PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

JEAN-MICHEL BAZIN

GEOMUS Un système informatique de résolution de problèmes qui s'inspire du comportement humain

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1993-1994, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques », , exp. nº 1, p. 1-21
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1993-1994___3_A1_0>

GEOMUS

Un système informatique de résolution de problèmes qui s'inspire du comportement humain

Jean-Michel BAZIN

U.F.R. de Sciences Exactes et Naturelles - 51000 REIMS

Introduction

Comment concevoir un système informatique capable de résoudre des exercices de géométrie élémentaires ?

L'observation de professeurs de collège en phase de résolution d'exercice permet de déterminer des pistes de recherches. On présente ici une réalisation informatique qui s'inspire du comportement humain pour résoudre des exercices de géométrie de quatrième.

On décrira tout d'abord (section 1) la résolution fournie par le système sur un exercice préliminaire, puis on examinera (section 2) le mécanisme d'analyse de la figure s'appuyant sur l'extraction de sous-figures. L'activation des connaissances à partir du problème posé et l'algorithme de résolution utilisé est exposé à la section 3, enfin dans la section 4 on étudie les raisonnements implicites et les mécanismes visuels mis en jeu dans la résolution d'un exercice.

1. Exemple préliminaire

1.1. Exercice :

Soient C1 et C2 deux cercles de centre O1 et O2 sécants en A et M.

Soient [AB] et [AC] deux diamètres de C1 et C2.

Montrez que B,M,C sont alignés.

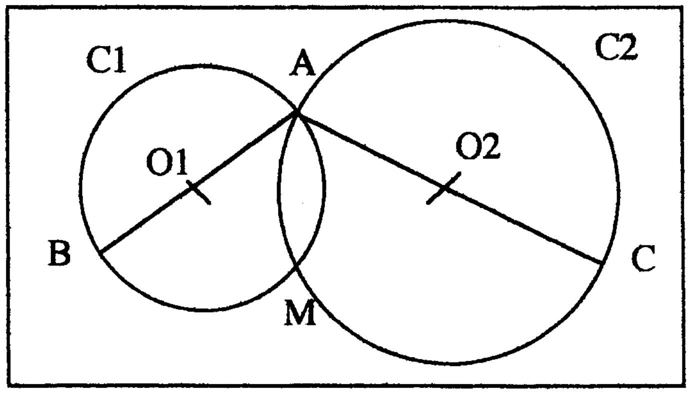

Figure 1.

Pour résoudre cet exercice, diverses connaissances sont mises en oeuvre. On rappelle d'abord quelques théorèmes avant de montrer comment ces théorèmes sont utilisés dans la résolution de l'exercice posé.

1.2. Rappels de quelques théorèmes

On rappelle les deux théorèmes suivants appelés communément "théorèmes de la droite des milieux".

Théorème **DTM1** .

Soit un triangle (ABC)

Si

I et J sont les milieux de [AB] et [AC]

alors

(IJ) est parallèle à (BC) et IJ = 1/2 BC

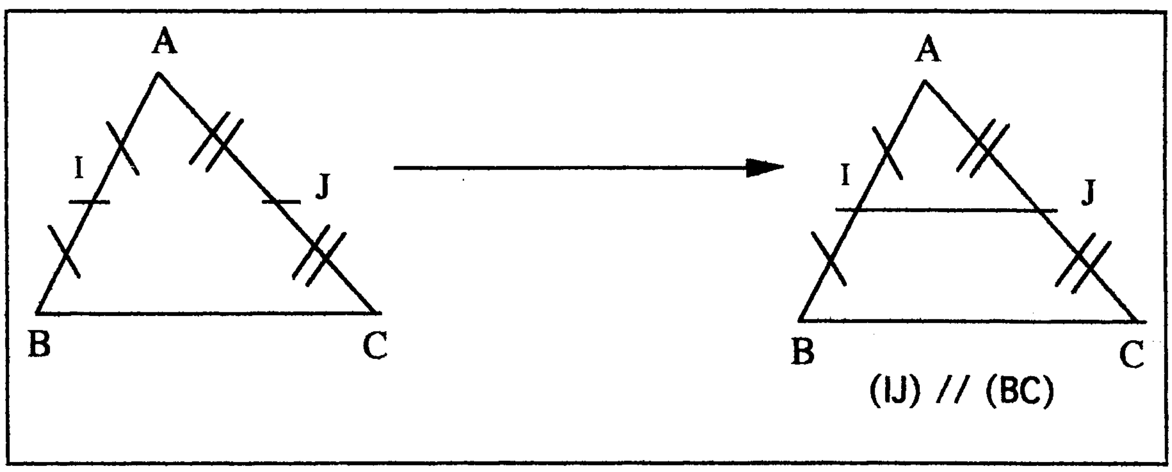

Figure 2.

Théorème **DTM2** .

Soit un triangle (ABC)

Si

I est le milieu de [AB]

et

J est un point de [AC] tel que (IJ) est parallèle à (BC)
alors
J est le milieu de [AC]

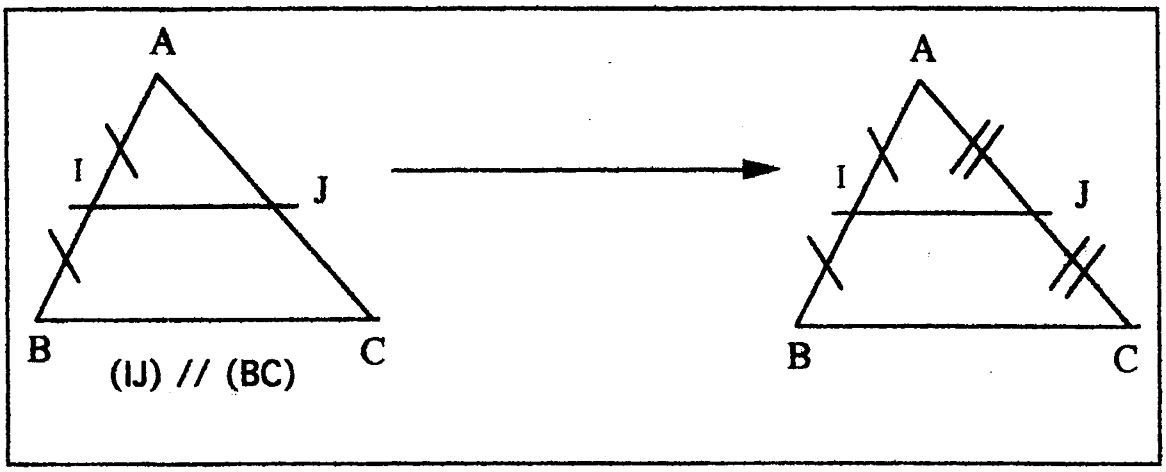

Figure 3.

Dans toute la suite de notre travail, nous désignerons par "les connaissances sur la droite des milieux" ces deux théorèmes.

De façon analogue, on appellera "ensemble des connaissances sur les triangles rectangles" les théorèmes et conseils suivants :

Théorème **TR1**

Si

le triangle (ABC) est inscrit dans un demi-cercle de diamètre [BC]

alors

ce triangle est rectangle en A.

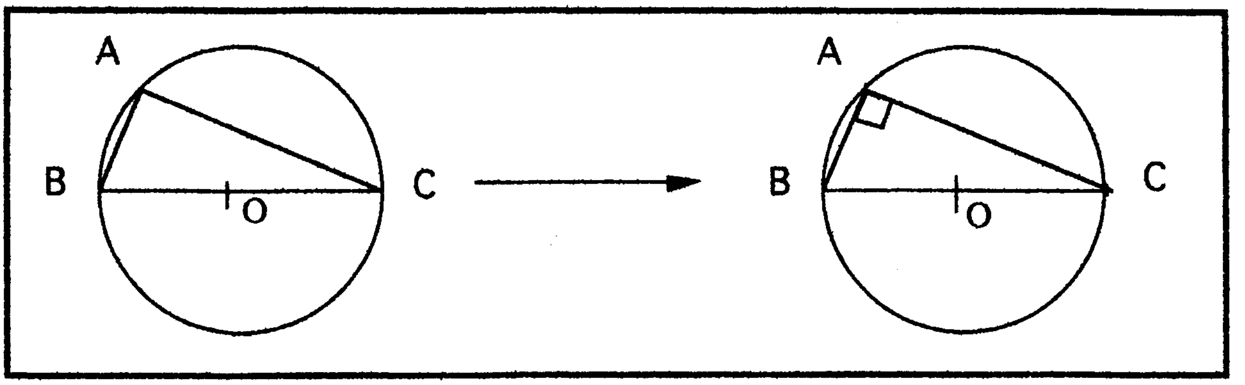

Figure 4.

Théorème **TR2** .

Soit le triangle (ABC) et soit I le milieu de [BC]

Si

IA = IB = IC

alors

le triangle ABC est rectangle en A.

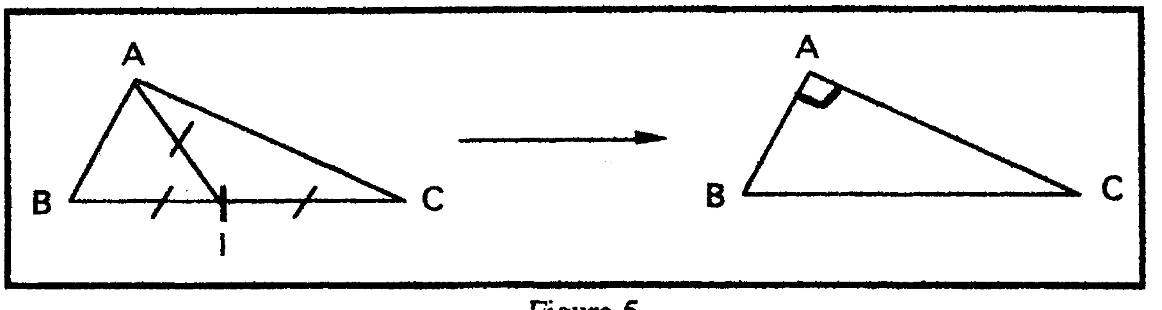

Figure 5.

Conseil **CTR1**

Si une figure d'un problème de géométrie contient la configuration suivante (figure 6.1) alors il est utile de tracer le segment [AC].(figure 6.2)

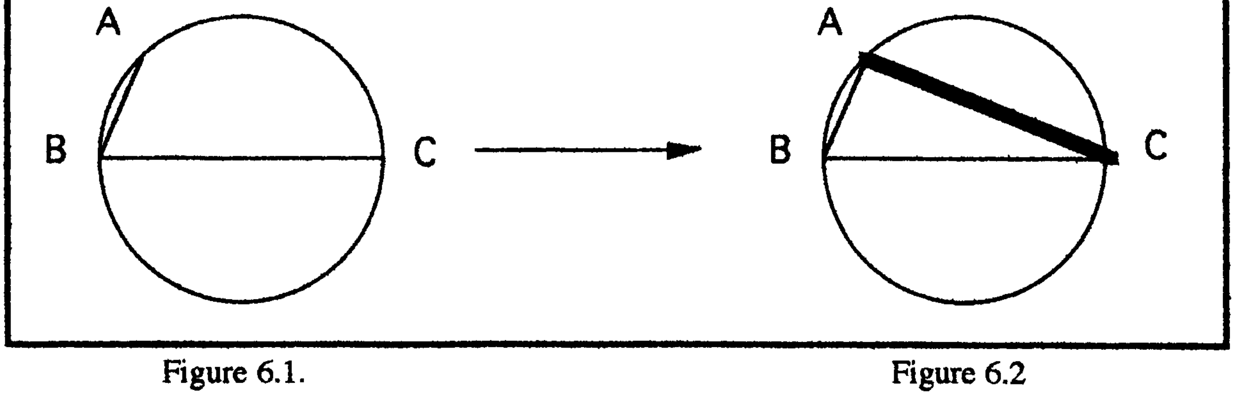

Figure 6.1. Figure 6.2

On appellera "ensemble des connaissances sur les parallélogrammes" les théorèmes et conseils suivants :

Théorème **PARGRM1** .

Si

les segments [AC] et [BD] ont même milieu

alors

(A B C D) est un parallélogramme.

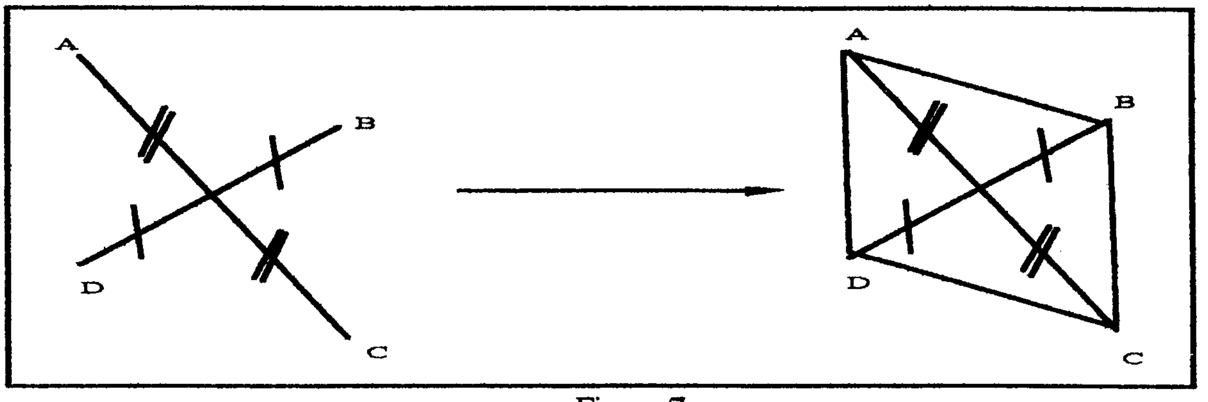

Figure 7.

Théorème **PARGRM2**

Si

(A B C D) est un parallélogramme

alors

(AB) est parallèle à (CD) et (AD) est parallèle à (BC).

Conseil **CPARGRM1**

Si

(A B C D) est un parallélogramme

et

une diagonale du parallélogramme est tracée sur la figure

alors

il est utile de tracer la seconde diagonale du parallélogramme et

il est utile de "considérer" le point d'intersection de [AC] et [BD].

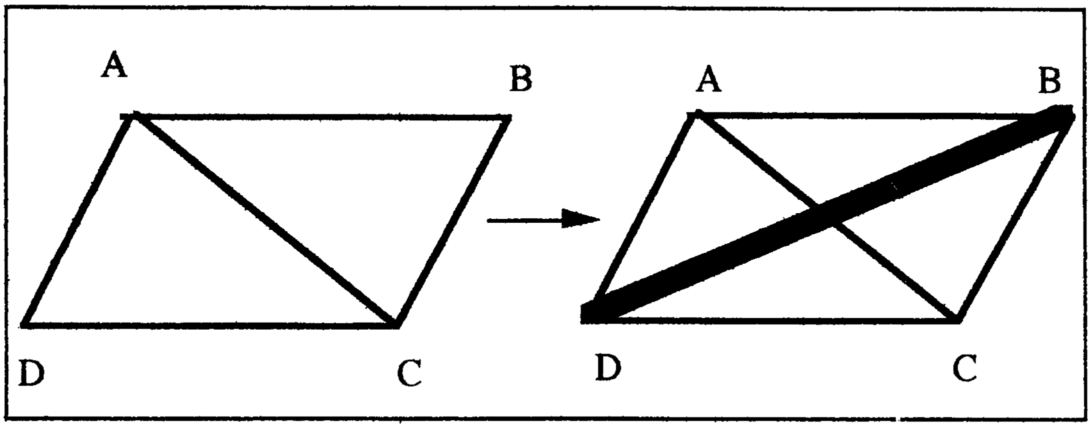

Figure 8.

1.3. Solution de l'exercice fournie par le système.

L'énoncé de l'exercice étudié est le suivant :

Soient C1 et C2 deux cercles de centre O1 et O2 sécants en A et M.

Soient [AB] et [AC] deux diamètres de C1 et C2.

Montrez que B,M,C sont alignés.

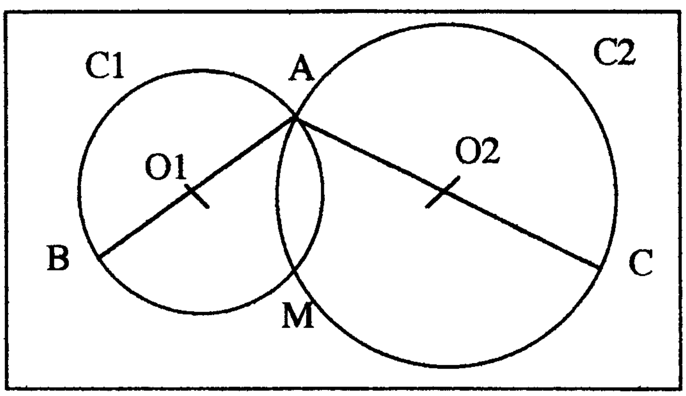

Figure 9.

Le travail fournit par le système peut être décomposé en plusieurs étapes :

Etape 1 : Construction de la représentation interne de la figure sous forme d'une description.

Au cours de cette construction, diverses connaissances élémentaires sont mises en oeuvre. Ainsi l'hypothèse "[AB] diamètre du cercle C1 de centre O1" est exploitée immédiatement pour en déduire que O1 est le milieu de [AB].

Etape 2.1 : Analyse de la figure : le système décide de traiter le problème à l'aide des connaissances sur la droite des milieux.

Etape 2.2 : Le système charge les connaissances sur la droite des milieux dans son espace de travail.(DTM1, DTM2).

Etape 2.3 : A l'aide de ces connaissances, le système produit l'arbre de déduction suivant :

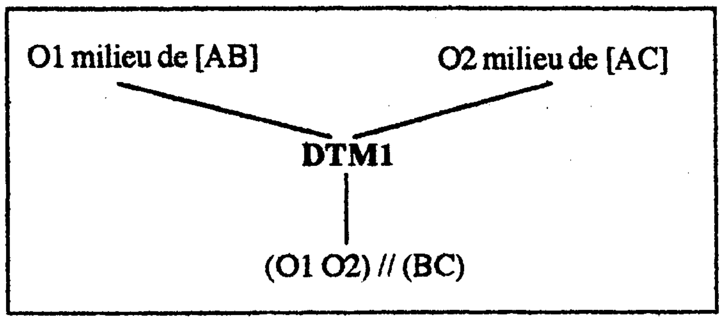

Figure 10.

Ce n'est pas la conclusion demandée !

Etape 3.0 : Analyse de la figure : le système décide de traiter le problème avec les connaissances sur les triangles rectangles .

Etape 3.1 : Appel des connaissances sur les triangles rectangles dans l'espace de travail.(TR1, TR2, CTR1).

Etape 3.2 : Application de ces connaissances : le système produit la déduction suivante :

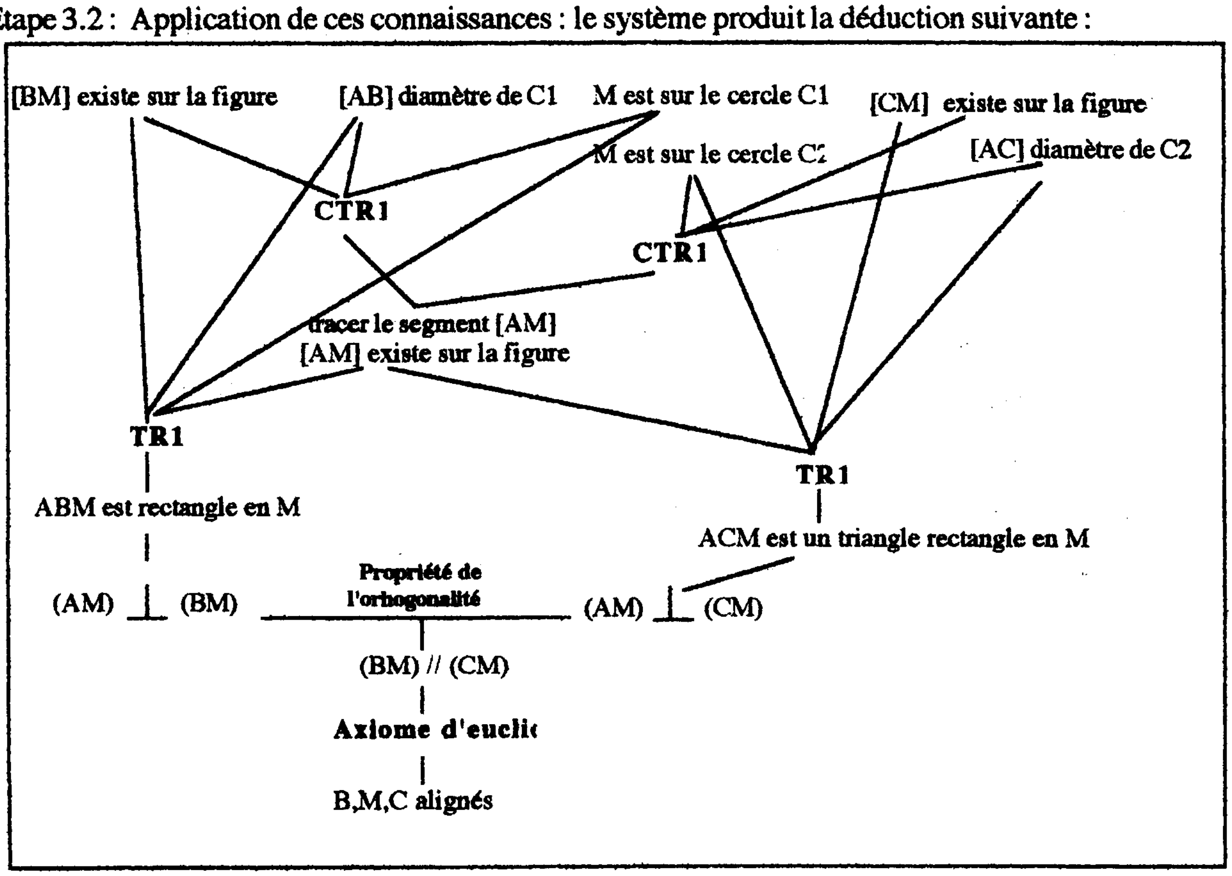

Figure 11.

Dans cet exemple, le système a analysé la figure et a appelé d'abord un ensemble de connaissances inutiles pour l'obtention du résultat demandé, puis a appelé le bon ensemble de connaissances, ce qui lui a permis de conclure. Remarquons que le fait "[BM] existe sur la figure" est une prémisse nécessaire au déclenchement de la règle **CTR1**. Un humain résolvant ce problème ne spécifiera jamais cette prémisse. L'hypothèse "[BM] existe sur la figure" est une hypothèse nécessaire **au fonctionnement** du système, mais ce n'est pas une hypothèse au **sens mathématique**.

Dans l'exemple que nous avons décrit, le système a analysé la figure, a appelé successivement les connaissances qu'il estimait pertinentes pour le problème, et a appliqué ces connaissances sur les données du problème pour en déduire le but recherché. Ces étapes (Analyse, Appel de connaissances, Application des connaissances sélectionnées) correspondent au déclenchement de divers groupes de règles. La phase d'observation, de décision, d'appel de connaissances met en jeux des **règles de métaconnaissances**, la phase d'application met en jeux des **règles de connaissances**. On remarquera que certaines connaissances sont appelées par les règles de métaconnaissances (ce sont les règles correspondant aux connaissances du "cours de quatrième"). En revanche certaines règles sont résidentes dans le système. Ce sont les connaissances élémentaires qu'est sensé connaitre un élève de quatrième. C'est le cas pour les propriétés de l'orthogonalité ou l'axiome d'euclide.

2. Sous-figures

On se propose ici de décrire dans le détail comment le système réalise l'analyse de la figure et comment il décide de sélectionner des connaissances. L'analyse se fait par **extraction de sous-figures**, ou configurations caractéristiques. A chaque sous-figure est associé une **étiquette** de problème, qui est associée à un ensemble de connaissances. Lorsque plusieurs étiquettes sont candidates, le système dispose d'un mécanisme d'arbitrage partiel des étiquettes.

2.1. Figure de l'énoncé et figure codée

L'énoncé du problème est constitué d'un ensemble d'hypothèses définissant la figure suivante :

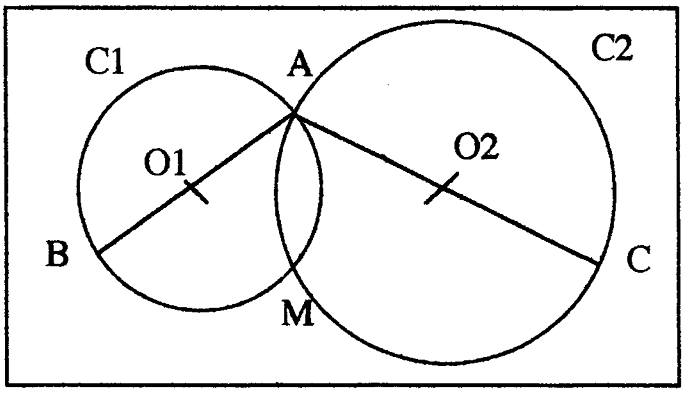

Figure 12.

Il est donc bien clair, que l'ensemble des hypothèses du problème **ne mentionne pas** l'existence des droite (BM) (MC) et (BC). C'est **la question posée** qui conduit à tracer sur la figure ces différentes droites puis à tenter de démontrer qu'elles sont confondues.

La figure effectivement manipulée par le système est la suivante :

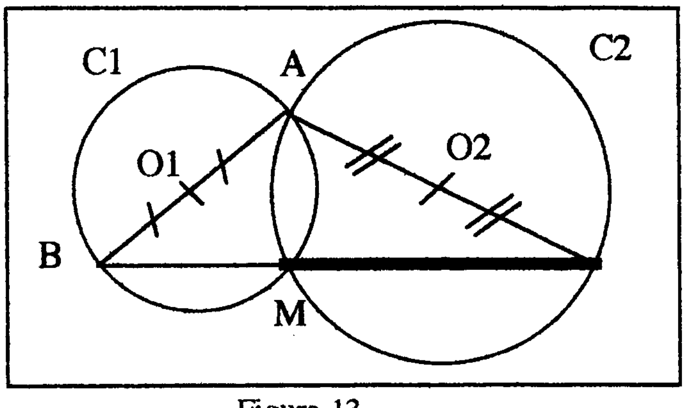

Figure 13.

La figure est analysée, et le système extrait les sous-figures suivantes :

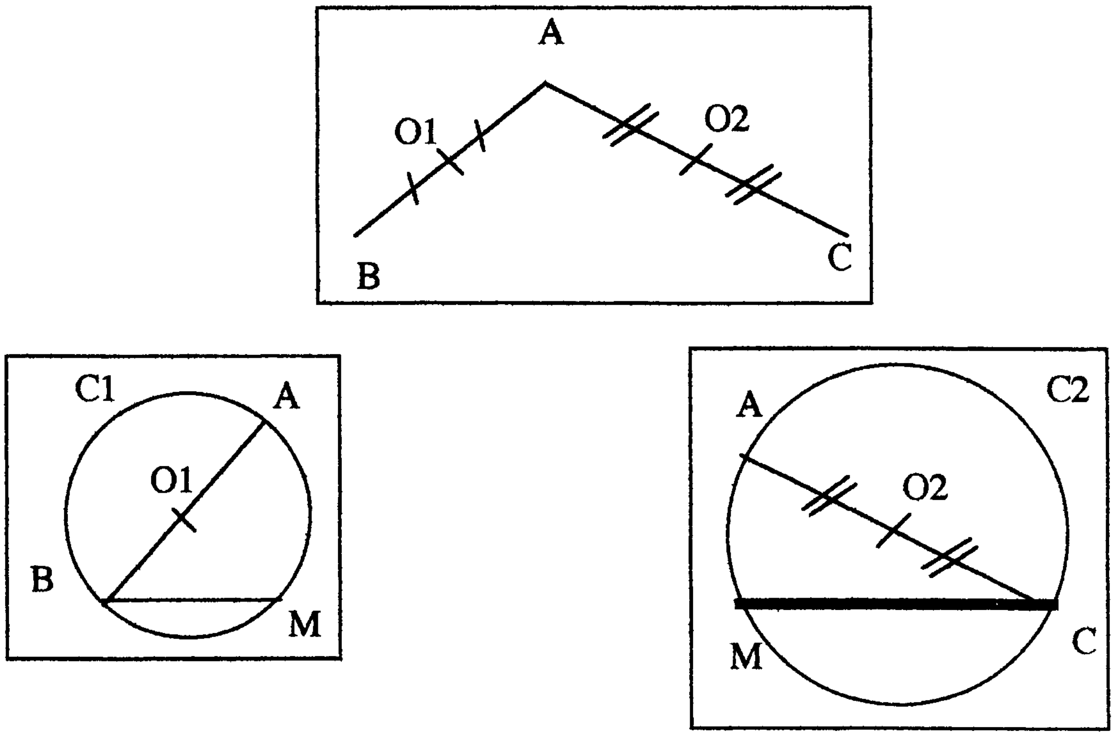

Figure 14.

La lecture structurée et le codage graphique qui l'accompagne, permettent de faire jouer à la figure le rôle d'un condensé de sens, d'un "réservoir d'hypothèses", celles-ci étant plus **directement** et plus **rapidement** accessibles par la vision directe sur le dessin. Cette notion est à rapprocher de l'idée de paraphrase graphique évoquée dans [Allen,90], qui considère en outre que les hypothèses du problème sont comprises par l'élève si il a été capable de tracer une figure correcte vis-à-vis des spécifications de l'énoncé.

Ces sous-figures sont des figures prototypes, ou configurations caractéristiques. [Guin88] Elles permettent au système de donner au problème une **étiquette**.

2.2. Etiquette de problème

J'appelle **étiquette de problème**, le titre que l'expert donne au problème lorsqu'il dit “ce problème se traite lorsqu'on fait la leçon sur les parallélogrammes”. **Dans la pratique, une étiquette est le titre d'un chapitre ou sous-chapitre du cours de la classe de quatrième.** Le système dispose d'un ensemble de règles d'étiquetage, qui associent à chaque sous-figure prototype une étiquette.

Les étiquettes utilisées par le système sont par exemple : Droite-des-milieux, Triangle-rectangle, Parallélogramme.

Le schéma suivant illustre les liens existants entre quelques sous-figures et leurs étiquettes correspondantes.

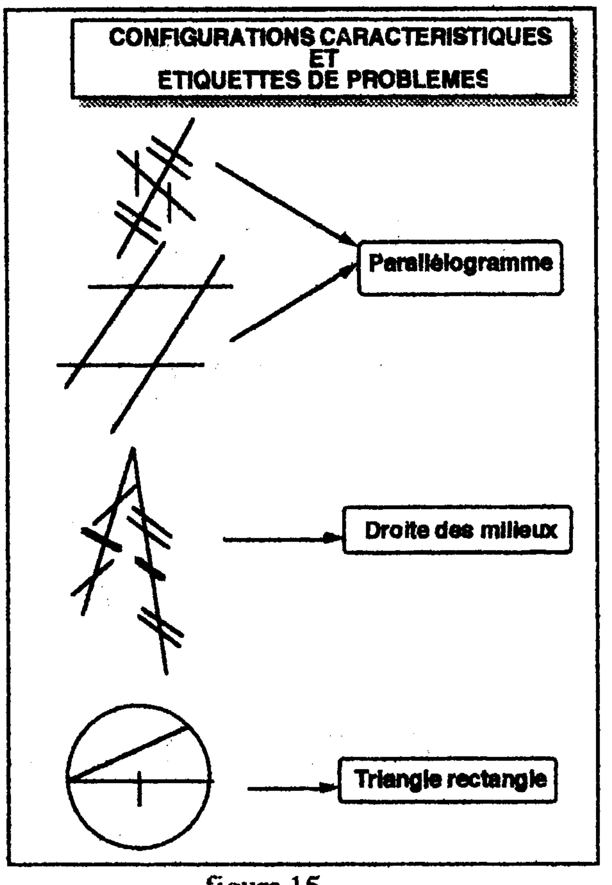

figure 15

Précisons que les associations (sous-figures, étiquettes de problèmes) sont données par le concepteur sous forme de règles. Elles concrétisent une expertise mathématique d'enseignant, et peuvent être aisément modifiées.

2.3. Interêt et rôle de l'étiquette

Une étiquette de problème est un pointeur vers des connaissances associées à l'étiquette.

Les connaissances associées à une étiquette ne sont pas uniquement constituées des connaissances du chapitre d'un manuel de quatrième. Il est nécessaire de prendre en compte aussi, les savoir-faire heuristiques et les méthodes que l'expert connait, pour la classe de problèmes considérés.

Dans l'exemple préliminaire proposé, les théorèmes TR1 et TR2 sont des théorèmes du cours qu'on trouve dans tout chapitre "triangle rectangle" d'un manuel.

En revanche, le conseil CTR1 est l'expression d'un savoir-faire, et ne se trouve pas dans un manuel en tant que théorème explicite. Le schéma suivant illustre le lien entre étiquettes et connaissances.

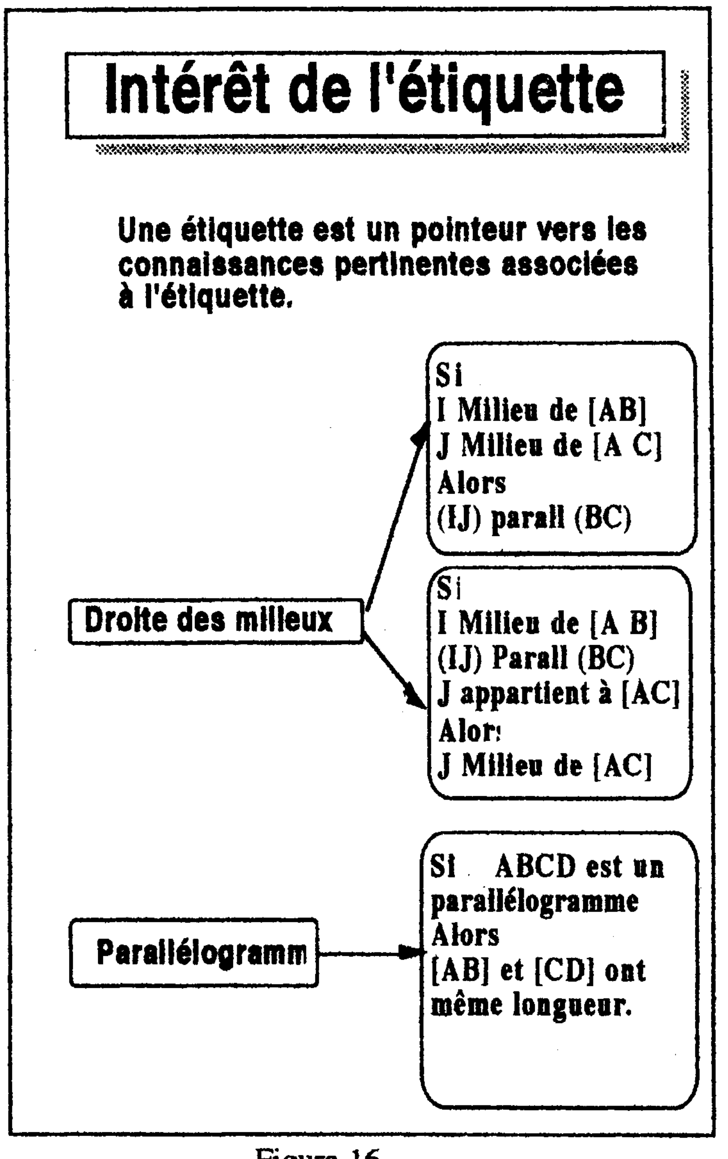

Figure 16.

Le schéma suivant récapitule le lien entre les sous-figures, les étiquettes de problème et l'activation des connaissances. A chaque sous-figure est associée une étiquette, et à chaque étiquette est associée un ensemble de connaissances. L'intérêt majeur de ce mécanisme est de considérer les sous-figures comme des **indicateurs** permettant d'activer des connaissances.

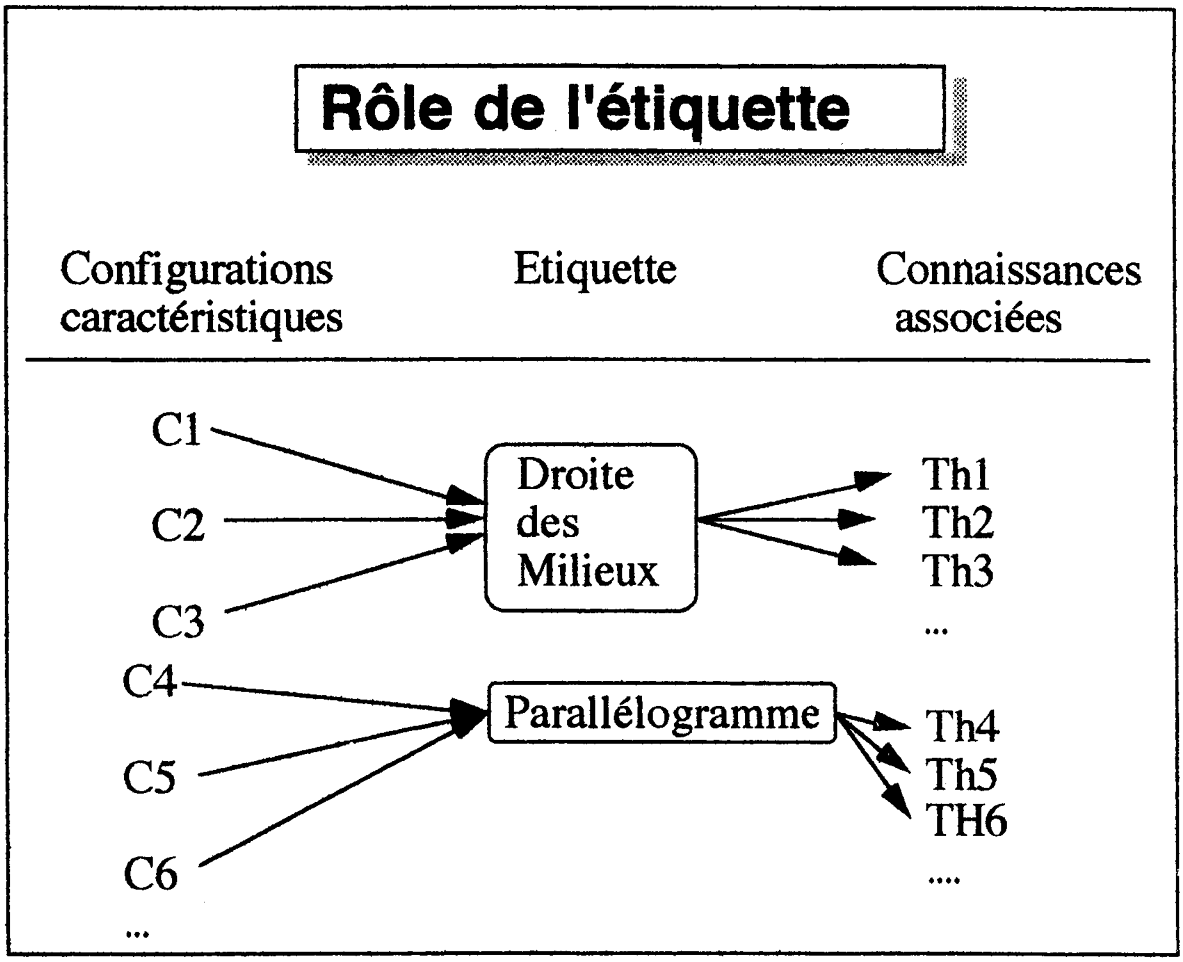

Figure 17.

Dans un même problème, plusieurs étiquettes peuvent apparaitre. La question de la gestion des étiquettes multiples se pose alors.

2.4 Le cas des étiquettes multiples.

Rappelons qu'une étiquette est le titre d'un chapitre ou sous-chapitre du cours de géométrie de la classe de quatrième. Les étiquettes sont hiérarchisées et représentées en machine sous forme d'un graphe orienté dont les noeuds sont les étiquettes (figure 18). A chaque étiquette est associé un ensemble de connaissances ; certaines étiquettes correspondent à des conditions de plus en plus fortes portant sur un concept initial : le rectangle est un parallélogramme particulier, le carré est un rectangle particulier etc. Nous dirons alors que "carré" est plus spécialisé que "rectangle", et de même que "rectangle" est plus spécialisé que "parallélogramme". Ainsi, la place d'une étiquette dans le graphe est un indicateur sur sa spécialisation : les étiquettes les plus spécialisées sont les feuilles terminales du graphe.

A chaque étiquette est associé un ensemble de connaissances. Il est clair que le triangle isocèle est un triangle particulier. A ce titre, les connaissances associées à l'étiquette "Triangle isocèle" seront constituées par l'union des connaissances générales du triangle et des connaissances spécifiques du triangle isocèle. C'est au moment où le système appelle les connaissances associées à une étiquette, qu'il appelle les connaissances spécifiques de l'étiquette, **ainsi que les connaissances de tous ses ascendants.**

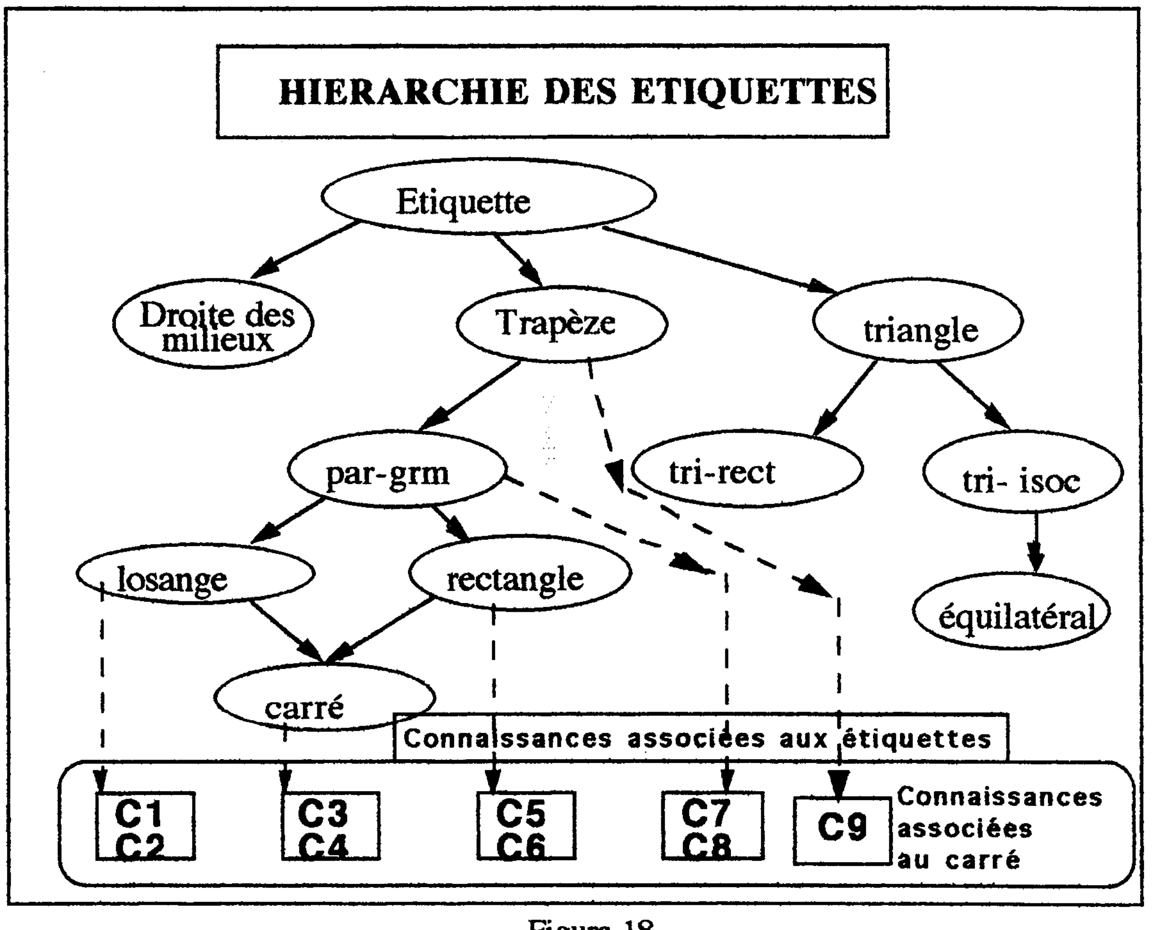

Figure 18.

Dans ce schéma, les connaissances C3 et C4 sont les connaissances spécifiquement associées au carré (heuristiques particulières), lorsque le système appelle les connaissances associées au carré, il appelle aussi toutes les connaissances des ascendants du carré.

3. Mécanisme de résolution de problème

3.1. Problème enrichi

La figure utilisée par l'expert est une figure codée. Ses sous-figures permettent d'étiqueter le problème et ainsi d'activer les connaissances pertinentes pour le problème posé.

Le système construit ainsi ce que nous appellons **un problème enrichi,** constitué de l'énoncé, de la représentation interne de la figure, des objets introduits par la question posée, de l'étiquette de problème, et des connaissances associées à l'étiquette.

Exemple de problème enrichi :

- Le problème suivant :

"On considère le triangle (ABC) et le point I milieu de [BC].
La parallèle à (AC) passant par I coupe [AB] en J. K est le symétrique de I par rapport à J.
Montrez que (BK) est parallèle à (AI)".

est enrichi par :

- La figure codée :

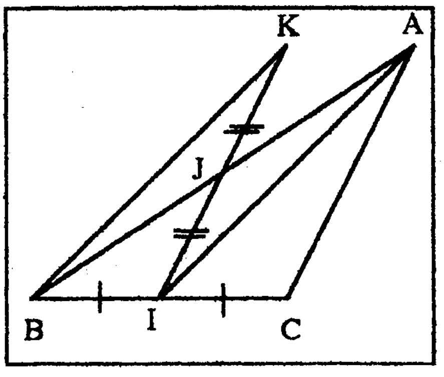

Figure 20.

-La sous-figure prototype :

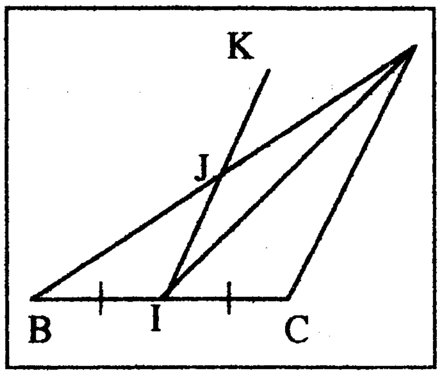

Figure 21.

- l'étiquette :DROITE-DES-MILIEUX.

-Connaissances associées : {DTM1, DTM2}.

Rappellons que c'est à l'aide du lien (sous-figure, étiquette) et (étiquette, connaissances) que le système enrichit progressivement le problème. Cet enrichissement permet au système d'appliquer les connaissances associées et lui permet d'en déduire le but recherché.

3.2. Algorithme de résolution

La recherche de solution peut être modélisée par un **cycle de base** constitué de deux phases :

Phase 1 :Application des théorèmes sélectionnés sur les objets, ou configurations extraites pendant la phase d'étiquetage. A l'issue de cette phase, le problème a été modifié, ou résolu.

Si le problème n'est pas résolu, on considère que les applications des connaissances ont modifié le problème par l'ajout de nouvelles hypothèses et transformation de la figure. L'expert se retrouve alors devant un problème enrichi. On peut alors considérer que les mécanismes décrits précédemment agissent sur le problème enrichi **comme si c'était un nouveau problème, avec une nouvelle figure.**

Phase 2 :Analyse de la nouvelle figure par des mécanismes identiques à ceux mis en oeuvre dans la phase de lecture initiale. Nouvelle étiquette éventuelle, appel de nouvelles connaissances, sélection de nouveaux objets et retour à la phase 1.

On peut schématiser la recherche de solutions, par le schéma suivant :

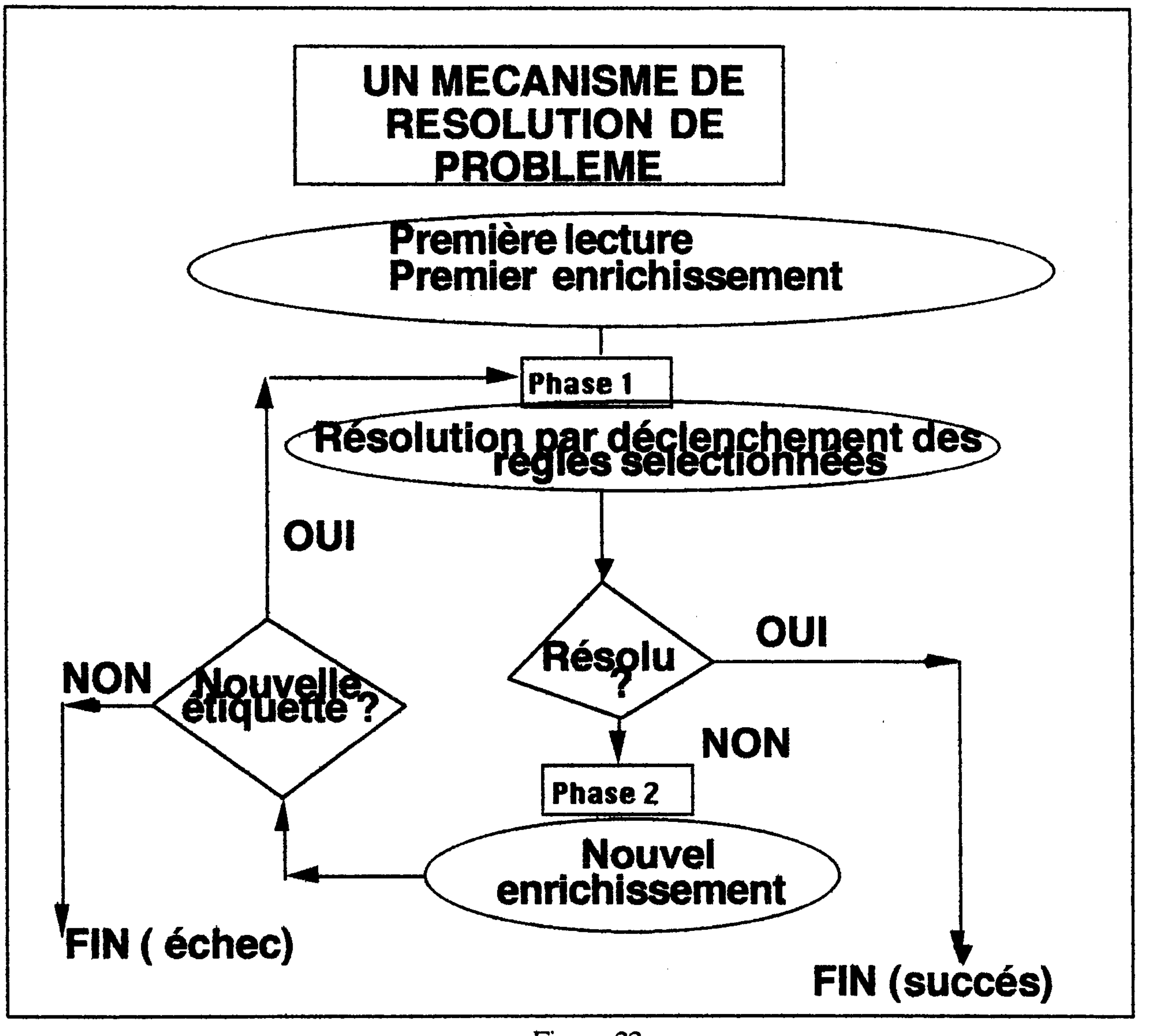

Figure 23

Le mécanisme d'enrichissement est proposé pour un niveau donné (ici la classe de Quatrième). Les problèmes posés et enrichis par ce mécanisme sont des problèmes "pédagogiques" posés dans le cadre du contrat didactique, et donc adaptés à la classe de Quatrième. A ce titre, dans ces problèmes, le nombre d'étiquettes possibles et la complexité des figures sont relativement limités.

Dans le cas de problèmes de classes différentes (droite de Simpson en Terminale C par exemple) mettant en jeu des constructions élaborées, ce mécanisme serait à perfectionner. La méthode d'étiquetage proposée ici suppose que le problème contient **au moins** une configuration caractéristique, et que **l'une au moins** de ces configurations caractéristiques est un indice valable pour résoudre le problème.

4. Implicite et visuel

En analysant la résolution de deux exercices on se propose de mettre en évidence le rôle de l'observation visuelle et le rôle des raisonnements implicites dans la démonstration.

4.1. Exemple 1.

Soient A, I ,J , B quatre points alignés tels que AI = IJ = JB.
Soit O le milieu de [AB].
Montrez que O est le milieu de [IJ].

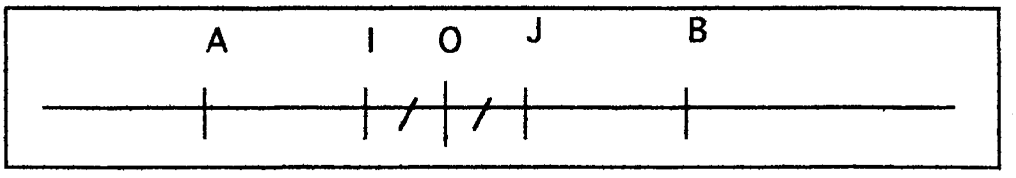

Figure 24.

Solution :

(1) O est milieu de [IJ], donc OI = OJ.

(2) OI = OJ et IA = JB, donc OI + IA = OJ + JB

(3) OI + IA = OJ + JB, donc OA = OB

(4) OA = OB donc O es le milieu de [AB].

La solution proposée s'appuie sur un implicite trés important : les points A, I, J, B sont supposés distincts !

Dans le cas ou le point A est confondu avec le point J (figure 25) le raisonnement devient incorrect.

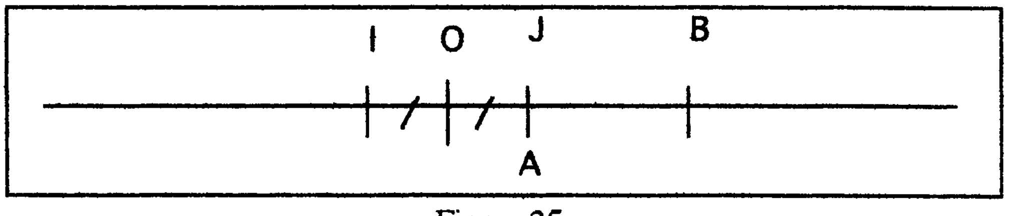

Figure 25.

La solution proposée ci-dessus est valide pour les lignes (1) (2), mais la déduction de la ligne (3) est incorrecte. L'implicite de l'énoncé est le suivant : *"Des objets cités dans l'énoncé avec des noms distincts sont distincts sur la figure"*. L'**observation** de la figure permet de valider ou d'invalider la déduction de la ligne (3).

La résolution "*rigoureuse*" (en un sens qui reste à définir précisément) de cet exercice pourrait être la suivante :

(0) *On suppose que A, I , J, B sont tous distincts.*

(1) *O milieu de [IJ] don OI = OJ*

(2) OI = OJ et IA = JB, donc OI + IA = OJ + JB

(3) I est compris entre O et A, J est compris entre O et B

(4) (2) et OI+IA = OJ + JB , donc OA = OB.

(5) [IJ] est inclus dans [AB], donc O appartient à [AB].

(6) (5) et OA = OB, donc O est milieu de [AB]

On notera que les affirmations topologiques de la ligne (3) **ne sont pas spécifiées** dans l'énoncé, et et **ne sont pas déductibles** de l'énoncé avec les connaissances de quatrième. De plus la déduction de la ligne (5) passe sous silence la déduction *"O milieu de [IJ] donc O* ***est sur*** *[IJ]"*

Dans cet exercice, et plus généralement dans le cadre de la géométrie de quatrième, les informations visuelles et les raisonnements implicites peuvent être passées sous silence. Le raisonnement présenté au début du paragraphe 4.1. peut être considéré comme correct dans une perspective purement didactique : on ne formule pas toutes les étapes d'un raisonnement avec des élèves sous peine de perdre le "fil directeur" de la démonstration.

Dans l'exercice suivant, l'observation **visuelle** doit être explicitée sous peine de rendre le raisonnement incorrect.

4.2 Exemple 2 :

Soit (ABCD) un parallélogramme, et soient I, et J les milieux de [AD] et [BC].

Montrez que (DJ) est parallèle à (BI).

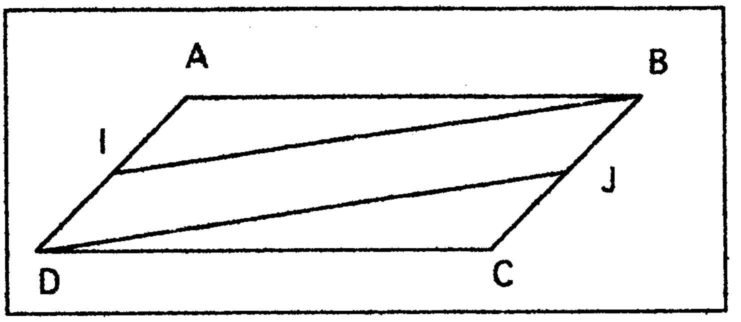

Figure 26.

Solution :

(1) [AD] // [BC] donc [DI] // [BJ]

(2) (ABCD) parallélogramme donc AD = BC

(3) I milieu de [AD], J milieu de [BC] donc JB = ID

(4) Le quadrilatère (DIBJ) est non croisé, et il a deux cotés parallèles et égaux, donc (DIBJ) est un parallélogramme.

(5) (DIBJ) est un parallélogramme, donc [DJ] // [BI].

Analyse :

Ici plusieurs implicites sont mis en oeuvre : I est milieu de [AD] donc (AI), (ID), (AD) sont parallèles. De même pour J et [BC].De même, la compatibilité de la division avec l'égalité ligne (3). est utilisée implicitement.

En outre, on constate l'utilisation de l'hypothèse "*(DIBJ) non croisé*" . C'est une évidence, certe, mais comment la justifier ? Le fait "(DIBJ) non croisé" est affirmé sans justification, et **on ne peut le déduire des hypothèses à l'aide des connaissances de quatrième**. La démonstration rigoureuse de cette propriété demanderait un raisonnement complexe sur la convexité avec des outils théoriques dépassant largement le niveau des classes secondaires. Ainsi, à la différence de l'exercice précédent, **la correction du raisonnement impose ici l'explicitation d'un fait non justifié et <u>non justifiable</u> !**.

Cette remarque conduit à poser une question d'ordre épistémologique : pourquoi accepter le fait "(DIBJ) non croisé" comme un **fait visuel admis** et refuser le fait "(DJ) parallèle à (BI)" comme un fait visuel non admis qu'**il convient** de démontrer !

On touche ici à une difficulté fondamentale de la réalisation informatique d'un résolveur de géométrie : la "démonstration" telle qu'elle est pratiquée en quatrième avec les outils théoriques dont on dispose dans ce niveau scolaire, est un objet hybride qui contient des déductions mathématiques, des raisonnements implicites, et des hyptohèses visuelles justifiés uniquement par la lecture de la figure. Il est donc nécéssaire de donner au système informatique des métaconnaissances lui permettant de gérer ces différentes composantes de la démonstration.

Conclusion

On a proposé un mécanisme de résolution de problèmes s'appuyant sur les configurations caractéristiques de la figure. L'étiquette de problème permet de mettre en relation des sous-figures et des connaissances pertinentes pour résoudre le problème. Les connaissances ainsi sélectionnées ne sont pas suffisantes pour résoudre les problèmes. La résolution de problème necessite l'utilisation de raisonnements implicites et de faits visuels observés sur la figure. **La règle du jeu** qui permet au professeur de différencier ce qui est admis par l'observation de la figure, ce qui est admis par des raisonnements implicites, et ce qui doit être démontré dans le cadre du problème est **un élément du contrat didactique.**

La figure est -elle un auxilliaire heuristique permettant de guider le raisonnement formel ? On a vu que cette conception de la figure est trop restrictive. Nous pensons que la figure est un objet mathématique "à part entière" dont les propriétés et le mode d'utilisation doivent être précisés dans le cadre du contrat didactique. Un important travail reste à effectuer afin de préciser **"le contenu mathématique"** de la figure, et d'expliciter les termes du contrat didactique dans l'utilisation des informations véhiculées par la figure. Cette réflexion permettra d'avancer dans la conception d'un résolveur susceptible de travailler sur un ensemble ouvert de problèmes. La collaboration entre les chercheurs en Intelligence Artificielle et les didacticiens est plus que jamais à l'ordre du jour.