ALBERT RAUGI

Théorie spectrale d'un opérateur de transition sur un espace métrique compact

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1994, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1994___2_A8_0>

THÉORIE SPECTRALE D'UN OPÉRATEUR DE TRANSITION SUR UN ESPACE MÉTRIQUE COMPACT

Par Albert RAUGI

(1.1) Le but du présent article est de retrouver les principaux résultats de [8] avec des démonstrations simplifiées.

1. Définitions et notations.

(1.1) Dans toute la suite, nous désignons par (E, d) un espace métrique compact et par P une probabilité de transition sur E qui *respecte les fonctions continues*; c'est-à-dire telle que pour toute fonction continue f, la fonction Pf est continue. Nous notons $P^n, n \geq 1$, les itérées de P. Nous convenons que P^0 est l'opérateur identité ou encore que pour tout $x \in E, P^0(x, \cdot)$ est la mesure de Dirac en x.

Nous notons $C(E)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur E, muni de la norme de la convergence uniforme, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$.

Si K est un sous ensemble de E et x un élément de E, nous notons $d(x, K)$ la distance de x à K ; c'est-à-dire que $d(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y)$.

Nous disons qu'un espace topologique X est *séparable* s'il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de X dense dans X. Tout espace métrique compact possède une base dénombrable d'ouverts ou, ce qui revient au même, est séparable. On sait alors que l'espace $C(E)$ est séparable.

Un borélien B de E est dit *absorbant* si $\forall x \in B$, $P(x, B) = 1$.

(1.2) Nous appelons : Ω l'espace produit $E^{\mathbb{N}}$; $\mathcal{F}$ la tribu des boréliens de Ω et $(X_n)_{n \geq 0}$ les applications coordonnées de l'espace produit Ω. Pour tout $x \in E$, nous notons $\mathbb{P}_x$ l'unique probabilité sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ qui fait des coordonnées $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov de probabilité de transition P, partant de x ; c'est-à-dire que pour tout entier $n \geq 0$ et pour toute fonction borélienne bornée (ou positive) f sur E^n,

$$\int_\Omega f(X_0, \ldots, X_n) \, \mathbb{P}_x(d\omega) = \int_E \cdots \int_E f(x, u_1, \ldots, u_n) \, P(x, du_1) \cdots P(u_{n-1}, du_n).$$

Nous notons $\mathbb{E}_x$ l'espérance associée à la probabilité $\mathbb{P}_x$. Nous appelons θ l'opérateur de décalage sur Ω ; pour tout entier $n \geq 0$, nous avons $X_n \circ \theta = X_{n+1}$.

(1.3) Pour tout $x \in E$, nous notons $G(x, \cdot)$ la mesure *potentiel* définie par: $G(x, \cdot) = \sum_{r \geq 0} P^r(x, \cdot)$. Si σ est une mesure positive sur les boréliens de E, nous appelons *support* de σ et nous notons $\operatorname{Supp}\sigma$ l'ensemble des éléments x de E tels que $\sigma(V) > 0$, pour tout voisinage V de x. On voit facilement que $\operatorname{Supp}\sigma$ est aussi l'ensemble des éléments x de E tels que $\int_E f(y)\,\sigma(dy) > 0$ pour toute fonction continue positive sur E vérifiant $f(x) > 0$.

(1.4) **Lemme.** *Pour tout élément u de E et tout entier $r \geq 1$,*

i) $x \in \operatorname{Supp} P(u,\cdot)$ *et* $y \in \operatorname{Supp} P^r(x,\cdot)$, *implique* $y \in \operatorname{Supp} P^{r+1}(u,\cdot)$

ii) $x \in \operatorname{Supp} P(u,\cdot)$ *et* $y \in \operatorname{Supp} G(x,\cdot)$, *implique* $y \in \operatorname{Supp} G(u,\cdot)$.

Preuve. Soit f une fonction continue positive telle que $f(y) > 0$. Ecrivons:

$$P^{r+1}f(u) = \int_E P^r f(z)\, P(u,dz).$$

Comme P respecte $C(E)$, la fonction $P^r f$ est continue positive. De plus, puisque $y \in \operatorname{Supp} P^r(x,\cdot)$, nous avons $P^r f(x) > 0$. Il s'ensuit qu'il existe un voisinage V de x tel que $\forall\, z \in V,\ P^r f(z) > \frac{1}{2} P^r f(x)$. Il vient alors

$$P^{r+1}f(u) \geq \int_V P^r f(z)\, P(u,dz) \geq \frac{1}{2} P^r f(x) P(u,V) > 0.$$

D'où la première assertion. La seconde affirmation résulte de la première, après avoir remarqué que, pour tout élément x de E, $\operatorname{Supp} G(x,\cdot)$ est la fermeture dans E de la réunion $\bigcup_{r\geq 0} \operatorname{Supp} P^r(x,\cdot)$. ■

2. Etude des fonctions P-harmoniques continues.

Définition et notations.

(2.1) Une fonction borélienne bornée h, à valeurs réelles ou complexes, est dite P-harmonique si elle vérifie la relation $Ph = h$. Nous désignons par $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des fonctions P-harmoniques boréliennes bornées et par $\mathcal{H}_c$ celui des fonctions P-harmoniques continues.

(2.2) Si $h \in \mathcal{H}$, la fonction h^2 vérifie $Ph^2 \geq (Ph)^2 = h^2$. Il s'ensuit que la suite de fonctions $\left(P^n(h^2)\right)_{n\geq 0}$ est croissante et converge vers une fonction de $\mathcal{H}$ que nous noterons $h * h$. Pour deux fonctions h_1 et h_2 de $\mathcal{H}$, nous définissons alors

$$\begin{aligned} h_1 * h_2 &= \frac{1}{4}\left[(h_1+h_2)*(h_1+h_2) - (h_1-h_2)*(h_1-h_2)\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} P^n(h_1 h_2) \end{aligned}$$

Muni de ce produit et de la norme uniforme $\|\ \|_\infty$, $\mathcal{H}$ est une algèbre de Banach. Nous notons $\operatorname{Alg}(\mathcal{H}_c)$ la sous-algèbre fermée de $\mathcal{H}$ engendrée par $\mathcal{H}_c$.

But et commentaires.

Le but de cette section est de donner une description de $\mathcal{H}_c$.

Soit h une fonction de $\mathcal{H}_c$. Alors l'ensemble des points de E, où h atteint son maximum (resp. son minimum) est un compact absorbant de E. Si h n'est pas constante, on obtient ainsi deux compacts absorbants disjoints. Dans ce qui suit nous précisons le lien existant entre les fonctions harmoniques continues et les sous-ensembles compacts absorbants de E.

Nous mettons en évidence une famille $\mathcal{B}$ de sous-ensembles compacts absorbants de E, deux à deux disjoints, telle que, pour presque toute trajectoire $\omega \in \Omega$, il existe un compact absorbant $\eta(\omega)$ de $\mathcal{B}$ vérifiant $\lim_{n\to+\infty} d(X_n(\omega), \eta(\omega)) = 0$. Les éléments de $\mathcal{B}$ jouent en quelque sorte le rôle des "classes ergodiques" dans la théorie classique des chaînes de Markov vérifiant la condition de Doeblin ([3]). Nous munissons $\mathcal{B}$ d'une distance qui en fait un espace métrique compact. Nous construisons sur $\mathcal{B}$ une famille de mesures de probabilité $\{\mu_x : x \in E\}$ telle que l'application

$$\hat{h} \to h(x) = \int_{\mathcal{B}} \hat{h}(\gamma)\, \mu_x(d\gamma)$$

soit une isométrie d'algèbre de Banach de $C(\mathcal{B})$ sur $\mathrm{Alg}(\mathcal{H}_c)$.

Nous disons qu'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E converge vers $\gamma \in \mathcal{B}$ si la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ a toutes ses valeurs d'adhérence dans γ ; c'est-à-dire $d(x_n, \gamma) \to 0$. L'espace $\mathcal{B}$ apparaît alors comme une frontière de E et la formule $h(x) = \int_{\mathcal{B}} \hat{h}(\gamma)\, \mu_x(d\gamma)$, comme une formule de Poisson. A tout élément h de $\mathcal{H}_c$, nous avons associé une fonction continue $\hat{h}$ sur la frontière $\mathcal{B}$ de E, qui intégrée par le "noyau de Poisson" μ_x permet de retrouver h.

La description des fonctions harmoniques continues a été ramenée à la recherche de sous-ensembles compacts absorbants disjoints de E. Dans de nombreux cas, cette recherche revêt un caractère géométrique (Cf [1]).

Fonctions harmoniques et variables aléatoires invariantes.

(2.3) Nous désignons par $\mathcal{I} = \{B \in \mathcal{F} : \theta^{-1}(B) = B\}$ la tribu des boréliens de Ω invariants par θ. Une variable aléatoire Z est $\mathcal{I}$-mesurable si et seulement si $Z \circ \theta = Z$; une telle variable sera dite invariante par θ. Pour tout entier $n \geq 0$, nous notons $\mathcal{F}_n$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par les variables aléatoires $\{X_k : 0 \leq k \leq n\}$.

(2.4) **Proposition.** ([7], Prop V 2.4) *Pour tout $h \in \mathcal{H}$ et tout $x \in E$, le processus $\big(h(X_n)\big)_{n\geq 0}$, défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$, est une martingale bornée relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Ce processus converge $\mathbb{P}_x$-p.s. vers une variable aléatoire Z invariante par θ et telle que, pour tout entier $n \geq 0$:*

$$h(x) = \mathbb{E}_x[h(X_n)] = \mathbb{E}_x[Z] \quad \text{et} \quad h(X_n) = \mathbb{E}_x[Z \mid \mathcal{F}_n] \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}$$

Réciproquement si Z est une variable aléatoire bornée invariante par θ, alors la fonction h, définie par $h(x) = \mathbb{E}_x[Z], x \in E$, appartient à $\mathcal{H}$ et la martingale $\big(h(X_n)\big)_{n\geq 0}$ converge, $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in E$, vers Z.

Preuve. Pour tout entier naturel n, nous avons:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[h(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= Ph(X_n) \quad \text{(propriété de Chaîne de Markov)}\\ &= h(X_n) \quad \text{(invariance de } h \text{ par } P);\end{aligned}$$

le processus $\big(h(X_n)\big)_{n\geq 0}$, défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$, est donc une martingale, bornée par $\|h\|_\infty$, relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. D'après la théorie des martingales, on sait alors que ce processus converge, $\mathbb{P}_x$-p.s., et sa limite Z ferme la martingale ; c'est-à-dire $h(X_n) = \mathbb{E}_x[Z \mid \mathcal{F}_n]$ $\mathbb{P}_x$-p.s. Par passage à l'espérance, cette dernière relation nous donne $\mathbb{E}_x[h(X_n)] = \mathbb{E}_x[Z]$. D'autre part, nous avons $\mathbb{E}_x[h(X_n)] = P^n h(x) = h(x)$. D'où la première assertion.

Réciproquement soient Z une variable aléatoire invariante par θ et h la fonction définie par $h(x) = \mathbb{E}_x[Z]$. D'après la propriété de markov, nous avons, pour tout entier naturel n,

$$h(X_n) = \mathbb{E}_{X_n}[Z] = \mathbb{E}_x[Z \circ \theta^n \mid \mathcal{F}_n] \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.};$$

et donc grâce à l'invariance de Z par θ, $h(X_n) = \mathbb{E}_x[Z \mid \mathcal{F}_n]$. Par passage à l'espérance, il vient $P^n h(x) = \mathbb{E}_x[Z]$, pour tout entier naturel n ; d'où la P-harmonicité de h. Enfin la théorie des martingales nous dit que le processus $\big(\mathbb{E}_x[Z \mid \mathcal{F}_n]\big)_{n\geq 0}$ converge, $\mathbb{P}_x$-p.s. vers Z. ■

(2.5) Deux variables aléatoires, Z et Z', invariantes par θ sont dites équivalentes si $\forall x \in E$, $\mathbb{P}_x[Z \neq Z'] = 0$. Nous appelons $\mathcal{V}$ l'algèbre des classes d'équivalence des variables aléatoires invariantes par θ.

(2.6) **Corollaire.** *L'application qui à la classe Z de $\mathcal{V}$ associe la fonction P-harmonique $h(x) = \mathbb{E}_x[Z]$ défini un isomorphisme d'algèbre de Banach.*

(2.7) **Lemme.** *Soit h une fonction de $\mathcal{H}$. Pour tout entier $r \geq 1$ et tout $x \in E$, nous avons*

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{E}_x\Big[\int_E [h(y) - h(X_n)]^2\, P^r(X_n, dy)\Big] < +\infty.$$

Preuve. Il suffit de voir que:

$$\mathbb{E}_x\Big[\int_E [h(y) - h(X_n)]^2\, P^r(X_n, dy)\Big] = \mathbb{E}_x[h^2(X_{n+r})] - \mathbb{E}_x[h^2(X_n)].$$

Le résultat s'en déduit facilement. ■

(2.8) **Corollaire** *Pour tout $x \in E$, tout $h \in \mathcal{H}$ et tout entier $r \geq 1$, la suite de variables aléatoires* $\left(\int_E [h(y) - h(X_n)]^2 P^r(X_n, dy)\right)_{n\geq 0}$ *converge vers zéro, $\mathbb{P}_x$-presque sûrement.*

Classes ergodiques.

(2.9) Soit $h \in \mathcal{H}_c$. Nous appelons Ω_h le sous-ensemble $\mathcal{F}$-mesurable et θ-invariant de Ω constitué des éléments ω tels que:

i) la suite $\Big(h\big(X_n(\omega)\big)\Big)_{n\geq 0}$ converge ;

ii) pour tout entier $r \geq 1$, la suite

$$\left(\int_E \left[h(x) - h(X_n(\omega))\right]^2 P^r(X_n(\omega), dx)\right)_{n\geq 0}$$

converge vers zéro.
D'après ce qui précède, nous savons que $\mathbb{P}_x[\Omega_h] = 1, \forall x \in E$.

Comme $\mathcal{H}_c$ est un sous-espace vectoriel fermé de $C(E)$, $\mathcal{H}_c$ est séparable ; nous désignons par $(h_p)_{p\geq 0}$ une suite de fonctions non nulles de $\mathcal{H}_c$ dense dans $\mathcal{H}_c$. En posant $\Omega_0 = \cap_{p\geq 0}\Omega_{h_p}$, nous obtenons alors un sous-ensemble de Ω, $\mathcal{F}$-mesurable, invariant par θ de $\mathbb{P}_x$-mesure 1 pour tout $x \in E$ et vérifiant $\Omega_0 = \cap_{h\in\mathcal{H}_c}\Omega_h$.

(2.10) Soient ω un élément de Ω_0 et u une valeur d'adhérence dans E de la suite $\big(X_n(\omega)\big)_{n\geq 0}$. Puisque P respecte $C(E)$, il résulte de la propriété *ii)* de (2.9) que, pour tout $h \in \mathcal{H}_c$ et tout $r \geq 1$, $\int_E \left[h(x) - h(u)\right]^2 P^r(u, dx) = 0$. Autrement dit, *toute fonction P-harmonique continue h est constante et égale à $h(u)$ sur* $\operatorname{Supp} G(u, \cdot)$.

Ceci nous amène à considérer le sous-ensemble compact, non vide, de E défini par:

$$F = \left\{u \in E : \forall\, h \in \mathcal{H}_c, \forall\, x \in \operatorname{Supp} G(u, \cdot), h(x) = h(u)\right\}.$$

Du lemme (1.4), il résulte que F est absorbant.

(2.11) Nous disons que deux éléments u et v de F sont *équivalents* si $\forall\, h \in \mathcal{H}_c, h(u) = h(v)$. Il est clair que nous définissons ainsi une relation d'équivalence sur F. Chaque classe d'équivalence fourni un sous-ensemble compact absorbant de F. Nous désignons par $\mathcal{B}$ l'ensemble de ces classes d'équivalences. Pour tout $h \in \mathcal{H}_c$ et tout $\gamma \in \mathcal{B}$, nous notons $\hat{h}(\gamma)$ la valeur de h sur γ. Nous munissons $\mathcal{B}$ de la distance δ définie par:

$$\delta(\gamma_1, \gamma_2) = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{2^p} \frac{|\widehat{h_p}(\gamma_1) - \widehat{h_p}(\gamma_2)|}{\|h_p\|_\infty}.$$

Nous avons alors:

(2.12) **Lemme et définition.** *$(\mathcal{B}, \delta)$ est un espace métrique compact. Il existe une application mesurable η de Ω dans $\mathcal{B}$ telle que:*

$$i)\ \forall\ \omega \in \Omega_0,\ \lim_{n \to +\infty} d\big(X_n(\omega), \eta(\omega)\big) \ = \ 0.$$

$$ii)\ \eta \circ \theta = \eta$$

Nous donnons le nom de classe ergodique à chaque élément de $\mathcal{B}$.

Preuve. Soit $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ une suite de classes ergodiques. Pour tout entier naturel n, nous choisissons un élément u_n de γ_n. Le procédé diagonal, nous fourni une suite strictement croissante d'entiers $\big(\varphi(n)\big)_{n \geq 0}$ telle que pour tout entier $p \geq 0$, la suite $\Big(h_p\big(u_{\varphi(n)}\big)\Big)_{n \geq 0}$ converge. Quitte à prendre une sous-suite de $\big(\varphi(n)\big)_{n \geq 0}$, on peut supposer que la suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n \geq 0}$ converge vers un élément u de F. Si γ est la classe ergodique qui contient u, il est alors clair que: $\lim_{n \to +\infty} \delta\big(\gamma_{\varphi(n)}, \gamma\big) \ = \ 0.$ D'où la compacité.

Soit $\omega \in \Omega_0$. Nous avons vu que toutes les valeurs d'adhérence de la suite $\big(X_n(\omega)\big)_{n \geq 0}$ appartiennent à F. Or nous savons aussi que, pour tout $h \in \mathcal{H}_c$, la suite $\Big(h\big(X_n(\omega)\big)\Big)_{n \geq 0}$ converge. Il s'ensuit que toutes les valeurs d'adhérence appartiennent nécessairement à la même classe ergodique $\eta(\omega)$.

Il est clair que l'application η de Ω_0 dans $\mathcal{B}$ ainsi obtenue est invariante par θ. Nous montrons qu'elle est $\mathcal{F}$-mesurable. Soit C une boule fermée de $\mathcal{B}$. Le sous-ensemble $B \ = \ \bigcup_{\gamma \in C} \gamma$ de F est compact. [En effet si x est un élément de F adhérent B, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de F convergeant vers x telle que: $\forall\ n \geq 0, x_n \in \gamma_n \in C$. D'après la compacité de $\mathcal{B}$, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(\varphi(n))_{n \geq 0}$ telle que $\gamma_{\varphi(n)} \xrightarrow{\delta} \gamma \in C$. Nous avons alors $x \in \gamma \subset B$.]
Pour tout $\omega \in \Omega_0$, nous avons alors:

$$\eta^{-1}(C) = \Big\{\omega \in \Omega_0 : \lim_{n \to +\infty} d\big(X_n(\omega), B\big) = 0\Big\};$$

ce qui montre que η est $\mathcal{F}$-mesurable.

On obtient le résultat énoncé en donnant à η une valeur arbitraire sur le complémentaire de Ω_0, qui est aussi un sous-ensemble de Ω invariant par θ. ■

Représentation intégrale.

Pour tout $x \in E$, nous appelons μ_x l'image de la probabilité $I\!\!P_x$ par l'application η du lemme précédent.

(2.13) Théorème. *La famille de mesures de probabilité $\{\mu_x : x \in E\}$ sur $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés suivantes:*

i) $\forall\, x \in E,\ \int_E \mu_u\, P(x,du) = \mu_x;$

ii) $\forall\, \gamma \in \mathcal{B}, \forall\, x \in \gamma,\ \mu_x$ *est la mesure de Dirac en* γ.

Toute fonction h de $\mathcal{H}_c$ s'écrit

$$h(x) = \int_{\mathcal{B}} \hat{h}(\gamma)\, \mu_x(d\gamma).$$

L'application $h \to \hat{h}$ est une isométrie d'algèbres de Banach de $\mathrm{Alg}(\mathcal{H}_c)$ *sur l'espace $C(\mathcal{B})$ des fonctions continues sur $\mathcal{B}$.*

Preuve. Pour toute fonction continue $\hat{f}$ sur $\mathcal{B}$, nous avons:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{B}} \hat{f}(\gamma)\, \mu_x(d\gamma) &= \mathbb{E}_x[\hat{f} \circ \eta] \\
&= \mathbb{E}_x[\hat{f} \circ \eta \circ \theta] \quad (\theta\text{-invariance de } \eta) \\
&= \mathbb{E}_x\big[\mathbb{E}_x[\hat{f} \circ \eta \circ \theta \mid \mathcal{F}_1]\big] \\
&= \mathbb{E}_x\big[\mathbb{E}_{X_1}[\hat{f} \circ \eta]\big] \quad (\text{propriété de Markov}) \\
&= \int_E \mathbb{E}_u[\hat{f} \circ \eta]\, P(x,du) \\
&= \int_E \int_{\mathcal{B}} \hat{f}(\gamma)\, \mu_u(d\gamma) P(x,du).
\end{aligned}$$

D'où la première propriété de la famille $\{\mu_x : x \in E\}$.

Soient $\gamma \in \mathcal{B}$ et $x \in \gamma$. Comme γ est un compact absorbant, pour tout entier $n \geq 0$, $\mathbb{P}_x[X_n \in \gamma] = 1$. Si bien que, $\mathbb{P}_x - p.s.$, $\eta(\cdot) = \gamma$ et par suite μ_x est la mesure de Dirac en γ.

Ceci dit nous avons

$$h(x) = \mathbb{E}_x\big[\lim_{n\to+\infty} h(X_n)\big] = \mathbb{E}_x[\hat{h} \circ \eta] = \int_{\mathcal{B}} \hat{h}(\gamma)\, \mu_x(d\gamma).$$

Cette formule montre que $\|h\|_\infty \leq \|\hat{h}\|_\infty$. Comme l'inégalité contraire est évidente, l'application $h \to \hat{h}$ est bien une isométrie.

Pour toutes fonctions h_1 et h_2 de $\mathcal{H}_c$, nous avons $\widehat{h_1 * h_2} = \hat{h}_1 \hat{h}_2$. D'après la construction même de l'espace $\mathcal{B}$, l'ensemble des fonctions continues $\{\hat{h} : h \in \mathcal{H}_c\}$ sépare les points de $\mathcal{B}$ et contient les fonctions constantes. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, l'algèbre engendrée par ces fonctions est dense dans $C(\mathcal{B})$. On en déduit que l'application $h \to \hat{h}$ de $\mathrm{Alg}(\mathcal{H}_c)$ dans $C(\mathcal{B})$ est surjective. ■

(2.14) *Corollaire.* *Supposons que, pour toute fonction continue f sur E, la famille de fonctions $\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k f \ :\ n \geq 1\}$ soit équicontinue et donc relativement compacte dans $C(E)$.*

Alors l'algèbre $\mathrm{Alg}(\mathcal{H}_c)$ *est égale à $\mathcal{H}_c$. Pour tout $\gamma \in \mathcal{B}$, la fonction*

$$\mu_x(\{\gamma\}) = \mathbb{P}_x\big[\lim_{n\to+\infty} d(X_n,\gamma) = 0\big],$$

est semi-continue supérieurement.
L'espace vectoriel $\mathcal{H}_c$ est de dimension finie (i.e. $\mathcal{B}$ est fini) si et seulement si les fonctions $\{x \to \mu_x(\{\gamma\}) : \gamma \in \mathcal{B}\}$ sont continues. Ces fonctions constituent alors une base de $\mathcal{H}_c$.

Preuve. Soient h_1 et h_2 deux fonctions de $\mathcal{H}_c$. De l'hypothèse faite et de la relation

$$h_1 * h_2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k(h_1 h_2)$$

il résulte que la fonction $h_1 * h_2$ est continue. D'où la première affirmation du corollaire.

Soit $\gamma \in \mathcal{B}$. Considérons une suite de fonctions continues sur $\mathcal{B}$ qui décroît vers l'indicatrice du singleton $\{\gamma\}$. L'isométrie du théorème (2.13) nous dit alors que la fonction P-harmonique $x \to \mu_x(\{\gamma\})$ est une limite décroissante de fonctions P-harmoniques continues et est donc semi-continue supérieurement. De plus cette fonction est continue si et seulement si la fonction indicatrice du singleton $\{\gamma\}$ est continue ; ce qui équivaut à dire que γ est un point isolé de $\mathcal{B}$. Le résultat est alors clair. ∎

3. Mesures invariantes et convergence en moyenne de Cesaro

(3.1) Nous désignons par $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures de probabilité sur les boréliens de E qui sont invariantes par P. Nous nous proposons dans cette section de donner, sous une hypothèse d'équicontinuité, une description de $\mathcal{M}$. Pour toute fonction continue f sur E et tout entier $n \geq 1$, nous désignons par $M_n(f)$ la fonction continue sur E définie par $M_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k f$.

(3.2) **Proposition.** *Toute mesure ν de $\mathcal{M}$ est portée par le compact absorbant F de (2.10). Si ν est extrémale, elle est portée par une classe ergodique.*

Supposons que, pour toute fonction continue f sur E, la famille de fonctions $\{M_n(f) : n \geq 1\}$ soit équicontinue. Alors:

i) chaque classe ergodique γ porte une unique mesure ν_γ de $\mathcal{M}$;

ii) tout élément λ de $\mathcal{M}$ s'écrit $\int_{\mathcal{B}} \nu_\gamma\, \mu_\lambda(d\gamma)$ avec $\mu_\lambda = \int_E \mu_x\, \lambda(dx)$;

iii) pour toute fonction f de $C(E)$, la suite de fonctions $\big(M_n(f)\big)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur E vers $\int_{\mathcal{B}} \nu_\gamma(f)\, \mu_{\cdot}(d\gamma)$.

Preuve. Soient $\nu \in \mathcal{M}$ et $h \in \mathcal{H}_c$. Pour tout entier $r \geq 1$, nous avons:

$$P^r(h^2) \geq (P^r h)^2 = h^2 \text{ et } \int_E [P^r(h^2) - h^2](u)\, \nu(du) = 0.$$

Il s'ensuit que, pour tout $u \in \operatorname{Supp} \nu$ et tout $x \in \operatorname{Supp} G(u, \cdot), h(x) = h(u)$. D'où $\operatorname{Supp} \nu \subset F$.

Nous avons alors:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma Pf(u)\, \nu(du) &= \int_\gamma P(1_\gamma f)(u)\, \nu(du) \quad (\gamma \text{ est un compact absorbant}) \\
&= \int_F P(1_\gamma f)(u)\, \nu(du) \quad (\text{F est réunion de compacts absorbants}) \\
&= \int_E P(1_\gamma f)(u)\, \nu(du) \quad (\nu \text{ est portée par } F) \\
&= \int_\gamma f(u)\, \nu(du).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la restriction de ν à chaque classe ergodique est encore une mesure invariante par P.

Supposons que, pour toute fonction continue f sur E, la famille de fonctions $\big(M_n(f)\big)_{n\geq 1}$ soit équicontinue.

Soit $(\varphi(n))_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que, pour tout $f \in C(E)$, la suite de fonctions $(M_{\varphi(n)}(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément sur E vers une fonction notée h_f. [l'existence de telles suites est assurée par le procédé diagonal via la séparabilité de $C(E)$.] Chaque fonction h_f appartient à $\mathcal{H}_c$ et s'écrit donc (théorème (2.13)): $h_f(x) = \int_{\mathcal{B}} \widehat{h_f}(\gamma)\, \mu_x(d\gamma)$. Il est clair que, pour tout $\gamma \in \mathcal{B}$, l'application $f \mapsto \widehat{h_f}(\gamma)$ définit une mesure de probabilité ν_γ sur E, invariante par P. Si λ est une quelconque mesure de $\mathcal{M}$, nous avons, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_E f(u)\, \lambda(du) = \int_E M_{\varphi(n)}(f)(u)\, \lambda(du) = \int_E \int_{\mathcal{B}} \nu_\gamma(f) \mu_x(d\gamma)\, \lambda(dx).$$

En restriction à une classe ergodique γ, la suite de fonctions $(M_{\varphi(n)}(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $\widehat{h_f}(\gamma) = \nu_\gamma(f)$ [noter que, pour tout $x \in \gamma$, μ_x est la mesure de Dirac en γ]. Il s'ensuit que ν_γ est l'unique mesure de $\mathcal{M}$ portée par γ. On en déduit alors que les fonctions limites $h_f, f \in C(E)$ ne dépendent pas de la suite d'entiers $(\varphi(n))_{n\geq 1}$ choisie. D'où la convergence des moyennes. ∎

(3.3) **Proposition.** *Supposons que, pour toute fonction continue f sur E, la famille de fonctions $\big(M_n(f)\big)_{n\geq 1}$ soit équicontinue. Alors, pour toute fonction f de $C(E)$, la suite de variables aléatoires $\big(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)\big)_{n\geq 1}$ converge, $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in E$, vers la variable aléatoire $\nu_{\eta(\cdot)}(f)$.*

Preuve. Soient $f \in C(E)$ et $x \in E$. On voit aisément que le processus $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{f(X_k)-Pf(X_{k-1})}{k}\right)_{n\geq 1}$ est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$, relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Ce processus converge donc $\mathbb{P}_x$-p.s. et il s'ensuit (lemme de Kronecker) que le processus $\left(S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f(X_k) - Pf(X_{k-1})\right)\right)_{n\geq 1}$ converge $\mathbb{P}_x$-p.s. vers zéro.

Considérons le sous-ensemble Ω_0 de (2.9) et appelons $\widetilde{\Omega_0}$ l'ensemble des éléments ω de Ω_0 pour lesquels la suite $\left(S_n(f)(\omega)\right)_{n\geq 1}$ converge vers zéro, pour toutes les fonctions f de $C(E)$. L'espace $C(E)$ étant séparable, $\widetilde{\Omega_0}$ est un borélien de $\mathcal{F}$ de $\mathbb{P}_x$-mesure 1, pour tout $x \in E$.

Soient $\omega \in \widetilde{\Omega_0}$ et λ_ω une valeur d'adhérence étroite de la suite de mesures de probabilité $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{X_k(\omega)}\right)_{n\geq 1}$. D'après ce qui précède, λ_ω est invariante par P. D'autre part d'après le lemme (2.12), $\lim_{n\to+\infty} d\left(X_n(\omega), \eta(\omega)\right) = 0$; la mesure λ_ω est nécessairement portée par la classe cyclique $\eta(\omega)$. On en déduit que $\lambda_\omega = \nu_{\eta(\omega)}$. D'où le résultat. ■

4. Fonctions harmoniques pour la chaîne espace-temps.

Définitions et notations.

(4.1) Nous appelons Q la probabilité de transition sur l'espace produit $E \times \mathbb{Z}$ définie par :

$$QF(x,n) = \int_E F(y, n+1)\, P(x, dy), \quad (x,n) \in E \times \mathbb{Z}.$$

Nous désignons par $\mathcal{K}$ l'espace vectoriel des fonctions boréliennes bornées Q-harmoniques sur $E \times \mathbb{Z}$. Tout élément H de $\mathcal{K}$, est une suite bornée $\left(h_n = H(\cdot, n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ de fonctions boréliennes sur E telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\, Ph_n = h_{n-1}.$$

Nous notons $\mathcal{K}_c$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}$ constitué des fonctions H telles que la famille de fonctions $\{H(\cdot, n) : n \in \mathbb{Z}\}$ soit équicontinue (et donc relativement compacte dans C(E)).

(4.2) Comme en (2.2), on définit le produit de deux fonctions de $\mathcal{K}$ par:

$$H_1 * H_2 = \lim_{n\to+\infty} Q^n(H_1 H_2).$$

Muni de ce produit et de la norme uniforme $\| \ \|_\infty$, définie par

$$\|H\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|H(\cdot,n)\|_\infty,$$

$\mathcal{K}$ est une algèbre de Banach.

A tout élément h de $\mathcal{H}$ est associé un élément $H = (h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{K}$ défini par $h_k = h$, pour tout entier relatif k. Cette correspondance permet d'identifier l'algèbre $\mathcal{H}$ à une sous-algèbre de $\mathcal{K}$.

(4.3) Définition. Nous disons que l'opérateur P vérifie l'hypothèse (H) si pour toute fonction continue f, la famille de fonctions $\{P^n f \ : \ n \geq 0\}$ est équicontinue et donc relativement compacte dans $C(E)$.

Nous allons établir une représentation intégrale des fonctions de $\mathcal{K}_c$ analogue à celle obtenue pour les éléments de $\mathcal{H}_c$.

Fonctions Q-harmoniques et variables aléatoires asymptotiques.

(4.4) Pour tout entier $n \geq 0$, nous notons $\mathcal{A}_n$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par les variables aléatoires $\{X_k : k \geq n\}$. Nous appelons $\mathcal{A}$ la *tribu asymptotique* ; c'est-à-dire la tribu intersection des tribus $\mathcal{A}_n$. La tribu $\mathcal{I}$ des boréliens invariants par θ est contenue dans la tribu asymptotique. Une variable aléatoire U est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{A}$ si et seulement si, pour tout entier naturel $n \geq 1$, il existe une variable aléatoire U_n telle que $U = U_n \circ \theta^n$; une telle variable sera dite *asymptotique*. Soit n un entier supérieur où égal à 1. Pour tous éléments $x_1, \ldots, x_n$ de E et tout $\omega \in \Omega$, il vient:

$$\forall k \geq 1, U(x_1, \ldots, x_n, \omega) = U_n(\omega) = U_{n+k} \circ \theta^k(\omega).$$

Il s'ensuit que les variables aléatoires $\{U_n : n \geq 1\}$ sont déterminées de façon unique et asymptotiques. Nous écrirons donc $\forall n \geq 1$, $U_n = U \circ \theta^{-n}$.

(4.5) **Proposition.** ([9], ch. 6, prop. 2.3) *Pour tout $H \in \mathcal{K}$ et tout $(x,k) \in E\times\mathbb{Z}$, le processus $\big(H(X_n, n+k)\big)_{n\geq 0}$, défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$, est une martingale bornée relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Ce processus converge $\mathbb{P}_x$-p.s. vers une variable aléatoire asymptotique $U \circ \theta^{-k}$, vérifiant, pour tout entier $n \geq 0$,*

$$H(x,k) = \mathbb{E}_x[H(X_n, n+k)] = \mathbb{E}_x[U \circ \theta^{-k}]$$

et

$$H(X_n, n+k) = \mathbb{E}_x[U \circ \theta^{-k} \mid \mathcal{F}_n] \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.}$$

Réciproquement si U est une variable aléatoire asymptotique bornée, alors la fonction H, définie par $H(x,k) = \mathbb{E}_x[U \circ \theta^{-k}]$ $\big((x,k) \in E \times \mathbb{Z}\big)$, appartient à $\mathcal{K}$ et la martingale $\big(H(X_n, k+n)\big)_{n\geq 0}$ converge, $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in E$, vers $U \circ \theta^{-k}$.

Preuve. La démonstration est analogue à celle de la proposition (2.4).

(4.6) Deux variables aléatoires asymptotiques, U et U', sont dites équivalentes si $\forall (x,k) \in E \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}_x[U \circ \theta^{-k} \neq U' \circ \theta^{-k}] = 0$. Nous appelons $\mathcal{W}$ l'algèbre des classes d'équivalence des variables aléatoires asymptotiques.

(4.7) **Corollaire.** *L'application qui à la classe U de $\mathcal{W}$ associe la fonction Q-harmonique $H(x,k) = \mathbb{E}_x[U \circ \theta^{-k}]$ est un isomorphisme d'algèbre de Banach.*

(4.8) **Lemme.** *Soit H une fonction de $\mathcal{K}$. Pour tout $r \geq 1$, tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in E$, nous avons*

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{E}_x\Big[\int_E [H(y, r+n+k) - H(X_n, n+k)]^2\, P^r(X_n, dy)\Big] \;<\; +\infty.$$

Preuve. La démonstration est identique à celle du lemme (2.7). ■

(4.9) **Corollaire** *Pour tout fonction H de $\mathcal{K}$, tout entier $k \in \mathbb{Z}$ et tout entier $r \geq 1$, la suite de variables aléatoires $\left(\int_E [H(y, r+n+k) - H(X_n, n+k)]^2\, P^r(X_n, dy)\right)_{n\geq 0}$ converge vers zéro, $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in E$.*

Lemmes fondamentaux

Dorénavant on suppose que P vérifie l'hypothèse (H) de (4.3).

(4.10) **Lemme.** *De toute suite d'entiers naturels, $(\varphi(n))_{n\geq 0}$, on peut extraire une sous-suite $(\varphi \circ \psi(n))_{n\geq 0}$, telle que : pour tout $f \in C(E)$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, la suite de fonctions $(P^{\varphi\circ\psi(n)-k} f)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur E. La fonction H définie par,*

$$H(x,k) = \lim_{n\to+\infty} P^{\varphi\circ\psi(n)-k} f(x) \quad (x,k) \in E \times \mathbb{Z}.$$

appartient alors à $\mathcal{K}_c$.

Preuve. Compte tenu de la séparabilité de $C(E)$ et de la propriété de contraction de P, la première assertion, découle du procédé diagonal. La seconde affirmation est évidente. ■

(4.11) **Lemme.** *Soit $(\varphi(n))_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que, pour tout $f \in C(E)$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, la suite de fonctions $(P^{\varphi(n)-k} f)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur E.*

Soit $H = (h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une fonction de $\mathcal{K}_c$. Soit (procédé diagonal) $(\psi(n))_{n\geq 0}$ une suite d'entiers telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la suite de fonctions $(h_{\varphi\circ\psi(n)+k})_{n\geq 0}$, *converge uniformément vers une fonction notée l_k. Alors $L = (l_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un élément de $\mathcal{K}_c$ tel que, pour tout entier k de $\mathbb{Z}$, la suite de fonctions $\left(l_{k-\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$, converge uniformément vers h_k.*

L'espace $\mathcal{K}_c$ est une sous-algèbre séparable de $\mathcal{K}$.

Preuve. Il est clair que L appartient à $\mathcal{K}_c$.

Ceci dit, nous avons:

$$\begin{aligned} h_k &= P^{\varphi(n)} h_{\varphi(n)+k} = P^{\varphi\circ\psi(n)}\ h_{\varphi\circ\psi(n)+k} \\ &= \lim_{n\to+\infty} P^{\varphi\circ\psi(n)} l_k = \lim_{n\to+\infty} P^{\varphi(n)} l_k \\ &= \lim_{n\to+\infty} l_{k-\varphi(n)}; \end{aligned}$$

les convergences étant uniformes sur E.
D'où la première assertion du lemme.

Ce qui précède montre que pour tout élément H de $\mathcal{K}_c$ et tout entier k de $\mathbb{Z}$, la fonction $h_k = H(\cdot,k)$ s'obtient comme limite uniforme d'une suite de fonctions du type $\left(P^{\varphi(n)-k} f\right)_{n\geq 0}$, avec $f \in C(E)$ (Il suffit de prendre $f = l_0$). La séparabilité de $\mathcal{K}_c$ est alors claire.

Soient $H_1 = (h_{1,k})_{k\in\mathbb{Z}}$, $H_2 = (h_{2,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ deux éléments de $\mathcal{K}_c$ et k un entier relatif. Nous avons

$$\begin{aligned} H_1 * H_2(\cdot,k) &= \lim_{n\to+\infty} Q^{n-k}(H_1H_2)(\cdot,k) \\ &= \lim_{n\to+\infty} P^{n-k}(h_{1,n}h_{2,n}). \end{aligned}$$

Soit $\left(\psi(n)\right)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers telle que, pour $i \in \{1,2\}$, la suite de fonctions $\left(h_{i,\varphi\circ\psi(n)}\right)_{n\geq 0}$, converge uniformément sur E vers une fonction notée f_i. Il vient alors

$$H_1 * H_2(\cdot,k) = \lim_{n\to+\infty} P^{\varphi(n)-k}(f_1 f_2);$$

ce qui montre, puisque P vérifie l'hypothèse (H), que $H_1 * H_2$ est encore un élément de $\mathcal{K}_c$. ■

Classes cycliques.

(4.12) Soit $H \in \mathcal{K}_c$. Nous appelons Ω_H le sous-ensemble de Ω, $\mathcal{F}$-mesurable et invariant par θ, constitué des éléments ω tels que:

$i)$ pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, la suite $\Big(H\big(X_n(\omega), k+n\big)\Big)_{n\geq 0}$ converge

$ii)$ pour tout entiers $r \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$, la suite

$$\left(\int_E [H(y, r+n+k) - H(X_n, n+k)]^2\, P^r(X_n, dy)\right)_{n\geq 0}$$

converge vers zéro.
D'après ce qui précède, nous savons que $\mathbb{P}_x[\Omega_H] = 1, \forall x \in E$.

Comme $\mathcal{K}_c$ est séparable, en posant $\Omega_1 = \cap_{H \in \mathcal{K}_c} \Omega_H$, nous obtenons un sous-ensemble de Ω, $\mathcal{F}$-mesurable, invariant par θ, de $\mathbb{P}_x$-mesure 1 pour tout $x \in E$.

(4.13) **Lemme.** *Soient ω un élément de Ω_1 et u une valeur d'adhérence dans E de la suite $\big(X_n(\omega)\big)_{n\geq 0}$. Pour tout élément H de $\mathcal{K}_c$ et tout entier k de $\mathbb{Z}$, nous avons:*

$$\forall r \geq 1,\ \forall x \in \operatorname{Supp}\big(P^r(u,\cdot)\big),\quad H(u,k) = H(x, k+r).$$

Preuve. Soit $(\varphi(n))_{n\geq 0}$ une suite d'entiers naturels telle que $X_{\varphi(n)}(\omega) \to u$. Soit ψ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $f \in C(E)$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, la suite de fonctions $(P^{\varphi\circ\psi(n)-k} f)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur E (lemme (4.10)).

Soit $H = (h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une fonction de $\mathcal{K}_c$. D'après le lemme (4.11), il existe une application strictement croissante ξ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et une fonction $L = (l_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{K}_c$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$a)$ $l_k = \lim_{n\to+\infty} h_{\varphi\circ\psi\circ\xi(n)+k}$;

$b)$ $h_k = \lim_{n\to+\infty} l_{k-\varphi\circ\psi(n)}$.

Des propriétés $ii)$ de (4.12) et $a)$ ci-dessus, il résulte que, pour tous entiers $r \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E \big[L(x, r+k) - L(X_{\varphi\circ\psi\circ\xi(n)}, k)\big]^2 P^r(X_{\varphi\circ\psi\circ\xi(n)}, dx) \quad = \quad 0;$$

et par suite, puisque P respecte $C(E)$,

$$\forall x \in \operatorname{Supp} P^r(u,\cdot),\ L(x, r+k) = L(u,k).$$

De la propriété $b)$ ci-dessus, il vient alors:

$$\forall x \in \operatorname{Supp} P^r(u,\cdot),\ H(x, r+k) = H(u,k). \quad \blacksquare$$

(4.14) Ceci nous amène à considérer le sous-ensemble compact, non vide, de E défini par:

$$D = \big\{u \in E : \forall H \in \mathcal{K}_c, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall r \geq 1,\\ \forall x \in \operatorname{Supp} P^r(u,\cdot),\ H(x, r+k) = H(u,k)\big\}.$$

Comme $\mathcal{H}_c$ s'identifie à une sous-algèbre de $\mathcal{K}_c$, le compact D est contenu dans le compact absorbant F de (2.10). Du lemme (1.4), il résulte que D aussi est absorbant. D'après le lemme (4.13), D contient toutes les valeurs d'adhérence des suites $\{(X_n(\omega))_{n\geq 0} : \omega \in \Omega_1\}$. Tout ce qui a été fait dans la section 2, peut alors se faire en remplaçant F par D. Dans la suite nous supposerons que cette substitution a été faite et donc $D = F$.

(4.15) Nous disons que deux éléments u et v de F sont *équivalents* si, pour tout $H \in \mathcal{K}_c$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $H(u,k) = H(v,k)$. Nous définissons ainsi une relation d'équivalence sur F. Chaque classe d'équivalence fourni un sous-ensemble compact de F. Nous notons $\mathcal{C}$ l'ensemble de ces compacts. Comme $\mathcal{H}_c$ s'identifie à une sous algèbre de $\mathcal{K}_c$, cette partition de F est obtenue par découpage de chaque classe ergodique γ de $\mathcal{B}$. Pour toute classe ergodique γ, nous notons $\mathcal{C}_\gamma$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ qui constituent une partition de γ.

Pour tout $H \in \mathcal{K}_c$, et tout entier $k \in \mathbb{Z}$, nous notons $\hat{H}(\varsigma, k)$ la valeur de $H(\cdot, k)$ sur la classe ς de $\mathcal{C}$.

Soit $(H_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ une suite d'éléments, non nuls, de $\mathcal{K}_c$ dense dans $\mathcal{K}_c$. Nous munissons $\mathcal{C}$ de la distance δ définie par:

$$\delta(\varsigma_1, \varsigma_2) = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{2^p} \frac{\sup_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{H_p}(\varsigma_1, k) - \widehat{H_p}(\varsigma_2, k)|}{\|H_p\|_\infty}.$$

Nous avons alors:

(4.16) **Lemme.** *$(\mathcal{C}, \delta)$ est un espace métrique compact.*

Pour toute classe ς de $\mathcal{C}$, les supports des mesures de probabilités $\{P(u,\cdot) : u \in \varsigma\}$ sont tous contenus dans une unique classe de $\mathcal{C}$, notée $\tau\cdot\varsigma$. L'opérateur P induit alors une isométrie, notée τ, sur l'espace $(\mathcal{C}, \delta)$.

Pour tout $H \in \mathcal{K}_c$, tout $\varsigma \in \mathcal{C}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $\hat{H}(\varsigma, k) = \hat{H}(\tau^{-k}\cdot\varsigma, 0)$.

Preuve. Soit $(\varsigma_n)_{n\geq 0}$ une suite de classes de $\mathcal{C}$. Pour tout entier naturel n, nous choisissons un élément u_n de ς_n. Le procédé diagonal, nous donne une suite strictement croissante d'entiers $(\varphi(n))_{n\geq 0}$ telle que pour tous entiers $p \geq 0$ et $k \in \mathbb{Z}$, la suite $\Big(H_p(u_{\varphi(n)}, k)\Big)_{n\geq 0}$ converge. Quitte à prendre une sous-suite de $(\varphi(n))_{n\geq 0}$, on peut supposer que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge vers un élément u de F. Si ς est la classe de $\mathcal{C}$ qui contient u, il est alors clair que: $\lim_{n\to+\infty} \delta(\varsigma_{\varphi(n)}, \varsigma) = 0$. D'où la compacité.

La deuxième et la dernière assertions résultent de la définition même du compact absorbant $D = F$.

Des relations

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall \varsigma \in \mathcal{C}, \hat{H}(\tau\cdot\varsigma, k+1) = \hat{H}(\varsigma, k),$$

on déduit que, pour tous ς_1 et ς_2 de $\mathcal{C}$, $\delta(\tau\cdot\varsigma_1, \tau\cdot\varsigma_2) = \delta(\varsigma_1, \varsigma_2)$. Comme toute isométrie dans un espace métrique compact est nécessairement surjective et donc bijective, la démonstration du lemme est terminée. ∎

(4.17) L'ensemble des isométries de l'espace métrique compact $(\mathcal{C}, \delta)$ muni de la loi de composition des applications est un groupe topologique compact. Nous désignons par G le sous-groupe fermé, du groupe des isométries, engendré par l'isométrie τ ; G est un groupe compact et abélien. En outre comme tout semi-groupe compact d'un groupe topologique est un groupe, G coïncide avec le semi-groupe fermé engendré par l'isométrie τ. En particulier, il existe des suites d'entiers $(\varphi(n))_{n\geq 0}$ telles que la suite des isométries $\left(\tau^{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$ de G converge vers l'identité (ou élément neutre de G).

(4.18) **Lemme.** *Il existe une application $\mathcal{F}$-mesurable ζ de Ω dans $(\mathcal{C}, \delta)$ telle que:*

i) Pour tout $\omega \in \Omega_1$ et toute suite d'entiers $(\varphi(n))_{n\geq 0}$ pour laquelle, la suite des isométries $\left(\tau^{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$ converge vers l'identité,

$$\lim_{n\to+\infty} \delta\left(X_{\varphi(n)}(\omega), \zeta(\omega)\right) \;=\; 0;$$

ii) Pour tout $\omega \in \Omega_1$, $\zeta \circ \theta(\omega) = \tau \circ \zeta(\omega)$.

Nous donnons le nom de classe cyclique à chaque élément de $\mathcal{C}$.

Preuve. Soient $(\varphi(n))_{n\geq 0}$ et $(\psi(n))_{n\geq 0}$ deux suites d'entiers naturels telle que, les suites des isométries $\left(\tau^{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$ et $\left(\tau^{\psi(n)}\right)_{n\geq 0}$ convergent vers l'identité. Soit $\omega \in \Omega_1$. Soient u_1 et u_2 des valeurs d'adhérence respectivement des suites $\left(X_{\varphi(n)}(\omega)\right)_{n\geq 0}$ et $\left(X_{\psi(n)}(\omega)\right)_{n\geq 0}$. Nous appelons ς_1 et ς_2 les classes cycliques contenant respectivement u_1 et u_2.

Soit H une fonction de $\mathcal{K}_c$. Il existe des applications strictement croissantes ξ_1 et ξ_2 de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que, tout entier k de $\mathbb{Z}$,

$$\lim_{n\to+\infty} H(X_n(\omega), n+k) = \lim_{n\to+\infty} H(u_1, \varphi\circ\xi_1(n)+k) = \lim_{n\to+\infty} H(u_2, \psi\circ\xi_2(n)+k);$$

et par suite,

$$\lim_{n\to+\infty} H(X_n(\omega), n+k) = \hat{H}(\tau^{-k}\cdot\varsigma_1, 0) = \hat{H}(\tau^{-k}\cdot\varsigma_2, 0).$$

D'où l'on déduit que:

$$\forall g \in G,\; \forall k \in \mathbb{Z},\; \hat{H}(g\cdot\varsigma_1, k) = \hat{H}(g\cdot\varsigma_2, k);$$

et donc $\varsigma_1 = \varsigma_2$.

Nous venons de montrer qu'il existe une classe cyclique $\zeta(\omega)$ qui contient toutes les valeurs d'adhérence de la suite $\left(X_{\varphi(n)}(\omega)\right)_{n\geq 0}$, pour toute suite d'entiers naturels $(\varphi(n))_{n\geq 0}$ pour laquelle la suite $\left(\tau^{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$ converge vers l'identité. Nous obtenons ainsi une application mesurable ζ de Ω_1 dans $\mathcal{C}$ vérifiant l'assertion i).

[La mesurabilité de ζ se démontrant de la même façon que celle de η dans le lemme (2.12).] Nous étendons cette application à Ω en lui donnant une valeur arbitraire sur le complémentaire de Ω_1.

D'autre part, pour tout $H \in \mathcal{K}_c$, tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $\omega \in \Omega_1$, la relation

$$\lim_{n\to+\infty} H(X_n \circ \theta(\omega), n+k) = \lim_{n\to+\infty} H(X_n(\omega), n-1+k)$$

implique, d'après ce qui précède,

$$\hat{H}(\tau^{-k} \cdot \zeta \circ \theta(\omega), 0) = \hat{H}(\tau^{-k+1} \cdot \zeta(\omega), 0);$$

et par suite

$$\forall g \in G,\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \hat{H}(g \cdot \zeta \circ \theta(\omega), k) = \hat{H}(g\tau \cdot \zeta(\omega), k).$$

D'où l'on déduit l'assertion *ii*). ∎

Représentation intégrale.

(4.19) Pour tout $x \in E$, nous appelons ρ_x l'image de la probabilité $\mathbb{P}_x$ par l'application ζ du lemme précédent.

Nous notons plus simplement $\hat{H}$ la fonction $\hat{H}(\cdot, 0)$; nous avons (lemme (4.16)) $\forall x \in \varsigma, \forall k \in \mathbb{Z},\ H(x,k) = \hat{H}(\tau^{-k} \cdot \varsigma)$.

(4.20) **Théorème.** *La famille de mesures de probabilité $\{\rho_x : x \in E\}$ sur $\mathcal{C}$ vérifie les propriétés suivantes:*

i) $\forall\, x \in E,\ \int_E \rho_u\, P(x,du) = \tau(\rho_x)$;

ii) $\forall\, \varsigma \in \mathcal{C}, \forall\, x \in \varsigma,\ \rho_x$ *est la mesure de Dirac en* ς.

Toute fonction H de $\mathcal{K}_c$ s'écrit:

$$H(x,k) = \int_{\mathcal{C}} \hat{H}(\tau^{-k} \cdot \varsigma)\, \rho_x(d\varsigma) \quad (x,k) \in E \times \mathbb{Z}.$$

L'application $H \to \hat{H}$ est une isométrie d'algèbres de Banach de $\mathcal{K}_c$ sur $C(\mathcal{C})$.

Preuve. Pour toute fonction continue $\hat{f}$ sur $\mathcal{C}$, nous avons (cf démonstration du théorème (2.13)):

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \hat{f}(\tau \cdot \varsigma)\, \rho_x(d\varsigma) &= \mathbb{E}_x[\hat{f} \circ \tau \circ \zeta] \\ &= \mathbb{E}_x[\hat{f} \circ \zeta \circ \theta] \\ &= \int_E \int_{\mathcal{C}} \hat{f}(\varsigma)\, \rho_u(d\varsigma) P(x,du).\end{aligned}$$

D'où la première propriété de la famille $\{\rho_x : x \in E\}$.

Soient $\varsigma \in \mathcal{C}$ et $x \in \varsigma$. pour tout entier $n \geq 0$, nous avons $\mathbb{P}_x[X_n \in \tau^n \cdot \varsigma] = P^n(x, \tau^n \cdot \varsigma) = 1$. Si bien que, $\mathbb{P}_x$-p.s., $\zeta = \lim_{n\to+\infty} \tau^{\varphi(n)} \cdot \varsigma = \varsigma$ et par suite ρ_x est la mesure de Dirac en ς.

Ceci dit, soit $(\varphi(n))_{n\geq 0}$ une suite d'entiers naturels telle que, la suite des isométries $\left(\tau^{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$ converge vers l'identité. Pour tout $(x,k) \in E \times \mathbb{Z}$, nous avons:

$$\begin{aligned} H(x,k) &= \mathbb{E}_x\big[\lim_{n\to+\infty} H(X_n, n+k)\big] \\ &= \mathbb{E}_x\big[\lim_{n\to+\infty} H(X_{\varphi(n)}, \varphi(n)+k)\big] \\ &= \mathbb{E}_x[\hat{H}(\tau^{-k}\cdot\zeta] \\ &= \int_{\mathcal{C}} \hat{H}(\tau^{-k}\cdot\varsigma)\,\rho_x(d\varsigma). \end{aligned}$$

On prouve enfin que l'application $H \to \hat{H}$ est une isométrie de $\mathcal{K}_c$ sur $C(\mathcal{C})$ en reprenant les arguments de la démonstration du théorème (2.13). ∎

5. Décomposition spectrale.

Définitions et notations.

(5.1) Nous notons $\mathbb{T}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{T}$, nous désignons par $\mathcal{H}_\alpha$ [resp. $\mathcal{H}_{\alpha,c}$] l'espace vectoriel des fonctions boréliennes bornées [resp. des fonctions continues] f sur E telles que $Pf = \alpha f$. Nous appelons $\mathcal{P}$ [resp. $\mathcal{P}_c$] le fermé de $C(E)$ constitué par la réunion des $\mathcal{H}_\alpha, \alpha \in \mathbb{T}$ [resp. des $\mathcal{H}_{\alpha,c}, \alpha \in \mathbb{T}$].

(5.2) Soient $\alpha \in \mathbb{T}$ et $h \in \mathcal{H}_\alpha$. La fonction H définie par $H(x,k) = \alpha^{-k}h(x)$, $(x,k) \in E \times \mathbb{Z}$ appartient à $\mathcal{K}$. Soient $h_1 \in \mathcal{H}_\alpha$ et $h_2 \in \mathcal{H}_\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$. Le produit $H_1 * H_2$ des éléments de $\mathcal{K}$ correspondants respectivement à h_1 et h_2 s'écrit $H_1 * H_2(x,k) = (\alpha\beta)^{-k}h(x)$; où h est un élément de $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$.

Le fermé $\mathcal{P}$ [resp. $\mathcal{P}_c$] s'identifie alors à un fermé de $\mathcal{K}$, stable pour le produit. Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}$ [resp. $\mathcal{K}_c$] engendré par ce fermé constitue donc une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{K}$ [resp. $\mathcal{K}_c$].

(5.3) Nous notons $Sp(P)$ l'ensemble des nombres complexes α de $\mathbb{T}$ tels que l'espace vectoriel $\mathcal{H}_{\alpha,c}$ ne soit pas réduit à la fonction nulle.

Nous appelons *caractère* sur G tout homomorphisme de groupes de G dans $\mathbb{T}$. Nous désignons par $\hat{G}$ le groupe des caractères sur G.

Étude de $\mathcal{P}_c$.

(5.4) **Théorème.** *Soit h un élément de $\mathcal{P}_c$. Pour toute classe cyclique ς nous notons $\hat{h}(\varsigma)$ la valeur de la fonction h sur ς.*

La formule

$$h(x) \;=\; \int_{\mathcal{C}} \hat{h}(\varsigma)\,\rho_x(d\varsigma)$$

établit une isométrie de $\mathcal{P}_c$ sur l'ensemble des fonctions $\hat{h}$ de $C(\mathcal{C})$ pour lesquelles Il existe un caractère χ sur G tel que:

$$\forall \varsigma \in \mathcal{C}, \forall g \in G,\; \hat{h}(g\cdot\varsigma) = \chi(g)\hat{h}(\varsigma).$$

Preuve du théorème (5.4). Soient $\alpha \in Sp(P)$ et $h \in \mathcal{H}_{\alpha,c}$. D'après le théorème (4.20) nous avons, pour tout $(x,k) \in E \times \mathbb{Z}$,

$$\alpha^{-k}h(x) \;=\; \int_{\mathcal{C}} \hat{h}(\tau^{-k}\cdot\varsigma)\;\rho_x(d\varsigma).$$

Si bien que

$$\forall \varsigma \in \mathcal{C}, \forall k \in \mathbb{Z},\; \hat{h}(\tau^{-k}\cdot\varsigma) = \alpha^{-k}\,\hat{h}(\varsigma).$$

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit alors de montrer qu'il existe un caractère χ sur G tel que $\chi(\tau) = \alpha$.

De la dernière égalité, il résulte que pour toute suite d'entiers $(\varphi(n))_{n\geq 0}$ telle que, la suite des isométries $\left(\tau^{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$ converge vers l'identité la suite $(\alpha^{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge vers 1. Soit g une isométrie de G. Considérons une suite d'entiers naturels $(\psi(n))_{n\geq 0}$ telle que $\tau^{\psi(n)} \to g$. A l'aide de la remarque précédente, on voit aisément que la suite $\left(\alpha^{\psi(n)}\right)_{n\geq 0}$ converge et que cette limite ne dépend pas du choix de la suite $(\psi(n))_{n\geq 0}$. En posant $\chi(g) = \lim_{n\to+\infty} \alpha^{\psi(n)}$, on défini un caractère sur G qui vérifie la propriété voulue. ■

(5.5) **Corollaire.** *La sous-algèbre (ou sous-espace) de $\mathcal{K}_c$ engendré par $\mathcal{P}_c$ est dense dans $\mathcal{K}_c$.*

Preuve. Il suffit de montrer que la famille de fonctions $\{\hat{h} : h \in \mathcal{P}_c\}$ sépare les points de $\mathcal{C}$.

Nous désignons par κ la mesure de Haar normalisée sur le groupe compact abélien G. Pour tout caractère χ sur G et toute fonction H de $\mathcal{K}_c$, nous appelons $\hat{h}_\chi$ la fonction de $C(\mathcal{C})$ définie par

$$\hat{h}_\chi(\varsigma) = \int_G \chi(g)\hat{H}(g\cdot\varsigma)\,\kappa(dg) \quad (\varsigma \in \mathcal{C}).$$

Pour tout $g \in G$, nous avons $\hat{h}_\chi(g\cdot\varsigma) = \chi^{-1}(g)\hat{h}_\chi(\varsigma)$. Les fonctions $\{\hat{h}_\chi : \chi \in \hat{G}\}$ correspondent donc à des fonctions de $\mathcal{P}_c$ par l'isométrie du théorème (5.4).

Soient ς_1 et ς_2 deux classes cycliques telles que $h(\varsigma_1) = h(\varsigma_2)$ pour toute fonction h de $\mathcal{P}_c$. De ce qui précède, il résulte que

$$\forall H \in \mathcal{K}_c, \forall \chi \in \hat{G},\ \hat{h}_\chi(\varsigma_1) = \hat{h}_\chi(\varsigma_2).$$

Autrement dit, pour tout $H \in \mathcal{K}_c$, les fonctions continues f_1 et f_2 sur G définies par $f_i(g) = \hat{H}(g \cdot \varsigma_i) \quad (g \in G) \quad (i \in \{1,2\})$, ont les mêmes coefficients de Fourier. Elles sont donc égales ([11]) et l'on a $\forall H \in \mathcal{K}_c, \forall g \in G,\ \hat{H}(g \cdot \varsigma_1) = \hat{H}(g \cdot \varsigma_2)$; ce qui montre que $\varsigma_1 = \varsigma_2$.

D'où le résultat. ■

Décomposition spectrale.

(5.6) **Théorème.** *Supposons que, pour toute fonction continue f, la famille de fonctions $\{P^n f : n \geq 0\}$ soit équicontinue.*

Alors l'espace des fonctions continues $C(E)$ sur E se décompose en la somme directe de deux sous-espaces fermés $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ tels que:

i) $\mathcal{E}_1$ est le sous-espace fermé de $C(E)$ engendré par les fonctions propres de P associées à des valeurs propres de module 1.

ii) pour toute fonction f de $\mathcal{E}_2$, la suite de fonctions $(P^n f)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Preuve. Soit $\left(\varphi(n)\right)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers naturels telle que:

i) la suite $\left(\tau^{\varphi(n)}\right)_{n\geq 0}$ converge vers l'identité ;

ii) pour toute fonction f de $C(E)$ et tout entier k de $\mathbb{Z}$, la suite de fonctions $\left(P^{\varphi(n)-k} f\right)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur E.

En posant, pour tout $(x,k) \in E \times \mathbb{Z}$, $H_f(x,k) = \lim_{n\to+\infty} P^{\varphi(n)-k} f(x)$, nous obtenons une fonction H_f de $\mathcal{K}_c$ qui s'écrit donc (théorème (4.20))

$$H_f(x,k) = \int_C \widehat{H_f}(\tau^{-k} \cdot \varsigma)\, \rho_x(d\varsigma).$$

Pour $f \in C(E)$, posons:

$$\Pi f = \lim_{n\to+\infty} P^{\varphi(n)} f = H_f(\cdot, 0) = \int_C \widehat{H_f}(\varsigma)\, \rho_\cdot(d\varsigma).$$

Des égalités

$$\forall x \in E, \forall n \geq 0,\ P^{\varphi(n)} \Pi f(x) = \int_C \widehat{H_f}(\tau^{\varphi(n)} \cdot \varsigma)\, \rho_x(d\varsigma),$$

il résulte que l'on définit ainsi un projecteur sur $C(E)$ tel que la suite de fonctions $\left(P^{\varphi(n)}(f-\Pi f)\right)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur E vers la fonction nulle. Comme P est une contraction de $C(E)$, on en déduit que la suite de fonctions $\left(P^n(f-\Pi f)\right)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur E vers la fonction nulle. Enfin d'après le corollaire (5.5), l'image du projecteur Π n'est autre que le sous-espace fermé de $C(E)$ engendré par les fonctions propres de P associées à des valeurs propres de module 1. D'où le résultat. ■

Bibliographie

[1] J.-P. CONZE et A. RAUGI, Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications, *Bull. Soc. math. France*, 118, 1990, p.273-310.

[2] K. DE LEEUW et I. GLICKSBERG, Applications of almost periodic compactifications, *Acta Math.*, 105, 1961, p.63-67.

[3] J.-L. DOOB, Stochastic processes, John Wiley, Neww York, 1953.

[4] J. JAMISON, Asymptotic behavior of successive iterates of continuous functions under a Markov operator, *J. Math. Anal. Appl.*, 9, 1964, p.203-214.

[5] J. JAMISON, Ergodic decompositions induced by certain Markov operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 117, 1965, p.451-468.

[6] J. JAMISON et R. SINE, Irreducible almost periodic markov operators, *J. Math. and Mech.*, 18, 11,1969, p.1043-1057.

[7] J. NEVEU, Bases Mathématiques du calcul des probabilités, Masson, 1964.

[8] A. RAUGI, Théorie spectrale d'un opérateur de transition sur un espace métrique compact,*Ann. Inst. Henri Poincaré*, 28, 2, 1992, p. 281-309.

[9] D. REVUZ, Markov chains, North Holland Pub. Comp., 1975.

[10] M. ROSENBLATT, Equicontinuous Markov operators, *Teor. Verojatnost. i Primenen*, 9, 1964, p.205-222.

[11] W. RUDIN, Fourier analysis on groups, Interscience publishers, John Wiley and sons, New York - London, 1967.