DOMINIQUE PY

Les erreurs en géométrie : une étude de cas

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1994-1995, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques et de l'E.I.A.O. », , exp. n[o] 1, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1994-1995___3_A1_0>

Les erreurs en géométrie : une étude de cas[1]

Dominique Py
IRISA
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex

1 Introduction

Alors que les systèmes classiques d'Enseignement Assisté par Ordinateur (E.A.O.) commençaient à se répandre, l'utilisation de l'intelligence artificielle et l'apparition des Tuteurs Intelligents (T.I.), dans les années 1970, ont ravivé l'intérêt pour un certain nombre de problématiques. Parmi celles-ci, les erreurs des élèves et leur traitement automatisé ont reçu une attention particulière. Il ne s'agit plus, comme en E.A.O., de prévoir une liste fermée de réponses et d'associer à chacune un message préenregistré ou un branchement vers la prochaine question, mais plutôt d'analyser les processus générateurs d'erreur afin d'interpréter au mieux les réponses de l'élève.

Les systèmes Buggy et Debuggy [Burton], parmi les premiers réalisés, constituent un bon exemple. Buggy effectue des soustractions simples (du type 4538-2827=?). Il est composé d'un réseau de procédures élémentaires (calculer une retenue, comparer deux chiffres, etc.). Chacune de ces procédures peut être remplacée par une procédure incorrecte : Buggy donne alors des résultats faux, mais ses erreurs sont systématiques et repérables. Buggy est utilisé en formation des maîtres, pour montrer que des réponses d'élèves, incompréhensibles en apparence, peuvent résulter d'un processus faux mais logique et stable. Basé sur le même principe, Debuggy effectue un diagnostic : il reçoit un ensemble de réponses données par un élève et cherche à en déduire les procédures, correctes ou non, employées par cet élève. Il a été testé avec succès par des centaines d'élèves, et ces résultats ont été repris par ceux qui plaident pour le caractère non aléatoire des erreurs.

L'objectif de cette étude est l'analyse des erreurs commises par les élèves en vue de simuler la génération de ces erreurs par un système informatique. Le domaine retenu est la géométrie élémentaire au collège, au moment de l'apprentissage de la démonstration.

L'hypothèse à la base de ce travail est que les erreurs ne sont pas des réponses aléatoires, mais résultent d'un processus rationnel. Cette idée n'est pas nouvelle : à la suite de Bachelard, qui a développé la notion d'**obstacle épistémologique** [Bachelard], Guy Brousseau affirme : "*L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiriques ou behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui maintenant se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en*

1. Cet article a été publié dans les actes du séminaire "Didactique et technologies cognitives en mathématiques" de l'IMAG de Grenoble, 1993-1994.

obstacles. L'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise" [Brousseau]. Or, si les réponses ne sont pas données au hasard, il doit être possible de modéliser les processus qui génèrent de telles réponses. Pour tester cette hypothèse, nous avons proposé un exercice de type "démonstration à trous" à plusieurs classes de cinquième et de quatrième. Les résultats ont été analysés, et ont permis de dégager quelques-unes des difficultés rencontrées par les élèves (paragraphe 2). Sur la base de ces résultats, nous avons réalisé un programme qui génère des réponses, correctes et incorrectes, pour ce même type d'exercice. Les réponses fournies par le programme sont globalement similaires aux réponses des élèves (paragraphe 3). Ceci nous amène à proposer un nouveau point de vue pour l'analyse des réponses en EIAO, basé sur les mécanismes d'analogie et d'abduction (paragraphe 4).

2 Test et résultats

Nous décrivons le contenu du test et les conditions de son déroulement, puis nous en donnons les résultats et proposons une première analyse des réponses.

2.1 Description du test

Le problème posé aux élèves consiste à remplir des "trous" dans des pas de démonstration. Ce type d'exercice nous a paru, relativement à l'objectif visé, un bon compromis entre une tâche trop ouverte (une démonstration serait trop complexe à analyser) et une tâche trop fermée (faire choisir une réponse dans une liste prédéfinie biaiserait les résultats).

L'exercice comporte dix questions indépendantes (cf. annexe). Chaque pas est constitué d'une à trois hypothèse(s), un théorème (ou une définition) et une conclusion. L'élément manquant peut être une hypothèse (voire plusieurs), le théorème, ou la conclusion. Sur environ la moitié des copies, chaque question est accompagnée de la figure correspondante. Le test est donné à cent vingt élèves de cinquième, en juin 1993[2]. Les groupes "avec figure" et "sans figure" sont de niveaux sensiblement équivalents.

2.2 Résultats généraux

La première observation concerne le taux global de réussite. On pouvait s'attendre à ce que le taux de réussite chez les élèves qui disposaient de la figure soit supérieur à celui des élèves qui n'en disposaient pas. Or, le pourcentage de réponses correctes est presque identique : 48% "avec figure", 50% "sans figure". En fait, il existe bien une différence entre ces deux groupes, mais elle se situe ailleurs. Les réponses peuvent être divisées en cinq catégories : réponse attendue, absence de réponse, affirmation vraie (c.a.d. vérifiée sur la figure, mais différente de la réponse attendue), affirmation fausse (c.a.d. non vérifiée sur la figure) et affirmation absurde (par exemple, "*A //*

[2]Le même test a été donné depuis en classe de quatrième dans différents collèges, et les résultats ont été similaires

B" alors que A et B sont des points). On constate alors que le taux d'affirmations vraies est nettement supérieur "avec figure" (38% contre 24%) tandis que le taux d'affirmations fausses ou absurdes est supérieur "sans figure" (16% contre 6%). Il semble donc que la figure constitue une source de conjectures, sur laquelle les élèves lisent des réponses (pas nécessairement en lien avec la réponse attendue), d'où le grand nombre d'affirmations vraies "avec figure". Mais la figure constitue également un moyen de contrôler des réponses, en écartant des assertions qui ne sont pas validées par cette figure, d'où le grand nombre d'affirmations fausses ou absurdes chez ceux qui ne disposent pas de ce moyen de validation.

La question 1 est moyennement réussie (52%). Beaucoup donnent des formes instanciées du théorème ("Si une droite (d) est perpendiculaire à (e) ... ") ou recopient directement le théorème donné en question 2 !

La question 2 est bien réussie (75%).

La question 3 est moyennement réussie (42%). Les élèves ne disposant pas de la figure réussissent mieux cette question (52%). En effet, les élèves disposant de la figure donnent souvent *une seule* des deux hypothèses nécessaires. Le fait d'avoir mentionné la troisième droite au moins une fois leur paraît-il une condition suffisante?

La question 4 est assez bien réussie (60%).

La question 5 est la mieux réussie (81%). Cette définition du parallélogramme est habituellement bien maîtrisée par les élèves.

La question 6 est moyennement réussie (55%). Beaucoup évoquent des côtés parallèles, voire perpendiculaires.

La question 7 est la moins réussie (3%), en même temps que celle qui suscite le moins d'abstention (0%). Presque tous les élèves citent un ou plusieurs angles droits (la réponse $(CD) \perp (DA)$ est la plus fréquente). Deux raisons à cela : le rectangle est difficilement perçu comme un parallélogramme particulier, et la définition du rectangle comme quadrilatère ayant quatre angles droits est très prégnante.

La question 8 est moyennement réussie (42%).

La question 9 est moyennement réussie (56%). On retrouve en conclusion diverses paraphrases de l'hypothèse.

La question 10 est peu réussie (16%) et présente le plus fort taux d'abstention (21%). L'alignement des points n'est pas perçu comme une condition nécessaire.

Alors que l'on trouve parfois la conclusion recopiée comme hypothèse, ou une hypothèse recopiée comme conclusion, on n'observe jamais deux hypothèses identiques. A la question 10, plusieurs élèves paraphrasent la première hypothèse ("$AM = BM$ ", "$MB = MA$ ", ...) mais ne recopient jamais exactement "$MA = MB$ ". Il semble que, même si le statut de l'hypothèse et de la conclusion n'est pas toujours acquis, les élèves ont la certitude que deux hypothèses sont nécessairement distinctes (au moins syntaxiquement).

2.3 Analyse des difficultés rencontrées

Une analyse globale des réponses permet de dégager un certain nombre d'obstacles sur lesquels butent les élèves. Rappelons tout d'abord que, de la cinquième à la quatrième, on passe d'une géométrie d'observation à une géométrie de déduction : il ne suffit plus de "voir" une propriété sur une figure, il faut être capable de la démontrer de manière rigoureuse. Ce nouveau contrat n'est pas encore véritablement installé au moment du test (en fin de cinquième). D'autre part, la tâche proposée est inhabituelle : une minorité d'élèves n'a pas compris la consigne, et complète la copie par les mots "Hypothèse", "Théorème" et "Conclusion".

Les difficultés fréquemment observées sont les suivants :

- Récitation "par cœur". La présence d'un mot ou d'une expression déclenche la récitation d'une définition ou d'une propriété correcte, mais sans rapport avec la tâche proposée.

- La perception prime sur le raisonnement. C'est la présence, déjà évoquée, d'affirmations "piochées" sur la figure, sans lien avec le théorème donné.

- Utilisation d'un autre théorème (existant ou inventé). Dans beaucoup de copies, il semble que le théorème n'est pas lu, ou du moins, pas pris en compte. Il arrive que la conclusion concorde avec les hypothèses, mais relativement à *un autre* théorème. On a parfois l'impression que les élèves fabriquent de nouveaux théorèmes à partir de bribes de théorèmes existants (ceci est particulièrement visible à la question 1).

- Conditions non nécessaires ou non suffisantes. Le manque ou le surnombre de propriétés est fréquent. Des élèves ne disposant pas de la figure donnée ont pu tracer une figure particulière, et y lire des propriétés non valides.

- Instanciations incorrectes. Par exemple, pour la question 9, on trouve parfois "$(AB) \perp (BC)$" au lieu de "$(AB) \perp (AC)$". Est-ce dû à une simple erreur d'inattention, ou au fait que l'élève manipule des symboles sans en comprendre la signification?

- Confusion de vocabulaire. Les termes "parallèle" et "perpendiculaire" sont souvent intervertis, alors qu'il semble que les élèves connaissent et distinguent les notions de parallélisme et d'orthogonalité. Les termes désignant les différents quadrilatères paraissent également interchangeables, mais cette fois la confusion porte aussi sur le sens.

L'analyse des réponses erronées n'est pas simple, d'autant qu'une même réponse peut donner lieu à plusieurs interprétations, parfois éloignées. Mais notre objectif n'est pas de reproduire fidèlement le raisonnement des élèves. Nous cherchons seulement à générer les mêmes réponses, pas nécessairement de la même manière. Une analyse approfondie des procédures des élèves n'est donc pas indispensable ici. L'analyse de la structure des questions et des réponses fournit une base suffisante pour ce travail, que nous allons maintenant décrire.

3 Génération de réponses

Le problème peut se définir ainsi : étant donné une question Q, générer n réponses R1, R2, ... Rn plausibles (c.a.d. que les élèves ont données, ou auraient pu donner). Pour cela, il est nécessaire de définir d'une part les structures de données décrivant les questions et les réponses, d'autre part les mécanismes de production de réponse.

3.1 Représentation des données

On considère

- des objets géométriques (points, droites, cercles), chaque objet étant désigné par une lettre (A, B, C, ...).

- des propriétés géométriques exprimées par des prédicats dont les arguments sont des objets géométriques. Par exemple, le prédicat "parallèle" a deux arguments de type droite, et la propriété " (D) est parallèle à (E) " se traduit par *parallèle(D,E)*.

- des squelettes de théorème, composés d'hypothèses (une à trois propriétés) et d'une conclusion (une propriété). Ces propriétés sont des prédicats **sans** leurs arguments.

- des règles d'instanciation. Ces règles expriment différentes manières de transformer un n-uplet d'arguments en un autre n-uplet d'arguments. Par exemple, la règle $4 \rightarrow 2 \times 2$ exprime diverses transformations d'un quadruplet en un doublet de doublets, telles que : (ABCD) $\rightarrow$ (AB)(CD), (ABCD) $\rightarrow$ (AC)(BD), etc.

3.2 Base de théorèmes et de règles d'instanciation

Pour mettre en œuvre le système, il est nécessaire de fixer une liste de propriétés, une liste de squelettes et une liste de règles. Ce choix est relativement arbitraire. Nous sommes restés proches du contenu du test, mais l'élargissement du vocabulaire ne devrait pas poser de difficultés.

La liste des propriétés retenue est la suivante : parallèle, perpendiculaire, égale, parallélogramme, losange, rectangle.

Pour définir la base de théorèmes et de règles, nous sommes partis de théorèmes existants. De chaque théorème, nous avons extrait un squelette et une règle d'instanciation. Par exemple, du théorème "Si deux droites sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles" (ou encore "Si (x) est parallèle à (y), et (y) est parallèle à (z), alors (x) est parallèle à (z)"), on extrait le squelette *parallèle, parallèle* $\rightarrow$ *parallèle* et la règle "$4 \rightarrow 2$" (c.a.d. *(xyyz)* $\rightarrow$ *(xz)*). De la définition "Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors il a ses côtés opposés égaux", on extrait le squelette *parallélogramme* $\rightarrow$ *égale* et la règle "$4 \rightarrow 2 \times 2$" (c.a.d. *(wxyz)* $\rightarrow$ *(wx)(yz)*, ou encore *(wxyz)* $\rightarrow$ *(wz)(xy)*).

Les théorèmes et définitions retenus sont les suivants :

"Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles"

"Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre"

"Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles"

"Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles"

"Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés égaux"

"Un quadrilatère qui a deux côtés opposés égaux et parallèles est un parallélogramme"

"Un parallélogramme qui a deux côtés adjacents égaux est un losange"

"Un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires est un losange"

"Un parallélogramme qui a deux côtés adjacents perpendiculaires est un rectangle"

"Un parallélogramme qui a ses diagonales égales est un rectangle"

De plus, nous avons défini des squelettes de théorèmes "presque vrais", résultant de l'assemblage de théorèmes existants. Ce sont :

"Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont perpendiculaires entre elles"

"Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est parallèle à l'autre"

"Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont perpendiculaires entre elles"

Les règles d'instanciation retenues sont :

$4 \rightarrow 2$	Suppression
$2 \rightarrow 3$	Introduction simple
$2 \rightarrow 2 \times 2$	Introduction double
$4 \rightarrow 2 \times 2$	Extraction de côtés ou diagonales
$2 \times 2 \rightarrow 4$	Composition de quadrilatère
$n \rightarrow n$	Identité

3.3 Construction de réponses

Une question est fournie au système sous la forme d'un squelette de théorème incomplet (auquel il manque une hypothèse ou une conclusion) et un n-uplet d'objets. Une réponse est produite sous la forme d'une propriété et d'un n-uplet d'objets.

Le système travaille en deux étapes. Il cherche tout d'abord à déterminer la propriété manquante dans la question, puis il instancie cette propriété, en respectant son arité. Pour trouver la propriété manquante, il essaie de "superposer" le théorème de la question posée avec chaque théorème de sa base de données. Lorsque les deux coïncident, il retient comme solution la propriété du théorème correspondant au "...?" de la question. Pour instancier cette propriété, il applique toutes les règles d'instanciation qui permettent de passer du n-uplet de la question à un n-uplet satisfaisant l'arité de la propriété solution.

Le programme, écrit en langage Prolog, est non-déterministe, c.a.d. qu'il retourne **toutes** les réponses distinctes qu'il réussit à produire.

3.4 Exemple

Etudions le fonctionnement du système sur un exemple. Soit la question :

Hypothèses : (AB) // (CD), ...?

Théorème : Un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles deux à deux est un parallélogramme

Conclusion : ABCD est un parallélogramme.

Cette question est fournie au système sous la forme :

parallèle, ...? → parallélogramme (squelette de théorème incomplet)

(ABCD) (quadruplet de points)

a) Détermination de la propriété manquante

Le squelette de théorème incomplet est superposé aux théorèmes de la base. Cette superposition réussit dans deux cas :

- parallèle, parallèle → parallélogramme (Le théorème de la question)
- parallèle, égale → parallélogramme ("Un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles et égaux est un parallélogramme")

Deux propriétés sont retenues comme solutions : "parallèle" dans le premier cas, "égale" dans le second.

b) Instanciation des solutions

Le n-uplet de la question (ABCD) est d'arité 4. La première solution, (parallèle (x,y)), est d'arité 2. Toutes les règles de type $4 \rightarrow 2 \times 2$ ou bien $4 \rightarrow 2$ sont donc applicables. Les solutions finales produites sont "(AB) // (CD)", "(AD) // (BC)", "(A) // (B)", etc.

La seconde solution (égale(x,y)) est d'arité 2 également. De la même façon, les règles de type $4 \rightarrow 2 \times 2$ ou bien $4 \rightarrow 2$ s'appliquent. Les solutions finales produites sont "AB = CD", "AD = BC", "A = B", etc.

On note que la réponse attendue (AD) // (BC) figure parmi les solutions produites.

3.5 Extraction du n-uplet de l'énoncé

Une phase de traduction "à la main" est nécessaire pour passer de la question en français à la question fournie au programme. Cette traduction est immédiate en ce qui concerne le squelette de théorème, mais pose problème en ce qui concerne le n-uplet d'objets. En effet, il arrive souvent que plusieurs traductions soient possibles, et le choix effectué a des répercussions sur les réponses produites. Considérons un exemple extrait du test, la question 3 :

Hypothèses : ...?

Théorème : Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles

Conclusion : (AB) // (MN).

Trois traductions se présentent pour les objets (AB) et (MN), et induisent des réponses différentes. Supposons que le n-uplet solution soit de type 2×2, et considérons ces trois cas.

• Un doublet ((AB)(MN))

La règle $2 \rightarrow 2 \times 2$ (introduction) s'applique, et on obtient parmi les réponses : (AB) // (d) et (d) // (MN).

• Un doublet de doublets (((A)(B))((M)(N)))

La règle $2 \times 2 \rightarrow 2 \times 2$ (identité) s'applique, et on obtient parmi les réponses : (A) $\perp$ (M) et (B) $\perp$ (N).

• Un quadruplet (ABMN)

La règle $4 \rightarrow 2 \times 2$ (côtés opposés) s'applique, et on obtient parmi les réponses : (AM) // (BN).

Ces trois réponses (la première étant la réponse attendue) ont été trouvées dans les copies des élèves. Il n'y a donc pas de "meilleure" traduction possible, tous les découpages possibles doivent être essayés si l'on veut obtenir un ensemble représentatif de réponses.

3.6 Bilan

Le programme a fonctionné sur les questions du test, et la plupart des erreurs observées sur les copies ont été reproduites. Par ailleurs, on peut noter la proximité du nombre de réponses obtenues par le test et par le programme. Autrement dit, lorsque les élèves ont donné un grand nombre de réponses différentes à une question, le programme produit aussi de nombreuses réponses.

Bien entendu, la validation d'un tel programme reste difficile, faute de critères sûrs. Un certain nombre de choix (par exemple la séparation entre choix de la propriété et choix de l'instanciation) ont été faits de manière empirique, et se sont révélés efficaces *a posteriori*. Il serait intéressant d'étudier pourquoi, sur le plan épistémologique, ces choix sont judicieux. Une autre extension de ce travail consiste à explorer le processus réciproque de la génération automatique de réponses, à savoir l'analyse automatique des réponses. C'est le sujet que nous abordons maintenant.

4 Modélisation du diagnostic en EIAO

L'individualisation de l'enseignement et l'adaptation à un élève particulier sont des objectifs centraux de l'EIAO. Cette adaptation est habituellement réalisée par le biais de la construction et de l'exploitation d'un **modèle de l'élève**, ensemble d'informations que possède le système sur les connaissances et les performances de l'élève [Wenger]. Ces informations sont de diverses natures : connaissances factuelles ou procédurales, plans, stratégies ou heuristiques. Elles sont soit recueillies directement, soit reconstruites, à partir de l'interaction élève/système.

La représentation usuelle du modèle de l'élève est basée sur les règles (d'autres représentations ont été proposées, mais nous ne les décrirons pas ici). Par exemple, en arithmétique, la règle "0-n=n" représente une erreur courante, et explique un résultat tel que "403-281=282" : l'élève a procédé correctement pour la première et la dernière colonne, mais a effectué "0-8=8" pour la seconde. De même, en algèbre élémentaire, des règles telles que $a/b \times c/d = ac/bd$ (correcte) et $a/b + c/d = (a+c)/(b+d)$ (incorrecte) peuvent constituer des éléments du modèle de l'élève.

Cette représentation peut, du moins en théorie, s'adapter à la géométrie. On obtient des règles telles que :

Si (d1)//(d2) et (d2)//(d3) alors (d1)//(d3) (correcte)
Si (d1)//(d2) et (d2)//(d3) alors (d1)$\perp$(d3) (incorrecte)

Cependant, dans la pratique, le nombre de règles devient rapidement prohibitif dès que l'on veut représenter exhaustivement les procédures erronées des élèves. On perd alors tout le bénéfice d'une représentation par règles.

L'alternative que nous proposons consiste à se baser non plus sur un ensemble prédéfini de règles, mais sur les mécanismes généraux, les principes du raisonnement. Les mécanismes que nous considérons ici sont **l'analogie** et **les contraintes**. Le diagnostic lui-même, c.a.d. le processus d'explication du comportement observé, est typiquement une forme de raisonnement par **abduction**. Nous allons détailler ces trois points.

4.1 Analogie

L'analogie est considérée comme l'un des principaux mécanismes du raisonnement humain [Haton et al.]. C'est pourquoi elle est l'objet de nombreuses études en psychologie et en sciences cognitives. Elle est au cœur de l'apprentissage humain : selon certains auteurs, la différence entre novice et expert provient de ce que le novice s'appuie sur des informations de surface, tandis que l'expert met en correspondance des structures de systèmes. D'autre part, le raisonnement analogique a été implanté dans des systèmes d'intelligence artificielle, essentiellement sous la forme du "raisonnement par cas".

L'analogie se fonde sur la notion de similitude d'objets dans un monde donné, du type *A est à B ce que C est à D*. De manière générale, l'analogie exploite un mécanisme de mise en correspondance de structures, afin de transposer des connaissances d'un problème à un autre. La formalisation de cette notion, en vue d'une réalisation pratique, pose la question difficile de savoir quand deux objets sont similaires, dans un certain contexte. Considérons un problème d'analogie graphique simple à base de ronds et de triangles, grands ou petits.

A : ∘ ▷	C : ▹ ◯
B : ∘	D : ?

Il s'agit de trouver le schéma D qui est à C ce que B est à A. Pour obtenir D, il faut exprimer la transformation qui fait passer de A en B, et appliquer la même transformation à C. Or, on peut imaginer plusieurs solutions.

- On passe de A à B en supprimant le triangle, donc D = ◯
- On passe de A à B en supprimant le grand objet, donc D = ▹

- On passe de A à B en remplaçant tout par un petit rond, donc D = o

Le raisonnement analogique intervient dans la résolution de problème en géométrie. En effet, la remémoration d'un problème similaire, d'une sous-figure déjà rencontrée, constituent des appuis importants. Dans le cas de notre test, la tâche consiste précisément à faire l'analogie avec les théorèmes connus pour retrouver l'élément manquant. Mais une analogie basée sur des traits non pertinents donnera des résultats faux. Considérons par exemple la seconde question du test.

Sachant que de A="(d3)$\perp$(d2) et (d2)//(d1)" on déduit B="(d1)$\perp$(d3)",

quelle propriété D peut-on déduire de C="(d2)$\perp$(d3) et (d1)//(d3)" ?

On peut imaginer trois réponses.

- (d1)$\perp$(d2) : les droites perpendiculaires sont celles qui ne sont citées qu'une fois dans les hypothèses.
- (d3)$\perp$(d2) : les droites perpendiculaires sont la première et la dernière citées dans les hypothèses.
- (d1)$\perp$(d3) : les droites perpendiculaires sont celles citées dans B.

L'analogie a donc un rôle de production de candidats solutions, acceptables ou non selon que l'analogie est basée sur des traits pertinents du problème ou sur des traits de surface.

4.2 Contraintes

Nous utilisons ici le terme "contrainte" au sens de "relation entre deux ou plusieurs variables, qui restreint les valeurs possibles pour ces variables". Par exemple, soient deux variables X et Y, chacune prenant ses valeurs dans l'ensemble {1,2,3}. Neuf affectations de valeurs sont possibles au total. Si l'on introduit la contrainte "X est différent de Y", on interdit trois possibilités, et il ne reste plus que six affectations légales.

Les expressions géométriques (propriétés, théorèmes, déductions) sont soumises à un certain nombre de contraintes. Par exemple, dans un pas de déduction, l'hypothèse doit être différente de la conclusion. Dans l'expression "x est le milieu de [yz]", les variables x, y, et z doivent désigner des points, et ces points doivent être tous distincts.

Les contraintes jouent ici un rôle d'élimination de candidats : ceux qui ne respectent pas les contraintes géométriques sont à rejeter.

Hypothèse de travail

Les réponses sont produites par l'interaction des analogies et des contraintes. Les analogies produisent des candidats solutions, et les contraintes éliminent certains de ces candidats.

Ces analogies et contraintes prennent leur source aussi bien dans la figure géométrique que dans l'énoncé. Jusqu'ici, nous avons surtout évoqué les aspects textuels, mais il est évident que la figure joue un rôle tout aussi important. Ainsi, la figure est productrice d'analogies, puisqu'elle peut rappeler une figure déjà étudiée, ou suggérer une propriété directement lisible. Elle est également productrice de contraintes, en invalidant les propriétés qui paraissant fausses sur cette figure (comme on a pu le constater en examinant les résultats du test, au paragraphe 2.2).

4.3 L'abduction, un cadre logique pour le diagnostic

Le terme diagnostic, en EIAO, désigne l'ensemble des méthodes et procédures qui permettent de construire, d'enrichir et de mettre à jour le modèle de l'élève. Pour décrire de manière précise le processus de diagnostic, il est intéressant de le situer dans le cadre de la logique. Les trois modes d'inférence usuels en logique sont la déduction, l'induction et l'abduction.

La déduction s'exprime par le schéma $\frac{P \quad P \rightarrow Q}{Q}$. Elle permet d'obtenir des conclusions certaines. A l'opposé, l'induction et l'abduction ne produisent pas des résultats sûrs, mais ces modes de raisonnement sont souvent utilisés par l'être humain.

L'induction s'exprime par le schéma $\frac{P(a), P(b), P(c), \ldots}{\forall x, P(x)}$. Par exemple, si l'on voit passer un certain nombre d'oiseaux, et que ceux-ci volent, on peut en conclure que tous les oiseaux volent. Mais ceci n'est pas totalement vrai, en effet, les autruches sont des oiseaux mais ne volent pas. L'induction est utilisée en apprentissage automatique pour la construction de théories à partir d'exemples.

L'abduction s'exprime par le schéma $\frac{Q \quad P \rightarrow Q}{P}$. C'est le dicton "il n'y a pas de fumée sans feu". Pour prendre un autre exemple, si l'on sait que "Tous les oiseaux d'Europe volent" et que l'on voit passer un animal en vol, on peut en conclure qu'il s'agit d'un oiseau. Cette conclusion n'est pas certaine : il peut s'agir d'une chauve-souris, mammifère qui vole. L'abduction est utilisée pour produire des explications aux phénomènes observés, par exemple en diagnostic de pannes, ou en diagnostic médical.

De manière plus générale, le processus abductif se définit ainsi : "Etant donné une théorie du domaine et des observations, trouver les hypothèses qui expliquent les observations conformément à la théorie".

Faisons le parallèle avec le diagnostic en EIAO : on dispose d'une description des processus de réponse utilisés par les élèves, et d'un ensemble de réponses fournies par un élève particulier, on recherche le raisonnement qui explique ces réponses.

Le point délicat reste l'obtention de la théorie (les processus de réponse), dont on ne dispose pas à l'heure actuelle : les modèles implantés sont, au mieux, des approximations des modèles psychologiques. Mais présenter le diagnostic comme un processus abductif a l'avantage de distinguer ce qui relève de la construction d'un modèle des processus de raisonnement des élèves et ce qui relève du diagnostic de l'état de connaissances d'un élève particulier vis-à-vis de ce modèle. Ces deux aspects sont habituellement confondus en EIAO sous le terme "modélisation de l'élève". Les séparer devrait, selon nous, permettre une clarification des problématiques, mais aussi mettre l'accent sur l'indispensable confrontation des points de vue. L'élaboration d'un modèle de l'apprentissage humain doit satisfaire des critères de fidélité, de prédictivité, de robustesse, et soulève des problèmes de représentation des connaissances. La spécification d'une procédure de diagnostic doit répondre à des objectifs de calculabilité, de décidabilité et de terminaison. A l'heure actuelle, la première tâche est plutôt prise en charge par la psychologie et la didactique, et la seconde par l'informatique et l'intelligence artificielle. Ces disciplines sont amenées à coopérer dans le domaine de l'EIAO afin de donner le jour à des modèles fiables et efficaces.

5 Conclusion

Nous avons présenté une expérience visant à étudier une classe précise d'erreurs en géométrie, celles qui surviennent dans les exercices de preuve "à trous". Les réponses obtenues ont servi de base à la construction d'un programme qui génère des réponses correctes et incorrectes, en utilisant des connaissances de base sur les objets géométriques (propriétés, théorèmes, instanciations). Les réponses obtenues sont très proches de celles des élèves, et ceci nous semble aller dans le sens de l'idée selon laquelle les erreurs proviennent d'un processus rationnel. Ce résultat nous conduit à proposer un nouveau point de vue pour le diagnostic en EIAO : il s'agit de se placer au niveau des mécanismes généraux de raisonnement de l'élève, et de formaliser le processus de diagnostic comme un raisonnement abductif. La prochaine étape de ce travail consistera à réaliser un tel système de diagnostic, pour le même domaine de la géométrie, en considérant que les mécanismes utilisés par l'élève sont l'analogie et la satisfaction de contraintes, textuelles et graphiques. Ce système devra, au vu d'une réponse, déterminer quelle analogie a pu être évoquée par l'élève, et quelles contraintes ont été satisfaites ou non.

Remerciements

Je tiens à remercier les enseignants du groupe (piloté par Régis Gras) du G.R. *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* de Rennes, sans qui ce travail n'aurait pas été possible : Christian Boulard, Marie-Danielle Fontaine, Annie Lahrer, Geneviève Mouraud, André Nicolas et Alain Simon.

Bibliographie

Bachelard G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique.* Vrin, Paris, 1975.

Burton R. (1982) Diagnosing bugs in a simple procedural skill. *Intelligent Tutoring Systems.* D. Sleeman, J.S. Brown (Eds.), Academic Press, New-York.

Brousseau G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactiques des mathématiques.* Vol. 4, no 2, p. 165-198.

Haton J.P., Bouzid N., Charpillet F., Haton M.C., Laasri B., Laasri H., Marquis P., Mondot T. et Napoli A. (1991) *Le raisonnement en intelligence artificielle* InterEditions, Paris.

Wenger E. (1987) *Artificial intelligence and tutoring systems.* Los Altos, California. Morgan Kaufmann Publishers.

Annexe

Compléter les "......" avec les données, ou le théorème, ou la conclusion qui manquent.

1

(d) $\perp$ (e) et (e) $\perp$ (f)

...............?

(d) // (f)

2

(e) // (f) et (f) $\perp$ (d)

Si deux droites sont parallèles entre elles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre

...............?

3

...............?

Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles

(AB) // (MN)

4

(AB) // (CD) et (AD) // (BC)

Un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme

...............?

5

I est le milieu de [MP] et ....?

Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme

MNPQ est un parallélogramme

6

ABCD est un parallélogramme

Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés égaux

...............?

7

(AB) $\perp$ (BC) et ....?

Un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs perpendiculaires est un rectangle

ABCD est un rectangle

8

MNPQ est un parallélogramme et ....?

Un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires est un losange

MNPQ est un losange

9

ABC est un triangle rectangle en A

Un triangle rectangle est un triangle qui a deux côtés perpendiculaires

...............?

10

MA = MB et ....?

Le milieu d'un segment est le point situé sur ce segment, qui est à égale distance des extrémités de ce segment

M est le milieu de [AB]