F. Coquet
J. Mémin
L. Vostrikova

Majoration de la distance de Lévy-Prokhorov entre une martingale et le mouvement brownien Distance entre des processus associés

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1993, fascicule 2 « Fascicule de probabilités », , p. 1-24
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1993___2_A1_0>

MAJORATION DE LA DISTANCE DE LEVY-PROKHOROV ENTRE UNE MARTINGALE ET LE MOUVEMENT BROWNIEN DISTANCE ENTRE DES PROCESSUS ASSOCIES

F. Coquet, J. Mémin, L. Vostrikova

Résumé. Utilisant la technique de plongement d'une martingale M réelle dans un mouvement brownien B, on obtient une majoration de la distance de Lévy-Prokhorov entre M et B en termes de la différence des variations quadratiques de M et de B.

Mots clés: Distance de Lévy-Prokhorov, distance de Ky-Fan, théorème limite fonctionnel,méthode de plongement.

Class. A.M.S. 60F17, 60Hxx,

I. Introduction

1. Soit T un nombre positif. Notre objectif est de donner une estimation de la distance en loi entre un mouvement brownien B et une martingale locale M sur l'intervalle [0,T], en termes de $[M]$ et de $[B]$, où pour un processus X, $[X]$ désigne le processus "variation quadratique de X". Comme la topologie de la convergence en loi sur des espaces métriques est métrisée par la distance de Lévy-Prokhorov Π, il s'agira donc d'estimer $\Pi(M,B)$ en termes de $\Pi([M],[B])$. En outre, comme la distance de Lévy-Prokhorov est minimale pour la distance de Ky-Fan (ou distance en probabilité), nous donnerons nos estimations en termes de distance de Ky-Fan. On applique ensuite cette estimation à diverses situations notamment à l'obtention d'une majoration de la distance $\Pi(\mathcal{E}(M),\mathcal{E}(B))$ entre leurs exponentielles de Doléans.

Ce travail est proche au niveau de la méthode de [2] où nous avons obtenu des majorations de la distance de Lévy-Prokhorov de processus de vraisemblance en termes de processus de Hellinger, ce qui nécessitait l'utilisation de caractéristiques prévisibles dans l'estimation de $\Pi(M,B)$.

Soit $D([0,T],\mathbf{R})$ l'espace des fonctions de $[0,T]$ dans $\mathbf{R}$) continues à droite et admettant des limites à gauche, muni de la distance de Skorokhod d et de sa tribu des boréliens $\mathcal{D}$. Etant donnés deux processus X et Y à valeurs dans $D([0,T],\mathbf{R})$, la distance de Lévy-Prokhorov $\Pi(P_X,P_Y)$ (notée $\Pi(X,Y)$) entre leurs lois est définie par :

$$\Pi(X,Y) = \inf\{\epsilon > 0 : \forall A \in \mathcal{D}, P_X(A) \le P_Y(A^\epsilon) + \epsilon\},$$

où $A^\epsilon = \{x : d(A,x) < \epsilon\}$, et $d(A,x) = \inf_{x' \in A} d(x,x')$.

D'autre part (voir par exemple Zolotarev [16]) la distance de Ky-Fan associée à la topologie de la convergence uniforme sur l'intervalle $[0,T]$ entre un processus càdlàg X et un processus continu Y définis sur le même espace de probabilité, est donnée par

$$\mathcal{K}(X,Y) = \inf\{\epsilon : P(\|X-Y\|_T \geq \epsilon) \leq \epsilon\}$$

où $\|X\|_T := \sup\limits_{0\leq t\leq T} |X_t|$.

2. Nous présentons maintenant notre estimation de $\Pi(M,B)$, où M est une martingale de carré intégrable et B un mouvement brownien.

L'estimation de la vitesse de convergence dans le Théorème central limite fonctionnel a été étudiée par de nombreux auteurs. La vitesse de convergence pour les martingales à temps discret a été considérée par Haeusler [5] ; le cas des semi-martingales à temps continu a été traité par Jacod et Mano [6] , et par Kubilius [9].

Notre démarche est la suivante : on utilise la méthode de plongement connue à partir des articles de Monroe [12], [13], Haeusler [5] et Kubilius [9]. Afin de travailler avec la distance de Ky-Fan on a besoin de quelques aménagements donnés dans le Théorème 1 du paragraphe II.

3. Dans le Théorème 2 on montre que

$$\Pi(M,B) = O\Big((\mathcal{K})^{1/5}|\ln\mathcal{K}|^{1/2}\Big).$$

où

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}([M],[B])$$

Comme il est souvent utile d'avoir des estimations en termes de moments, en se servant d'outils analogues à ceux de la démontration du Théorème 2 on montre dans le Théorème 3 que l'on a :

$$\Pi(M,B) = O\Big((m^{1/9}|\ln m|)^{1/2}\Big).$$

où

$$m = E[\|[M]-[B]\|_T]$$

Bien sûr, la généralité de la situation considérée ne permet pas d'obtenir les meilleurs résultats connus dans le cas classique des suites de variables i.i.d.

4. Dans la section IV, on estime la distance de Lévy-Prohorov entre $\mathcal{E}(M)$ et $\mathcal{E}(B)$. Nous montrons dans le Théorème 4 la majoration

$$\Pi(\mathcal{E}(M),\mathcal{E}(B)) = O\Big((\mathcal{K})^{\frac{p}{3(p+1)}}|\ln\mathcal{K}|^{\frac{p}{2(p+1)}} \wedge \mathcal{K}^{1/6}\Big),$$

où p est arbitraire, $p \geq 1$. Mais il faut noter que la constante dans cette estimation dépend de p, et tend vers l'infini quand p tend vers l'infini. En même temps, le rapport $p/(p+1)$ tend vers 1 et donne la meilleure vitesse possible en termes d'exposant.

5. Dans la section V, on donne une majoration pour $\Pi(M_- \cdot M, B \cdot B)$ où $M \cdot M$ (resp. $B \cdot B$) désigne l'intégrale stochastique de M par rapport à M (resp. B par rapport à B). On montre dans le théorème 5 que l'on a :

$$\Pi(M_- \cdot M, B \cdot B) \leq \mathcal{O}(\mathcal{K}^{\frac{p}{5p+4}} |ln(\mathcal{K})|^{1/2})$$

pour $p \geq 1$ avec la même remarque que ci-dessus sur p.
L'intérêt des paragraphes IV et V est ainsi de montrer que la méthode de plongement peut servir aussi (avec des modifications techniques mineures) à obtenir une estimation pour la distance de Lévy-Prokhorov de lois de processus associés à M et B. On pourrait obtenir aussi une majoration pour la distance des lois d' intégrales itérées d'ordre n. C'est dans cette esprit qu'est obtenue dans [1] une majoration pour la distance des lois de solutions d'équations différentielles stochastiques.
6. Dans la section VI, On applique les Théorèmes 2 et 3 à l'évaluation de la vitesse de convergence dans le Théorème central limite fonctionnel pour les formes quadratiques de variables aléatoires indépendantes.
7. On utilise dans ce papier les notations usuelles du calcul stochastique, que l'on peut trouver par exemple dans Dellacherie et Meyer [3], ou Jacod et Shiryaev [7] ; on fera notamment souvent référence à ce dernier livre pour les inégalités et pour les théorèmes limites.
Enfin, $\overline{E}$ désigne l'espérance relativement à $\overline{P}$, et $\mathcal{L}(X|P)$ la loi de X sous P.

II. La méthode de plongement.

La méthode de plongement fut d'abord développée pour les martingales à temps discret de carré intégrable (Dubins [4] et Haeusler [5]), puis pour les martingales à temps continu (Monroe [12], [13], Kubilius [9]). On utilisera la version suivante de cette méthode.

Théorème 1. *Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale de carré intégrable avec $M_0 = 0$, définie sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ où $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Alors il existe un espace filtré $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, (\overline{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, \overline{P})$, un mouvement brownien standard W defini sur cet espace, et un changement de temps $\tau = (\tau_t)_{t\geq 0}$ relatif à la filtration $\overline{\mathcal{F}}$, avec les propriétés suivantes:*

1.

$$\mathcal{L}(M|P) = \mathcal{L}(W_{\tau_.}|\overline{P})$$

2. *pour tout* $s \leq t < \infty$,

$$\overline{E}(W_{\tau_t} - W_{\tau_s}|\overline{\mathcal{F}}_{\tau_s}) = 0,$$

$$\overline{E}(\tau_t - \tau_s|\overline{\mathcal{F}}_{\tau_s}) = \overline{E}([W_\tau]_t - [W_\tau]_s|\overline{\mathcal{F}}_{\tau_s}),$$

3.

$$\mathcal{L}((M, [M])|P) = \mathcal{L}((W_\tau, [W_\tau])|\overline{P}),$$

et en particulier, s'il existe $p > 2$ tel que $E\Big(\sup_{s\le t} |M_s|^p\Big) < \infty$ pour tout $t < \infty$, alors

$$\mathcal{L}\Big(\sum_{t\le \cdot} |\Delta M_t|^p \,|P\Big) = \mathcal{L}\Big(\sum_{t\le \cdot} |\Delta W_{\tau_t}|^p \,|\overline{P}\Big),$$

4. *Si $E\Big(\sum_{s\le t} |\Delta M_s|^{2p}\Big) < \infty$ pour tout $t \ge 0$ et pour $p > 1$, alors il existe une constante $L_p < \infty$ telle que*

$$\overline{E}\Big(\sum_{s\le t} |\Delta \tau_s|^p\Big) \le L_p E\Big(\sum_{s\le t} |\Delta M_s|^{2p}\Big),$$

5. *Si $\widehat{\mathcal{F}}_t = \sigma\{W_{\tau_s}, \tau_s, s \le t\}$ est la tribu engendrée par W_τ et τ, alors pour $0 < s \le t$ et $p > 1$ on a*

$$\overline{E}\Big(\sum_{s<u\le t} |\Delta \tau_u|^p \,|\widehat{\mathcal{F}}_s\Big) \le L_p \overline{E}\Big(\sum_{s<u\le t} |\Delta W_{\tau_u}|^{2p} \,|\widehat{\mathcal{F}}_s\Big)$$

Remarque. Monroe [12], [13] a établi l'existence de changements de temps avec la propriété 1. Utilisant l'approche de Monroe, Kubilius [9] a montré les propriétés 2, 3 et 4. On a donc seulement à prouver 5, et cela montrera que $\sum_{s\le t}\Big(L_p|\Delta W_{\tau_s}|^{2p} - |\Delta \tau_s|^p\Big)_{t\ge 0}$ est une sous-martingale relativement à $(\widehat{\mathcal{F}}_t)_{t\ge 0}$, ce qui sera utile pour obtenir la domination au sens de Lenglart (voir Jacod et Shiryaev [15] p. 35) de $\sum_{s\le t}(\Delta\tau_s)^2$ par $4\sum_{s\le t}(\Delta W_{\tau_s})^4$.

Pour démontrer 5 on a besoin de préciser la construction de $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, (\overline{\mathcal{F}}_t)_{t\ge 0}, \overline{P}, W, \tau_t)$ donnée par Monroe [12] puis par Kubilius [9]. Le résultat de base est le lemme suivant de plongement dû essentiellement à Dubins [4], puis Haeusler [5] pour la propriété 3.

Lemme 1. *Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une martingale réelle à temps discret de carré intégrable définie sur l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}, P)$. On suppose qu'un mouvement brownien standard B est défini sur le même espace, relativement à sa propre filtration $(\mathcal{F}^B_t)_{t\ge 0}$. Alors il existe une suite croissante $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\mathcal{F}^B_t)_{t\ge 0}$-temps d'arrêt telle que*

1.

$$\mathcal{L}(M_1, M_2, \cdots, M_k|P) = \mathcal{L}(B_{T_1}, B_{T_2}, \cdots, B_{T_k}|P),$$

2. *pour tout $k > 0$,*

$$E\big(T_{k+1} - T_k|\mathcal{F}^B_{T_k}\big) = E\big((B_{T_{k+1}} - B_{T_k})^2|B_{T_1}, B_{T_2}, \cdots, B_{T_k}\big),$$

3. *pour tout p, $p > 1$, il existe une constante $L_p < \infty$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait l'inégalité suivante :*

$$E\big((T_{k+1} - T_k)^p|\mathcal{F}^B_{T_k}\big) \le L_p E\big((B_{T_{k+1}} - B_{T_k})^{2p}|B_{T_1}, B_{T_2}, \cdots, B_{T_k}\big).$$

Pour $p = 2$, on peut prendre $L_2 \le 4$.

Donnons maintenant quelques éléments de la construction de $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, (\overline{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, \overline{P}, W, \tau_t)$ pour une martingale de carré intégrable à temps continu. Soit M une martingale de carré intégrable définie sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. Il est toujours possible de supposer, par agrandissement de l'espace si nécessaire, qu'un mouvement brownien B est défini sur le même espace, et que $\mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$. Soit $n \in \mathbf{N}$, $\{t_j^n, j \geq 0\}$ une partition de $[0, \infty[$ avec $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_j^n < \cdots$ et telle que, pour tout j, $t_j^n - t_{j-1}^n \leq 2^{-n}$.
On considère une martingale M^n relative à la filtration $(\mathcal{F}_k^n)_{k\in\mathbf{N}}$, avec $\mathcal{F}_k^n = \mathcal{F}_{t_k^n}$, définie par $M_k^n = M_{t_k^n}$. Appliquant le Lemme 1 à M^n, on obtient une suite de temps d'arrêt $(T_k^n)_{k\in\mathbf{N}}$ relatifs à la filtration $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$, et tels que les propriétés 1, 2 et 3 du Lemme 1 tiennent.
Soit $C(\mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ qui sont nulles en zéro, muni de la métrique localement uniforme. Soit aussi $V(\mathbf{R}^+)$ l'espace des fonctions croissantes càdlàg $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ nulles en zéro, muni de la métrique localement L^1 :

$$d_V(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\Big(\int_0^k |f(s) - g(s)|ds \wedge 1\Big).$$

Les espaces $C(\mathbf{R})$ et $V(\mathbf{R}^+)$ sont polonais.
On prend $\overline{\Omega} = C(\mathbf{R}) \times V(\mathbf{R}^+)$ et $\overline{\mathcal{F}}$ la tribu borélienne de $\overline{\Omega}$. On considère aussi les processus τ^n à valeurs dans $V(\mathbf{R}^+)$ reliés aux suites $(T_k^n)_{k\in\mathbf{N}}$ par

$$\forall k \in \mathbf{N}, \forall t > 0, t_k^n \leq t < t_{k+1}^n \Rightarrow \tau_t^n(\omega) = T_k^n(\omega).$$

On note $\overline{P}^n$ la probabilité sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}})$, image de P par (B, τ^n); remarquons que les lois marginales de $\overline{P}$ sont la mesure de Wiener P_B sur $C(\mathbf{R})$ et la loi de τ^n, notée P_{τ^n}, sur $(V, \mathcal{B}_V)$.
Monroe [12] a montré que la suite $(\overline{P}^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est tendue pour la topologie de $C(\mathbf{R}) \times V(\mathbf{R}^+)$. Prenons un point limite, disons $\overline{P}$, de $(\overline{P}^n)_{n\in\mathbf{N}}$, et posons, pour $\overline{\omega} = (x, v)$,

$$W_t(\overline{\omega}) = W_t(x,v) = x_t, \qquad \tau_t(\overline{\omega}) = \tau_t(x,v) = v_t$$

et aussi

$$\overline{\mathcal{F}}_t = \sigma\{W_s, \{\tau_u \leq s\} : s \leq t, u \geq 0, \}.$$

L' objet $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, (\overline{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, \overline{P}, W, \tau_t)$ défini ci-dessus satisfait les propriétés 1, 2, 3 et 4 du Théorème 1. On va prouver que la propriété 5 est également satisfaite.

Démonstration de la propriété 5. Il est suffisant de montrer que

$$\overline{E}\Big(1_A \sum_{s<u\leq t} |\Delta\tau_u|^p\Big) \leq L_p \overline{E}\Big(1_A \sum_{s<u\leq t} |\Delta W_{\tau_u}|^{2p}\Big) \tag{1}$$

où s, t sont des points de $\overline{P}$-continuité de τ et A est de la forme :

$$A = \bigcap_{\substack{1\leq i\leq l \\ t_i \leq s}} \{W_{\tau_{t_i}} \in F_i\} \cap \bigcap_{\substack{1\leq j\leq q \\ t_j \leq s}} \{\tau_{t_j} \in C_j\},$$

où $F_i \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$, $C_j \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}^+}$, et les ensembles $\{W_{\tau_{t_i}} \in F_i\}$ et $\{\tau_{t_j} \in C_j\}$ sont supposés $\overline{P}$-continus.
Considérons $p > 1$, $s \leq t < \infty$ et une partition $s = s_0^m < s_1^m < \cdots < s_m^m = t$ de $[s,t]$. Pour tout $y \in D(\mathbf{R})$, on définit $f_{m,p}^u(y)$ et $f_{m,p}(y)$ par :

$$f_{m,p}^u(y) = \sum_{k=1}^{m} \left|y(s_k^m \wedge u) - y(s_{k-1}^m \wedge u)\right|^p, \qquad f_{m,p}(y) = f_{m,p}^t(y).$$

Il est bien connu (voir par exemple Lépingle [10]) que si $\max\limits_{1\leq k\leq m}(s_k^m - s_{k-1}^m) \to 0$, alors $\overline{P}$-p.s.

$$f_{m,p}(\tau) \to \sum_{s<u\leq t} |\Delta\tau_u|^p \tag{2}$$

et si $p > 2$ et $E\Big(\sup\limits_{s<u\leq t} |\Delta M_u|^p\Big) < \infty$, alors

$$E(f_{m,p}(M)) \to E\Big(\sum_{s<u\leq t} |\Delta M_u|^p\Big). \tag{3}$$

D'un autre côté, si les s_k^m sont des points de $\overline{P}$-continuité de $(\tau_t)_{t\geq 0}$, alors les applications $(\tau_u)_{u\geq 0} \to (f_{m,p}^u(\tau))_{u\geq 0}$ et $(W_{\tau_u})_{u\geq 0} \to (f_{m,2p}^u(W_\tau))_{u\geq 0}$ sont $\overline{P}$-continues. Utilisant alors (2), on obtient

$$\begin{aligned}\overline{E}\Big(1_A \sum_{s<u\leq t} |\Delta\tau_u|^p\Big) &\leq \liminf_{m\to\infty} \overline{E}\big(1_A f_{m,p}(\tau)\big)\\ &\leq \liminf_{m\to\infty}\liminf_{n\to\infty} \overline{E}^n\big(1_A f_{m,p}(\tau)\big)\end{aligned} \tag{4}$$

où $\overline{E}^n$ est l'espérance relativement à $\overline{P}^n$.
Comme A peut s'écrire

$$A = \{(x_\tau, \tau) : \pi((x_\tau, \tau)) \in F\},$$

où π est une projection de $\overline{\Omega}$ sur $\mathbf{R}^{l+q}$, et F un produit de $l+q$ boréliens de $\mathbf{R}$, alors

$$\begin{aligned}\overline{E}^n\big(1_A f_{m,p}(\tau)\big) &= \overline{E}^n\big(1_{\{(x_\tau,\tau):\pi((x_\tau,\tau))\in F\}} f_{m,p}(\tau)\big)\\ &= E\big(1_{\{(B_{\tau^n},\tau^n):\pi((B_{\tau^n},\tau^n))\in F\}} f_{m,p}(\tau^n)\big)\\ &= E\big(1_{\{(B_{T^n_\cdot},T^n_\cdot):\pi((B_{T^n_\cdot},T^n_\cdot))\in F\}} f_{m,p}(T^n_\cdot)\big)\end{aligned}$$

et avec le lemme 1,

$$\begin{aligned}\overline{E}^n\big(1_A f_{m,p}(\tau)\big) &\leq L_p E\big(1_{\{(B_{T^n_\cdot},T^n_\cdot):\pi((B_{T^n_\cdot},T^n_\cdot))\in F\}} f_{m,2p}(M^n)\big)\\ &= L_p \overline{E}^n\big(1_A f_{m,2p}(W_\tau)\big).\end{aligned} \tag{5}$$

En outre on a d'après (3)

$$\liminf_{m\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\overline{E}^n\big(1_A f_{m,2p}(W_\tau)\big)=\liminf_{m\to\infty}\overline{E}\big(1_A f_{m,2p}(W_\tau)\big)=\overline{E}\big(1_A\sum_{s<u\leq t}|\Delta W_{\tau_u}|^{2p}\big),$$

ce qui avec (4) et (5) donne (1) et termine la preuve. ∎

III Estimation de $\Pi(\mathbf{M},\mathbf{B})$.

Comme indiqué dans l'introduction on note $\Pi(X,Y)$ la distance de Lévy-Prohorov entre les lois de processus càdlàg X et Y sur l'intervalle $[0,T]$.
Lorsque X et Y sont définis sur le même espace, on considère leur distance de Ky-Fan $\mathcal{K}(X,Y)$ par rapport à la métrique uniforme sur $[0,T]$.
Le théorème suivant est le résultat clé de cet article.

Théorème 2. *Avec les notations ci-dessus, supposons que M est une martingale de carré intégrable sur l'intervalle [0, T]. Alors pour $\mathcal{K}$ suffisamment petit, nous avons :*

$$\Pi(M,B)=O\Big(\mathcal{K}^{\frac{1}{3}}\,|\ln\mathcal{K}|^{\frac{1}{2}}\Big).$$

Afin de prouver le Théorème 2, nous allons utiliser le résultat très simple suivant :

Lemme 2. *Soit X et Y deux processus, et X' and Y' des versions de X et Y définies sur un même espace de probabilité. Alors*

$$\Pi(X,Y)\leq\mathcal{K}(X',Y').$$

Démonstration. On introduit la distance de Ky-Fan par rapport à la distance de Skorokhod $d(.,.)$ dans $D([0,T],\mathbf{R})$:

$$\widetilde{\mathcal{K}}(X',Y')=\inf\Big\{\epsilon : P\big(d(X',Y')\geq\epsilon\big)\leq\epsilon\Big\}.$$

Par un résultat classique de Strassen [15], on sait que

$$\Pi(X,Y)=\inf\widetilde{\mathcal{K}}(X'',Y''),\tag{6}$$

où l'inf est pris sur tous les processus X'' et Y'' définis sur un certain espace de probabilité $(\Omega'',\mathcal{F}'',P'')$, avec $\mathcal{L}(X'')=\mathcal{L}(X)$ et $\mathcal{L}(Y'')=\mathcal{L}(Y)$.
Puisque

$$d(X',Y')\leq\|X-Y\|,$$

le lemme 2 découle de (6). ∎

Comme on veut comparer M au processus continu B, il sera nécessaire de se libérer des "grands sauts" de M. Ainsi, soit β un nombre strictement positif inférieur à 1, et soit M une martingale. On définit la martingale M^β obtenue à partir de M en enlevant les sauts de taille en valeur absolue supérieure à β, précisément :

$$M_t^\beta = M_t - x\mathbf{1}(|x| > \beta) * (\mu - \nu)_t,$$

où μ et ν désignent la mesure des sauts de M et son compensateur respectivement. Utilisant le Lemme 1 on obtient :

$$\Pi(M, B) \le \mathcal{K}(M, M^\beta) + \Pi(M^\beta, B). \tag{7}$$

Notre objectif est maintenant d'examiner successivement les deux termes apparaissant dans (7).

Nous commençons par une estimation de $\mathcal{K}(M, M^\beta)$.

Lemme 3.
Soit $M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t \le T}$ une martingale de carré intégrable. Alors, pour $\beta \ge \sqrt{2\mathcal{K}}$, nous avons

$$\mathcal{K}(M, M^\beta) \le 2\mathcal{K} + E[[M]_T]^{1/4}\mathcal{K}^{1/4}. \tag{8}$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} P(\|M - M^\beta\|_T \ge \epsilon) \le P\Big(\{\|M - M^\beta\|_T \ge \epsilon\} \cap \{\|\Delta M\|_T \le \beta\}\Big) \\ + P(\|\Delta M\|_T > \beta). \end{aligned} \tag{9}$$

Remarquant que

$$\Big\{\omega : \|\Delta M(\omega)\|_T^2 > \beta^2\Big\} \subset \Big\{\omega : \|[M](\omega) - Id\|_T > \frac{\beta^2}{2}\Big\},$$

on obtient

$$P(\|\Delta M\|_T > \beta) \le P\Big(\|[M] - Id\|_T > \mathcal{K}\Big) \le \mathcal{K}. \tag{10}$$

Ensuite , on a :

$$\begin{aligned} P\Big(\{\|M - M^\beta\|_T \ge \epsilon\} \cap \{\|\Delta M\|_T \le \beta\}\Big) &= P\Big(\Big\{\Big\|\int_0^t \int_{|x|>\beta} x d(\mu - \nu)\Big\|_T \ge \epsilon\Big\} \cap \{\|\Delta M\|_T \le \beta\}\Big) \\ &\le P\Big(\int_0^T \int_{|x|>\beta} |x| d\nu \ge \epsilon\Big) \\ &\le \eta/\epsilon + (1/\epsilon)E\big[\|\Delta M\|_T \mathbf{1}(\beta \le \|\Delta M\|_T)\big] \\ &+ P\Big(\sum_{t \le T} |\Delta M_t| \mathbf{1}(|\Delta M_t| \ge \beta) > \eta\big]. \end{aligned} \tag{11}$$

(On a utilisé l'inégalité de Lenglart-Rebolledo).
On remarque alors que pour tout $\eta > 0$

$$P(\sum_{t\leq T}|\Delta M_t|\,\mathbf{1}(|\Delta M_t|\geq\beta)>\eta)\leq P(\sum_{t\leq T}|\Delta M_t|\,\mathbf{1}(|\Delta M_t|\geq\beta)>0)$$
$$\leq P(\|\Delta M\|_T\geq\beta)\leq\mathcal{K}. \tag{12}$$

On peut donc faire tendre η vers 0, et le premier terme de (11), η/ϵ disparait.
Ensuite

$$E[\|\Delta M\|_T\,\mathbf{1}(\|\Delta M\|_T\geq\beta)]\leq E(\|\Delta M\|_T^2)^{1/2}\big(P(\|\Delta M\|_T\geq\beta)\big)^{1/2}$$
$$\leq\big(E[[M]_T]\big)^{1/2}\mathcal{K}^{1/2} \tag{13}$$

On déduit donc de (11), (12), (13)

$$P\Big(\{\|M-M^\beta\|_T\geq\epsilon\}\cap\{\|\Delta M\|_T\leq\beta\}\Big)\leq\mathcal{K}+(1/\epsilon)E[[M]_T]^{1/2}\mathcal{K}^{1/2} \tag{14}$$

On en déduit donc que, pour $\beta\geq(2\mathcal{K})^{1/2}$ on a :

$$P(\|M-M^\beta\|_T\geq\epsilon)\leq 2\mathcal{K}+(1/\epsilon)E[[M]_T]^{1/2}\mathcal{K}^{1/2}$$

En prenant

$$\epsilon=2\mathcal{K}+E[[M]_T]^{1/4}\mathcal{K}^{1/4}$$

on obtient (8) et le lemme. ∎

Lemme 4. *On suppose que $\mathcal{K}$ est suffisamment petit et que $\beta=\sqrt{2\mathcal{K}}$; nous obtenons alors :*

$$\Pi(M^\beta,B)\leq O\Big(\mathcal{K}^{1/5}\,|\ln\mathcal{K}|^{1/2}\Big), \tag{15}$$

Preuve. Comme M^β est une martingale de carré intégrable, on peut appliquer la méthode de plongement du II.
D'après le Théorème 1, il existe un espace filtré $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}},(\overline{\mathcal{F}}_t)_{t\geq0}\overline{P})$ avec un mouvement brownien W et un changement de temps $(\tau_t)_{t\geq0}$ par rapport à la filtration $(\overline{\mathcal{F}}_t)_{t\geq0}$, tel que les propriétés 1-5 tiennent, et en particulier $\mathcal{L}(W_\tau)=\mathcal{L}(M^\beta)$. Alors, d'après le Lemme 1,

$$\Pi(M^\beta,B)\leq\mathcal{K}(W_\tau,W). \tag{16}$$

Maintenant, pour estimer $\mathcal{K}(W_\tau,W)$, on écrit que, pour chaque $\alpha>0$,

$$\overline{P}\Big(\|W_{\tau_\cdot}-W\|_T\geq\epsilon\Big)\leq\overline{P}\Big(\{\|W_{\tau_\cdot}-W\|_T\geq\epsilon\}\cap\{\|\tau-Id\|_T\leq\alpha\}\Big)$$
$$+\overline{P}(\|\tau-Id\|_T>\alpha)$$
$$\leq\overline{P}\Big(\sup_{\substack{0\leq t\leq T+\alpha\\|t-s|\leq\alpha}}|W_t-W_s|\geq\epsilon\Big)+\overline{P}(\|\tau-Id\|_T>\alpha). \tag{17}$$

Pour le premier terme de la partie droite de (17), on utilise l'estimation classique du module de continuité du mouvement brownien (voir par exemple Outev [14]) : Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\overline{P}\Big(\sup_{\substack{0\le t\le T+\alpha\\ |t-s|\le\alpha}} |W_t - W_s| \ge \epsilon\Big) \le \frac{C}{\sqrt{\alpha}\epsilon}\exp\Big(-\frac{\epsilon^2}{C\alpha}\Big). \tag{18}$$

Pour le second terme du membre de droite de (17), nous avons :

$$\overline{P}(\|\tau - Id\|_T > \alpha) \le \overline{P}(\|\tau - [W_\tau]\|_T > \frac{\alpha}{2}) + \overline{P}(\|[W_\tau] - Id\|_T > \frac{\alpha}{2}). \tag{19}$$

Puisque $\mathcal{L}([W_\tau]) = \mathcal{L}([M^\beta])$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\overline{P}(\|[W_\tau] - Id\|_T > \frac{\alpha}{2}) &= P(\big\|[M^\beta] - Id\big\|_T > \frac{\alpha}{2})\\ &\le P(\|[M] - Id\|_T > \frac{\alpha}{4}) + P(\big\|[M^\beta] - [M]\big\|_T > \frac{\alpha}{4})\\ &\le P(\|[M] - Id\|_T > \frac{\alpha}{4}) + P(\|\Delta M\|_T > \beta)\\ &+ P\Big(\{\big\|[M^\beta] - [M]\big\|_T > \frac{\alpha}{4}\} \cap \{\|\Delta M\|_T \le \beta\}\Big)\end{aligned} \tag{20}$$

A cause de (12), on a seulement à estimer le troisième terme du membre de droite de (20). Puisque, pour chaque $0 < s < T$, on a

$$|\Delta M_s^\beta| = \left|\int_{|x|\le\beta} x\mu(\{s\}, dx) - \int_{|x|\le\beta} x\nu(\{s\}, dx)\right| \le 2\beta,$$

il s'ensuit que, sur l'ensemble $\{\sup_{t\le T} |\Delta M_t| \le \beta\}$,

$$\begin{aligned}|[M]_t - [M^\beta]_t| &= \left|\sum_{s\le t}((\Delta M_s)^2 - (\Delta M_s^\beta)^2)\right|\\ &\le \sum_{s\le t} |\Delta M_s - \Delta M_s^\beta|\,|\Delta M_s + \Delta M_s^\beta| \le 3\beta\sum_{s\le t}|\Delta M_s - \Delta M_s^\beta|\\ &= 3\beta\sum_{s\le t}\left|\int_{|x|>\beta} x\big(\mu(\{s\}, dx) - \nu(\{s\}, dx)\big)\right| \le 3\beta\int_0^t\int_{|x|>\beta}|x|d\nu.\end{aligned}$$

On déduit de cette inégalité

$$\begin{aligned}P\Big(\{\|[M^\beta] - [M]\|_T > \frac{\alpha}{4}\} \cap \{\|\Delta M\|_T \le \beta\}\Big) &\le P\Big(\int_0^T\int_{|x|>\beta}|x|d\nu > \frac{\alpha}{12\beta}\Big)\\ &\le \mathcal{K} + 12\beta/\alpha\Big(E([M]_T)\Big)^{1/2}\mathcal{K}^{1/2},\end{aligned} \tag{21}$$

où l'on a utilisé les inégalités (11) et suivantes. On tire donc de (12), (20) and (21) que

$$\overline{P}\big(\|[W_\tau]-Id\|_T>\frac{\alpha}{2}\big)\le P\big(\|[M]-Id\|_T>\frac{\alpha}{4}\big)+2\mathcal{K}+\frac{12\beta}{\alpha}\Big(E([M]_T)\Big)^{1/2}\mathcal{K}^{1/2}. \quad (22)$$

Nous nous proposons maintenant de majorer le premier terme du membre de droite de (19). D'après le Théorème 1, $(\tau_t-[W_\tau]_t)_{t\ge 0})$ est une $\overline{P}$-martingale, et son carré est dominé au sens de Lenglart par sa variation quadratique

$$\big[\tau-[W_\tau]\big]_. = \sum_{0<t\le .}\big(\Delta\tau_t-(\Delta W_{\tau_t})^2\big)^2\le 2\sum_{0<t\le .}\big((\Delta\tau_t)^2+(\Delta W_{\tau_t})^4\big).$$

Ce dernier processus est à son tour dominé au sens de Lenglart (voir Théorème 1) par le processus $10\sum_{0<t\le .}(\Delta W_{\tau_t})^4\le 40\beta^2[W_\tau]_.$, puisque W_τ et M^β ont la même loi. Enfin, on a l'inégalité $E\big[\sup_{t\le T}\Delta[W_\tau]_t\big]\le 4\beta^2$. L'inégalité de Lenglart-Rebolledo (voir par exemple Jacod et Shiryaev [15], Lemme I.3.30), donne donc, pour tout $\eta>0$,

$$\begin{aligned}\overline{P}\big(\sup_{0\le t\le T}|\tau_t-[W_\tau]_t|>\frac{\alpha}{2}\big)&\le\frac{4\eta}{\alpha^2}+\frac{640\beta^4}{\alpha^2}+\overline{P}(40\beta^2[W_\tau]_T\ge\eta)\\&=\frac{4\eta}{\alpha^2}+\frac{640\beta^4}{\alpha^2}+P(40\beta^2[M^\beta]_T\ge\eta).\end{aligned} \quad (23)$$

Si on prend $\eta=40\beta^2(T+\alpha/2)$, on tire de (12) et (21) que

$$\begin{aligned}P(40\beta^2[M^\beta]_T\ge\eta)&\le P\big(\big|[M^\beta]_T-T\big|\ge\frac{\alpha}{2}\big)\\&\le P\Big(\big\{\,\big\|[M^\beta]-[M]\big\|_T\ge\frac{\alpha}{4}\big\}\cap\{\|\Delta M\|_T\le\beta\}\Big)\\&\quad+P\big(\|[M]-Id\|_T\ge\frac{\alpha}{4}\big)+P\big(\|\Delta M\|_T>\beta\big).\end{aligned}$$

Une nouvelle utilisation de (12) et (21) donne

$$P(40\beta^2[M^\beta]_T\ge\eta)\le 2\mathcal{K}+\frac{12\beta}{\alpha}\Big(E([M]_T)\Big)^{1/2}\mathcal{K}^{1/2}+P\big(\|[M]-Id\|_T\ge\frac{\alpha}{4}\big).$$

Finalement, (23) devient

$$\begin{aligned}\overline{P}\big(\|\tau-[W_\tau]\|_T>\frac{\alpha}{2}\big)\le&\frac{160\beta^2(T+\frac{\alpha}{2})}{\alpha^2}+\frac{640\beta^4}{\alpha^2}\\&+2\mathcal{K}+\frac{12\beta}{\alpha}\Big(E([M]_T)\Big)^{1/2}\mathcal{K}^{1/2}+P\big(\|[M]-Id\|_T\ge\frac{\alpha}{4}\big).\end{aligned} \quad (24)$$

Maintenant, en remplaçant β par $\sqrt{2\mathcal{K}}$, on trouve (pour alléger l'écriture, C désigne une constante qui peut changer de place en place) :

$$\overline{P}\big(\|\tau-[W_\tau]\|_T>\frac{\alpha}{2}\big)\le\frac{C\mathcal{K}}{\alpha^2}+2\mathcal{K}+\frac{C\mathcal{K}}{\alpha}+P\big(\|[M]-Id\|_T\ge\frac{\alpha}{4}\big). \quad (25)$$

Si on met bout-à-bout les majorations (17), (18), (19), (22) et (25), on obtient

$$\overline{P}\Big(\|W_{\tau_\cdot} - W\|_T \geq \epsilon\Big) \leq \frac{C}{\alpha^{1/2}\epsilon}\exp\Big(-\frac{\epsilon^2}{C\alpha}\Big) + 2P(\|[M] - Id\|_T \geq \frac{\alpha}{4})$$
$$+ 4\mathcal{K} + \frac{C\mathcal{K}}{\alpha} + \frac{C\mathcal{K}}{\alpha^2} + \frac{C\mathcal{K}^2}{\alpha^2}. \tag{26}$$

On prend alors α de la forme $\alpha = \mathcal{K}^\delta$, avec $0 < \delta \leq 1$, et $\epsilon = C\alpha^{1/2}|\ln\alpha|^{1/2}$.
Le second membre de (26) sera alors majoré par ϵ dès que les exposants de $\mathcal{K}$ vérifieront les contraintes :

$$\begin{aligned} &C/2 - \delta/2 - 1/2 \geq \delta/2, \\ &1 \geq \delta/2, \\ &1 - \delta \geq \delta/2, \\ &1 - 2\delta \geq \delta/2. \end{aligned}$$

Il en sort immédiatement que toutes ces contraintes sont vérifiées dès que C est assez grand et $\delta \leq 2/5$, d'où le Lemme. ∎

Preuve du Théorème 2. Elle découle imédiatement des Lemmes 3 et 4. ∎

Nous nous proposons maintenant de donner une majoration de la même distance en loi, mais en termes de $m = E[\|[M] - [B]\|_T]$. Le résultat est donné ci-dessous ; la preuve étant analogue à celle du Théorème 2, nous nous bornons à en indiquer le squelette.

Théorème 3.

$$\Pi(M, B) = O\Big(\big(m^{1/9}|\ln m|\big)^{1/2}\Big). \tag{27}$$

Schéma de la preuve. Il suffit de reprendre la démonstration du Théorème 2 en remarquant tout d'abord que

$$P\Big(\|\Delta M\|_T \geq \beta\Big) \leq P\Big(\|[M] - Id]_T \geq \beta^2/2 \leq 2m/\beta^2$$

Avec cette modification, l'énoncé du Lemme 3 est transformé en

$$\mathcal{K}(M, M^\beta) \leq 4m/\beta^2 + O\Big(m^{1/4}/\beta^{1/2}\Big) \tag{28}$$

On effectue ensuite les mêmes modifications dans les formules (21) à (25) de la preuve du Lemme 4, pour obtenir

$$\overline{P}\Big(\|W_{\tau_\cdot} - W\| \geq \epsilon \leq \frac{C}{\alpha^{1/2}\epsilon}\exp\Big(-\frac{\epsilon}{C\alpha}\Big) + Cm/\alpha + Cm/\beta^2 + Cm^{1/2}/\alpha + C\beta^2/\alpha^2 + C\beta^4/\alpha^2.$$

Le même choix pour ϵ qu'en (26) donne alors, après maximisation des puissances et en tenant compte de (28), (27) et le Théorème. ∎

IV. Estimation de $\Pi(\mathcal{E}(\mathbf{M}),\mathcal{E}(\mathbf{B}))$.

Rappelons que l'exponentielle de Doléans $\mathcal{E}(M)$ d'une martingale M est définie par

$$\mathcal{E}(M)_t = e^{M_t-\frac{1}{2}<M^c>_t} \prod_{0<s\leq t} (1+\Delta M_s)e^{-\Delta M_s},$$

en particulier

$$\mathcal{E}(B) = e^{B_t-\frac{1}{2}t}.$$

Théorème 4. *Si M est une martingale de carré intégrable, alors, pour $p \geq 1$, on a*

$$\Pi(\mathcal{E}(M),\mathcal{E}(B)) \leq O\Big(\big(\mathcal{K}^{1/5}\,|\ln \mathcal{K}|^{1/2}\big)^{\frac{p}{p+1}} \vee \mathcal{K}^{1/6}\Big). \tag{29}$$

Comme dans le paragraphe précédent, nous notons M^β la martingale obtenue par exclusion des sauts d'amplitude supérieure à β, avec $0 < \beta < 1/2$, de telle sorte que

$$M_t^\beta = M_t - \int_0^t \int_{|x|>\beta} x d(\mu - \nu).$$

On peut alors écrire

$$\Pi(\mathcal{E}(M),\mathcal{E}(B)) \leq \mathcal{K}(\mathcal{E}(M),\mathcal{E}(M^\beta)) + \Pi(\mathcal{E}(M^\beta),\mathcal{E}(B)) \tag{30}$$

et nous allons prouver le Théorème 4 en majorant successivement les deux termes du membre de droite de (30).

Lemme 5. *Si M est une martingale de carré intégrable, alors, si $\beta \geq \sqrt{2\mathcal{K}}$, on a*

$$\mathcal{K}(\mathcal{E}(M),\mathcal{E}(M^\beta)) \leq O\big(\mathcal{K}^{1/6}\big). \tag{31}$$

Preuve. On a, pour $A > 0$,

$$\begin{aligned} P\Big(\|\mathcal{E}(M)-\mathcal{E}(M^\beta)\|_T \geq \epsilon\Big) &\leq P\Big(\{\|\mathcal{E}(M^\beta)\|_T \geq A\} \cap \{\|\Delta M\|_T \leq \beta\}\Big) \\ &\quad + P\Big(\Big\{\Big\|\frac{\mathcal{E}(M)}{\mathcal{E}(M^\beta)} - 1\Big\|_T \geq \frac{\epsilon}{A}\Big\} \cap \{\|\Delta M\|_T \leq \beta\}\Big) + P\Big(\|\Delta M\|_T > \beta\Big) \\ &\leq P\Big(\|\mathcal{E}(M^\beta)\|_T \geq A\Big) + P\Big(\Big\{\Big\|\frac{\mathcal{E}(M)}{\mathcal{E}(M^\beta)} - 1\Big\|_T \geq \frac{\epsilon}{A}\Big\} \cap \{\|\Delta M\|_T \leq \beta\}\Big) \\ &\qquad + P\Big(\|\Delta M\|_T > \beta\Big). \end{aligned} \tag{32}$$

Comme $\mathcal{E}(M^\beta)$ est une surmartingale positive et $\mathcal{E}(M^\beta)_0 = 1$, l'inégalité de Doob donne, pour le premier terme du membre de droite de (32),

$$P\Big(\|\mathcal{E}(M^\beta)\|_T \geq A\Big) \leq \frac{1}{A}. \tag{33}$$

De plus, (12) donne une estimation pour le troisième terme. Il reste donc juste à estimer le deuxième. Dans ce but, notons que, dès que $\beta < 1/2$, on a, sur l'ensemble $\Big\{\|\Delta M\|_T \leq \beta\Big\}$,

$$\frac{\mathcal{E}(M)_t}{\mathcal{E}(M^\beta)_t} = \exp\Big\{M_t - M_t^\beta + \sum_{0<s\leq t}\Big[\ln\Big(\frac{1+\Delta M_s}{1+\Delta M_s^\beta}\Big) - \Delta M_s + \Delta M_s^\beta\Big]\Big\}.$$

Par suite, comme $\ln(1+x) \geq x/2$ pour $0 < x < 1$, on obtient, pour $\epsilon \leq A$

$$\begin{aligned}
&\Big\{\Big\|\frac{\mathcal{E}(M)}{\mathcal{E}(M^\beta)} - 1\Big\|_T \geq \frac{\epsilon}{A}\Big\} \\
&\quad\subset \Big\{\|M - M^\beta\|_T + \sum_{0<s\leq T}\Big|\ln\Big(\frac{1+\Delta M_s}{1+\Delta M_s^\beta}\Big) - \Delta M_s + \Delta M_s^\beta\Big| \geq \frac{\epsilon}{2A}\Big\} \\
&\subset \Big\{\|M - M^\beta\|_T \geq \frac{\epsilon}{4A}\Big\} \cup \Big\{\sum_{0<s\leq T}\Big|\ln\Big(\frac{1+\Delta M_s}{1+\Delta M_s^\beta}\Big) - \Delta M_s + \Delta M_s^\beta\Big| \geq \frac{\epsilon}{4A}\Big\}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
&P\Big(\Big\{\Big\|\frac{\mathcal{E}(M)}{\mathcal{E}(M^\beta)} - 1\Big\|_T \geq \frac{\epsilon}{A}\Big\} \cap \Big\{\|\Delta M\|_T \leq \beta\Big\}\Big) \\
&\qquad\qquad \leq P\Big(\Big\{\|M - M^\beta\|_T \geq \frac{\epsilon}{4A}\Big\} \cap \Big\{\|\Delta M\|_T \leq \beta\Big\}\Big) \\
&+P\Big(\Big\{\sum_{0<s\leq T}\Big|\ln\Big(\frac{1+\Delta M_s}{1+\Delta M_s^\beta}\Big) - \Delta M_s + \Delta M_s^\beta\Big| \geq \frac{\epsilon}{4A}\Big\} \cap \Big\{\|\Delta M\|_T \leq \beta\Big\}\Big).
\end{aligned} \tag{34}$$

(14) donne ici

$$P\Big(\Big\{\Big(\|M - M^\beta\|_T \geq \frac{\epsilon}{4A}\Big\} \cap \Big\{\|\Delta M\|_T \leq \beta\Big\}\Big) \leq \mathcal{K} + (4A/\epsilon)\Big(E[M_T]\Big)^{1/2}\mathcal{K}^{1/2} \tag{35}$$

Pour majorer le deuxième terme du membre de droite de(34), nous remarquons que $|\ln(1+x) - x| \leq \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{1+x}\Big)^2$ pour tout x tel que $-1 < x < 0$, et $|\ln(1+x) - x| \leq \frac{1}{2}x^2$ si $x \geq 0$, de telle sorte que, sur l'ensemble $\Big\{\|\Delta M\|_T \leq \beta\Big\}$, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{0<s\leq T}\Big|\ln\Big(\frac{1+\Delta M_s}{1+\Delta M_s^\beta}\Big) - \Delta M_s + \Delta M_s^\beta\Big| \\
&\qquad = \sum_{0<s\leq T}\Big|\ln\Big(\frac{1+\Delta M_s}{1+\Delta M_s^\beta}\Big) - \frac{\Delta M_s - \Delta M_s^\beta}{1+\Delta M_s^\beta} - \frac{\Delta M_s^\beta}{1+\Delta M_s^\beta}(\Delta M_s - \Delta M_s^\beta)\Big| \\
&\qquad \leq C(\beta)\beta\sum_{0<s\leq T}|\Delta M_s - \Delta M_s^\beta| \leq C(\beta)\beta\int_0^T\int_{|x|>\beta}|x|d\nu
\end{aligned} \tag{35}$$

où $C(\beta)$ est une fonction décroissante de β, comprise entre7/2 et 10 pour $\beta \leq 1/4$. A partir de (32), (33), (12), (34) et (35), on obtient

$$P\Big(\|\mathcal{E}(M) - \mathcal{E}(M^\beta)\|_T \geq \epsilon\Big) \leq 3\mathcal{K} + \frac{1}{A} + \Big(\frac{4A}{\epsilon} + \frac{4AC(\beta)\beta}{\epsilon}\Big)\Big(E[M]_T\Big)^{1/2}\mathcal{K}^{1/2}. \quad (36)$$

Le terme de droite de (36) est inférieur à ϵ (à une constante près) si l'on choisit A de la forme $1/\epsilon$ et $\epsilon = O(\mathcal{K}^{1/3})$, ce qui donne la majoration annoncée et le Lemma 5. ∎

Lemme 6. *Si M est une martingale de carré intégrable, si $\beta = \sqrt{2\mathcal{K}}$ et $p \geq 1$, alors*

$$\Pi(\mathcal{E}(M^\beta), \mathcal{E}(B)) \leq O\Big(\mathcal{K}^{1/5}\,|\ln \mathcal{K}|^{1/2}\Big)^{\frac{p}{p+1}}. \quad (37)$$

Preuve. Comme au paragraphe **III**, on peut utiliser le théorème de plongement et écrire

$$\Pi(\mathcal{E}(M^\beta), \mathcal{E}(B)) \leq \mathcal{K}(\mathcal{E}(W_\tau), \mathcal{E}(W)).$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\overline{P}\Big(\|\mathcal{E}(W_\tau) - \mathcal{E}(W)\|_T \geq \epsilon\Big) &\leq \overline{P}\Big(\|\mathcal{E}(W)\|_T \geq A\Big) \\ &\quad + \overline{P}\Big(\Big\|\frac{\mathcal{E}(W_\tau)}{\mathcal{E}(W)} - 1\Big\|_T \geq \frac{\epsilon}{A}\Big).\end{aligned} \quad (38)$$

On majore le premier terme du membre de droite de (38) au moyen de l'inégalité de Doob. On en tire que, pour $p > 1$,

$$\overline{P}\Big(\|\mathcal{E}(W)\|_T \geq A\Big) \leq \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p A^{-p} E(\mathcal{E}(W)_T)^p = \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p A^{-p} e^{\frac{p(p-1)T}{2}}. \quad (39)$$

En ce qui concerne le deuxième terme du membre de droite de (38), on note que

$$\frac{\mathcal{E}(W_\tau)_t}{\mathcal{E}(W)_t} = \exp\Big\{W_{\tau_t} - W_t - \frac{1}{2}([W_\tau]_t - [W]_t) + \sum_{0<s\leq t} \ln(1 + \Delta W_{\tau_s}) - \Delta W_{\tau_s} + \frac{1}{2}(\Delta W_{\tau_s})^2\Big\}.$$

Par suite, comme $\ln(1+x) \geq x/2$ for $0 \leq x \leq 1$, si $\epsilon \leq A$, on obtient

$$\begin{aligned}\overline{P}\Big(\Big\|\frac{\mathcal{E}(W_\tau)}{\mathcal{E}(W)} - 1\Big\|_T \geq \frac{\epsilon}{A}\Big) &\leq \overline{P}\Big(\|W_{\tau.} - W\|_T \geq \frac{\epsilon}{6A}\Big) + \overline{P}\Big(\|[W_\tau] - [W]\|_T \geq \frac{\epsilon}{3A}\Big) \\ &\quad + \overline{P}\Big(\sum_{0<s\leq t}\Big|\ln(1 + \Delta W_{\tau_s}) - \Delta W_{\tau_s} + \frac{1}{2}(\Delta W_{\tau_s})^2\Big| \geq \frac{\epsilon}{6A}\Big).\end{aligned} \quad (40)$$

Comme $|\ln(1+x) - x + x^2/2| \leq \frac{2\beta}{3(1-2\beta)^3}|x|^2$ dès que $|x| \leq 2\beta$, on peut écrire

$$\overline{P}\Big(\sum_{0<s\leq t}\Big|\ln(1+\Delta W_{\tau_t}) - \Delta W_{\tau_t} + \frac{1}{2}(\Delta W_{\tau_t})^2\Big| \geq \frac{\epsilon}{6A}\Big) \leq \overline{P}\Big(\frac{2\beta}{3(1-2\beta)^3}[W_\tau]_T \geq \frac{\epsilon}{6A}\Big)$$
$$\leq P\Big(\frac{2\beta}{3(1-2\beta)^3}[M^\beta]_T \geq \frac{\epsilon}{6A}\Big). \quad (41)$$

On continue comme après l'inégalité (23) du Lemme 4 et on obtient que, si $\frac{\epsilon(1-2\beta)^3}{4A\beta} > T + 2\beta$, alors

$$\begin{aligned} P\Big(\frac{2\beta}{3(1-2\beta)^3}[M^\beta]_T \geq \frac{\epsilon}{6A}\Big) &\leq P(|[M^\beta]_T - T| > 2\beta) \\ &\leq P(|[M]_T - T| > \beta) + P(|[M^\beta]_T - [M]_T| > \beta) \\ &\leq 3\mathcal{K} + 3\Big(E[M_T]\Big)^{1/2}\mathcal{K}^{1/2}. \end{aligned} \quad (42)$$

On en déduit que, si

$$\frac{\epsilon(1-2\beta)^3}{4A\beta} > T + 2\beta, \qquad \frac{\epsilon}{6A} \geq \mathcal{K}(W_\tau, W), \qquad \frac{\epsilon}{3A} \geq \mathcal{K}, \quad (43)$$

alors il vient de (38), (39), (40), (41) et (42)

$$\begin{aligned} \overline{P}\Big(\|\mathcal{E}(W_\tau) - \mathcal{E}(W)\|_T \geq \epsilon\Big) \leq &\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p A^{-p} e^{\frac{p(p-1)T}{2}} + \mathcal{K}(W_\tau, W) \\ &+ \mathcal{K}([W_\tau],[W]) + 3\mathcal{K} + 3\Big(E[M_T]\Big)^{1/2}\mathcal{K}^{1/2}. \end{aligned} \quad (44)$$

On prend alors A de la forme $O(\epsilon^{1/p})$ si bien que les restrictions (43) donnent

$$\begin{aligned} \epsilon^{\frac{p+1}{p}} &\geq O\Big(\mathcal{K}(W_\tau, W)\Big), \\ \epsilon^{\frac{p+1}{p}} &\geq O\Big(\mathcal{K}([W_\tau],[W])\Big), \\ \epsilon^{\frac{p+1}{p}} &\geq O\Big(\frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{(1-2\sqrt{2\mathcal{K}})^3}(T + 2\sqrt{2\mathcal{K}})\Big). \end{aligned} \quad (45)$$

On tire alors de (22), (44), (45) et du Lemme 4 que

$$\overline{P}\Big(\|\mathcal{E}(W_\tau) - \mathcal{E}(W)\|_T \geq \epsilon\Big) \leq \epsilon$$

pour des ϵ de la forme

$$\begin{aligned} \epsilon^{\frac{p+1}{p}} &\geq O\Big((\mathcal{K}(W_\tau, W) + \mathcal{K}([W_\tau],[W]) + 3\mathcal{K} + \mathcal{K}^{1/2}\Big) \\ &\geq O\Big(\mathcal{K}^{1/5}|\ln \mathcal{K}|^{1/2}\Big)^{\frac{p}{p+1}}. \end{aligned}$$

Le lemme est donc démontré. ∎

Preuve du Théorème 4. Elle s'ensuit immédiatement des lemmes 5 et 6. ∎

V. Estimation de $\Pi(M_- \cdot M, B \cdot B)$.

Comme précédemment dans les sections III et IV on introduit pour $\beta > 0$ la martingale M^β et on commence par estimer la distance $\mathcal{K}(M^\beta_- \cdot M^\beta_-, M_- \cdot M)$.

Lemme 7. *On a pour $\beta \geq \sqrt{2\mathcal{K}}$ l'estimation*

$$\mathcal{K}(M^\beta_- \cdot M^\beta, M_- \cdot M) \leq \mathcal{O}(\mathcal{K}^{1/5}). \tag{46}$$

Preuve. on utilise la représentation :

$$M_- \cdot M - M^\beta_- \cdot M^\beta = 1/2(M^2 - (M^\beta)^2) - 1/2([M] - [M^\beta]). \tag{47}$$

De (10), (20) et (21) on déduit :

$$P[||[M] - [M^\beta||_T > \varepsilon] \leq 2\mathcal{K} + \frac{3\beta}{\varepsilon} E[[M]_T]^{1/2}\mathcal{K}^{1/2}. \tag{48}$$

D'autre part on a :

$$||M^2 - (M^\beta)^2|| \leq ||M - M^\beta||^2 + 2||M||||M - M^\beta||$$

De sorte que :

$$\begin{aligned} &P[||M^2 - (M^\beta)^2||_T > \varepsilon] \\ &\leq P[||M - M^\beta||_T > \sqrt{\varepsilon/2}] + P[||M - M^\beta||_T > \varepsilon/2N] + P[||M||_T > N] \end{aligned} \tag{49}$$

Les deux premiers termes du coté droit de (49) sont estimés à partir de (14) et (10), et pour le dernier on a : $P[||M||_T > N] \leq \frac{4}{N^2}E[M_T^2]$. On en déduit :

$$P[||M^2 - (M^\beta)^2|| > \varepsilon] \leq \frac{4}{N^2}E[M_T^2] + 2\mathcal{K} + \sqrt{2/\varepsilon}(E[M_T^2])^{1/2}\mathcal{K}^{1/2} + \frac{2N}{\varepsilon}(E[M_T^2])^{1/2}\mathcal{K}^{1/2}$$

en posant $1/N = \mathcal{K}^\alpha$, tenant compte de (48) et prenant $\beta \geq \sqrt{2\mathcal{K}}$ on en déduit que :

$$P[||M_- \cdot M - M^\beta_- \cdot M^\beta||_T > \varepsilon] \leq \mathcal{O}(\mathcal{K}^{2\alpha}) + \frac{\mathcal{O}(\mathcal{K}^{1/2-\alpha})}{\varepsilon}.$$

En posant $\varepsilon = C\mathcal{K}^\gamma$ on obtient facilement que le meilleur choix en α et γ pour que le second membre de cette inégalité soit inférieure à ε est obtenu pour $\alpha = 1/10$ et $\gamma = 1/5$, d'où l' estimation (46).

On estime ensuite la distance de Lévy-Prokhorov entre $M^\beta_- \cdot M^\beta$ et $B \cdot B$.

Lemme 8. *Pour $\mathcal{K}$ suffisamment petit et $\beta = \sqrt{2\mathcal{K}}$, on obtient pour tout $p > 1$:*

$$\Pi(M_-^\beta \cdot M^\beta, B \cdot B) \leq \mathcal{O}(\mathcal{K}^{\frac{p}{5p+4}}|ln\mathcal{K}|^{1/2}). \tag{50}$$

Preuve. Comme au paragraphe III on peut utiliser le théorème de plongement pour M^β et écrire :

$$\Pi(M_-^\beta \cdot M^\beta, B \cdot B) \leq \mathcal{K}(W_{\tau-} \cdot W_\tau, W \cdot W) = \mathcal{K}(W_\tau^2 - [W_\tau], W^2 - Id).$$

Nous avons :

$$\overline{P}[||(W_\tau^2 - [W_\tau]) - (W^2 - Id)||_T > \varepsilon] \leq \overline{P}[||W_\tau^2 - W^2||_T > \varepsilon/2] + \overline{P}[||[W_\tau] - Id||_T > \varepsilon/2]$$

$$\leq \overline{P}[\sup_{s,t \leq T+\alpha, |t-s| \leq \alpha} |W_t^2 - W_s^2| > \varepsilon/2] + \overline{P}[||\tau - Id||_T > \alpha] + \overline{P}[||[W_\tau] - Id|| > \varepsilon/2]. \tag{51}$$

Le deuxième et le dernier terme de (51) ont été estimés au paragraphe III à partir de (19) et (26), puis en (22).

$$\begin{aligned}&\overline{P}[\sup_{s,t \leq T+\alpha, |t-s| \leq \alpha} |W_t^2 - W_s^2| > \varepsilon/2] \\ &\leq \overline{P}[\sup_{s,t \leq T+\alpha, |t-s| \leq \alpha} |W_t - W_s| > \varepsilon/2N] + P[||2W||_T > N] \\ &\leq \frac{CN}{\sqrt{\alpha}\varepsilon} exp(-\frac{\varepsilon^2}{C\alpha N^2}) + \frac{C}{N^p}\end{aligned} \tag{52}$$

On a utilisé l'inégalité exponentielle (18), et C est une constante qui comme d'habitude varie de place en place et qui dépend notamment de T et de p. Utilisant donc (19), (22), (26), (51) et (52), on obtient :

$$\begin{aligned}&\overline{P}[||(W_\tau^2 - [W_\tau]) - (W^2 - Id)||_T > \varepsilon] \\ &\leq \frac{C\mathcal{K}}{\alpha^2} + \frac{C\mathcal{K}}{\alpha} + 8\mathcal{K} + \frac{C\mathcal{K}^2}{\alpha^2} + \frac{C\mathcal{K}}{\varepsilon} + \frac{CN}{\sqrt{\alpha}\varepsilon} exp(\frac{-\varepsilon^2}{C\alpha N^2}) + \frac{C}{N^p} \\ &+ 2P[||[M] - Id||_T \geq \alpha/4] + 2P[||[M] - Id||_T > \varepsilon/2]\end{aligned} \tag{53}$$

On prend $\alpha = \mathcal{K}^\delta, \varepsilon = C\alpha^{1/2}N|ln(\alpha N)|^{1/2}$ et $\frac{1}{N} = \mathcal{K}^{\delta'}$ où $0 < \delta' < \delta/2 < 1/2$. (53) devient :

$$\begin{aligned}&\overline{P}[||(W_\tau^2 - [W_\tau]) - (W^2 - Id)||_T > \varepsilon] \\ &\leq N^C\alpha^{C-1} + C\mathcal{K}^{p\delta'} + C\mathcal{K}^{1-2\delta} + C\mathcal{K}^{1-\delta} \\ &+ 8\mathcal{K} + C\mathcal{K}^{2-2\delta} + C\mathcal{K}^{1-(\delta/2)+\delta'}.\end{aligned} \tag{54}$$

Après un calcul élémentaire le meilleur couple (δ, δ') pour lequel le second membre de (54) est inférieur à ε est $\delta = \frac{2(p+1)}{5p+4}$ et $\delta' = \frac{1}{5p+4}$, d'où l'estimation (50).

On déduit des lemmes 7 et 8 le théorème suivant :

Théorème 5. *Si M est une martingale de carré intégrable, on a alors pour tout $p \geq 1$:*

$$\Pi(M_{-} \cdot M, B \cdot B) \leq \mathcal{O}(\mathcal{K}^{\frac{p}{5p+4}} |ln\mathcal{K}|^{1/2}). \tag{55}$$

VI Vitesse de convergence pour les formes quadratiques de variables aléatoires indépendantes

Nous nous proposons dans cette section d'appliquer le théorème 2 à la situation suivante: Soit, pour chaque $n \in \mathbf{N}, A_n = (a_{ij})_{i,j \leq n}$ une matrice symétrique de nombres réels, avec les éléments diagonaux nuls ($a_{ii} = 0$).

On notera $\tilde{A}_n = (\tilde{a}_{ij})_{i,j \leq n}$ avec $\tilde{a}_{ij} = \{ \begin{smallmatrix} a_{ij} & i > j \\ 0 & i \leq j \end{smallmatrix}$

On considère une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes satisfaisant :

$$E[X_i] = 0, E[X_i^2] = 1, \forall i \in \mathbf{N}.$$

On pose $S_n = \sum_{i,j \leq n} a_{ij} X_i X_j$, puis σ_n^2 désigne la variance de S_n.

On a $\sigma_n^2 = 2||A_n||^2 = 4||\tilde{A}_n||^2$ où la norme $||B||$ d'une matrice $B = (b_{i,j})$ est définie par $||B|| = \sum_{i,j} b_{i,j}^2$. On définit enfin le processus $S_n(\cdot)$ indicé par t dans l'intervalle $[0, 1]$ et associé à la somme S_n par $S_n(t) = S_k/\sigma_n$ si $\sigma_k^2/\sigma_n^2 \leq t < \sigma_{k+1}^2/\sigma_n^2, S_n(1) = S_{n-1}/\sigma_n$.

On a alors le résultat :

Théorème 6 ([8]). *Notons $\gamma_n = ||\tilde{A}_n^T \tilde{A}_n|| / ||\tilde{A}_n||^2$ et supposons que la suite (X_j^2) est uniformément intégrable.*

Alors , la condition $\gamma_n \to 0$ implique la convergence

$$S_n(.) \xrightarrow{\mathcal{L}} W$$

où W est un mouvement brownien standard sur $[0, 1]$.

Le théorème 2 nous permettra d'estimer la vitesse de convergence de $S_n(\cdot)$ vers W en termes de γ_n, ce qu'exprime l'énoncé suivant :

Théorème 7. *Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait $\sup_j E[X_j^{2+\delta}] = m < \infty$, alors:*

$$\Pi(S_n(\cdot), W) = \mathcal{O}(\gamma_n^{1/30} |ln(\gamma_n)|^{1/2} + \gamma_n^{\delta/48}). \tag{56}$$

Suivant Jakubowski-Mémin [8], on tronque les variables X_i de la façon suivante: on pose pour chaque n et chaque $j \leq n$

$$X_{n,j} = \frac{1}{\sqrt{Var(Y_{n,j})}} Y_{n,j}$$

avec $Y_{n,j} = X_j \mathbf{1}_{|X_j| \leq C_n} - E[X_j \mathbf{1}_{|X_j| \leq C_n}]$, et $C_n = \left(\frac{\sigma_n^2}{max_{j\leq n} \sum_{i \leq n} a_{i,j}^2}\right)^{1/16}$.
On vérifie que $|Var(Y_{n,j}) - 1| \leq \frac{m}{C_n^\delta}$.
On note $T_{n,k} = \sum_{i,j \leq k} a_{i,j} X_{n,i} X_{n,j}$ et $T_n(t) = \sigma_n^{-1} T_{n,k}$ pour $\frac{\sigma_k^2}{\sigma_n^2} \leq t < \frac{\sigma_{k+1}^2}{\sigma_n^2}$;enfin $T_n(1) = T_{n,n-1}/\sigma_n$.
La preuve du théorème 7 est conduite à partir des lemmes 9 et 10 suivants :

Lemme 9.

$$P[||T_n(\cdot) - S_n(\cdot)||_1 > \eta] \leq \frac{16m}{\eta^2 C_n^\delta} \tag{57}$$

$$\mathcal{K}(S_n(\cdot), T_n(\cdot)) \leq \mathcal{O}(1/C_n^{\delta/3}). \tag{58}$$

Preuve. Comme $T_n(\cdot) - S_n(\cdot)$ est une martingale de carré intégrable on a :

$$P[||T_n(\cdot) - S_n(\cdot)||_1 > \eta] \leq 4/\eta^2 E[(T_n(1) - S_n(1))^2].$$

$$\begin{aligned}
E[(T_n(1) - S_n(1))^2] &= 4\sigma_n^{-2} \sum_{j=2}^{n-1} E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}(X_i X_j - X_{n,i} X_{n,j})\Big)^2\Big] \\
&= 4\sigma_n^{-2} \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}^2 E[(X_i X_j - X_{n,i} X_{n,j})^2] \\
&\leq 8\sigma_n^{-2} \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}^2 \big(E[(X_i - X_{n,i})^2] + E[(X_j - X_{n,j})^2]\big) \\
&\leq \sup_{i \leq n} E[(X_i - X_{n,i})^2].
\end{aligned}$$

Un calcul élémentaire montre :

$$E[(X_i - X_{n,i})^2] \leq 16 E[|X_i|^{2+\delta}] \frac{1}{C_n^\delta} \leq \frac{16m}{C_n^\delta}$$

d'où (57) et (58).

Notant alors $K_n = \mathcal{K}([T_n(\cdot)], [W])$, on utilise le théorème 2, avec $M = T_n$. Remarquant que $E([T_n](1)) \leq 2E([S_n](1))$, on a alors :

$$\Pi(S_n(\cdot), W) \leq \Pi(T_n(\cdot), W) + \mathcal{K}(T_n(\cdot), S_n(\cdot))$$

d'où :

$$\Pi(S_n(\cdot), W) \leq \mathcal{O}(K_n^{1/5} |ln(K_n)|^{1/2}) + \mathcal{O}(\frac{1}{C_n^{\delta/3}}).$$

Utilisant le lemme 2-3 de [8], on a $C_n^{-1} \leq \gamma_n^{1/16}$ de sorte que nous obtenons l'estimation :

$$\Pi(S_n(\cdot), W) \leq \mathcal{O}(K_n^{1/5} |ln(K_n)|^{1/2} + \gamma_n^{\delta/48}). \tag{59}$$

Lemme 10 . *On a pour γ_n suffisamment petit, l'inégalité :*

$$K_n \leq \mathcal{O}(\gamma_n^{1/6}). \tag{60}$$

Preuve:

$$P[||[T_n(\cdot)] - Id||_1 > \eta] \leq P[||[T_n(\cdot)] - \langle T_n(\cdot)\rangle||_1 > \eta/2] + P[||\langle T_n(\cdot)\rangle - Id||_1 > \eta/2]. \tag{61}$$

a) On commence par estimer le premier terme du membre de droite de (61) :

$$\begin{aligned}
&P[||[T_n(\cdot)] - \langle T_n(\cdot)\rangle||_1 > \eta/2] \\
&\leq P\big[\sup_{k\leq n} |\frac{4}{\sigma_n^2}\sum_{j=2}^{k}\big(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}X_{n,i}\big)^2(X_{n,j}^2 - 1)| > \eta/2\big] \\
&\leq 64/\eta^2 E\big[\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{j=2}^{n}\big(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}X_{n,i}\big)^2(X_{n,j}^2 - 1)\big]^2
\end{aligned}$$

(car $\big(\sum_{j=2}^{k}\big(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}X_{n,i}\big)^2(X_{n,j}^2 - 1)\big)_{k\leq n}$ est une martingale)

$$\begin{aligned}
&= \frac{64}{\eta^2\sigma_n^4}\big(\sum_{j=2}^{n} E[(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}X_{n,i})^4]E[(X_{n,j}^2 - 1)^2]\big) \\
&\leq \frac{128}{\eta^2\sigma_n^4}C_n^4\big(\sum_{j=2}^{n}\big(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}^4 E[X_{n,i}^4] + 6\sum_{l=1}^{j-1} a_{lj}^2(\sum_{i=1}^{l-1} a_{ij}^2)\big)\big)
\end{aligned}$$

(car $E[(X_{n,j}^2 - 1)^2] \leq E[X_{n,j}^4] \leq \frac{C_n^4}{(1-m/C_n^6)^2} \leq 2C_n^4$, dès que γ_n est suffisamment petit).

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{128C_n^4}{\eta^2\sigma_n^4}\big[2\max_{i<j} a_{ij}^2 C_n^4\sigma_n^2 + 6\max_{j}\big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\big)\sigma_n^2\big] \\
&\leq \frac{128}{\eta^2\sigma_n^2}(2C_n^8\delta_n^2 + 6\delta_n^2 C_n^4) \leq \frac{1024\delta_n}{\eta^2\sigma_n}.
\end{aligned}$$

(On a posé $\delta_n^2 = \max_j(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2)$). On en déduit :

$$P[||[T_n(\cdot)] - \langle T_n(\cdot)\rangle||_1 > \eta/2] \leq \frac{1024\gamma_n^{1/2}}{\eta^2}. \tag{62}$$

b) On va maintenant s'intéresser au second terme du membre de droite de (61).

$$P[\|\langle T_n(\cdot)\rangle - Id\|_1 > \eta/2]$$
$$\leq P[\sup_{k\leq n}|\frac{4}{\sigma_n^2}\sum_{j=1}^{k}(\sum_{i=1}^{j-1}a_{ij}X_{n,i})^2 - \frac{\sigma_k^2}{\sigma_n^2}| > \eta/4] + P[\sup_{k\leq n-1}(\frac{\sigma_{k+1}^2-\sigma_k^2}{\sigma_n^2}) > \eta/4]. \quad (63)$$

Le dernier terme de (63) est nul dès que $\eta/4 \geq \dfrac{\sigma_{k+1}^2-\sigma_k^2}{\sigma_n^2}$, pour chaque $k = 1, ..., n$.

Comme $\dfrac{\sigma_{k+1}^2-\sigma_k^2}{\sigma_n^2} = 4\dfrac{\sum_{i=1}^{k}a_{i,k+1}^2}{\sigma_n^2} \leq 4\dfrac{\max_j\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2}{\sigma_n^2} \leq 4\gamma_n$, on prendra $\eta = (16\gamma_n)^\alpha$ avec $\alpha \leq 1$.
Occupons-nous maintenant du premier terme du membre de droite de (63).

$$\frac{1}{\sigma_n^2}(4\sum_{j=1}^{k}(\sum_{i=1}^{j-1}a_{ij}X_{n,i})^2 - \sigma_k^2) = \frac{4}{\sigma_n^2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j-1}a_{ij}^2(X_{n,i}^2-1)$$
$$+\frac{4}{\sigma_n^2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{i=1}^{l-1}a_{lj}a_{ij}X_{n,i}X_{n,l}. \quad (64)$$

Mais $\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j-1}a_{ij}^2(X_{n,i}^2-1) = \sum_{i=1}^{k-1}(X_{n,i}^2-1)(\sum_{j=i+1}^{k}a_{ij}^2)$.
Ce processus indicé par k est une martingale et on obtient :

$$P[\sup_{k\leq n}|\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j-1}a_{ij}^2(X_{n,i}^2-1)| > \eta/8]$$
$$\leq \frac{256}{\eta^2\sigma_n^4}E[\sum_{i=1}^{n-1}(X_{n,i}^2-1)^2(\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}^2)^2] \leq \frac{512C_n^4\delta_n^2}{\eta^2\sigma_n^2}$$
$$= \frac{512\delta_n^2}{\eta^2\sigma_n^2}(\frac{\sigma_n^2}{\delta_n^2})^{1/4} = \frac{512}{\eta^2}(\frac{\delta_n^2}{\sigma_n^2})^{3/4} \leq \frac{512\gamma_n^{3/4}}{\eta^2}.$$

Donc

$$P[\sup_{k\leq n}|\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j-1}a_{ij}^2(X_{n,i}^2-1)| > \eta/8] \leq \frac{512}{\eta^2}\gamma_n^{3/4}. \quad (65)$$

Le dernier terme à estimer dans (64) s'écrit :

$$\frac{4}{\sigma_n^2}\sum_{l=1}^{k-1}(\sum_{i=1}^{l-1}X_{n,i}(\sum_{j=l+1}^{k}a_{ij}a_{lj})X_{n,l});$$

c'est encore une martingale en l'indice k.

$$
\begin{aligned}
&P[\sup_{k\leq n}|\frac{4}{\sigma_n^2}\sum_{l=1}^{k-1}\Big(\sum_{i=1}^{l-1}X_{n,i}(\sum_{j=l+1}^{k}a_{ij}a_{lj})\Big)X_{n,l}|>\eta/8] \\
&\leq \frac{1024}{\eta^2\sigma_n^4}(\sum_{l=1}^{n-1}E[(\sum_{i=1}^{l-1}X_{n,i}(\sum_{j=l+1}^{n}a_{ij}a_{lj}))^2]) \\
&\leq \frac{1024}{\eta^2\sigma_n^4}\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{l-1}(\sum_{j=l+1}^{n}a_{ij}a_{lj})^2 \\
&\leq \frac{1024}{\eta^2\sigma_n^4}||\tilde{A}_n^T\tilde{A}_n||^2 \leq \frac{1024}{\eta^2}\frac{||\tilde{A}_n^T\tilde{A}_n||^2}{16||\tilde{A}_n||^4} \leq \frac{64\gamma_n^2}{\eta^2}.
\end{aligned} \tag{66}
$$

Finalement, compte tenu de (63)-(66), avec $\eta = (16\gamma_n)^\alpha$ et $\alpha \leq 1$:

$$P[||\langle T_n(\cdot)\rangle - Id||_1 > \eta/2] \leq \frac{16}{\eta^2}(16\gamma_n^{3/4} + \gamma_n^2)$$

Et donc

$$P[||[T_n(\cdot)] - Id||_1 > \eta] \leq \frac{16}{\eta^2}(7\gamma_n^{1/2} + 16\gamma_n^{3/4} + \gamma_n^2) \leq \frac{K}{\eta^2}\gamma_n^{1/2}.$$

On choisit alors α tel que $\frac{K}{\eta^2}\gamma_n^{1/2} \leq \eta$, on obtient $\alpha = 1/6$, d'où l'estimation (60).

Démonstration du théorème 7. Compte tenu de la valeur de η considérée ci-dessus, et des estimations (57) (58) (59) et (60) des lemmes 9 et 10, on obtient (56) et le théorème 7.

References.

[1] F. Coquet, J. Mémin : *Vitesse de convergence en loi pour des solutions d'équations différentielles stochastiques vers une diffusion*, preprint IRMAR 1993.
[2] F. Coquet, J. Mémin, L. Vostrikova ; *Rate of convergence in the functional limit theorem for likelihood ratio processes*, Preprint IRMAR 1992.
[3] C. Dellacherie, P.-A. Meyer : **Probabilités et potentiel vol.2**. Hermann, Paris, 1980.
[4] L.Dubins : *On a theorem of Skorokhod*, Ann. Math. Stat. 39, 2094-2097, 1968.
[5] E. Haeusler : *An exact rate of convergence in the functional central limit theorem for special martingale difference arrays*, Z. Wahrsch. Verw. Geb. 65, 523-534, 1984.
[6] J. Jacod, P. Mano : *Une évaluation de la distance entre les lois d'une semi-martingale et d'un processus à accroissements indépendants*, Stochastics 25, 87-124, 1988.
[7] J. Jacod, A. N. Shiryaev : **Limit theorems for stochastic processes.** Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1987.
[8] A. Jakubowski, J. Mémin : *Functional central limit theorem for a class of quadratic forms in independent random variables*,Theor. Veroatnost. (38), Vol. 3,1993, 600-612.

[9] K. Kubilius : *Rate of convergence in the functional central limit theorem for semi-martingales*, Liet. Mat. Rink. XXV, 84-96, 1985.
[10] K. Kubilius, J. Mémin : *Inégalité exponentielle pour les martingales locales*, Preprint IRMAR 1993.
[11] D. Lépingle : *La variation d'ordre p des semi-martingales*, Z. Wahrsch. Verw. Geb. 36, 295-316, 1976.
[12] I. Monroe : *On embedding right-continuous martingales in Brownian motion*, Ann. Math. Stat. 43, 1293-1311, 1972.
[13] I. Monroe : *Processes that can be embedded in Brownian motion*, Ann. Proba. 6, 42-56, 1978.
[14] S. A. Outev : *Remark on rate of convergence in the invariance principle*, Sibirski Math. Journal XXII, 206-209, 1981.
[15] V. Strassen : *The existence of probability measures with given marginals*, Ann. Math. Stat. 36, 423-439, 1965.
[16] V. M. Zolotarev : **Modern theory of summation of independent variables.** Nauka, Moscow, 1986.

F. COQUET, J. MEMIN, IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex.
L. VOSTRIKOVA, Département de mathématiques, UFR Structures et Matériaux, Université d'Angers, 2 Boulevard Lavoisier, 49045 ANGERS Cedex ; et IRMAR, Université de Rennes 1.