PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

DOMINIQUE PY
BAHIA EL GASS

Expérimentation du tutoriel Mentoniezh en classe de 4eme

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 3
« Fascicule de didactique des mathématiques », , exp. n° 9, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992___3_A9_0>

EXPERIMENTATION DU TUTORIEL *MENTONIEZH* EN CLASSE DE 4EME

Dominique PY
IRISA - Université de Rennes 1

Bahia EL GASS
IRMAR - Université de Rennes 1

1 Introduction

Nous présentons une expérimentation du tutoriel Mentoniezh et les premiers bilans. Mentoniezh ("géométrie", en breton) est un système d'E.I.A.O. [1] pour la démonstration de géométrie, destiné aux classes de collège. Il est élaboré par une équipe regroupant des informaticiens de l'IRISA[2], des enseignants et des didacticiens de l'IRMAR[3] dans le cadre du G.R. Didactique. Le but de cette expérimentation est double :

- évaluer la pertinence didactique du tutoriel et mettre en évidence ses faiblesses afin d'y remédier.
- détecter les procédures et les stratégies des élèves qui abordent la démonstration.

Les méthodes employées sont l'observation directe, au cours de l'expérimentation, et surtout l'analyse des traces du travail des élèves (interactions avec l'ordinateur, brouillons et rédactions sur papier).

Nous commençons par décrire succinctement le tutoriel Mentoniezh, puis nous précisons les conditions et le déroulement des expérimentations. Nous présentons les observations les plus marquantes, en les regroupant par séance, puis par élève. Enfin, nous tirons les premières conclusions de ces observations.

2 Présentation de Mentoniezh

Le projet Mentoniezh comprend deux phases principales : tracé de la figure (l'élève trace la figure sur tablette graphique, puis le tuteur vérifie sa correction) et rédaction de la démonstration (l'élève élabore sa démonstration, guidé par le tuteur) [Nicolas 89] [Py 90]. L'expérimentation porte ici uniquement sur la seconde phase. Cette phase est elle-même découpée en quatre étapes, reprenant en partie l'organisation proposée par Dominique Guin [Guin 89] :

- lecture et analyse de l'énoncé ;
- recherche d'un plan, à partir d'une exploration de la figure ;
- élaboration de la démonstration ;
- rédaction de la démonstration en français.

L'expérimentation a porté sur les deux étapes actuellement réalisées, la lecture de l'énoncé suivie de l'élaboration de la démonstration.

L'hypothèse faite a priori est que le logiciel peut apporter une aide à l'élève qui aborde la démonstration, de plusieurs manières : en mettant en relief les informations importantes, en simplifiant certaines tâches complexes, et en permettant à l'élève de corriger son travail, à partir d'un message d'erreur explicatif. A tout moment, c'est l'élève qui a l'initiative de son travail, il peut effectuer un nombre d'essais illimité, et la réponse ne lui est jamais fournie par le logiciel.

*Cet article est paru dans le numéro 30 de la revue *Petit x*, éditée par l'IREM de Grenoble

[1] Enseignement Intelligemment Assisté par Ordinateur

[2] Institut de Recherche en Informatique et Systèmes Aléatoires

[3] Institut de Recherche Mathématique de Rennes

2.1 Lecture de l'énoncé

L'objectif de cette étape est d'aider l'élève à dégager de l'énoncé les informations pertinentes, et à bien distinguer les statuts des assertions manipulées (hypothèses ou conclusions). Au cours de cette phase, l'écran est divisé en trois fenêtres : la première contient l'énoncé du problème à résoudre, la seconde comporte une colonne "Hypothèses" et une colonne "Conclusions", initialement vides, que l'élève doit compléter, et la troisième est une fenêtre de travail (cf. schéma en annexe A).

L'élève peut successivement choisir une propriété dans une liste, sous la forme d'un squelette de phrase (par exemple, "Le point . est le milieu du segment [..]"), instancier cette propriété avec les noms des points ou droites adéquats (dans l'exemple, I puis AB), et ranger la propriété obtenue dans la colonne Hypothèses ou Conclusions. A tout moment, il peut demander la validation : le tuteur vérifie alors la concordance entre les propriétés attendues et les propriétés fournies. Si les propositions de l'élèves sont correctes, le travail est terminé, dans le cas contraire, le tuteur délivre un message indiquant le type de la ou des erreurs commises (par exemple, "Il manque une conclusion", ou bien "Tu as donné une hypothèse qui ne fait pas partie de l'énoncé"). L'élève peut alors revenir sur son travail pour le modifier.

2.2 Elaboration de la démonstration

L'objectif de cette étape est d'aider l'élève à mettre au point sa démonstration. L'ordinateur est utilisé ici comme un cahier de brouillon interactif : l'élève peut commencer par le début, la fin ou même le milieu de la preuve, il peut vérifier ce qu'il avance (en validant) et enfin il peut corriger ses erreurs.

Au cours de cette phase, l'écran est divisé en trois fenêtres : la première affiche l'état de la démonstration (hypothèse et propriétés démontrées, propriétés à démontrer, propriétés provisoirement démontrées), la seconde affiche l'état du pas de démonstration en cours (hypothèses, théorème, conclusion), et la troisième est une fenêtre de travail (cf. schéma en annexe B).

L'élève élabore un pas de démonstration en fournissant les hypothèses, le théorème et la conclusion, dans un ordre quelconque. Hypothèses et conclusion sont construites à partir de squelettes de phrases, comme précédemment. Les théorèmes sont accessibles à partir de mots-clés. Par exemple, le mot-clé "milieu" donne accès à la liste des théorèmes permettant de prouver qu'un point est le milieu d'un segment. L'élève choisit dans cette liste le théorème qui lui semble le mieux adapté. Lorsque le pas est complet, l'élève peut le valider. Si le pas est correct, l'état de la démonstration est mis à jour (la conclusion du pas vient s'inscrire dans la colonne "propriétés démontrées"), sinon, un message indique la cause de l'erreur : l'élève peut alors revenir sur son travail pour le corriger. Il est possible de considérer des hypothèses comme démontrées. Par exemple, si l'on cherche à montrer "(IJ) // (BC)", à partir des hypothèses "I milieu de [AB]" et "J milieu de [AC]" (alors que ces dernières ne sont pas encore démontrées), le logiciel accepte ce pas, qui est correct. Cependant, la conclusion "(IJ) // (BC)" est considérée comme *provisoirement démontrée*, tandis que les prémisses deviennent des *propriétés à démontrer*. Dès que ces prémisses seront effectivement démontrées, la conclusion le sera également. L'exercice est terminé lorsque la colonne "propriétés à démontrer" est vide, c'est à dire que la conclusion du problème est passée dans la colonne "propriétés démontrées".

Une option d'aide est disponible. Elle sélectionne la propriété à démontrer, ainsi que la liste des théorèmes permettant de prouver cette propriété. Pour chaque théorème, une question est posée à l'élève, qui doit lui permettre de voir si le théorème est applicable ou non. Par exemple, si la conclusion à montrer est "I est le milieu de [AB]", le logiciel demandera : "Vois-tu si la distance IA est égale à la distance IB ? ".

3 Déroulement de l'expérimentation

L'expérimentation a lieu dans une classe de quatrième, réputée en sérieuse difficulté, au collège des Hautes-Ourmes de Rennes. Elle se déroule sur six séances de deux heures. Les dix-neuf élèves sont répartis en deux groupes : un groupe travaille sur ordinateur, l'autre sur papier, et les groupes sont échangés en milieu de séance. En règle générale, les élèves travaillent par binômes.

Chaque exercice est traité de la manière suivante : les élèves reçoivent l'énoncé sur une feuille. Ils commencent par tracer la figure correspondante à la règle et au compas, puis ils effectuent sur l'ordinateur les phases de lecture et de démonstration, et enfin ils rédigent sur papier leur démonstration.

Pour certaines séances, nous demandons aux élèves de rédiger une première démonstration sur papier, avant de travailler sur ordinateur, puis de corriger cette première version, le cas échéant.

Afin de permettre aux élèves de se familiariser avec le logiciel, nous posons des problèmes à un seul pas au cours des deux premières séances. Puis nous abordons des problèmes à deux, trois ou quatre pas.

Un pré-test sur papier a permis d'évaluer le niveau des élèves avant l'expérience. Une partie de la classe effectue des démonstrations à un pas, mais la démonstration à plusieurs pas n'est pas encore abordée.

4 Observations

4.1 Par séance

Deux premières séances Ces séances doivent permettre aux élèves de se familiariser avec le logiciel. Cette prise en main ne pose pas de problèmes importants, les élèves manipulent rapidement le logiciel avec aisance.

Au cours de la phase de lecture, presque tous se mettent à décrire la figure, et à énumérer toutes les propriétés qu'ils y voient, au lieu de s'en tenir au propriétés données dans l'énoncé.

La phase de démonstration est presque immédiate, puisqu'il s'agit de problèmes à un pas : la seule difficulté consiste à trouver le théorème adéquat. Cependant, le problème de la seconde séance est plus délicat, puisqu'il comporte une hypothèse inutile. Dans un premier temps, les élèves veulent utiliser toutes les hypothèses disponibles. Face au refus de l'ordinateur, ils tâtonnent assez longtemps avant de distinguer l'hypothèse superflue.

L'ordre de mise au point d'un pas de preuve est très variable : certains commencent par les hypothèses, d'autres par la conclusion, d'autres par le théorème. Les demandes de validation du pas sont très fréquentes, souvent même avant que le pas ne soit complet. Certains messages d'erreurs, trop longs ou peu clairs, ne sont pas bien compris.

Après ces deux séances, le logiciel subit quelques modifications mineures pour prendre en compte les observations récentes : accès à l'aide simplifié, messages d'erreurs reformulés.

Troisième séance Au cours de cette séance, nous abordons un problème à deux pas de démonstration, ce qui présente une difficulté importante pour les élèves. Presque tous adoptent la stratégie suivante : ils prennent, comme hypothèses et conclusion du pas, les hypothèses et conclusion du problème, puis recherchent un théorème permettant de "faire le lien" entre les deux. Aucun ne pense d'emblée à introduire une conclusion intermédiaire. Le pas de démonstration ainsi construit est refusé par l'ordinateur, ils doivent alors faire plusieurs tentatives avant de trouver la propriété intermédiaire. Par contre, une fois cette propriété trouvée et le premier pas de preuve réalisé, le second pas ne pose pas de difficultés.

La plupart effectuent leur preuve en partant de la conclusion, c'est-à-dire qu'il commencent par le second pas de preuve (en supposant la propriété intermédiaire démontrée), puis seulement ils réalisent le premier (qui démontre cette conclusion intermédiaire) : rappelons que le logiciel accepte les pas de preuves dans un ordre indifférent.

Il faut noter que, au cours du premier pas, après le message "Les hypothèses ne correspondent ni au théorème, ni à la conclusion", au lieu de revenir sur les hypothèses inadéquates, la plupart reviennent sur le théorème, qui est pourtant correct ! Ceci peut s'expliquer par la forte certitude qu'ont les élèves au sujet des hypothèses (puisqu'elles apparaissent dans l'énoncé et sur l'écran), alors que le théorème, qu'ils ont introduit eux-mêmes, est davantage sujet de doute. De plus, il y a une résistance à introduire une propriété intermédiaire.

Quatrième, cinquième et sixième séances Au cours de ces séances, on observe une progression quasi-générale. L'amélioration est particulièrement nette dans la dernière séance.

D'une part, la phase de lecture est mieux comprise, et seules les propriétés effectivement présentes dans l'énoncé sont retenues (au cours de la dernière séance, sur quinze phases de lecture, dix sont réalisées sans aucune erreur). Ceci est d'autant plus intéressant que c'est la phase dont le transfert (du travail avec ordinateur vers le travail avec papier-crayon) semble le plus facile.

D'autre part, la phase de démonstration donne lieu à moins de tâtonnements, et davantage de réflexion. En effet, les messages d'erreur sont mieux lus et compris, la correction est plus rapide. La découverte de la conclusion intermédiaire, si elle reste le point délicat, se fait plus tôt. Mais surtout, on remarque une **baisse de la fréquence des validations** : les élèves ne proposent plus que des pas complets, et peuvent réaliser plusieurs corrections successives avant de demander une nouvelle validation. Ceci suggère qu'ils commencent à exercer une véritable réflexion sur leur propre activité, qu'ils effectuent un contrôle sur leurs productions avant de demander celui de l'ordinateur : cela nous semble un résultat très encourageant.

Les problèmes qui subsistent sont liés à certains messages d'erreurs, mal interprétés, et a l'absence d'aide au niveau stratégique : l'élève qui ne distingue pas la sous-figure intéressante, ou qui s'engage dans une fausse piste risque de "tourner en rond" si le professeur n'intervient pas (par exemple, l'élève peut démontrer des propriétés justes, mais sans rapport avec la conclusion à atteindre).

4.2 Par binôme

Nous décrivons quelques stratégies ou comportements caractéristiques.

Frédéric . Sur presque tous les exercices, Frédéric procède de la manière suivante : il reprend les hypothèses et la conclusion du problème, puis cherche un théorème qui démontre cette conclusion, avant de valider. Devant le message "Les hypothèses ne correspondent pas", il commence par effacer le théorème, puis recommence à chercher un théorème. A ce moment, soit il choisit un autre théorème (proche du premier), soit il reprend le même théorème, faute de meilleure alternative : dans ce cas, il se convainc sans doute que l'erreur ne vient pas du théorème, et essaie plutôt de modifier les hypothèses. Dès qu'il a trouvé la propriété intermédiaire et réussi le premier pas de preuve, il effectue le second pas sans hésitation.

Halim et Flavie . Halim et Flavie remettent en cause leurs choix dans un ordre de priorité inverse de celui de Frédéric : ils se tiennent au premier théorème choisi (même incorrect), mais corrigent plus spontanément les hypothèses. Comme chez Frédéric, la réussite du premier pas entraîne la réussite presque immédiate du second.

Jérôme . Jérôme est celui qui a rencontré le plus de difficultés dans la démonstration à deux pas. Il veut à tout prix "réduire" la preuve à une étape. Dans la troisième séance, il invente même un théorème qui relie artificiellement hypothèses et conclusion (il écrit sur sa feuille :"Un rectangle est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu"), alors que chez les autres élèves, la rédaction des théorèmes est souvent maladroite, mais rarement fausse.

Tony et Cédric . Tony et Cédric ont adopté une démarche "prudente" : plutôt que d'introduire comme hypothèses toutes les donnéees de l'énoncé en bloc, ils les ajoutent une à une, en validant à chaque fois. Cette stratégie par essais successifs leur permet parfois d'aboutir plus rapidement.

Damien et Ludovic . Damien et Ludovic sont les seuls qui utilisent spontanément des propriétés lues sur la figure. Par conséquent, ils trouvent avec plus de facilité la propriété intermédiaire à démontrer, mais en contrepartie, ils introduisent parfois des propriétés sans rapport avec la démonstration.

Comportements communs à une majorité de binômes . Quelques difficultés se retrouvent couramment :

– Lorsqu'il faut introduire une propriété intermédiaire, la difficulté est renforcée si l'énoncé contient une propriété voisine : la confusion est fréquente (par exemple, s'il faut introduire A // B alors que l'énoncé indique B // C).

– Lorsqu'un théorème a été utilisé une première fois, il est tentant de le réutiliser, mais cela aboutit à une impasse. Par exemple, pour prouver qu'un triangle ABC est rectangle, on peut affirmer que (AB) est perpendiculaire à (BC), mais pour démontrer cette affirmation, on ne peut pas utiliser le fait que ABC est un triangle rectangle : l'utilisation successive de la définition et de sa réciproque produit une boucle.

4.3 Questionnaire final

A la fin de la dernière séance, un questionnaire est distribué aux élèves, leur demandant ce qu'ils pensent du travail sur ordinateur, et ce qu'ils en ont retenu. Sur douze réponses, onze trouvent ce travail "intéressant" ou "très intéressant". Les remarques qui reviennent le plus fréquemment sont : "J'ai compris qu'il faut bien lire le texte", "Il faut utiliser les bonnes hypothèses, et distinguer les hypothèses des conclusions","Il faut passer par plusieurs étapes". Un binôme affirme également :"C'était bien, parce qu'on peut vérifier".

5 Conclusions

Nous dégageons actuellement trois sortes de conclusions.

En ce qui concerne le logiciel Nous remarquons la grande importance des messages d'erreurs, qui doivent absolument être courts, précis et très clairs. L'analyse des erreurs observées dans cette expérimentation doit permettre de compléter et d'affiner le diagnostic, et par suite de reformuler certains messages.

Nous notons également une lacune en ce qui concerne l'aide apportée par le logiciel au niveau de la stratégie. L'option d'aide a été peu utilisée spontanément par les élèves, peut-être faudrait-il les inciter à y recourir davantage. Une autre tâche sera de définir de nouvelles aides à intégrer : par exemple une aide à la reconnaissance des sous-figures pertinentes, une incitation à remettre en cause les mauvais choix initiaux. Cela suppose que le logiciel connaisse au préalable les différentes solutions du problèmes, et requiert l'utilisation d'un démonstrateur automatique (qui existe actuellement).

En ce qui concerne la progression des élèves Manquant de recul et d'indices fiables, le professeur ne peut souligner globalement que les progrès à court terme des élèves dans leur façon d'aborder un problème, d'en lire et traduire l'énoncé, de structurer leurs pas de démonstration, de mieux distinguer ce qui est donnée de ce qui est but. Une évaluation plus précise des données recueillies sera conduite prochainement.

En ce qui concerne l'apprentissage de la démonstration Cette expérimentation, bien que brève, met clairement en évidence le fossé qui sépare la maîtrise de la preuve à un pas de celle de la preuve à plusieurs pas. Les difficultés sont de plusieurs ordres : reconnaissance de sous-figures, introduction de propriétés intermédiaires, distinction des statuts des assertions (hypothèses, conclusions). Cependant, nous avons observé peu de comportements inexplicables : le choix d'un théorème ou d'une propriété se fait rarement au hasard, il est influencé par le contexte, les choix précédents, les théorèmes "préférés", les propriétés voisines. Ceci nous rend optimistes en ce qui concerne la constitution d'un **modèle de l'élève**, qui regrouperait, de manière propre à chaque élève, ses stratégies et procédures habituelles. Un tel modèle serait élaboré automatiquement par le logiciel, à partir des productions de l'élève, et permettrait d'apporter à ce dernier une aide personnalisée.

Remerciements

Nous tenons à remercier le professeur, madame Geneviève Mouraud, ainsi que les élèves du collège des Hautes-Ourmes, qui ont prêté leur concours à cette expérience.

Bibliographie

[Guin 89] Guin, D. (1989) Réflexions sur les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 2, 89-109, IREM de Strasbourg.

[Nicolas 89] Nicolas, P. (1989) *Construction et vérification de figures géométriques dans le système Mentoniezh*, Thèse de l'Université de Rennes I.

[Py 90] Py, D. (1990) *Reconnaissance de plan pour l'aide à la démonstration dans un Tuteur Intelligent de la géométrie*, Thèse de l'Université de Rennes I.

A Interface pour la phase de lecture

```
                        ENONCE                          |    HYPOTHESES
                                                        |
Dessine un triangle EBC rectangle en E, et appelle M    |
                                                        |
le milieu de l'hypotenuse. Dessine le point A tel que   |
                                                        |
M soit le milieu de [AE].                               |
                                                        |
Demontre que le quadrilatere ACEB est un rectangle      |
                                                        |
                                                        |
                                                        |       BUTS
                                                        |
                                                        |
                                                        |
------------------------------------------------------------------------------


H.ypothese, B.ut, E.ffacer, V.alider, Q.uitter :
```

B Interface pour la phase de démonstration

Au début de la démonstration :

```
  HYPOTHESES ET PROPRIETES DEMONTREES      PROVISOIRES        A DEMONTRER
(BE) perpend (CE)                     |                    |ABEC rectangle
M milieu [BC]                         |                    |
M milieu [AE]                         |                    |
                                      |                    |
                                      |                    |
                                      |                    |
                                      |                    |
--------------------------------------------------------------------------------
Hypotheses

Theoreme


Conclusion
--------------------------------------------------------------------------------

  D.emontrer, E.ffacer, A.ide, F.in :
```

En milieu de démonstration :

```
  HYPOTHESES ET PROPRIETES DEMONTREES      PROVISOIRES        A DEMONTRER
(BE) perpend (CE)                     |                    |ABEC rectangle
M milieu [BC]                         |                    |
M milieu [AE]                         |                    |
ABEC parallelogra                     |                    |
                                      |                    |
                                      |                    |
                                      |                    |
--------------------------------------------------------------------------------
Hypotheses 1) ABEC parallelogra

Theoreme   Un rectangle est un parallelogramme
           qui a deux cotes consecutifs perpendiculaires

Conclusion
--------------------------------------------------------------------------------

 H.ypothese, T.heoreme, C.onclusion, E.ffacer, V.alider, Q.uitter :
```

C Problèmes

Séance 1 Soit ABC un triangle. M est le milieu de [AB], et K est le point tel que M est le milieu de [CK]. Montrer que ACBK est un parallélogramme.

Séance 2 Soit ABC un triangle. M est le milieu de [BC], et H est le milieu de [AM]. (D) est la parallèle a (BC) passant par H. (D) coupe (AB) en K. Montrer que K est le milieu de [AB]

Séance 3 Dessine un triangle EBC rectangle en E, et appelle M le milieu de l'hypoténuse. Dessine le point A tel que M soit le milieu de [AE]. Démontre que le quadrilatère ACEB est un rectangle.

Séance 4 ABC est un triangle et U est le milieu de [AB]. La parallèle à (BC) passant par U coupe (AC) en H. La parallèle à (AC) passant par U coupe (BC) en I. Démontre que (HI) // (AB).

Séance 5 Soit ABC un triangle rectangle en A. Le point N est le milieu de l'hypoténuse. Trace le point M tel que M est le milieu de [AB]. Montre que (MN) est perpendiculaire a (AB)

Séance 6 Soit ABC un triangle. I est le milieu de [AB], et J est le milieu de [AC]. La parallèle à (AB) passant par J coupe (BC) en K. Démontre que BIJK est un parallélogramme.