cumulant $G^{W,\lambda}$ d'un processus X de $\mathcal{S}^W$. Le saut de $G^{W,\lambda}$ en $t>0$ vaut alors : $\Delta G_t^{W,\lambda} = \lambda \Delta B_t^W + \int_{\mathbf{R}^*} \left(e^{\lambda W_t x} - 1 - \lambda W_t x\right) \nu(\{t\} \times dx)$. Comme $\Delta B_t^W = \int_{\mathbf{R}^*} W_t x \nu(\{t\} \times dx)$, il vient : $\Delta G_t^{W,\lambda} = \int_{\mathbf{R}^*} \left(e^{\lambda W_t x} - 1\right) \nu(\{t\} \times dx)$ qui est strictement supérieur à -1 de par le choix de la version de ν.

Puisque, pour $x > -1$, $(1+x)e^{-x}$ est élément de $]0;1]$, il vient :

$$0 < \prod_{s \leq t} \left(1 + \Delta G_s^{W,\lambda}\right) e^{-\Delta G_s^{W,\lambda}} \leq 1 \tag{2}$$

Examinons alors l'exponentielle de Doléans de $G^{W,\lambda}$, et donnons sa propriété essentielle pour la suite sous forme du :

Théorème 1. *Pour un processus W de $\mathcal{P}_{l.b.}$, pour une semimartingale X de $\mathcal{S}^W$, de W-cumulant $G^{W,\lambda}$, le processus*

$$Z^W(\lambda) = e^{\lambda W \bullet X} \left[\mathcal{E}\left(G^{W,\lambda}\right)\right]^{-1}$$

est une martingale locale positive.

Preuve. . Posons $Y = W \bullet X = B^W + M^W$, avec $B^W \in \mathcal{P} \cap \mathcal{V}$ et $M^W \in \mathcal{M}_{loc}$ et appliquons la formule de Itô à la semimartingale $e^{\lambda Y}$.

$$\begin{aligned} e^{\lambda Y_t} - 1 &= \lambda e^{\lambda Y_-} \bullet Y_t + \tfrac{\lambda^2}{2} e^{\lambda Y_-} \bullet \langle Y^c \rangle_t + \sum_{0 \leq s \leq t} \left(e^{\lambda Y_s} - e^{\lambda Y_{s-}} - \lambda e^{\lambda Y_{s-}} \Delta Y_s\right) \\ &= e^{\lambda Y_-} \bullet \left[\lambda M_t^W + \lambda B_t^W + \tfrac{\lambda^2}{2} W^2 \bullet C_t + \Phi_\lambda(Wx) \star \mu_t\right]. \end{aligned}$$

Comme X appartient à $\mathcal{S}^W$, le processus $\Phi_\lambda(Wx) \star \nu$ est localement intégrable et donc :

$$e^{\lambda Y_t} - 1 - \lambda e^{\lambda Y_-} \bullet G_t^{W,\lambda} = e^{\lambda Y_-} \bullet \left[\lambda M_t^W + \Phi_\lambda(Wx) \star (\mu_t - \nu_t)\right]$$

est une martingale locale que nous noterons L. En notant N la martingale locale nulle en 0 telle que $L = e^{\lambda Y_-} \bullet N$, le processus $\left(e^{\lambda Y_t}\right)$ s'écrit : $e^{\lambda Y} = 1 + e^{\lambda Y_-} \bullet (G^{W,\lambda} + N)$, de sorte que $e^{\lambda Y} = \mathcal{E}(G^{W,\lambda} + N)$. Or N est une martingale locale nulle en 0 et $G^{W,\lambda}$ est un processus prévisible de variation finie, nul en 0, à sauts strictement supérieurs à -1. La martingale locale $\tilde{N}$, nulle en 0, définie par $\tilde{N} = \frac{1}{1+\Delta G^{W,\lambda}} \bullet N$ est telle que $\mathcal{E}(G^{W,\lambda} + N) = \mathcal{E}\left(G^{W,\lambda}\right) \mathcal{E}\left(\tilde{N}\right)$ (*cf. [LM], pp.180-181*).

Il découle de cette étude que le processus $e^{\lambda Y} \mathcal{E}^{-1}\left(G^{W,\lambda}\right)$ égal à $\mathcal{E}\left(\tilde{N}\right)$ est une martingale locale positive. $Z^W(\lambda)$ est *a fortiori* une surmartingale. □

De plus, en notant $G_t^{W*}(\lambda)$ le processus croissant :

$$G_t^{W*}(\lambda) = \sup_{s \leq t} G_s^{W,\lambda} = \lambda \sup_{s \leq t} \left(B_s^W\right) + \tfrac{\lambda^2}{2} W^2 \bullet C_t + \Phi_\lambda(Wx) \star \nu_t,$$

il vient de façon triviale avec *(2)* :

$$0 < \mathcal{E}\left(G^{W,\lambda}\right)_t \leq \exp\left(G_t^{W,\lambda}\right) \leq \exp\left(G_t^{W*}(\lambda)\right) \tag{3}$$

Plusieurs calculs nécessiteront des majorations de $G_t^{W*}(\lambda)$; le calcul en sera simplifié lorsque $G^{W,\lambda}$ est croissant, auquel cas $G^{W*}(\lambda) = G^{W,\lambda}$.

Proposition 1. *Soient $X \in \mathcal{S}^W$ et $W \in \mathcal{P}_{l.b.}$. Si X est un processus croissant localement intégrable et W est non négatif, ou si X est une martingale locale, alors $G^{W,\lambda}$ est un processus croissant.*

Preuve.. Dans le premier cas, si $\widetilde{X}$ désigne le compensateur de X, alors $X - \widetilde{X}$ est une martingale locale discontinue et $G^{W,\lambda}$ s'écrit $\lambda W \bullet \widetilde{X} + \Phi_\lambda(Wx) \star \nu$, qui est croissant.

Dans l'autre, $G^{W,\lambda}$ s'écrit $\frac{\lambda^2}{2} W^2 \bullet C + \Phi_\lambda(Wx) \star \nu$, qui croît également. □

3. RÉSULTATS GÉNÉRAUX POUR LES SEMIMARTINGALES

Dans un premier temps, nous allons majorer les quantités $\mathbb{P}\,[W \bullet X_t \geq \delta]$ pour un réel positif δ. Considérons une fonction H déterministe et appliquons l'inégalité de Markov à la surmartingale positive $Z^W(\lambda)$ de valeur initiale 1 :

$$\mathbb{P}\,[W \bullet X_t \geq \delta] \leq \mathbb{P}\left[e^{\lambda W \bullet X_t} \geq e^{\lambda\delta}, \mathcal{E}(G^{W,\lambda})_t \leq e^{H(\lambda)}\right] + \mathbb{P}\left[\mathcal{E}(G^{W,\lambda})_t > e^{H(\lambda)}\right]$$
$$\leq \mathbb{P}\left[Z_t^W(\lambda) \geq \frac{e^{\lambda\delta}}{e^{H(\lambda)}}\right] + \mathbb{P}\left[\mathcal{E}(G^{W,\lambda})_t > e^{H(\lambda)}\right] \leq e^{H(\lambda)} e^{-\lambda\delta} + \mathbb{P}\left[\mathcal{E}(G^{W,\lambda})_t > e^{H(\lambda)}\right].$$

Nous avons donc obtenu :

Lemme 3. *Soit X une semimartingale de $\mathcal{S}^W$.*
Alors, pour tous $\delta, t > 0, \lambda \in]0, \lambda_0]$, pour toute fonction H, nous avons :

$$\mathbb{P}\,[W \bullet X_t \geq \delta] \leq \exp\left[-\left(\lambda\delta - H\left(\lambda\right)\right)\right] + \mathbb{P}\left[\mathcal{E}(G^{W,\lambda})_t > e^{H(\lambda)}\right]$$

Remarque 3. *Il est possible dans certains cas d'obtenir des majorations uniformes. Supposons par exemple qu'il existe une fonction $t \mapsto H_\lambda(t)$ croissante telle que, pour tout $s \leq t$ $\mathcal{E}(G^{W,\lambda})_s \leq e^{H_\lambda(s)}$. Alors $\mathcal{E}^{-1}(G^{W,\lambda})_s \geq e^{-H_\lambda(s)} \geq e^{-H_\lambda(t)}$ de sorte que $Z_s^W(\lambda) \geq e^{\lambda W \bullet X_s} e^{-H_\lambda(t)}$ pour tout $s \leq t$. Dans ce cas, par application de l'inégalité de surmartingale positive de Doob, il vient :*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq t} W \bullet X_s \geq \delta\right) \leq \mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} Z_s^W(\lambda) \geq e^{\lambda\delta - H_\lambda(t)}\right] \leq \exp\left[-\left(\lambda\delta - H_\lambda\left(t\right)\right)\right], \textit{ pour tout } \lambda \in]0, \lambda_0].$$

Plus généralement, en majorant $\mathcal{E}(G^{W,\lambda})$ par $e^{G^{W,\lambda}}$, soit en majorant $\prod_{s\leq t}\left(1 + \Delta G_s^{W,\lambda}\right) e^{-\Delta G_s^{W,\lambda}}$ par 1, nous obtiendrons des majorations moins précises dès que $G^{W,\lambda}$ présente des sauts, mais de manipulation plus aisée. Ces résultats permettront de plus de majorer systématiquement les quantités $\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} W \bullet X_s \geq \delta\right]$.

Dans toute la suite, H désignera une fonction de U_0 (convexe sur $\mathbb{R}^+$, nulle en 0, bornée inférieurement), et nous noterons :

- ◇ $\mathcal{Y}_H$ la transformée de Young de H sur l'intervalle $]0; \lambda_0]$;
- ◇ λ_x le réel de $[0; \lambda_0]$ réalisant le maximum de $\lambda x - H(\lambda)$.

Nous avons alors le résultat suivant, adapté de *[LS], pp.348-349* :

Théorème 2. *Soit X une semimartingale de $\mathcal{S}^W$. Alors, pour tous $\delta, t > 0$ nous avons :*

$$\boxed{\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} W \bullet X_s \geq \delta\right] \leq exp[-\mathcal{Y}_H(\delta)] + \mathbb{P}\left[G_t^{W*}(\lambda_\delta) > H(\lambda_\delta)\right]}$$

Preuve. . Fixons $t > 0$. En considérant *(3)* et la croissance de $G^{W*}(\lambda_\delta)$, nous avons :

$$\sup_{s\leq t} Z_s^W(\lambda_\delta) = \sup_{s\leq t}\left(e^{\lambda_\delta W\bullet X_s}\mathcal{E}^{-1}\left(G^{W,\lambda_\delta}\right)_s\right) \geq \exp\left(\lambda_\delta \sup_{s\leq t} W\bullet X_s - G_t^{W*}(\lambda_\delta)\right).$$

Nous pouvons donc majorer $\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq t} W\bullet X_s \geq \delta\right)$ de façon analogue à celle du lemme précédent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq t} W\bullet X_s \geq \delta\right) &\leq \mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} Z_s^W(\lambda_\delta) \geq e^{\lambda_\delta\delta - G_t^{W*}(\lambda_\delta)}, G_t^{W*}(\lambda_\delta) \leq H(\lambda_\delta)\right]\\
&\quad + \mathbb{P}\left[G_t^{W*}(\lambda_\delta) > H(\lambda_\delta)\right]\\
&\leq \mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} Z_s^W(\lambda_\delta) \geq \exp\left(\lambda_\delta\delta - H(\lambda_\delta)\right)\right] + \mathbb{P}\left[G_t^{W*}(\lambda_\delta) > H(\lambda_\delta)\right]\\
&\leq \mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} Z_s^W(\lambda_\delta) \geq \exp \mathcal{Y}_H(\delta)\right] + \mathbb{P}\left[G_t^{W*}(\lambda_\delta) > H(\lambda_\delta)\right]
\end{aligned}$$

par la définition de λ_x.

Appliquons enfin l'inégalité de Doob à la surmartingale positive $Z^W(\lambda_\delta)$:

$\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} W\bullet X_s \geq \delta\right] \leq e^{-\mathcal{Y}_H(\delta)} + \mathbb{P}\left[G_t^{W*}(\lambda_\delta) > H(\lambda_\delta)\right]$. □

De ce résultat se déduit aisément le résultat suivant concernant $\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq t}|W\bullet X_s| \geq \delta\right)$ et où H est encore une fonction de U_0 :

Corollaire 1. *Soit X une semimartingale de $\mathcal{S}^W \cap \mathcal{S}^{-W}$. Alors, pour tout $\delta, t > 0$:*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t}|W\bullet X_s| \geq \delta\right] \leq 2\exp\left[-\mathcal{Y}_H(\delta)\right] + \mathbb{P}\left[\max\left\{G_t^{W*}(\lambda_\delta), G_t^{-W*}(\lambda_\delta)\right\} > H(\lambda_\delta)\right]$$

Preuve. . En effet, $\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t}|W\bullet X_s| \geq \delta\right] = \mathbb{P}\left[\max\left\{\sup_{s\leq t} W\bullet X_s, \sup_{s\leq t}(-W\bullet X_s)\right\} \geq \delta\right]$

$\leq \mathbb{P}\left[\max\left\{\sup_{s\leq t} W\bullet X_s, \sup_{s\leq t}(-W\bullet X_s)\right\} \geq \delta, \max\left\{G_t^{W*}(\lambda_\delta), G_t^{-W*}(\lambda_\delta)\right\} \leq H(\lambda_\delta)\right]$

$+\mathbb{P}\left[\max\left\{G_t^{W*}(\lambda_\delta), G_t^{-W*}(\lambda_\delta)\right\} > H(\lambda_\delta)\right]$, d'où la majoration annoncée en considérant séparément $W\bullet X$ et $-W\bullet X$. □

Soit A un processus prévisible croissant de $\mathcal{V}^+$ presque sûrement non nul. Intéressons-nous à la semimartingale $Y = \frac{1}{A}X$, où X appartient à $\mathcal{S}^{\frac{1}{A}} \cap \mathcal{S}^{-\frac{1}{A}}$. Si Y^1 désigne la semimartingale $\frac{1}{A}\bullet X$, nous obtenons en intégrant par parties : pour tout $u > 0$, $X_u = A\bullet Y_u^1 = Y_u^1 A_u - Y_-^1 \bullet A_u$ et donc : $X_u = \int_0^u \left(Y_u^1 - Y_{s-}^1\right) dA_s$.

Considérant les valeurs absolues, il vient : $|X_u| \leq \int_0^u \left|Y_u^1 - Y_{s-}^1\right| dA_s \leq 2A_u \sup_{s\leq u}\left|Y_s^1\right|$, d'où, pour tout $u > 0$: $\frac{|X_u|}{A_u} \leq 2\sup_{s\leq u}|Y_s^1|$. Pour tout $t > 0$, nous avons donc : $\sup_{s\leq t}\frac{|X_s|}{A_s} \leq 2\sup_{s\leq t}\left|\frac{1}{A}\bullet X_s\right|$. De ce résultat et du corollaire précédent, nous déduisons :

Corollaire 2. *Soient A un processus prévisible croissant de $\mathcal{V}^+$ presque sûrement non nul et X une semimartingale de $\mathcal{S}^{\frac{1}{A}} \cap \mathcal{S}^{-\frac{1}{A}}$. Alors, pour tout $\delta, t > 0$:*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t}\left|\frac{1}{A_s}X_s\right| \geq \delta\right] \leq 2\exp\left[-\mathcal{Y}_H\left(\frac{\delta}{2}\right)\right] + \mathbb{P}\left[\max\left\{G_t^{\frac{1}{A}*}\left(\lambda_{\frac{\delta}{2}}\right), G_t^{-\frac{1}{A}*}\left(\lambda_{\frac{\delta}{2}}\right)\right\} > H\left(\lambda_{\frac{\delta}{2}}\right)\right]$$

4. PROCESSUS CROISSANTS LOCALEMENT INTÉGRABLES

Nous inspirant de *[LS]* pour des processus à sauts bornés, nous avons le résultat suivant :

Théorème 3. *Soit A un processus croissant localement intégrable, de compensateur $\widetilde{A}$.*
Alors, pour tous $a, b, \delta, t > 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}\left[A_t \geq \delta\right] \leq \exp\left[-\left(\frac{\delta}{a}\log\frac{\delta}{b} + \frac{b-\delta}{b}\right)\right] + \mathbb{P}\left[\widetilde{A}_t > b\right] + \mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t}\Delta A_s > a\right]}$$

Preuve. . Un tel processus A se décompose canoniquement sous la forme : $A = \widetilde{A} + x \star (\mu - \nu)$. Pour $a > 0$, notons A^a le processus croissant à sauts bornés par a défini par $A^a = A - \left(x\mathbf{1}_{\{x>a\}}\right) \star \mu$.
Soit aussi ψ_x la fonction définie par $\psi_x(\lambda) = \dfrac{e^{\lambda x} - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $\psi_0(\lambda) = \lambda$.

Il est clair que A^a appartient à $\mathcal{S}^1$ et que les inégalités suivantes sont vérifiées : $\psi_c(\lambda) \geq \lambda$ pour tout $\lambda > 0$ et $e^{\lambda x} - 1 \leq \psi_a(\lambda)x$, pour $0 \leq x \leq a$.

Alors, le 1-cumulant de A^a s'écrit :
$G^{1,\lambda}(A^a) = \lambda\widetilde{A^a} + \Phi_\lambda\left(x\mathbf{1}_{\{x\leq a\}}\right) \star \nu = \lambda\widetilde{A^a} + \left(e^{\lambda x \mathbf{1}_{\{x\leq a\}}} - 1\right) \star \nu - \lambda\left(x\mathbf{1}_{\{x\leq a\}}\right) \star \nu$ puisque A est localement intégrable et il vient : $G^{1,\lambda}(A^a) \leq \psi_a(\lambda)\widetilde{A^a} + (\lambda - \psi_a(\lambda))\left(\widetilde{A^a} - x\mathbf{1}_{\{x\leq a\}} \star \nu\right)$.

Puisque $\widetilde{A^a} - x\mathbf{1}_{\{x\leq a\}} \star \nu = \widetilde{A} - x \star \nu = A - x \star \mu$ et que A croît, nous poursuivons en :

$$G^{1,\lambda}(A^a) \leq \psi_a(\lambda)\widetilde{A^a} + (\lambda - \psi_c(\lambda))(A - x \star \mu) \leq \psi_a(\lambda)\widetilde{A^a}.$$

En notant $Z^a(\lambda)$ la surmartingale positive $\exp(\lambda A^a)\mathcal{E}^{-1}\left(G^{1,\lambda}(A^a)\right)$ et $G^{a*}(\lambda) = G^{1,\lambda}(A^a)$ (le cumulant d'un processus croissant étant lui-même croissant), il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_t \geq \delta) &\leq \mathbb{P}\left(A_t^a \geq \delta, \sup\nolimits_{s\leq t}\Delta A_s \leq a\right) + \mathbb{P}\left[\sup\nolimits_{s\leq t}\Delta A_s > a\right] \\
&\leq \mathbb{P}\left[\sup\nolimits_{s\leq t} Z_s^a(\lambda) \geq \exp(\lambda\delta - G_t^{a*}(\lambda))\right] + \mathbb{P}\left[\sup\nolimits_{s\leq t}\Delta A_s > a\right] \\
&\leq \mathbb{P}\left[\sup\nolimits_{s\leq t} Z_s^a(\lambda) \geq e^{\lambda\delta - G_t^{a*}(\lambda)}, \widetilde{A_t^a} \leq b\right] + \mathbb{P}\left[\widetilde{A_t^a} > b\right] + \mathbb{P}\left[\sup\nolimits_{s\leq t}\Delta A_s > a\right] \\
&\leq \mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} Z_s^a(\lambda) \geq \exp(\lambda\delta - b\psi_a(\lambda))\right] + \mathbb{P}\left[\widetilde{A_t^a} > b\right] + \mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t}\Delta A_s > a\right] \\
&\leq \exp(-\mathcal{Y}_{b\psi_a}(\delta)) + \mathbb{P}\left[\widetilde{A_t^a} > b\right] + \mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t}\Delta A_s > a\right]
\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé puisque $\widetilde{A}$ domine $\widetilde{A^a}$. □

Affranchissons-nous de la condition sur les grands sauts, que nous remplaçons par une condition de ν-intégrabilité.

Donnons-nous un processus croissant localement intégrable A. Dès qu'il existe une fonction convexe H de U_0 et un processus ρ de $\mathcal{P}_{l.b.}$ vérifiant : $G^{1,\lambda} = \lambda\widetilde{A} + \Phi_\lambda(x) \star \nu \leq H(\lambda)\rho \bullet \widetilde{A}$, alors A appartient à $\mathcal{S}^1$ et nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[A_t \geq \delta\right] &\leq \mathbb{P}\left[A_t \geq \delta, G_t^{1,\lambda} \leq H(\lambda)b\right] + \mathbb{P}\left[\rho \bullet \widetilde{A}_t > b\right] \\
&\leq \mathbb{P}\left[\sup\nolimits_{s\leq t} Z_s^1(\lambda) \geq \exp(\lambda\delta - bH(\lambda))\right] + \mathbb{P}\left[\rho \bullet \widetilde{A}_t > b\right] \leq \exp(-\mathcal{Y}_{bH}(\delta)) + \mathbb{P}\left[\rho \bullet \widetilde{A}_t > b\right].
\end{aligned}$$

En particulier, si nous avons $\Phi_\lambda(x)\star\nu_t \leq \rho_\lambda \bullet \widetilde{A}_t$ pour tout $t > 0$ et pour ρ^λ ($\lambda \in]0, \lambda_0]$) processus de $\mathcal{P}_{l.b.}$, si de plus $\rho \in \mathcal{P}_{l.b.}$ et $H \in U_0$ vérifient : $\left(\lambda + \rho^\lambda\right) \bullet \widetilde{A} \leq H(\lambda)\rho \bullet \widetilde{A}$, alors puisque $G^{1,\lambda} \leq (\lambda + \rho_\lambda) \bullet \widetilde{A}$, nous avons :

$$\mathbb{P}[A_t \geq \delta] \leq \mathbb{P}\left[A_t \geq \delta, \left(\lambda + \rho^\lambda\right) \bullet \widetilde{A}_t \leq H(\lambda) b\right] + \mathbb{P}\left[\rho \bullet \widetilde{A} > b\right] \leq \exp(-\mathcal{Y}_{bH}(\delta)) + \mathbb{P}\left[\rho \bullet \widetilde{A}_t > b\right].$$

Nous exprimerons ce résultat sous la forme suivante :

Théorème 4. *Soit A un processus croissant localement intégrable telle qu'il existe une fonction convexe H de U_0 et, pour tout λ suffisamment petit, des processus ρ^λ et ρ dans $\mathcal{P}_{l.b.}$ vérifiant : $\Phi_\lambda(x)\star\nu \leq \rho^\lambda \bullet \widetilde{A}$ et $\left(\lambda + \rho^\lambda\right) \bullet \widetilde{A} \leq H(\lambda)\rho \bullet \widetilde{A}$, alors pour tous $b, \delta, t > 0$:*

$$\boxed{\mathbb{P}\,[A_t \geq \delta] \leq exp(-\mathcal{Y}_{bH}(\delta)) + \mathbb{P}\,\left[\rho \bullet \widetilde{A}_t > b\right]}$$

Supposons maintenant que A vérifie la condition plus précise : pour tout $m \geq 2$, $\frac{x^m}{m!} \star \nu \leq \rho \bullet \widetilde{A}$, où le processus ρ est prévisible localement borné et notons $H(\lambda) = \frac{\lambda^2}{1-\lambda}$, fonction convexe sur $[0, 1[$; alors, pour tout $\beta > 0$, pour tout $\lambda \in \left[\frac{1}{1+\beta}, 1\right[$, l'inégalité $\lambda \leq \beta H(\lambda)$ est valide.

Considérons donc un tel $\beta > 0$. Pour $\lambda \in]0, 1[$, $\Phi_\lambda(x)\star\nu = \sum_{m\geq 2} \frac{(\lambda x)^m}{m!} \star \nu \leq H(\lambda)\rho \bullet \widetilde{A}$ de sorte que A appartient à $\mathcal{S}^1$ et que son 1-cumulant vérifie : $G_t^{1,\lambda} \leq (\lambda + H(\lambda)\rho) \bullet \widetilde{A}_t \leq H(\lambda)(\beta + \rho) \bullet \widetilde{A}_t$, et donc : $G_t^{1,\lambda} \leq bH(\lambda)$ sur l'ensemble $\left\{(\beta + \rho) \bullet \widetilde{A}_t \leq b\right\}$.

Un raisonnement analogue au précédent conduit à :

$$\mathbb{P}[A_t \geq \delta] \leq \exp\left(-\sup_{\frac{1}{1+\beta}\leq\lambda<1} (\lambda\delta - bH(\lambda))\right) + \mathbb{P}\left[(\beta + \rho) \bullet \widetilde{A}_t > b\right].$$

Or $\sup_{(1+\beta)^{-1}\leq\lambda<1} (\lambda\delta - bH(\lambda))$ est majoré par $\mathcal{Y}_{bH}(\delta) = \delta + 2b - 2\sqrt{b(b+\delta)}$ et la borne supérieure est atteinte sur $[0, 1[$ pour $\lambda_\delta = 1 - \sqrt{\frac{b}{b+\delta}}$. Comme cette valeur λ_δ appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{1+\beta}, 1\right[$ dès que δ dépasse $b\left(\frac{2}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\right)$, il vient pour un tel δ :

$\mathbb{P}[A_t \geq \delta] \leq \exp\left[-\left(\delta + 2b - 2\sqrt{b(b+\delta)}\right)\right] + \mathbb{P}\left[(\beta + \rho) \bullet \widetilde{A}_t > b\right]$. Nous obtenons donc le corollaire suivant :

Corollaire 3. *Soit A un processus croissant localement intégrable vérifiant pour tout t et pour tout $m \geq 2$: $\frac{x^m}{m!} \star \nu \leq \rho \bullet \widetilde{A}$, avec $\rho \in \mathcal{P}_{l.b.}$.*

Alors, pour tous $\beta, b, t > 0$, $\delta > b\frac{2\beta+1}{\beta^2}$:

$$\mathbb{P}\,[A_t \geq \delta] \leq \exp\left[-\left(\delta + 2b - 2\sqrt{b(b+\delta)}\right)\right] + \mathbb{P}\,\left[(\rho + \beta) \bullet \widetilde{A}_t \geq b\right]$$

5. MARTINGALES LOCALES DE CARRÉ INTÉGRABLE

Pour pouvoir traiter complètement le cas des martingales locales à sauts non bornés, nous aurons besoin du lemme suivant s'appliquant aux semimartingales localement de carré intégrable à sauts majorés.

Lemme 4. *Soit X une semimartingale localement de carré intégrable de $\mathcal{S}^1$ dont les sauts sont majorés par le réel c. Notons $X = M + B$ la décomposition canonique de X avec $M \in \mathcal{M}_{loc}$ et $B \in \mathcal{P} \cap \mathcal{V}$.*

Alors, pour tous $\alpha, \delta, b, t > 0$:

$$\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} X_s \geq \delta\right] \leq \exp\left[-\Psi\left(b, \tfrac{\delta}{c}\right)\right] + \mathbb{P}\left[\langle M\rangle_t + \sum_{s\leq t} \Delta B_s^2 > \alpha^2\right]$$
$$+\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} B_s > \left(\frac{\delta}{bc^2 \log(\frac{\delta}{bc}+1)} - \frac{1}{c}\right)(bc^2 - \alpha^2)\right]$$

Preuve du lemme : Puisque $M = X^c + x \star (\mu - \nu)$, nous avons :
$\langle M\rangle = C + x^2 \star \nu - \sum_{s\leq t}\left(\int x\nu(\{s\}\times x)\right)^2 = C + x^2 \star \nu - \sum_{s\leq t} \Delta B_s^2$.

Alors $G^{1,\lambda} = \lambda B + \frac{\lambda^2}{2} C + \Phi_\lambda(x) \star \nu$. Puisque l'intégration se fait sur $\{x \leq c\}$, nous avons la majoration : $G^{1,\lambda} \leq \lambda B + \phi_c(\lambda) C + \phi_c(\lambda) x^2 \star \nu \leq \lambda B + \phi_c(\lambda)\left(\langle M\rangle + \sum_{s\leq t}\Delta B_s^2\right)$. Le processus croissant $G^{1*}(\lambda)$ vérifie donc la majoration : $G_t^{1*}(\lambda) \leq \lambda \sup_{s\leq t} B_s + \phi_c(\lambda)\left(\langle M\rangle + \sum_{s\leq t}\Delta B_s^2\right)$.

L'application du théorème général où H vaut $bc^2\phi_c$ pour $b > 0$ conduit alors à :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} X_s \geq \delta\right] \leq \exp\left[-\Psi\left(b, \tfrac{\delta}{c}\right)\right] + \mathbb{P}\left[\lambda_\delta \sup_{s\leq t} B_s + \phi_c(\lambda_\delta)\left(\langle M\rangle + \textstyle\sum_{s\leq t}\Delta B_s^2\right) > bc^2\phi_c(\lambda_\delta)\right].$$

Le dernier terme est majoré par :

$$\mathbb{P}\left[\lambda_\delta \sup_{s\leq t} B_s + \phi_c(\lambda_\delta)\left(\langle M\rangle + \textstyle\sum_{s\leq t}\Delta B_s^2\right) > bc^2\phi_c(\lambda_\delta), \left(\langle M\rangle + \textstyle\sum_{s\leq t}\Delta B_s^2\right) \leq \alpha^2\right]$$
$$+\mathbb{P}\left[\left(\langle M\rangle + \textstyle\sum_{s\leq t}\Delta B_s^2\right) > \alpha^2\right]$$
$$\leq \mathbb{P}\left[\left(\langle M\rangle + \textstyle\sum_{s\leq t}\Delta B_s^2\right) > \alpha^2\right] + \mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} B_s > \left(\frac{\delta}{bc^2\log(\frac{\delta}{bc}+1)} - \frac{1}{c}\right)(bc^2 - \alpha^2)\right],$$

d'où la conclusion. □

Remarquons que la quantité $\frac{\delta}{bc^2\log(\frac{\delta}{bc}+1)} - \frac{1}{c}$, égale à $\frac{\phi_c(\lambda_\delta)}{\lambda_\delta}$, est positive.

5.1. Martingales locales à sauts majorés. Considérons le cas où X est une martingale locale de carré localement intégrable, nulle en 0, à sauts majorés par un réel c. Dans ce cas, B est nul et le lemme précédent s'applique.

Proposition 2. *Soit $X \in \mathcal{M}_{loc}^2$ telle qu'il existe $c > 0$, vérifiant $\Delta X \leq c$.*

Nous avons alors, pour tout $\alpha, b, \delta, t > 0$ tels que $\alpha^2 \leq bc^2$:

$$\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} X_s \geq \delta\right] \leq \exp\left[-\Psi\left(b, \frac{\delta}{c}\right)\right] + \mathbb{P}\left[\langle X\rangle_t > \alpha^2\right]$$

En considérant ce résultat pour X et $-X$, il vient le

Corollaire 4. *Soit $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$ telle qu'il existe $c > 0$, vérifiant $\Delta X \leq c$. Avec les notations ci-dessus, nous avons :*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t}|X_t| \geq \delta\right] \leq 2\exp\left[-\Psi\left(b, \frac{\delta}{c}\right)\right] + \mathbb{P}\left[\langle X\rangle_t > \alpha^2\right]$$

Le résultat suivant donné dans *[SW], p.899* comme extension d'une inégalité de Freedman dans le cas discret, est une conséquence immédiate de la proposition précédente pour $b = \frac{\alpha^2}{c^2}$:

Exemple 1. *Soit $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$ à sauts bornés par c : $|\Delta X| \leq c$. Pour tous $\delta, \alpha, t > 0$:*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} X_s \geq \delta\right] \leq \exp\left[-\Psi\left(\frac{\alpha^2}{c^2}, \frac{\delta}{c}\right)\right] + \mathbb{P}\left[\langle X\rangle_t > \alpha^2\right]$$

5.2. Cas général. Lorsque les sauts ne sont pas majorés, l'utilisation du W-cumulant permet d'obtenir des résultats intéressants en contrôlant soit l'amplitude des sauts, soit les moments.

Théorème 5. *Soit $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$.*

Alors, pour tous $\alpha, \delta, a, b, t > 0$ tels que $\alpha^2 \leq a^2 b$:

$$\boxed{\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} X_s \geq \delta\right] \leq \exp\left[-\Psi\left(b, \tfrac{\delta}{a}\right)\right] + \mathbb{P}\left[\langle X\rangle_t > \alpha^2\right] + \mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t}\Delta X_s > a\right]}$$

Preuve. . Notons $X^{(a)}$ la semimartingale spéciale à sauts majorés par a :

$$X^{(a)} = X - x\mathbf{1}_{\{x>a\}} \star \mu = B + X^c + x\mathbf{1}_{\{x\leq a\}} \star (\mu - \nu), \text{ où } B = -x\mathbf{1}_{\{x>a\}} \star \nu.$$

De façon claire, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} X_s \geq \delta\right] &\leq \mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} X^{(a)}_s \geq \delta\right] + \mathbb{P}\left[x\mathbf{1}_{\{x>a\}} \star \mu_t > 0\right] \\ &\leq \mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} X^{(a)}_s \geq \delta\right] + \mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t}\Delta X_s > a\right].\end{aligned}$$

La partie martingale $M^{(a)}$ de $X^{(a)}$ vaut $X^c + x\mathbf{1}_{\{x\leq a\}} \star (\mu - \nu)$ et donc :
$\langle X\rangle = \left\langle M^{(a)}\right\rangle + x^2\mathbf{1}_{\{x>a\}} \star \nu \geq \left\langle M^{(a)}\right\rangle$.

En remarquant que le processus B est négatif, le résultat découle alors de l'application de la proposition 2 à $X^{(a)}$. □

En appliquant ce résultat à X et $-X$, il vient :

Corollaire 5. *Soit $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$. Alors, pour tous $\alpha, \delta, a, b, t > 0$ tels que $\alpha^2 \leq a^2 b$:*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t}|X_s| \geq \delta\right] \leq 2\exp\left[-\Psi\left(b, \frac{\delta}{a}\right)\right] + 2\mathbb{P}\left[\langle X\rangle_t > \alpha^2\right] + \mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t}|\Delta X_s| > a\right]$$

Exemple 2. *Inégalité de Kubilius-Mémin*

Dans *[KM]*, Kubilius et Mémin obtiennent une telle inégalité généralisant un résultat en temps discret de Haeusler *[Ha]*. Ils considérent la martingale $X^{(a)}$ à sauts tronqués par a : $X^c + x\mathbf{1}_{\{x\leq a\}} \star (\mu - \nu)$ et utilisent la surmartingale $\exp\left(\lambda X^{(a)} - \frac{\lambda^2}{2}C - \Phi(a)\mathbf{1}_{\{x\leq a\}}\frac{x^2}{a^2}\star\nu\right)$. Le théorème précédent pour $b = \frac{\alpha^2}{a^2}$ permet de retouver immédiatement leur résultat avec une majoration légèrement plus précise :

Corollaire 6. *Soit $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$. Alors, pour tous $\alpha, \delta, a, t > 0$*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t}|X_s| \geq \delta\right] \leq 2\exp\left[-\Psi\left(\tfrac{\alpha^2}{a^2}, \tfrac{\delta}{a}\right)\right] + 2\mathbb{P}\left[\langle X\rangle_t > \alpha^2\right] + \mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t}|\Delta X_s| > a\right].$$

Comme précédemment pour les processus croissants, il peut être intéressant de ne pas être tenu de déterminer la probabilité des grands sauts $\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t}\Delta X_s > a\right]$, moyennant des conditions sur la mesure ν compensatrice de la mesure de sauts μ de X. Dans cette optique, nous avons le résultat suivant :

Théorème 6. *Soit $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$ telle qu'il existe un réel positif K et un processus prévisible ρ vérifiant : pour tout $m \geq 2$, $x^m \star \nu \leq \frac{m!}{2}K^{m-2}\left(\rho^2x^2\right)\star\nu$.*

Si C désigne $\langle X^c\rangle$, alors, pour tous $\delta, b, t > 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t} X_s \geq \delta\right] \leq \exp\left[-\frac{\delta}{K} - \frac{2b}{K^2}\left(1 - \sqrt{1+\frac{K\delta}{b}}\right)\right] + \mathbb{P}\left[\max\left\{\left(\rho^2x^2\right)\star\nu_t, C_t\right\} > b\right]}$$

Preuve.. Des hypothèses de l'énoncé, il découle que pour tout $\lambda \in \left[0, \frac{1}{K}\right[$:

$$\Phi_\lambda(x)\star\nu = \sum_{m\geq 2}\frac{\lambda^m x^m \star\nu}{m!} \leq \frac{\lambda^2}{2}\sum_{m\geq 2}(\lambda K)^{m-2}\left(\rho^2x^2\right)\star\nu = \frac{\lambda^2}{2(1-\lambda K)}\left(\rho^2x^2\right)\star\nu.$$

Comme $\rho\bullet X$ est localement de carré intégrable, X appartient à $\mathcal{S}^1$. Nous pouvons alors majorer ainsi $G^{1,\lambda}$, pour $\max\left\{\left(\rho^2x^2\right)\star\nu_t, C_t\right\} \leq b$:

$$G^{1,\lambda} = \frac{\lambda^2}{2}C + \Phi_\lambda(x)\star\nu \leq \frac{\lambda^2}{2}C + \frac{\lambda^2}{2(1-\lambda K)}\left(\rho^2x^2\right)\star\nu \leq \frac{\lambda^2 b}{2}\left(1+\frac{1}{1-\lambda K}\right) \leq \frac{\lambda^2 b}{1-\lambda K}.$$

Considérant alors la fonction convexe $H(\lambda) : \lambda \mapsto \frac{\lambda^2 b}{1-\lambda K}$, nous déduisons du théorème général que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t}X_s \geq \delta)\right] &\leq \exp\left[-\mathcal{Y}_H(\delta)\right] + \mathbb{P}\left[G_t^{1*}(\lambda_\delta) > H(\lambda_\delta), \max\left\{\left(\rho^2x^2\right)\star\nu_t, C_t\right\} \leq b\right] \\ &\quad + \mathbb{P}\left[\max\left\{\left(\rho^2x^2\right)\star\nu_t, C_t\right\} > b\right] \\ &\leq \exp\left[-\frac{\delta}{K} - \frac{2b}{K^2}\left(1-\sqrt{1+\frac{K\delta}{b}}\right)\right] + \mathbb{P}\left[\max\left\{\left(\rho^2x^2\right)\star\nu_t, C_t\right\} > b\right].\end{aligned}$$

□

Considérons enfin le cas particulier des martingales locales de la forme $A \bullet M$, où M est une martingale locale de carré intégrable et A un processus prévisible. Les sauts de M seront pris bornés, au contraire de A qui ne sera restreint que par une hypothèse d'intégrabilité convenable.

Théorème 7. *Soit $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$ telle que $|\Delta M| \leq c$.*

Considérons le processus : $X = W \bullet M$, où W est un processus prévisible vérifiant :

il existe $\lambda_0 > 0$, il existe une fonction H convexe nulle en 0, il existe un processus Y localement intégrable tels que, pour tout $\lambda \in]0; \lambda_0]$, $\Phi_\lambda (c\,|W|) \bullet \langle M \rangle \leq H(\lambda) Y$.

Alors le processus X vérifie pour tout $\delta, b > 0$:

$$\boxed{\mathbb{P}\left[\sup_{s \leq t} X_s \geq \delta\right] \leq exp\left[-\mathcal{Y}_{\frac{b}{c^2}H}(\delta)\right] + \mathbb{P}\,[Y > b]}.$$

Preuve. . Notons $M = M^c + x \star (\mu - \nu)$ et $C = \langle M^c \rangle$.

Sous les hypothèses de majoration ci-dessus, X appartient à $\mathcal{S}^W$. En effet :

$$\Phi_\lambda (Wx) \star \nu \leq \Phi_\lambda (|Wx|) \star \nu \leq \left[\tfrac{x^2}{c^2} \Phi_\lambda (c\,|W|)\right] \star \nu \leq \tfrac{1}{c^2} \Phi_\lambda (c\,|W|) \bullet \langle M \rangle$$

qui est localement intégrable.

Le W-cumulant $G^{W,\lambda}$ de M est donc défini et vaut : $G^{W,\lambda} = \frac{\lambda^2 W^2}{2} \bullet C + \Phi_\lambda(Wx) \star \nu$. Nous avons alors les majorations :

$G^{W,\lambda} \leq \frac{\lambda^2 W^2}{2} \bullet C + \left(\phi_{|Wx|}(\lambda)\, W^2\right) \bullet (x^2 \star \nu) \leq \left(\phi_{|W|c}(\lambda)\, W^2\right) \bullet \langle M \rangle \leq \frac{1}{c^2} H(\lambda) Y.$

Soit $b > 0$ fixé. De façon claire :

$$\mathbb{P}\left[G^{W*}(\lambda) > \tfrac{b}{c^2} H(\lambda)\right] \leq \mathbb{P}\left[G^{W*}(\lambda) > \tfrac{b}{c^2} H(\lambda); Y \leq b\right] + \mathbb{P}\,[Y > b] \leq \mathbb{P}\,[Y > b]$$

par le choix de H. Le résultat est immédiat par application du théorème général. □

Exemple 3. *Inégalité de Van de Geer*

Dans sa pré-publication *[VG]*, Van de Geer généralise un résultat sur les suites de variables aléatoires i.i.d. de Bernstein *([SW] p.855)*. Elle s'intéresse au cas particulier de notre étude où W vérifie la condition $\displaystyle\int_0^t |W_s|^m \, d\langle M \rangle_s \leq \frac{m!}{2} \int_0^t \rho_s^2 d\langle M \rangle_s$, $m \geq 2$, ρ prévisible. Sa démonstration utilise la surmartingale $\exp(\lambda X - \Phi_\lambda (|W|) \bullet \langle M \rangle_t)$, et aboutit à une majoration en $\exp\left(-\frac{\delta^2}{2(\delta c + b^2)}\right)$. L'application immédiate du théorème ci-dessus fournit une majoration plus précise en $e^{-\frac{\delta}{c}}$ pour δ grand :

Corollaire 7. *Soit $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$ telle que $|\Delta M| \leq c$. Soient W et ρ des processus prévisibles, vérifiant : $\displaystyle\int_0^t |W_s|^m \, d\langle M \rangle_s \leq \frac{m!}{2} \int_0^t \rho_s^2 d\langle M \rangle_s$, $m \geq 2$.*

Alors le processus $X = W \bullet M$ vérifie pour tout $\delta, b, t > 0$:

$$\mathbb{P}\left[\sup_{s \leq t} X_s \geq \delta\right] \leq \exp\left(-\tfrac{\delta}{c} - \tfrac{b}{c^2} + \tfrac{1}{c^2}\sqrt{b\,(2c\delta + b)}\right) + \mathbb{P}\left[\int_0^t \rho_s^2 d\langle M \rangle_s > b\right].$$

Preuve. . Les conditions du précédent théorème sont en effet vérifiées :

pour $\lambda \in \left]0; \frac{1}{c}\right[$, nous avons : $\Phi_\lambda (c\,|W|) \bullet \langle M \rangle = \sum_{m \geq 2} (\lambda^m c^m) \frac{|W|^m}{m!} \bullet \langle M \rangle \leq \frac{\lambda^2 c^2}{2} \frac{1}{1 - \lambda c} \langle \rho \bullet M \rangle$, avec $H(\lambda) = \frac{\lambda^2 c^2}{2} \frac{1}{1 - \lambda c}$ et $Y = \langle \rho \bullet M \rangle \in \mathcal{A}_{loc}$. Comme la transformée de Young de $\frac{b}{c^2} H = \frac{b}{2} \frac{\lambda^2}{1 - \lambda c}$ est $\frac{x}{c} + \frac{b}{c^2} - \frac{1}{c^2}\sqrt{b\,(2cx + b)}$, la majoration est immédiate. □

6. SEMIMARTINGALES À ACCROISSEMENTS INDÉPENDANTS

Soit w une fonction déterministe. Pour un processus X à accroissements indépendants, le triplet (B, C, ν) est déterministe. Supposons en outre que X soit tel qu'il existe $\lambda_0 > 0$ vérifiant la condition :

$$\forall \lambda \in]0, \lambda_0] \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}^*} \left(e^{\lambda w(s)x} - 1 - \lambda w(s)x\right) d\nu < \infty \tag{4}$$

(l'intégrale étant localement intégrable, puisque ν est déterministe). Alors $G^{w,\lambda}$ est défini et déterministe.

Les théorèmes précédents ont alors une traduction simplifiée.

L'application directe du lemme 3 à $Z^W(\lambda) = e^{\lambda w \bullet X} \mathcal{E}^{-1}\left(G^{w,\lambda}\right)$ donne, pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0]$: $\mathbb{P}[w \bullet X_t \geq \delta] \leq e^{-\lambda\delta} \mathcal{E}(G^{w,\lambda})_t$, que nous écrirons :

Proposition 3. *Soient w une fonction déterministe et X une semimartingale à accroissements indépendants vérifiant (4). Alors, pour tous $\delta, t > 0$:*

$$\boxed{\mathbb{P}[w \bullet X_t \geq \delta] \leq \inf_{\lambda \in]0,\lambda_0]} \left(e^{-\lambda\delta} \mathcal{E}(G^{w,\lambda})_t\right)}$$

L'énoncé suivant découle immédiatement du théorème 2 :

Proposition 4. *Soient w une fonction déterministe, X une semimartingale à accroissements indépendants vérifiant (4). S'il H est une fonction convexe de U_0 majorant $G_t^{w*}(\lambda)$, alors pour tous $\delta, t > 0$:*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq t} w \bullet X_s \geq \delta\right) \leq \exp\left(-\mathcal{Y}_H(\delta)\right).$$

De façon analogue au cas général, si q est une fonction prévisible presque sûrement non nulle, nous pouvons affimer que si H est une fonction convexe de U_0 majorant $G_t^{\frac{1}{q}*}$ et $G_t^{-\frac{1}{q}*}$, nous avons :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq t} \left|\frac{1}{q(s)} X_s\right| \geq \delta\right) \leq 2 \exp\left(-\mathcal{Y}_H\left(\frac{\delta}{2}\right)\right).$$

Dans le cas où A est un processus croissant localement intégrable, alors $\widetilde{A} = B + x \mathbf{1}_{\{x > a\}} \star \nu$ est déterministe. Le théorème 3 se traduit donc ainsi :

Proposition 5. *Soit A un processus croissant localement intégrable à accroissements indépendants, de compensateur $\widetilde{A}$. Alors, pour tous $a, b, \delta, t > 0$:*

$$\mathbb{P}\left[A_t \geq \delta \widetilde{A}_t\right] \leq \exp\left(-\widetilde{A}_t \left(1 - \delta + \frac{\delta}{a} \log \delta\right)\right) + \mathbb{P}\left[\sup_{s \leq t} \Delta A_s > a\right]$$

Le théorème 5 dans le cas de martingales locales de carré intégrable se traduit alors en remplaçant δ par $\delta \langle X \rangle_t$ et en posant $\alpha^2 = \langle X \rangle_t$ et $b = \frac{\alpha^2}{a^2}$ par :

Proposition 6. *Soit $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$. Alors, pour tous $\delta, a, t > 0$:*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{s \leq t} X_s \geq \delta \langle X \rangle_t\right] \leq \exp\left[-\langle X \rangle_t \Psi\left(\frac{1}{a^2}, \frac{\delta}{a}\right)\right] + \mathbb{P}\left[\sup_{s \leq t} \Delta X_s > a\right]$$

Citons l'exemple suivant adapté de *[LS], p.354* :

Exemple 4. *Considérons* $Y = W\bullet\beta$, *où* $W \in \mathcal{P}_{l.b.}$ *est strictement stationnaire et vérifie :* $\mathbb{E}[\exp W_0^2] < \infty$ *et, où* β *est le mouvement brownien unidimensionnel standard. Alors :*

$$\mathbb{P}[W\bullet\beta_t \geq \delta t] \leq \exp\left(-\frac{\delta\sqrt{t}}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\mathbb{E}\,[\exp W_0^2]}.$$

Preuve. . Soit $G_t^{W,\lambda}$ le W-cumulant de β. Pour $t > 0$, $G_t^{W,\lambda} = \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t W_s^2 ds = \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\lambda^2 W_s^2 t}{2} ds$ de sorte que $e^{G_t^{W,\lambda}} \leq \frac{1}{t}\int_0^t \exp\left(\frac{\lambda^2 W_s^2 t}{2}\right) ds$ par application de l'inégalité de Jensen. De la stricte stationnarité de W, il découle que : $\mathbb{E}\left[e^{G_t^{W,\lambda}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\lambda^2 t}{2}W_0^2\right)\right] < \infty$, dès que $\frac{\lambda^2 t}{2} \leq 1$.

Pour tous $\delta, \lambda > 0$, il vient par l'inégalité de Markov : $\mathbb{P}[Y_t \geq \delta t] \leq e^{-\lambda\delta t}\mathbb{E}\left[e^{\lambda Y_t}\right]$. Or

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda Y_t}\right] = \mathbb{E}\left[\left(e^{2\lambda Y_t}\mathcal{E}\left(G^{W,2\lambda}\right)_t^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\mathcal{E}\left(G^{W,2\lambda}\right)_t^{\frac{1}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[Z^W(2\lambda)\right]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\left[\mathcal{E}\left(G^{W,2\lambda}\right)_t\right]^{\frac{1}{2}}$$

par l'inégalité de Hölder. Comme $Z^W(2\lambda)$ est une martingale locale, on déduit le résultat avancé des calculs précédents en prenant $\lambda = (2t)^{-\frac{1}{2}}$ □.

Dans *[SW] p. 569*, figurent les inégalités exponentielles du Processus de Poisson standard suivantes, dûes à Shorack :

Exemple 5. *Soit N un processus de Poisson unidimensionnel standard. Notons M la martingale définie par $M_t = N_t - t$. Alors, pour tout $t > 0$:*

$\mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\sup_{0\leq s\leq t}(M_s^+) \geq \delta\right] \leq \exp\left[-\sqrt{t}\Psi\left(\sqrt{t},\delta\right)\right], \quad 0 < \delta$

$\mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\sup_{0\leq s\leq t}(M_s^-) \geq \delta\right] \leq \exp\left[-\sqrt{t}\Psi\left(\sqrt{t},-\delta\right)\right], \quad 0 < \delta < \sqrt{t},$

où M^+ et M^- désignent les parties positives et négatives de M.

Preuve. . Si μ est la mesure de sauts de N et ν son compensateur, alors $M = x\star(\mu-\nu)$; le 1-cumulant de M est donc : $G^{1,\lambda} = \Phi_\lambda(x)\star\nu = t\Phi_\lambda(1) = t\phi_1(\lambda)$, qui appartient à U_0. Comme la transformée de Young de $\lambda \mapsto t\phi_1(\lambda)$ est $\Psi\left(t,\delta\sqrt{t}\right) = \sqrt{t}\Psi\left(\sqrt{t},\delta\right)$, le résultat annoncé découle de la proposition ci-dessus.

Un calcul semblable conduit à la seconde majoration en considérant la martingale $-M$. □

7. CAS DISCRET

7.1. Généralités. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus discret ; il peut s'écrire sous la forme : $Y_n = B_n + M_n$, où $B_n = \sum_{k=1}^{k=n}\mathbb{E}[\Delta Y_k \mid \mathcal{F}_{k-1}]$ est prévisible et M une martingale.

Nous noterons $\widehat{Y}_{\lambda,k} = \exp(\lambda\Delta Y_k)$ et $\widetilde{Y}_{\lambda,k} = \mathbb{E}[\exp(\lambda\Delta Y_k) \mid \mathcal{F}_{k-1}]$.

Supposons que Y vérifiede plus la condition de type Cramèr $\mathbb{E}\left[\widehat{Y}_{\lambda,k}\right] < \infty$ dès que $\lambda > 0$ est inférieur à un certain $\lambda_0 > 0$, alors $\Phi_\lambda(x)\star\nu_n = \sum_{k=1}^{k=n}\mathbb{E}[\Phi_\lambda(\Delta Y_k) \mid \mathcal{F}_{k-1}]$ est localement intégrable et le 1-cumulant de Y, purement discontinu, s'écrit pour un tel λ :

$$G_n^{1,\lambda} = \lambda B_n + \sum_{k=1}^{k=n} \mathbb{E}\left[\widehat{Y}_{\lambda,k} - 1 - \lambda \Delta Y_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right] = \sum_{k=1}^{k=n} \mathbb{E}\left[\widehat{Y}_{\lambda,k} - 1 \mid \mathcal{F}_{k-1}\right] = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\widetilde{Y}_{\lambda,k} - 1\right)$$

de sorte que son exponentielle de Doléans s'écrit : $\mathcal{E}\left(G^{1,\lambda}\right)_n = \prod_{k=1}^{k=n} \widetilde{Y}_{\lambda,k}$.

Pour $0 < \lambda \leq \frac{\lambda_0}{n}$, son espérance peut se majorer ainsi par applications de l'inégalité de Jensen :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathcal{E}\left(G^{1,\lambda}\right)_n\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\prod_{k=1}^{k=n} \widetilde{Y}_{\lambda,k}^n\right)^{\frac{1}{n}}\right] \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \mathbb{E}\left[\widetilde{Y}_{\lambda,k}^n\right] \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}\left[\widehat{Y}_{\lambda,k} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right]\right)^n\right] \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\widehat{Y}_{\lambda n,k} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right]\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \mathbb{E}\left[\widehat{Y}_{\lambda n,k}\right].\end{aligned}$$

Le lemme 3 s'écrit dans ce cas : $\mathbb{P}\left[Y_n \geq \delta\right] \leq H(\lambda)\, e^{-\lambda\delta} + \mathbb{P}\left[\prod_{k=1}^{k=n} \widetilde{Y}_{\lambda,k} > H(\lambda)\right]$.

Or la méthode usuelle d'obtention d'inégalités exponentielles utilisant la fonction génératrice de moments s'écrit avec nos notations :

$\mathbb{P}\left[Y_n \geq \delta\right] = \mathbb{P}\left[e^{\lambda Y_n} \geq e^{\lambda\delta}\right] \leq e^{-\lambda\delta}\, \mathbb{E}\left[e^{\lambda Y_n}\right] = e^{-\lambda\delta}\, \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{k=n} \widehat{Y}_{\lambda,k}\right]$,

qui donne un résultat meilleur que celui du lemme 3 dès que l'on choisit $H(\lambda) > \mathbb{E}\left[e^{\lambda Y_n}\right]$. Cependant, la méthode du cumulant fournira en plus des majorations uniformes en n pour des processus croissants et des martingales en particulier.

Nous allons préciser maintenant le cas des processus discrets à accroissements indépendants.

7.2. Sommes de variables indépendantes. Considérons la somme des termes d'une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables indépendantes vérifiant les conditions de Cramér : $\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_k}\right] < \infty$ pour tout λ, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Nous noterons pour $n \in \mathbb{N}^*$:

- μ_n, σ_n^2 les moyennes et variances de X_n,
- $m_n = \sum_{k=1}^{k=n} \mu_k$, $\mu = \frac{m_n}{n}$, $s_n^2 = \sum_{k=1}^{k=n} \sigma_k^2$ et $\sigma^2 = \frac{1}{n}s_n^2$,
- S le processus défini par $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} X_k$ pour $n \geq 1$, et $\overline{X}$ la variable aléatoire $\overline{X_n} = \frac{1}{n}S_n$.

S est une semimartingale à accroissements indépendants, de décomposition canonique : $S_n = m_n + M_n$, où $M_n = \sum_{k=1}^{k=n}(X_k - \mu_k)$ est une martingale à accroissements indépendants. Sa variation quadratique prévisible vaut : $\langle M_n\rangle = \sum_{k=1}^{k=n} \mathbb{E}\left[(X_k - \mu_k)^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}\right] = s_n^2$. D'après les généralités ci-dessus, le cumulant G_n^λ de S s'écrit quant à lui : $G_n^{1,\lambda} = \sum_{k=1}^{k=n} \mathbb{E}\left[e^{\lambda X_k}\right] - n$. Enfin son exponentielle de Doléans : $\mathcal{E}\left(G^{1,\lambda}\right)_n = \prod_{k=1}^{k=n} \mathbb{E}\left[e^{\lambda X_k} \mid \mathcal{F}_{k-1}\right] = \prod_{k=1}^{k=n} \mathbb{E}\left[e^{\lambda X_k}\right]$ de sorte que la surmartingale positive $Z(\lambda)$ s'écrit :

$$Z_n(\lambda) = \frac{\exp(\lambda S_n)}{\prod_{k=1}^{k=n} \mathbb{E}\left[e^{\lambda X_k}\right]} = \exp\left(\lambda S_n - \sum_{k=1}^{k=n} \log\left(\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_k}\right]\right)\right).$$

Cas général. Les méthodes du cumulant et de la fonction génératrice de moments fournissent dans ce cas de suite de variables indépendantes le même résultat, à savoir :

Proposition 7. *Soit (S_n) un somme de variables aléatoires (X_k) indépendantes, satisfaisant la condition de Cramér. Alors, pour tous $\delta > 0, n \in \mathbb{N}^*$:*

$$\mathbb{P}\left[\overline{X_n} \geq \delta\right] \leq \exp\left[-n \sup_{\lambda>0}\left\{\lambda\delta - \log\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_k}\right]\right)\right\}\right]$$

Preuve. . Conséquence immédiate du lemme 3 avec $H(\lambda) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_k}\right]\right)^n$ qui majore $\mathcal{E}\left(G^{1,\lambda}\right)_n = \prod_{k=1}^{k=n}\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_k}\right]$ en remplaçant δ par $n\delta$. □

Quand les X_k sont équidistribuées, on en déduit aisément le résultat classique suivant :

Exemple 6. *Grandes déviations pour sommes de variables i.i.d.*

Pour des X_k indépendantes identiquement distribuées, nous avons

$$\mathbb{P}\left[\overline{X_n} \geq \delta\right] \leq \exp\left(-n \sup_{\lambda>0}\left\{\lambda\delta - \log\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_0}\right]\right\}\right).$$

Notons $J_\lambda(x) = \lambda x - \log\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_0}\right]$ et $J^*(x) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} J_\lambda(x)$ *(J^* est donc la transformée de Cramér de la loi commune des X_k).* Par l'inégalité de Jensen, $\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_0}\right] \geq e^{\lambda\mu_0}$, de sorte que $J_\lambda(\mu_0) \leq 0$; pour $x \geq \mu_0$, si $\lambda < 0$, nous avons alors $J_\lambda(x) \leq J_\lambda(\mu_0) \leq 0$ et par conséquent, comme $J_0(x) = 0$, il vient $J^*(x) = \sup_{\lambda>0} J_\lambda(x)$ dans ce cas. Nous obtenons bien que, pour $\delta > \mu_0$, $\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left[\overline{X}_n \geq \delta\right]$ est majoré par $-J^*(\delta)$. □

Exemple 7. *Inégalité de Hoeffding*

Supposons les X_k à valeurs dans $[0,1]$.

En remarquant que la convexité de l'exponentielle implique l'inégalité $e^{\lambda x} \leq (1-x) + xe^\lambda$ pour $x \in [0,1]$, et donc $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\mathbb{E}\left[e^{\lambda X_k}\right] \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}\mathbb{E}\left[1 - X_k + X_k e^\lambda\right] \leq 1 - \mu + \mu e^\lambda$, la proposition 7 conduit à la majoration :

$$\mathbb{P}\left[S_n - n\mu \geq \delta n\right] \leq \inf_{\lambda>0}\left\{\exp -n\left(\lambda(\delta+\mu) - \log\left(1-\mu+\mu e^\lambda\right)\right)\right\}.$$

Après minimisations *(cf [SW], pp.853-854)*, nous trouvons que $\mathbb{P}\left[\sqrt{n}\left(\overline{X_n} - \mu\right) \geq \delta\right]$ est majoré par $e^{-2\delta^2}$ si $\mu \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ et par $\exp\frac{-\delta^2}{2\mu(1-\mu)}$ si $\mu \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$. □

Si nous nous intéressons à $\sup_{k\leq n} S_k$, alors le théorème 2 s'applique en remarquant que les fonctions G_n^{1*} sont convexes, sous la forme suivante :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \quad \mathbb{P}\left[\sup_{k\leq n} S_k \geq \delta\right] \leq \exp\left(-\mathcal{Y}_{G_n^{1,q}}(\delta)\right).$$

Du corollaire 2, nous tirons :

soit q une fonction prévisible croissant presque sûrement non nulle; si S appartient à $\mathcal{S}^{\frac{1}{q}} \cap \mathcal{S}^{-\frac{1}{q}}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $H_n(\lambda) = \max\left\{G_n^{1,\frac{1}{q}}(\lambda), G_n^{1,-\frac{1}{q}}(\lambda)\right\}$:

$$\mathbb{P}\left[\sup_{k\leq n}\left|\tfrac{1}{q(k)}S_k\right| \geq \delta\right] \leq 2\exp\left[-\mathcal{Y}_{H_n}\left(\tfrac{\delta}{2}\right)\right].$$

Suite de variables indépendantes centrées. Dans ce cas la suite (S_n) est une martingale (et donc son cumulant est croissant) et le théorème 5 sur les martingales locales de carré intégrable se traduit ainsi, en remplaçant δ par δs_n et en prenant $\alpha = s_n$ et $b = \frac{s_n^2}{a^2}$:

pour tous $\delta, a > 0$:

$$\mathbb{P}\left[\frac{1}{s_n}\sup_{k\leq n} S_k \geq \delta\right] \leq \exp\left[-s_n^2\Psi\left(\frac{1}{a^2}, \frac{\delta}{a s_n}\right)\right] + \mathbb{P}\left[\sup_{k\leq n} X_k > a\right] \tag{5}$$

soit : $\mathbb{P}\left[\frac{1}{s_n}\sup_{k\leq n} S_k \geq \delta\right] \leq \exp\left[-\delta^2\Psi\left(\left(\frac{s_n}{a\delta}\right)^2, \frac{s_n}{a\delta}\right)\right] + \mathbb{P}\left[\sup_{k\leq n} X_k > a\right].$

Ces résultats fournissent quelques améliorations d'inégalités exponentielles classiques, dont celles de Kolmogorov *([SW], p.855)* et Bennett *([SW], pp.851-853)*.

Exemple 8. *Inégalités de Kolmogorov*

L'étude de la fonction $\Psi(x^2, x)$ sur chacun des intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$ permet de continuer la majoration ci-dessus en :

$$\mathbb{P}\left[\tfrac{1}{s_n}\sup_{k\leq n} S_k \geq \delta\right] \leq \mathbb{P}\left[\sup_{k\leq n} X_k > a\right] + \begin{cases} \exp\left[-\dfrac{\delta^2}{2}\left(1 - \dfrac{\delta a}{3 s_n}\right)\right] & \text{si } \delta \leq \dfrac{s_n}{a} \\ \exp\left[-\dfrac{\delta s_n}{a}(2\log 2 - 1)\right] & \text{si } \delta \geq \dfrac{s_n}{a} \end{cases} \quad \square$$

Exemple 9. *Inégalité de Bennett*

L'application directe de la majoration *(5)* nous donne en remplaçant δ par $\delta\sigma$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sup_{k\leq n} S_k \geq \delta\right] &\leq \exp\left[-n\sigma^2\Psi\left(\tfrac{1}{a^2}, \tfrac{\delta}{a\sigma^2\sqrt{n}}\right)\right] + \mathbb{P}\left[\sup_{k\leq n} X_k > a\right] \\ &\leq \exp\left[-\delta\Psi\left(\frac{n}{a^2\delta}\sigma^2, \frac{\sqrt{n}}{a}\right)\right] + \mathbb{P}\left[\sup_{k\leq n} X_k > a\right]. \ \square \end{aligned}$$

Le théorème 6 s'écrit :

S'il existe un réel positif K et un processus prévisible (ρ_n) vérifiant : pour tout $m \geq 2$, $\sum_{k=1}^{k=n}\mathbb{E}[X_k^m] \leq \frac{m!}{2}K^{m-2}\sum_{k=1}^{k=n}\mathbb{E}[\rho_k^2 X_k^2]$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $\delta > 0$:

$$\mathbb{P}\left[\sup_{k\leq n} S_k \geq \delta\right] \leq \exp\left[-\frac{\delta}{K} - \frac{2b}{K^2}\left(1-\sqrt{1+\frac{K\delta}{b}}\right)\right], \text{ où } b = \sum_{k=1}^{k=n} \mathbb{E}\left[\rho_k^2 X_k^2\right].$$

Exemple 10. *Inégalité de Bernstein*

En particulier, supposons qu'il existe une suite (v_n) telle que $\mathbb{E}\left[|X_k|^m\right] \leq \frac{m!}{2} K^{m-2} v_k$ pour tout entier k. Alors les conditions précédentes sont vérifées pour $\rho_k^2 = \frac{v_k}{\sigma_k^2}$. Comme $b = \sum_{k=1}^{k=n} \mathbb{E}\left[\rho_k^2 X_k^2\right] = \sum_{k=1}^{k=n} v_k$, on en déduit en notant $\overline{v} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} v_k$ que :

$$\mathbb{P}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{k\leq n} S_k \geq \delta\right] \leq \exp\left[-\kappa_n\delta - 2\kappa_n^2\overline{v}\left(1-\sqrt{1+\frac{\delta}{\kappa_n\overline{v}}}\right)\right] \text{ où } \kappa_n = \frac{\sqrt{n}}{K},$$

ce qui étend et précise l'inégalité de Bernstein *([SW], pp.855)*. □

7.3. U-statistiques. Soit (X_n) une suite de variables indépendantes distribuées selon la même loi de fonction de répartition F, et $(\mathcal{F}_n)$ la filtration associée. Nous pouvons les supposer centrées sans nuire à la généralité du problème.

Soit h une application symétrique de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable.

Si nous notons $\mathcal{U}_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} h(X_i, X_j)$, pour $n \geq 2$, alors le processus U défini par $U_n = \frac{2}{n(n-1)}\mathcal{U}_n$ est une U-statistique de degré 2 sur (X_n), de noyau h.

Supposons qu'en outre h vérifie une condition de Cramér :

$$\text{il existe } \lambda_0 > 0 \text{ tel que, pour } 0 \leq \lambda \leq \lambda_0,\ \mathbb{E}\left[e^{\lambda h(X_1,X_2)}\right] < \infty,$$

et notons alors pour $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$:

- $\mathcal{L}_1(\lambda, x) = \mathbb{E}\left[e^{\lambda h(x,X_2)}\right] = \int e^{\lambda h(x,y)} dF(y)$, pour $x \in \mathbb{R}$;
- $\mathcal{L}(\lambda) = \mathbb{E}\left[\mathcal{L}_1(\lambda, X_1)\right] = \mathbb{E}\left[e^{\lambda h(X_1,X_2)}\right] = \int e^{\lambda h(x,y)} dF(x)\, dF(y)$;
- $\widehat{\mathcal{L}}(p,k,\lambda) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{p}{k}\mathcal{L}_1(\lambda k, X_1)\right)\right]$, pour $p, k \in \mathbb{N}^*$.

Comme $\exp(\lambda\Delta\mathcal{U}_k) = \exp\left(\lambda \sum_{i=1}^{k-1} h(X_i, X_k)\right)$ peut s'écrire $\exp\left(\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} \lambda(k-1) h(X_i, y)\right)$ qui est majoré par $\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} \exp\left[\lambda(k-1) h(X_i, X_k)\right]$, le processus $\exp(\lambda\Delta\mathcal{U})$ est intégrable pour $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{n-1}\lambda_0$ et le 1-cumulant G_n^λ de $\mathcal{U}$ s'écrit dans ce cas :

$$G_n^\lambda = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}\left[\exp(\lambda\Delta\mathcal{U}_k) | \mathcal{F}_{k-1}\right] - (n-1) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \sum_{i=1}^{k-1} h(X_i, X_k)\right) \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right] - (n-1).$$

Par application de l'inégalité de Jensen, il se majore ainsi pour $\lambda \leq \frac{\lambda_0}{n-1}$:

$$G_n^\lambda \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{E}\left[e^{\lambda(k-1)h(X_i,X_k)} \middle| \mathcal{F}_{k-1}\right] - (n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} \left\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \mathcal{L}_1(\lambda k, X_i)\right\} - (n-1).$$

Par conséquent, $\frac{1}{n-1}G_n^\lambda+1$ peut être considéré comme moyenne de moyennes des variables aléatoires $(\mathcal{L}_1(\lambda k, X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ i.i.d.. Intéressons-nous alors à $\exp\left(G_n^\lambda\right)$:

$$\exp\left(G_n^\lambda\right) \le \exp\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{n-1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathcal{L}_1(\lambda k, X_i)\right\}\right)e^{1-n} \le \frac{e^{1-n}}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{i=1}^{k}\exp\left\{\frac{n-1}{k}\mathcal{L}_1(\lambda k, X_i)\right\},$$

de sorte que, par l'indépendance des $\mathcal{L}_1(\lambda k, X_n)$:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(G_n^\lambda\right)\right] \le \frac{e^{1-n}}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\prod_{i=1}^{k}\mathbb{E}\left[\exp\left\{\frac{n-1}{k}\mathcal{L}_1(\lambda k, X_i)\right\}\right] = \frac{e^{1-n}}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\widehat{\mathcal{L}}^k(n-1,k,\lambda).$$

Le lemme 3, après application de l'inégalité de Markov au dernier terme, et en remarquant que la fonction $x \mapsto e^{x-a} + e^{-x+b}$ est minimale pour $e^x = e^{\frac{a+b}{2}}$ et que son minimum vaut $2e^{-\frac{a-b}{2}}$, nous donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[U_n \ge \delta\right] &= \mathbb{P}\left[\mathcal{U}_n \ge \tfrac{n(n-1)}{2}\delta\right] \le e^{H(\lambda)}e^{-\lambda\frac{n(n-1)}{2}\delta} + e^{-H(\lambda)}\mathbb{E}\left[\exp\left(G_n^\lambda\right)\right]\\ &\le 2\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\lambda\tfrac{n(n-1)}{2}\delta + n - 1 - \log\left(\tfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\widehat{\mathcal{L}}^k(n-1,k,\lambda)\right)\right)\right\},\end{aligned}$$

soit en remplaçant λ par $\frac{\lambda}{n-1}$:

$$\mathbb{P}\left[U_n \ge \delta\right] \le 2\exp\left[-\frac{1}{2}\sup_{0<\lambda\le\lambda_0}\left\{\lambda\frac{n}{2}\delta + n - 1 - \log\left[\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\widehat{\mathcal{L}}^k\left(n-1,k,\frac{\lambda}{n-1}\right)\right]\right\}\right].$$

La méthode du cumulant fournit dans le cas général des U-statistiques des résultats assez complexes au vu de l'expression de $\widehat{\mathcal{L}}$. Dans *[Se], p.180,* Serfling utilise une écriture de la U-statistique (U_n) directement sous forme de moyenne de moyennes de variables aléatoires i.i.d.. Plus précisément, si n^* désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$, il considère $U_n = \frac{1}{n!}\sum_\sigma W\left(X_{\sigma(1)},...,X_{\sigma(n)}\right)$, où la sommation porte sur les permutations σ de $\{1,..,n\}$, avec $W(x_1,...,x_n) = \frac{1}{n^*}\sum_{i=1}^{i=n^*} h(x_{2i-1}, x_{2i})$. Appliquant directement l'inégalité de Markov à $e^{\lambda U_n}$, nous obtiendrions la majoration :

$$\mathbb{P}\left[U_n \ge \delta\right] \le \exp\left[-n^*\sup_{\lambda\le\lambda_0}\left\{\lambda\delta - \log(\mathcal{L}(\lambda))\right\}\right].$$

Cependant, notons que lorsque le processus $\mathcal{U}$ est croissant *(par exemple quand $h \ge 0$)*, ou quand $\mathcal{U}$ est une martingale *(en particuler, lorsque $\mathbb{E}\left[h(X_i,X_j)\mid\mathcal{F}_{j-1}\right]=0$, pour tout $i<j$)*, la méthode du cumulant fournit la majoration uniforme :

$$\mathbb{P}\left[\frac{2}{n(n-1)}\sup_{k\le n}\mathcal{U}_k \ge \delta\right] \le 2\exp\left[-\frac{1}{2}\sup_{0<\lambda\le\lambda_0}\left\{\lambda\frac{n}{2}\delta + n - 1 - \log\left[\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\widehat{\mathcal{L}}^k\left(n-1,k,\frac{\lambda}{n-1}\right)\right]\right\}\right].$$

Lorsque h est connu plus précisément, les majorations peuvent êre rendues plus simples. Par exemple, considérons désormais une U-statistique de noyau h vérifiant $\mathbb{E}\left[h(X_i,X_j)\mid\mathcal{F}_{j-1}\right]=0$, pour tout $i<j$ de sorte que $\mathcal{U}$ est une martingale.

- Dans un premier temps, supposons $h(X_1, X_2)$ borné par le réel c.

  Dans *[Se], p.200*, il est montré que pour une variable aléatoire centrée à valeurs dans $[a, b]$, nous avons pour tout $\lambda > 0$: $\mathbb{E}\left[e^{\lambda Y}\right] \leq e^{\frac{(b-a)^2}{8}\lambda^2}$. Nous en déduisons que $\mathcal{L}_1(\lambda, X_i) \leq e^{\frac{c^2}{2}\lambda^2}$ pour tout i. Le processus $\mathcal{E}\left(G^\lambda\right)_n$ se majore ainsi :

$$\mathcal{E}\left(G^\lambda\right)_n \leq \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{E}\left[e^{\lambda(k-1)h(X_i,X_k)}\middle|\mathcal{F}_{k-1}\right]\right) \leq \prod_{k=2}^{n} e^{\frac{c^2\lambda^2}{2}(k-1)^2} = \exp\left(\frac{c^2\lambda^2 n(n-1)(2n-1)}{12}\right).$$

  Comme la fonction majorante est croissante en n pour $n \geq 2$, il découle de la remarque suivant le lemme 3 que : $\mathbb{P}\left[\frac{2}{n(n-1)}\sup_{k\leq n}\mathcal{U}_k \geq \delta\right] \leq \exp\left[-\inf_{\lambda>0}\left\{\frac{n(n-1)}{2}\lambda\delta - \frac{c^2 n(n-1)(2n-1)}{12}\lambda^2\right\}\right]$.

  Le minimum est atteint pour $\lambda = \frac{3\delta}{(2n-1)c^2}$ et nous obtenons dans ce cas :

$$\mathbb{P}\left[\frac{2}{n(n-1)}\sup_{k\leq n}\mathcal{U}_k \geq \delta\right] \leq \exp\left[-\left(\frac{n(n-1)}{2n-1}\frac{3\delta^2}{4c^2}\right)\right].$$

- Considérons enfin $h(x, y) = xy$ et les X_n i.i.d. centrées, de moments d'ordre m notés μ_m pour $m \geq 2$. Nous noterons comme précédemment $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et poserons pour $m \geq 2$ $\Sigma_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} S_k^m$. La connaissance des S_n, et donc des $\Sigma_n^{(m)}$, permet d'obtenir des majorations uniformes explicites.

  Dans ce cas particulier, $\Delta\mathcal{U}_k = \sum_{i=1}^{k-1} X_i X_k = S_{k-1}X_k$ et donc pour $m, k \geq 2$:

$$\mathbb{E}\left[\Delta\mathcal{U}_k^m\middle|\mathcal{F}_{k-1}\right] = \mathbb{E}\left[S_{k-1}^m X_k^m\middle|\mathcal{F}_{k-1}\right] = \mu_m S_{k-1}^m.$$

  La variation quadratique prévisible de $\mathcal{U}$ devient $\langle\mathcal{U}\rangle_n = \sum_{k=2}^{n}\mathbb{E}\left[\Delta\mathcal{U}_k^2\middle|\mathcal{F}_{k-1}\right] = \mu_2\Sigma_{n-1}^{(2)}$. Le corollaire 6 fournit alors la majoration :

$$\mathbb{P}\left[\frac{2}{n(n-1)}\sup_{k\leq n}|\mathcal{U}_k| \geq \delta\right] \leq$$
$$2\exp\left[-(n-1)\Psi\left(\frac{\alpha\mu_2}{a^2}, \frac{\delta n}{2a}\right)\right] + 2\mathbb{P}\left[\frac{1}{n-1}\Sigma_{n-1}^{(2)} > \alpha\right] + \mathbb{P}\left[\sup_{k\leq n}|S_{k-1}X_k| > a\right].$$

  Le théorème 6 s'écrit dans ce cas : s'il existe un réel $K > 0$ et un processus prévisible ρ tel que pour tout $m, n \geq 2$, $\Sigma_n^{(m)} \leq \frac{m!}{2}K^{m-2}\frac{\mu_2}{\mu_m}\rho_n^2\Sigma_n^{(2)}$, alors :

$$\mathbb{P}\left[\frac{2}{n(n-1)}\sup_{k\leq n}|\mathcal{U}_k| \geq \delta\right] \leq 2\exp\left[-(n-1)\left(\frac{\delta n}{2K} + \frac{2b\mu_2}{K^2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{K\delta n}{2b\mu_2}}\right)\right)\right] + 2\mathbb{P}\left[\rho_n^2\frac{1}{n-1}\Sigma_{n-1}^{(2)} > b\right]$$

8. BIBLIOGRAPHIE

[Ha] HAEUSLER *An Exact Rate of Convergence in the Functionnal Central Limit Theorem for Special Difference Arrays*
Z. für Wahr., 65, pp. 523-534, Springer 1984

[JS] J. JACOD & A.N. SHIRYAYEV *Limit Theorems for Stochastic Processes*
Springer, Berlin, New York 1987

[KM] K. KUBILIUS & J. MEMIN *Inégalité Exponentielle pour les Martingales Locales*
Compte-Rendu de l'Académie des Sciences de Paris, tome 319 pp. 733-737 1994

[LM] D. LEPINGLE & J. MEMIN *Sur l'Intégrabilité Uniforme des Martingales Exponentielles*
Z. für Wahr., pp. 175-203, Springer 1978

[LS] R.S. LIPTSER & A.N. SHIRYAYEV *Theory of Martingales*
Kluwer Academic Publishers, Amsterdam 1989

[Se] SERFLING *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*
John Wiley & Sons, New York 1980

[SW] G. SHORACK & J. WELLNER *Empirical Processes with Applications to Statistics*
John Wiley & Sons, New York 1986

[VG] S. VAN DE GEER *Exponential Inequalities For Martingales, with Applications to Maximum Likelihood Estimation for Counting Processes*
Pré-publication 1994