

FRANCK VERMET

Discrétisation d'une équation différentielle stochastique dont les coefficients ne dépendent pas du temps et calcul approché d'espérances de fonctionnelles de la solution

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 2
« Fascicule de probabilités », , p. 1-65

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992__2_A5_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**DISCRETISATION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE
DONT LES COEFFICIENTS NE DEPENDENT PAS DU TEMPS
ET CALCUL APPROCHE D'ESPERANCES DE FONCTIONNELLES DE LA SOLUTION**

Franck VERMET

RESUME

L'objet de ce mémoire est l'étude d'un article de D. Talay, publié en 1985, et intitulé : "*Discrétisation d'une équation différentielle stochastique et calcul approché d'espérances de fonctionnelles de la solution*".

Dans cet article, Talay s'intéresse à "**bien**" discrétiser une équation différentielle stochastique, afin d'approcher, par la simulation, les espérances de fonctionnelles de la solution.

Il propose deux schémas classiques, puis deux schémas plus performants, ainsi qu'un théorème important permettant de connaître la vitesse de convergence de ces deux derniers schémas.

Ensuite, il les teste numériquement sur un exemple d'E.D.S. et obtient les résultats escomptés.

Une part importante de notre travail fut consacrée à la compréhension des résultats exposés par Talay, et nous avons dû préciser certains prérequis (article de Kunita), puis affiner quelques hypothèses lors de la rédaction de ces théorèmes.

Partant de ce travail, nous proposons également dans ce mémoire deux autres schémas de discrétisation :

- le premier, de type MILSHEIN, diffère peu de celui proposé par Talay, mais la méthode pour l'obtenir semble plus naturelle

- le second est plus original : en 82, Rumelin propose toute une "*famille*" de schémas de discrétisation d'E.D.S., de type RUNGE-KUTTA, sans toutefois en préciser l'ordre de la vitesse de convergence. Grâce au critère prouvé par Talay, nous pouvons en exhiber un dont l'ordre de convergence est identique à celui des meilleurs schémas étudiés.

Enfin, nous testons numériquement ces différents schémas sur une autre E.D.S. que celle proposée par Talay.

Par souci de clarté des notations, nous considérons des E.D.S. unidimensionnelles, et pour ce mémoire, nous nous sommes volontairement limités aux E.D.S. dont les coefficients ne dépendent pas du temps.

Je tiens à remercier Jean MEMIN et Dimitri PETRITIS qui ont accepté de diriger ce travail, et qui ont su m'aider aux moments opportuns.

Les idées clés du paragraphe 6 nous ont été suggérées par V. MACKEVICIUS (Université de Vilnius) lors de son séjour à Rennes : je lui en suis très reconnaissant.

Je remercie enfin Marie-France CHERIAUX qui a assuré la frappe de ce mémoire.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- D. TALAY : "*Discrétisation d'une équation différentielle stochastique et calcul approché, d'espérances de fonctionnelles de la solution*".
Modélisation Mathématique et Analyse numérique vol. 20, n° 1, 1986,
p 141-179.
- H. KUNITA : "*Stochastic Differential Equations and Stochastic Flows of Diffeomorphisms*".
Cours de l'Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour, 1982, in "Lecture
Notes in Mathematics", vol. 1097, Springer-Verlag.
- N. BOULEAU : "*Processus stochastiques et applications*".
Hermann, Paris, 1988.
- W. RUMELIN : "*Numerical Treatment of Stochastic Differential Equations*".
Siam J. Numerical Analysis, vol. 19, n° 3, June 1982.
- IKEDA, WATANABE : "*Stochastic differential Equations and Diffusion
Processes*".
North Holland, Amsterdam, 1981.
- J.M. HAMMERSLEY, D.C. HANDSCOMB : "*Monte Carlo Methods*".
- T.C. GARD : "*Introduction to stochastic differential equations*".
Dekker, New-York, 1988.

0 - INTRODUCTION.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}^*)$ un espace probabilisé filtré, $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien standard à valeurs réelles et X_0 une variable aléatoire \mathcal{F}_0 -mesurable, possédant des moments de tous ordres.

Considérons l'équation différentielle stochastique :

$$(1) \quad X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds ,$$

où σ et b sont des applications continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Une solution de (1) est un processus $(X_t)_{t \geq 0}$, adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ à trajectoires continues, tel que :

$$\forall t, \quad P \left[\int_0^t |\sigma(X_s)|^2 ds < \infty \right] = 1$$

$$P \left[\int_0^t |b(X_s)| ds < \infty \right] = 1$$

de sorte que les intégrales de (1) aient un sens.

0.1. Notations.

Dans la suite, T sera un temps final arbitraire.

On considère une discrétisation de l'intervalle $[0, T]$, de pas $h = \frac{T}{N}$, $N \in \mathbb{N}^*$.

Soit $Z(h, p)$ une variable aléatoire dépendant de h et d'un entier p compris entre 0 et $N = \frac{T}{h}$.

S'il existe une constante C dépendant éventuellement de T , mais indépendante de h et p , telle que

$$E|Z(h, p)| \leq C h^i ,$$

on écrira $Z(h, p) = O(h^i)$.

0.2. Objectif et principe de la méthode.

Notre but est de déterminer une valeur approchée de l'espérance de fonctionnelles de la solution de (1) : $E[f(X_t)]$, f étant à croissance polynomiale à l'infini.

Nous serons amenés à imposer quelques propriétés de dérivabilité à b , σ et f , lors de la discrétisation de (1). Mais ces hypothèses ne sont pas trop restrictives dans la pratique.

Le principe de la méthode utilisée est le suivant :

Soit $(X_t)_{t \in [0, T]}$ solution formelle de (1).

Hélas, il s'avère que dans la pratique, nous sommes incapables, sauf cas particuliers, de résoudre explicitement l'équation (1).

Nous ne disposons donc pas de réalisations de la variable aléatoire X_T , d'où la nécessité de discrétiser (1), afin d'en obtenir une solution approchée \bar{X}_T . Pour calculer l'espérance de la variable aléatoire $f(\bar{X}_T)$, nous utilisons la méthode Monte-Carlo : la loi forte des grands nombres montre que :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_T^{(i)}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} E f(\bar{X}_T),$$

si $\bar{X}_T^{(i)}$, $1 \leq i \leq N$, sont N réalisations indépendantes de la v.a. \bar{X}_T .

L'erreur commise satisfait l'inégalité :

$$\begin{aligned} |E f(X_T) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_T^{(i)})| &\leq |E f(X_T) - E f(\bar{X}_T)| \\ &+ |E f(\bar{X}_T) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_T^{(i)})| \\ &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Pour réduire ε_2 , il suffit de prendre N suffisamment grand. Nous verrons toutefois que dans le cas où la variance de $f(X_T)$ est "grande", il faut prendre quelques précautions, car le nombre de simulations nécessaire pour obtenir la précision désirée n'est plus compatible avec la vitesse de calcul de l'ordinateur.

ε_1 dépend directement du schéma adopté. Toutefois, ce paramètre n'est pas le seul critère de qualité d'un schéma d'approximation : il doit aussi être suffisamment simple, car le nombre important de simulations nécessite une grande vitesse d'exécution.

0.3 - PLAN.

Ce mémoire est divisé en 7 parties :

- Dans le paragraphe 1, nous rappelons certaines propriétés essentielles vérifiées par la solution d'une E.D.S. .
- Le paragraphe 2 est consacré à l'étude de deux schémas de discrétisation classiques, qui conduisent à l'estimation : $E f(X_T) - E f(\bar{X}_T) = 0(h)$.

- Dans le paragraphe 3, nous énonçons un critère, prouvé par Talay, permettant de conclure à une convergence d'ordre h^2 .
- Dans le paragraphe 4, nous construisons deux versions du schéma de Milstein, vérifiant le critère de Talay.
- Dans le paragraphe 5, par analogie avec la méthode du "point-milieu" utilisée pour les équations différentielles ordinaires, nous améliorons le deuxième schéma d'ordre h proposé au paragraphe 1.

Cela fournit un nouveau schéma d'ordre h^2 , vérifiant le critère de Talay.

- Dans le paragraphe 6, la méthode de Runge-Kutta permet de construire des schémas de discrétisation particulièrement simples, pour les E.D.S. pouvant s'écrire sous la forme d'E.D.S. de Stratanovitch sans drift.
- Enfin, le paragraphe 7 est consacré aux tests numériques de ces différents schémas.

I - EXISTENCE, UNICITE ET PROPRIETES DE LA SOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE.

Les théorèmes I.1, I.2 et I.3 sont des résultats classiques. Sous cette forme, ils sont notamment exposés par KUNITA (chapitre II, paragraphes 1, 2 et 3).

I.1 - Existence et unicité de la solution.

Théorème I.1. Soient b et σ deux fonctions continues lipschitziennes, i.e. $\exists K_1, K_2$, t.q. $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$|b(x) - b(y)| \leq K_1 |x - y|$$

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K_2 |x - y| .$$

Alors l'E.D.S.

$$(1) \quad X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds \text{ admet une solution unique pour}$$

chaque condition initiale X_0 .

Cette solution est un processus continu (en t), qui est dans \mathbb{L}^p , $\forall p \geq 1$.

I.2 - Continuité et régularité de la solution.

Soit $X_{s,t}^x$ solution de l'E.D.S. suivante : $x \in \mathbb{R}$ fixé,

$$(2) \quad X_{s,t}^x = x + \int_s^t \sigma(X_{s,u}^x) dB_u + \int_s^t b(X_{s,u}^x) du .$$

Théorème I.2. Soient b et σ deux fonctions continues et lipschitziennes. Alors :

(i) Il existe des modifications continues en (s,t,x) de la solution et de l'intégrale stochastique $\int_s^t \sigma(X_{s,u}^x) dB_u$, et (2) est vérifiée

$$\forall (s,t,x) \in [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}, p.s.$$

(ii) $\forall T \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \exists c(n) > 0, t.q. \forall t \in [0,T],$

$$E[|X_{s,t}^x|^n] \leq c(n) (1 + |x|^n).$$

Théorème I.3.

(i) Supposons que σ et b sont continûment dérivables, que leurs dérivées premières sont bornées et Höldériennes d'ordre α (pour $0 \leq \alpha \leq 1$). Alors la solution de (2) admet une modification continue en (s,t,x) , et dérivable par rapport à x dans le domaine $\{(s,t,x) \mid 0 \leq s \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}\}$. De plus, le processus $(\frac{\partial}{\partial x} X_{s,t}^x)_{t \geq s}$ est continu et

satisfait l'E.D.S. :

$$\frac{\partial}{\partial x} X_{s,t}^x = 1 + \int_s^t \sigma'(X_{s,u}^x) \frac{\partial X_{s,u}^x}{\partial x} dB_u + \int_s^t b'(X_{s,u}^x) \frac{\partial X_{s,u}^x}{\partial x} du.$$

$$\forall (s,t,x) \text{ p.s.}$$

(ii) Soit k un entier positif. Supposons que les coefficients σ et b sont k fois continûment dérivables, que les k premières dérivées sont bornées, Höldériennes d'ordre α ($0 \leq \alpha \leq 1$). Alors la solution $X_{s,t}^x$ admet une modification continue en (s,t,x) et k fois continûment dérivable par rapport à x dans le domaine $\{(s,t,x), 0 \leq s \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}\}$.

Nous utiliserons les résultats précédents, exposés par Kunita, dans le cas particulier suivant :

Corollaire I.4. On suppose les coefficients σ et b de classe C^p , $p \in \mathbb{N}^*$, à dérivées jusqu'à l'ordre p continues bornées. Alors :

(i) $\forall T \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists c(n), t.q. \forall t \in [0,T],$

$$E[|X_{s,t}^x|^n] \leq c(n) (|x|^n + 1).$$

(ii) $(X_{s,t}^x)$ admet une modification $(p-1)$ fois continûment dérivable par rapport à x .

Désormais, nous identifions cette version régulière à la solution notée $X_{s,t}^x$.

En outre, les processus $(\frac{\partial^i}{\partial x^i} X_{s,t}^x)_{t \geq s}$, $1 \leq i \leq p-1$, ont des moments de tous ordres, bornés uniformément en $(s,t,x) \in [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}$.

(iii) $X_{s,t}^x$ et ses dérivées sont continues en (s,t,x) sur le domaine $\{(s,t,x) : 0 \leq s \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}\}$.

Le corollaire I.4 est indispensable pour prouver la proposition I.5 et les théorèmes I.6, I.7.

I.3 - OPERATEUR DE DIFFUSION ASSOCIE A $(X_{s,t}^x)$.

Soit $X_{s,t}^x$ solution de (2), avec b et σ de classe C^1 , à dérivées continues bornées.

Soit f de classe C^2 , vérifiant : $\exists n \in \mathbb{N}$, t.q. pour $0 \leq i \leq 2$, $\exists c \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f^{(i)}(x)| \leq c(|x|^n + 1)$.

$(X_{s,t}^x)_{t \geq s}$ est une semi-martingale continue. Par la formule de Ito, on obtient :

$$\begin{aligned} f(X_{s,t}^x) &= f(x) + \int_s^t f'(X_{s,u}^x) \sigma(X_{s,u}^x) dB_u + \int_s^t f'(X_{s,u}^x) b(X_{s,u}^x) du \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_s^t f''(X_{s,u}^x) \sigma^2(X_{s,u}^x) du. \end{aligned}$$

$E[\int_s^t |\sigma(X_{s,u}^x) f'(X_{s,u}^x)| du] < \infty$, donc l'intégrale stochastique est une martingale,

d'espérance nulle. En prenant l'espérance de chaque membre, on obtient :

$$E f(X_{s,t}^x) = f(x) + \int_s^t E [f'(X_{s,u}^x) b(X_{s,u}^x) + \frac{1}{2} \sigma^2(X_{s,u}^x) f''(X_{s,u}^x)] du.$$

On définit l'opérateur de diffusion associé à $(X_{s,t}^x)$ par :

$$L f(x) = b(x) f'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2(x) f''(x).$$

L'égalité précédente s'écrit :

$$(3) \quad E f(X_{s,t}^x) = f(x) + \int_s^t E [L f(X_{s,u}^x)] du.$$

Considérons désormais X_t^x solution de :

$$(4) \quad X_t^x = x + \int_s^t \sigma(X_s^x) dB_s + \int_s^t b(X_s^x) ds .$$

Proposition I.5. Soient b et σ de classe C^1 , à dérivées continues bornées. Soit f de classe C^2 , vérifiant : $\exists n \in \mathbb{N}$, t.q. pour $0 \leq i \leq 2$, $\exists c \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f^{(i)}(x)| \leq c(|x|^{n+1})$.

Alors :

(i) $(X_t^x)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov relativement à la tribu $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, de semi-groupe de transition $(P_t)_{t \geq 0}$, défini par $P_t f(x) = E[f(X_t^x)]$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t f - f}{t}(x) = L f(x)$, où L est l'opérateur de diffusion associé à $(X_t^x)_{t \geq 0}$.

De plus, sous l'hypothèse supplémentaire suivante : σ et b sont de classe C^3 , à dérivées jusqu'à l'ordre 3 continues bornées, on a :

(iii) $P_t L f = L P_t f$, $\forall t \in [0, T]$.

Pour la démonstration de cette proposition, on peut consulter le livre de N. Bouleau. Bien que les hypothèses soient différentes, la démonstration peut être menée de manière analogue :

pour (i), se référer au chapitre VII, (p. 286 et suivantes)

pour (ii) et (iii), se référer au chapitre VIII, paragraphe 5.

(ii) se montre facilement en utilisant la formule de Ito et la continuité des trajectoires.

(iii) découle de (ii) : les hypothèses faites sur b et σ et le corollaire I.4 permettent d'appliquer (ii) à $P_t f$, qui est alors de classe C^2 , et d'écrire :

$$\begin{aligned} P_t L f &= \lim_{h \rightarrow 0} P_t \frac{P_h - I}{h} f \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} P_t \frac{P_h - I}{h} P_t f, \text{ car } P_t P_h = P_h P_t = P_{t+h} \\ &= L P_t f. \end{aligned}$$

La propriété (iii) nous intéresse particulièrement, car elle permet d'écrire (3) sous la forme :

$$E f(X_t^x) = f(x) + \int_0^t L E f(X_s^x) ds$$

$v(t, x) = E [f(X_t^x)]$ vérifie donc :

$$v(t, x) = f(x) + \int_0^t L v(s, x) ds \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = L v(t, x) \\ v(0, x) = f(x) . \end{cases}$$

Posons $u(t, x) = v(T-t, x) = E [f(X_{T-t}^x)]$

$$u \text{ vérifie : } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = -L u(t, x) \\ u(0, x) = E [f(X_T^x)] . \end{cases}$$

On déduit alors du corollaire I.4 :

Théorème I.6. *On suppose que*

(H₁) *Les fonctions σ et b sont de classe \underline{C}^7 , et leurs dérivées jusqu'à l'ordre 7 sont continues bornées.*

(H₂) *f est de classe C^6 et vérifie : $\exists n \in \mathbb{N}$, tel que pour $0 \leq i \leq 6$, $\exists c \in \mathbb{R}^+$, $|f^{(i)}(x)| \leq c(|x|^n + 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Soit $u : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par (5) $u(t, x) = E [f(X_{T-t}^x)]$.

Alors :

(i) *la fonction u est 6 fois continûment dérivable par rapport à x .*

(ii) *u vérifie :*

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = -L u(t, x) \\ u(0, x) = E [f(X_T^x)] . \end{cases}$$

(iii) *u et ses dérivées par rapport à x sont continues en (t, x) .*

En outre, pour toute fonction $g(t, x)$ égale à u ou à une dérivée de $u : \frac{\partial^i}{\partial x^i} u(t, x)$, $1 \leq i \leq 6$, nous avons : $\exists r \in \mathbb{N}$, $\forall T > 0$, $\exists c \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0, T]$, $|g(t, x)| \leq c(r)(|x|^r + 1)$.

Démonstration théorème I.6. Seule la dernière assertion de (iii) ne découle pas immédiatement du corollaire I.4.

$$\begin{aligned} |u(t, x)| &\leq E[|f(X_{T-t}^x)|] \\ &\leq c (E|X_{T-t}^x|^n + 1) , \text{ par (H}_2\text{)} \\ &\leq c(n) (|x|^n + 1) , \text{ corollaire I.4 (i).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) \right| &\leq E \left| \frac{\partial}{\partial x} f(X_{T-t}^x) \right| = E \left| f'(X_{T-t}^x) \frac{\partial X_{T-t}^x}{\partial x} \right| \\ &\leq E \left[|f'(X_{T-t}^x)|^2 \right]^{1/2} E \left[\left| \frac{\partial X_{T-t}^x}{\partial x} \right|^2 \right]^{1/2} \\ &\quad (\text{inégalité de Hölder}) \end{aligned}$$

$E \left[\left| \frac{\partial X_{T-t}^x}{\partial x} \right|^2 \right]$ est borné, d'après le corollaire I.4 (ii).

Donc par (H₂) et le corollaire (I.4) (i), $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists c(n)$ t.q.

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) \right| \leq c(n) (|x|^n + 1).$$

On utilise les mêmes arguments pour majorer $\left| \frac{\partial^i}{\partial x^i} u(t,x) \right|$, $2 \leq i \leq 6$.

A l'aide de ce théorème et en utilisant (6), on obtient :

Théorème I.7. *Sous les hypothèses (H₁) et (H₂),*

(i) *les fonctions $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^i}{\partial x^i} u$, $1 \leq i \leq 6$, sont bien définies et continues en $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$.*

(ii) *En outre, si g est l'une quelconque de ces fonctions, $\exists r \in \mathbb{N}$, $\exists c(r) \in \mathbb{R}_+$, t.q. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [0,T]$, $|g(t,x)| \leq c(r) (|x|^r + 1)$.*

Démonstration théorème I.7. (ii). Pour pouvoir majorer $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} u = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} u$, on utilise la relation (6) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) &= -L u(t,x) \\ &= -b(x) \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) - \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) &= -(b'(x) \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) + b(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) \\ &\quad + \sigma \sigma'(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(t,x)) \end{aligned}$$

b' et σ' sont bornées, donc il existe une constante c , t.q.

$$\begin{aligned} |\sigma'(x)| \leq c \quad , \quad & |\sigma(x)| \leq c(1 + |x|) \\ |b'(x)| \leq c \quad , \quad & |b(x)| \leq c(1 + |x|). \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) \right| \leq c \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \right| + c(1+|x| + c(1+|x|)) \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) \right| \\ + \frac{c^2}{2} (1+|x|)^2 \left| \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(t,x) \right|. \end{aligned}$$

D'après le théorème I.6 (ii), on peut donc trouver deux constantes $r \in \mathbb{R}$, $c(r) \in \mathbb{R}_+$, vérifiant : $\forall t \in [0, T]$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) \right| \leq c(r) (|x|^r + 1) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On utilise les mêmes arguments pour majorer

$$\left| \frac{\partial^i}{\partial x^i} u(t,x) \right| \quad , \quad 2 \leq i \leq 6.$$

Remarque. Les théorèmes I.6 et I.7 sont les outils de base utilisés par Talay pour justifier son critère de convergence d'ordre h^2 .

Toutefois, dans l'article original, l'hypothèse (H₁) est plus faible : les fonctions b et σ sont supposées de classe C^6 , à dérivées jusqu'à l'ordre 6 continues bornées.

En se référant uniquement au prérequis cité par Talay (l'article de Kunita), nous aboutissons au corollaire I.4, et il n'est alors pas du tout évident que l'hypothèse faite par Talay soit suffisante.

II - INSUFFISANCE DE DEUX SCHEMAS CLASSIQUES.

Les résultats de ce paragraphe sont énoncés par Talay, mais ne sont pas rédigés en détail.

Considérons, pour X_0 fixé, l'E.D.S.

$$(1) \quad X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds ,$$

où b et σ sont des fonctions C^4 , dont les dérivées jusqu'à l'ordre 4 sont continues bornées.

Soit f une fonction C^5 , vérifiant ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre 5,

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ , \exists n \in \mathbb{N}, \text{ t.q. } \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq c(|x|^n + 1).$$

Soit L l'opérateur de diffusion associé à la solution (X_t) de (1), i.e. $Lf(x) = b(x) f'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2(x) f''(x)$.

Avec les hypothèses faites, $L^3 f$ existe et on montre facilement que $EL^3 f(X_t)$ est borné, pour tout $t \in [0, T]$.
(utiliser notamment le corollaire I.4 (i)).

La formule de Ito appliquée à $f(X_t)$ donne, pour $0 \leq s \leq t \leq T$

$$f(X_t) = f(X_s) + \int_s^t f'(X_u) \sigma(X_u) dB_u + \int_0^t L f(X_u) du.$$

L'intégrale stochastique est une martingale, d'espérance nulle, d'où :

$$E f(X_t) = E f(X_s) + \int_s^t E[L f(X_u)] du .$$

$L f$ et $L^2 f$ sont des fonctions C^2 , auxquelles on peut appliquer la formule de Ito, ce qui donne :

$$E f(X_t) = E f(X_s) + (t-s) E(L f(X_s)) + \frac{(t-s)^2}{2} E(L^2 f(X_s)) \\ + \int_s^t \int_s^u \int_s^v E[L^3 f(X_r)] dr dv du , \text{ et } EL^3 f(X_r) \text{ est borné, } \forall r \in [0, T]$$

on a donc : $\forall 0 \leq s \leq t \leq T$,

$$(7) \quad E f(X_t) = E f(X_s) + (t-s) E L f(X_s) + \frac{(t-s)^2}{2} E L^2 f(X_s) + o((t-s)^3) .$$

II.1 - Le schéma d'Euler.

Pour $0 \leq p \leq N = \frac{T}{h}$, la solution approchée au point ph sera notée $\bar{X}_p \equiv \bar{X}_{ph}$.

On notera $\Delta B_{p+1} \equiv B_{(p+1)h} - B_{ph}$.

Considérons le schéma d'approximation suivant :

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{X}_0 &= X_0 \\ \bar{X}_{p+1} &= \bar{X}_p + \sigma(\bar{X}_p) \Delta B_{p+1} + b(\bar{X}_p) h . \end{aligned}}$$

Montrons que ce schéma conduit à l'approximation

$$E f(X_T) - E f(\bar{X}_T) = o(h) \quad (\bar{X}_T \equiv \bar{X}_N) .$$

Proposition II.1. *Le schéma d'Euler vérifie :*

$$(8) \quad E f(\bar{X}_{p+1}) = E f(\bar{X}_p) + h E L f(\bar{X}_p) + \frac{h^2}{2} E \tilde{f}(\bar{X}_p) + o(h^3) ,$$

où \tilde{f} , en général, est différente de $L^2 f$.

Démonstration. On écrit, pour $ph \leq t \leq (p+1)h$,

$$\begin{aligned}\bar{X}_t &= \bar{X}_{ph} + \int_{ph}^t \sigma(\bar{X}_{ph}) dB_s + \int_{ph}^t b(\bar{X}_{ph}) ds \\ \bar{X}_t &= \bar{X}_{ph} + \sigma(\bar{X}_{ph}) (B_t - B_{ph}) + b(\bar{X}_{ph}) (t - ph).\end{aligned}$$

Par Ito, on obtient :

$$E f(\bar{X}_{p+1}) = E f(\bar{X}_p) + \int_{ph}^{(p+1)h} E [f'(\bar{X}_s) b(\bar{X}_p) + \frac{1}{2} f''(\bar{X}_s) \sigma^2(\bar{X}_p)] ds .$$

Les développements de Taylor de f' et f'' s'écrivent :

$$\begin{aligned}f'(\bar{X}_s) &= f'(\bar{X}_p) + (\bar{X}_s - \bar{X}_p) f''(\bar{X}_p) + \frac{(\bar{X}_s - \bar{X}_p)^2}{2} f'''(\bar{X}_p) \\ &\quad + 0((B_s - B_{ph})^3) + 0(h^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(\bar{X}_s) &= f''(\bar{X}_p) + (\bar{X}_s - \bar{X}_p) f^{(3)}(\bar{X}_p) + \frac{(\bar{X}_s - \bar{X}_p)^2}{2} f^{(4)}(\bar{X}_p) \\ &\quad + 0((B_s - B_{ph})^3) + 0(h^2) .\end{aligned}$$

En introduisant ces développements dans la formule précédente,

$$\begin{aligned}E f(\bar{X}_{p+1}) &= E f(\bar{X}_p) + h E [L f(\bar{X}_p)] \\ &\quad + \int_{ph}^{(p+1)h} E [(\bar{X}_s - \bar{X}_p) \{f''(\bar{X}_p) b(\bar{X}_p) + \frac{\sigma^2}{2} (\bar{X}_p) f^{(3)}(\bar{X}_p)\}] ds \\ &\quad + \int_{ph}^{(p+1)h} E \left[\frac{(\bar{X}_s - \bar{X}_p)^2}{2} \{f^{(3)}(\bar{X}_p) b(\bar{X}_p) + \frac{\sigma^2}{2} (\bar{X}_p) f^{(4)}(\bar{X}_p)\} \right] ds \\ &\quad + 0(h^3).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{En outre, } E[(\bar{X}_s - \bar{X}_p) g(\bar{X}_p)] &= E[g(\bar{X}_p) E[(\bar{X}_s - \bar{X}_p) | \mathcal{F}_{ph}]] \\ &= (s - ph) E[b(\bar{X}_p) g(\bar{X}_p)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[(\bar{X}_s - \bar{X}_p)^2 g(\bar{X}_p)] &= (s - ph) E[\sigma^2(\bar{X}_{ph}) g(\bar{X}_p)] \\ &\quad + (s - ph)^2 E[b^2(\bar{X}_p) g(\bar{X}_p)] .\end{aligned}$$

On en déduit (8), avec

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\bar{X}_p) &= 2b^2(\bar{X}_p) f''(\bar{X}_p) + 2\sigma^2 b(\bar{X}_p) f^{(3)}(\bar{X}_p) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^4(\bar{X}_p) f^{(4)}(\bar{X}_p).\end{aligned}$$

De (7) et (8), on déduit :

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} E[f(X_{(p+1)h})] - E[f(\bar{X}_{p+1})] &= E[f(X_{ph})] - E[f(\bar{X}_p)] \\ &\quad + \{EL f(X_{ph}) - EL f(\bar{X}_p)\} h \\ &\quad + \text{reste majoré par Cte} \cdot h^2. \end{aligned} \right.$$

En effet, avec les hypothèses faites sur σ , b et f , et le corollaire I.4 (i), on montre que : $\forall 0 \leq p \leq N$, $EL^2 f(X_{ph}) - E\tilde{f}(\bar{X}_p)$ est majorée par une constante, et cette constante est indépendante de p .

Montrons que (9) implique la convergence en $0(h)$.

Posons $\varepsilon_p^f = E f(X_{ph}) - E f(\bar{X}_p)$.

Il faut voir que $\varepsilon_N^f = E f(X_T) - E f(\bar{X}_T)$ est en $0(h)$.

D'après (9), $\varepsilon_N^f = \varepsilon_{N-1}^f + h \varepsilon_{N-1}^{Lf} + c h^2$

$$= \varepsilon_{N-2}^f + 2h \varepsilon_{N-2}^{Lf} + h^2 \varepsilon_{N-2}^{L^2f} + 2c h^2$$

$$= \varepsilon_{N-3}^f + 3h \varepsilon_{N-3}^{Lf} + 3h^2 \varepsilon_{N-3}^{L^2f} + \underbrace{h^3 \varepsilon_{N-3}^{L^3f}}_{\leq Kh^3} + 3c h^2$$

⋮

$$\varepsilon_N^f = \varepsilon_1^f + (N-1) h \varepsilon_1^{Lf} + \underbrace{(1+\dots+(N-1))}_{\frac{(N-1)(N-1)}{2}} h^2 \varepsilon_1^{L^2f} + (N-1) c h^2$$

$\bar{X}_0 = X_0$, donc ε_1^f , ε_1^{Lf} et $\varepsilon_1^{L^2f}$ sont en $0(h^2)$.

$(N-1) c h^2$ est donc le terme prédominant, d'ordre h . On a montré que le schéma d'Euler conduit à l'approximation :

$$E f(X_T) - E f(\bar{X}_T) = 0(h).$$

Remarque. Un exemple montre qu'il est inutile d'espérer un meilleur ordre de convergence : pour $b = 0$, $\sigma(x) = x$, $f(x) = x^2$, et $X_0 = 1$, il s'agit de l'équation :

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s dB_s .$$

On montre que la solution est $X_t = \exp(B_t - \frac{1}{2} t)$

$$f(X_t) = X_t^2 = \exp(2B_t - 2t) \exp t .$$

Or, $\exp(2B_t - 2t)$ est une martingale

($\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t)$ est une martingale),

donc $E[X_t^2] = \exp t$.

En appliquant le schéma d'Euler, on a :

$$\bar{X}_T = \bar{X}_{N-1} + \bar{X}_{N-1} \Delta B_N = \bar{X}_{N-1} (1 + \Delta B_N).$$

En itérant cette relation :

$$\bar{X}_T = (1 + \Delta B_1) (1 + \Delta B_2) \dots (1 + \Delta B_N)$$

on en déduit :

$$E[\bar{X}_T^2] = (1+h)^N = 1 + N h + \sum_{p \geq 2} \frac{N(N-1) \dots (N-p+1)}{p!} h^p$$

et
$$N(N-1) \dots (N-p+1) \frac{h^p}{p!} = N^p \frac{h^p}{p!} - \frac{(p-1)p}{2} N^{p-1} \frac{h^p}{p!} + 0(h^2)$$

donc
$$E[\bar{X}_T^2] = \sum_{p \geq 0} \frac{(Nh)^p}{p!} - \sum_{p \geq 2} \frac{1}{2} \frac{N^{p-1} h^p}{(p-2)!} + 0(h^2)$$

$$E[\bar{X}_T^2] = \exp(T) - \frac{1}{2} T h \exp(T) + 0(h^2).$$

Pour cet exemple, $E[X_T^2] - E[\bar{X}_T^2] = -\frac{1}{2} T h \exp(T) + 0(h^2)$ est bien en $0(h)$.

II.2 - Un autre schéma de discrétisation d'ordre h .

Pour obtenir le schéma d'Euler, on a écrit :

$$\bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + \int_{ph}^{(p+1)h} \sigma(\bar{X}_p) dB_s + \int_{ph}^{(p+1)h} b(\bar{X}_p) ds.$$

On peut améliorer ce schéma d'approximation en remplaçant $\sigma(\bar{X}_p)$ (respectivement $b(\bar{X}_p)$) par :

$$\bar{\sigma}(\bar{X}_s^1) = \sigma(\bar{X}_p) + \sigma'(\bar{X}_p) (\bar{X}_s^1 - \bar{X}_p)$$

(resp. $\bar{b}(\bar{X}_s^1) = b(\bar{X}_p) + b'(\bar{X}_p) (\bar{X}_s^1 - \bar{X}_p)$)

où
$$\bar{X}_s^1 = \bar{X}_p + \int_{ph}^s \sigma(\bar{X}_p) dBu + \int_{ph}^s b(\bar{X}_p) du$$

$$\bar{X}_s^1 = \bar{X}_p + \sigma(\bar{X}_p) (B_s - B_{ph}) + b(\bar{X}_p) (s - ph)$$

pour $ph \leq s \leq (p+1)h$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \bar{X}_{p+1} &= \bar{X}_p + \sigma(\bar{X}_p) \Delta B_{p+1} + b(\bar{X}_p) h \\ &+ \sigma \sigma'(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) dB_s + \sigma' b(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (s - ph) dB_s \\ &+ b' \sigma(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) ds + bb'(\bar{X}_p) \frac{h^2}{2} \end{aligned}$$

et par la formule de Ito,
$$\int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) dB_s = \frac{1}{2} (\Delta B_{p+1})^2 - \frac{h}{2}.$$

En ne conservant que les termes d'ordre au plus h (en espérance), on obtient le schéma d'approximation suivant :

$$(10) \quad \begin{cases} \bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + \sigma(\bar{X}_p) \Delta B_{p+1} + (b - \frac{1}{2} \sigma \sigma')(\bar{X}_p) h \\ \quad \quad \quad + \frac{1}{2} \sigma' \sigma(\bar{X}_p) (\Delta B_{p+1})^2 \\ \bar{X}_0 = X_0. \end{cases}$$

Pour montrer que la convergence de $E f(\bar{X}_T)$ vers $E f(X_T)$ est d'ordre h , il suffit de voir que ce schéma vérifie une égalité du type (8).

(10) s'écrit également

$$\bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + \int_{ph}^{(p+1)h} \sigma(\bar{X}_p) dB_s + \int_{ph}^{(p+1)h} b(\bar{X}_p) ds + \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) \cdot \sigma \sigma'(\bar{X}_p) dB_s$$

on écrit, pour $ph \leq t \leq (p+1)h$,

$$\bar{X}_t = \bar{X}_p + \int_{ph}^t \sigma(\bar{X}_p) dB_s + \int_{ph}^t b(\bar{X}_p) ds + \int_{ph}^t \sigma \sigma'(\bar{X}_p) (B_s - B_{ph}) \cdot dB_s.$$

Pour la formule de Ito,

$$E f(\bar{X}_{p+1}) = E f(\bar{X}_p) + \int_{ph}^{(p+1)h} E[f'(\bar{X}_s) b(\bar{X}_p) + \frac{1}{2} f''(\bar{X}_s) \sigma^2(\bar{X}_p)] ds \\ + \int_{ph}^{(p+1)h} E[\frac{1}{2} f''(\bar{X}_s) (\sigma \sigma'(\bar{X}_p))^2 (B_s - B_{ph})^2] ds .$$

En utilisant la même méthode que pour le schéma précédent, le dernier terme s'écrit :

$$\frac{1}{2} E[f''(\bar{X}_p) (\sigma \sigma'(\bar{X}_p))^2] \frac{h^2}{2} + o(h^3).$$

Les autres termes sont identiques à ceux du schéma d'Euler, d'où :

$$E f(\bar{X}_{p+1}) = E f(\bar{X}_p) + h E L f(\bar{X}_p) + \frac{h^2}{2} E[f + \frac{1}{2} f'' \sigma^2 \sigma'^2](\bar{X}_p) + o(h^3).$$

On en déduit : $E f(X_T) - E f(\bar{X}_T) = o(h)$.

Remarque. Un exemple montre qu'il est inutile d'espérer un meilleur ordre de convergence.

Pour $b(x) = \frac{x}{2}$, $\sigma(x) = x$, $f(x) = x^4$, $X_0 = 1$,

il s'agit de l'équation :

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t X_s ds .$$

La solution est $X_t = \exp(B_t)$

$$f(X_t) = \exp(4 B_t) = \underbrace{\exp(4 B_t - 8t)}_{\text{martingale}} \exp(8t)$$

donc $E f(X_T) = \exp(8T)$.

Appliquons le schéma donné par (10) :

$$\bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p (1 + \Delta B_{p+1} + \frac{1}{2} (\Delta B_{p+1})^2).$$

En itérant, on obtient donc :

$$E[\bar{X}_T^4] = E \left[\prod_{p=1}^N (1 + \Delta B_p + \frac{1}{2} (\Delta B_p)^2)^4 \right] \\ = (1 + 8h + \frac{51}{2} h^2 + 30 h^3 + \frac{105}{16} h^4)^N$$

(car les ΔB_p sont indépendants, et

$E[(\Delta B_p)^j] = 0$, pour j impair

$$E[(\Delta B_p)^2] = h, E[(\Delta B_p)^4] = 3h^2, E[(\Delta B_p)^6] = 15h^3, E[(\Delta B_p)^8] = 105h^4$$

$$\begin{aligned} E[\bar{X}_T^4] &= (1 + 8h(1 + \frac{51}{16}h))^N + 0(h^2) \\ &= 1 + 8Nh + \frac{51}{2}Nh^2 + \sum_{p \geq 2} \underbrace{(8h)^p (1 + \frac{51}{16}h)^p \frac{N \dots (N-p+1)}{p!}}_{*} + 0(h^2). \end{aligned}$$

Le seul terme en $0(1)$ dans \square est : $\frac{(8Nh)^p}{p!}$,

les termes en $0(h)$ dans \square sont :

$$-\frac{1}{2}p(p-1)N^{p-1} \frac{(8h)^p}{p!}, \text{ et } \frac{Np}{p!} h^{p+1} 8^p \frac{51}{16} p$$

(car $(1 + \frac{51}{16}h)^p = 1 + \frac{51}{16}ph + 0(h^2)$).

On obtient donc :

$$\begin{aligned} E[\bar{X}_T^4] &= \sum_{p \geq 0} \frac{(8T)^p}{p!} - \frac{1}{2} \left(\sum_{p \geq 2} \frac{(8T)^{p-2}}{(p-2)!} \right) 64Nh^2 \\ &\quad + \frac{51}{2}Nh^2 \left(1 + \sum_{p \geq 2} \frac{(8T)^{p-1}}{(p-1)!} + 0(h^2) \right) \\ &= \exp(8T) \left[1 - \frac{64}{2}Th + \frac{51}{2}Th \right] + 0(h^2) \end{aligned}$$

$$E[\bar{X}_T^4] = \exp(8T) - \frac{13}{2}T \exp(8T)h + 0(h^2)$$

donc $E(f(X_T) - f[\bar{X}_T]) = + \frac{13}{2}T \exp(8T)h + 0(h^2)$ est bien d'ordre h .

Nous avons vu que les schémas vérifiant (8) avec $\tilde{f} \neq L^2 f$ conduisent à une convergence d'ordre h .

Au paragraphe IV, nous construisons des schémas plus précis, vérifiant (8), avec $\tilde{f} = L^2$.

On obtient alors :

$$\varepsilon_{p+1}^f = \varepsilon_p^f + h \varepsilon_p^{Lf} + \frac{h^2}{2} \varepsilon_p^{L^2f} + 0(h^3)$$

$$\text{où } \varepsilon_p^f = E f(X_{ph}) - E f(\bar{X}_p).$$

Malheureusement, dans le cas général, cet argument n'est pas suffisant pour montrer que la convergence de $f(\bar{X}_T)$ vers $f(X_T)$ est d'ordre h^2 .

Au prochain paragraphe, nous donnons un critère (prouvé par Talay) pour y parvenir.

III - CONDITION SUFFISANTE D'ORDRE DE CONVERGENCE h^2 .

Soit \bar{X}_p , $0 \leq p \leq N = \frac{T}{h}$ un schéma de discrétisation de l'équation (1) $X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds$. Le but de ce paragraphe est de construire une condition suffisante pour que, pour f "convenable", (\bar{X}_p) vérifie : $\exists c > 0, \forall h = \frac{T}{N}$ ($N \in \mathbb{N}^*$),

$$|E f(X_T) - E f(\bar{X}_T)| \leq c h^2.$$

L'élaboration de ce critère de convergence, dont nous reprenons le cheminement, est la pièce maîtresse de l'article de Talay. Nous avons seulement dû affiner quelques hypothèses ($c_2(vi), H_1$).

Pour obtenir une bonne approximation, il est important de bien contrôler l'évolution de l'erreur $E f(X_{ph}) - E f(\bar{X}_p)$. Or,

$$\begin{aligned} & E f(X_{(p+1)h}) - E f(\bar{X}_{p+1}) \\ &= \{E f(X_{(p+1)h} - E f(X_{ph}) - (E f(\bar{X}_{p+1}) - E f(\bar{X}_p))\} \\ & \quad + E f(X_{ph}) - E f(\bar{X}_p). \end{aligned}$$

Donc si $E f(\bar{X}_{p+1}) - E f(\bar{X}_p)$ diffère de $E f(X_{(p+1)h} - E f(X_{ph}))$ d'au plus une constante $\times h^3$, et si $\bar{X}_0 = X_0$, l'erreur cumulée au point $T = N h$ sera bien d'ordre h^2 .

Nous pouvons écrire :

$$E f(X_{(p+1)h}) - E f(X_{ph}) = \sum_{i=1}^5 E f^{(i)}(X_{ph}) \cdot E[(X_{(p+1)h} - X_{ph})^i | \mathcal{F}_{ph}] + 0(h^3)$$

ce qui nous amène à souhaiter les implications suivantes pour $i = 1, \dots, 5$:

Soit g_i telle que $E[(X_{(p+1)h} - X_{ph})^i | \mathcal{F}_{ph}] = g_i(X_{ph}) + 0(h^3)$.

Alors $E[(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^i | \mathcal{F}_p] = g_i(\bar{X}_p) + 0(h^3)$,

où $\bar{\mathcal{F}}_p$ est la tribu engendrée par $\{\bar{X}_j, 0 \leq j \leq p\}$.

Explicitons clairement cette implication pour $i = 1$:

$$\begin{aligned} E[X_{(p+1)h} - X_{ph} | \mathcal{F}_{ph}] &= E \left[\int_{ph}^{(p+1)h} \sigma(X_s) dB_s + \int_{ph}^{(p+1)h} b(X_s) ds \mid \mathcal{F}_{ph} \right] \\ &= E \left[\int_{ph}^{(p+1)h} b(X_s) ds \mid \mathcal{F}_{ph} \right]. \end{aligned}$$

Et pour $ph \leq s \leq (p+1)h$,

$$b(X_s) = b(X_{ph}) + b'(X_{ph})(X_s - X_{ph}) + \frac{b''(X_{ph})}{2}(X_s - X_{ph})^2 + o(h^2) \text{ (en espérance)}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } E[b(X_s) | \mathcal{F}_{ph}] &= b(X_{ph}) + \left(\int_{ph}^s E[b(X_u) | \mathcal{F}_{ph}] du \right) \cdot b'(X_{ph}) \\ &\quad + \frac{1}{2} b''(X_{ph}) E \left[\left(\int_{ph}^s b(X_u) du \right)^2 + \left(\int_{ph}^s \sigma(X_u) dB_u \right)^2 \mid \mathcal{F}_{ph} \right]. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} E[X_{(p+1)h} - X_{ph} | \mathcal{F}_{ph}] &= b(X_{ph}) h + bb'(X_{ph}) \frac{h^2}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 b''(X_{ph}) \frac{h^2}{2} + o(h^3), \end{aligned}$$

ce qui implique la condition :

$$E[\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p | \bar{\mathcal{F}}_p] = b(\bar{X}_p) h + (bb' + \frac{1}{2} \sigma^2 b'')(\bar{X}_p) \frac{h^2}{2} + o(h^3)$$

pour le schéma d'approximation.

On peut procéder de même pour $i \geq 2$, ce qui justifie intuitivement la condition

(c₂) ci-après.

De fait, nous exigerons que (\bar{X}_p) satisfasse aux conditions (c₀), (c₁) et (c₂) suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (c_0) \quad \bar{X}_0 = X_0 \\ (c_1) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe une constante } c(n) \text{ telle que } \forall h = \frac{T}{N}, \\ N \in \mathbb{N}^*, \forall p = 0, 1, \dots, N, \quad E|\bar{X}_p|^n \leq c(n) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
(c_2) \text{ (i)} \quad & E[\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p \mid \bar{\mathcal{F}}_p] = b(\bar{X}_p) h + bb'(\bar{X}_p) \frac{h^2}{2} + \sigma^2 b''(\bar{X}_p) \frac{h^2}{4} + 0(h^3) \\
\text{(ii)} \quad & E[(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^2 \mid \bar{\mathcal{F}}_p] = \sigma^2(\bar{X}_p) h + b^2(\bar{X}_p) h^2 + \sigma^2 \sigma'(\bar{X}_p) \frac{h^2}{2} \\
& \quad + b' \sigma^2(\bar{X}_p) h^2 + \sigma \sigma' b(\bar{X}_p) h^2 \\
& \quad + \sigma^3 \sigma''(\bar{X}_p) \frac{h^2}{2} + 0(h^3) \\
\text{(iii)} \quad & E[(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^3 \mid \bar{\mathcal{F}}_p] = 3\sigma^2 b(\bar{X}_p) h^2 + 3\sigma^3 \sigma'(\bar{X}_p) h^2 + 0(h^3) \\
\text{(iv)} \quad & E[(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^4 \mid \bar{\mathcal{F}}_p] = 3\sigma^4(\bar{X}_p) h^2 + 0(h^3) \\
\text{(v)} \quad & E[(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^5 \mid \bar{\mathcal{F}}_p] = 0(h^3) \\
\text{(vi)} \quad & E[(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^{12}] = 0(h^6) .
\end{aligned}$$

Théorème III.1 (Talay). *On suppose que les fonctions b , σ et f vérifient les hypothèses de régularité du théorème I.6, à savoir :*

(H₁) Les fonctions b et σ sont de classe C^7 , et leurs dérivées jusqu'à l'ordre 7 sont bornées.

(H₂) f est de classe C^6 , et vérifie : il existe un entier n tel que pour $0 \leq i \leq 6$, $\exists c \in \mathbb{R}^+$, $|f^{(i)}(x)| \leq c(|x|^n + 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On suppose que la schéma (\bar{X}_p) satisfait les conditions (c_0) , (c_1) et (c_2) .

Alors $\exists c > 0$, $\forall h = \frac{T}{N}$ ($N \in \mathbb{N}^$), $|E f(X_T) - E f(\bar{X}_T)| \leq c h^2$.*

Pour démontrer le théorème III.1, nous avons besoin du lemme suivant, dont la démonstration est longue et calculatoire.

Reprenons les notations introduites au paragraphe I.3.

Lemme III.2 (Talay). *Soit u la fonction définie sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ par $u(t, x) = E f(X_{T-t}^x)$.*

Alors, sous les mêmes hypothèses que pour le théorème III.1

$$u((p+1)h, \bar{X}_{p+1}) \stackrel{E}{=} u(ph, \bar{X}_p) + 0(h^3).$$

Notation. Pour X, Y variables aléatoires intégrables,

$$X \stackrel{E}{=} Y \text{ signifie } E[X] = E[Y].$$

Démonstration du théorème III.1. On déduit du lemme III.2 que

$$u(T, \bar{X}_T) \stackrel{E}{=} u(0, \bar{X}_0) + 0(h^2) .$$

Or,
$$u(T, \bar{X}_T) = E f(X_0^{\bar{X}_T}) = E f(\bar{X}_T)$$

$$u(0, \bar{X}_0) = u(0, X_0) = E f(X_T^{X_0}) \equiv E f(X_T).$$

On a donc montré que : $\exists c > 0 : \forall h = \frac{T}{N} (N \in \mathbb{N}^*),$
 $|E f(X_T) - E f(\bar{X}_T)| \leq c h^2.$

Démonstration du lemme III.2. Les résultats des théorèmes I.6 et I.7 justifient toutes les différenciations ci-après :

$$\begin{aligned} u((p+1)h, \bar{X}_{p+1}) &= u(ph, \bar{X}_{p+1}) + \int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial}{\partial t} u(s, \bar{X}_{p+1}) ds \\ &= u(ph, \bar{X}_p) + \sum_{i=1}^5 \frac{1}{i!} (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^i \frac{\partial^i}{\partial x^i} u(ph, \bar{X}_p) \\ &\quad + \frac{1}{6!} (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^6 \frac{\partial^6}{\partial x^6} u(ph, \bar{X}_p^*) \\ &\quad + \int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial u}{\partial t} (s, \bar{X}_{p+1}) ds, \end{aligned}$$

avec \bar{X}_p^* compris entre \bar{X}_p et \bar{X}_{p+1} .

En utilisant les hypothèses c₂ (v), (vi), c₁ et le théorème I.6 (iii), nous pouvons réécrire l'inégalité précédente sous la forme :

$$(11) \quad \begin{cases} u((p+1)h, \bar{X}_{p+1}) \stackrel{E}{=} u(ph, \bar{X}_p) + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{i!} (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^i \frac{\partial^i}{\partial x^i} u(ph, \bar{X}_p) \\ + \int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial}{\partial t} u(s, \bar{X}_{p+1}) ds + O(h^3). \end{cases}$$

En effet, $|E [\frac{\partial^5}{\partial x^5} u(ph, \bar{X}_p) (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^5]|$

$$= |E [\frac{\partial^5}{\partial x^5} u(ph, \bar{X}_p) E((\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^5 | \mathcal{F}_p)]|$$

$$\leq c_1 h^3 E [| \frac{\partial^5}{\partial x^5} u(ph, \bar{X}_p) |] \quad (c_2 (v))$$

$$\leq c_2 h^3 E [(|\bar{X}_p|^r + 1)] \quad (\text{théorème I.6 (iii)})$$

$$\leq c_3 h^3 \quad (\text{hypothèse } c_1).$$

Il reste à voir que l'espérance de $(X_{p+1} - \bar{X}_p)^6 \frac{\partial^6}{\partial x^6} u(ph, \bar{X}_p^*)$ est également d'ordre h^3 .

L'inégalité de Hölder s'écrit :

$$\begin{aligned} & E[|(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^6 \frac{\partial^6}{\partial x^6} u(ph, \bar{X}_p^*)|] \\ & \leq E[|(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^{12}|^{1/2}] E[|\frac{\partial^6}{\partial x^6} u(ph, \bar{X}_p^*)|^2]^{1/2} \\ & \leq c_4 h^3 E[|\bar{X}_p^*|^{2r+1}]^{1/2} \quad (c_2 \text{ (vi) et théorème I.6 (iii)}) \\ & \leq c_4 h^3 E[|\bar{X}_p|^{2r} + |\bar{X}_{p+1}|^{2r+1}], \\ & \quad \text{car } \bar{X}_p^* \text{ est compris entre } \bar{X}_p \text{ et } \bar{X}_{p+1} \\ & \leq c_5 h^3, \quad (\text{hypothèse } c_1). \end{aligned}$$

D'après (11), pour obtenir le résultat souhaité, il faut donc montrer que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^4 \frac{1}{i!} E[\frac{\partial^i}{\partial x^i} u(ph, \bar{X}_p)] E[(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^i | \bar{\mathcal{F}}_p] \\ & + E \int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial}{\partial t} u(s, \bar{X}_{p+1}) ds = 0(h^3). \end{aligned}$$

Pour le premier terme, nous utiliserons les expressions explicites des espérances conditionnelles de $(X_{p+1} - X_p)^i$ relativement à $\bar{\mathcal{F}}_p$, données par (c₂).

Que vaut le deuxième terme $E \int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial}{\partial t} u(s, \bar{X}_{p+1}) ds$?

Pour pouvoir "additionner" le premier et le deuxième terme, il faut donner une expression approchée de ce dernier ne contenant que des dérivées par rapport à x de u , au point (ph, \bar{X}_p) .

Or, on a montré, au paragraphe I.3, que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= -L u(t, x) \\ &= b(x) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) \end{aligned}$$

on a donc :

$$\begin{aligned}
& \int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial}{\partial t} u(s, \bar{X}_{p+1}) ds \stackrel{E}{=} - \int_{ph}^{(p+1)h} L u(s, \bar{X}_{p+1}) ds \\
& \stackrel{E}{=} - \int_{ph}^{(p+1)h} L u(s, \bar{X}_p) ds - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{i!} (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^i \int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial^i}{\partial x^i} L u(s, \bar{X}_p) ds \\
& - \frac{1}{4!} (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^4 \int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial^4}{\partial x^4} L u(s, \bar{X}_p^*) ds,
\end{aligned}$$

avec \bar{X}_p^* compris entre \bar{X}_p et \bar{X}_{p+1} .

Montrons que les deux derniers termes sont en $0(h^3)$:

$$-E [E[|\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p|^3 | \mathcal{F}_p] | \int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial^3}{\partial x^3} L u(s, \bar{X}_p) ds] \leq c_6 h^3,$$

car : $E[(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^3 | \mathcal{F}_p]$ est en $0(h^2)$

(utiliser c_2 (iii), et le fait que $|\sigma(x)| \leq K(1 + |x|)$,

$$|b(x)| \leq K(1 + |x|) \text{ et } \sigma' \text{ est borné}).$$

$E | \frac{\partial^3}{\partial x^3} L u(s, \bar{X}_p) |$ est borné (la méthode utilisée au début de la démonstration de ce lemme s'applique grâce aux hypothèses faites sur b et σ).

- Majorons le dernier terme :

$$\begin{aligned}
& E [| \int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial^4}{\partial x^4} L u(s, \bar{X}_p^*) ds | \cdot (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^4] \\
& \leq E [(X_{p+1} - X_p)^8]^{1/2} E [(\int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial^4}{\partial x^4} L u(s, \bar{X}_p^*) ds)^2]^{1/2}.
\end{aligned}$$

. Par c_2 (vi), $E[(X_{p+1} - X_p)^8]^{1/2}$ est en $0(h^2)$, car

$$E [(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^8] \leq E [(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^{12}]^{8/12} \leq c h^4.$$

. $\exists c_7, \exists r, | \frac{\partial^4}{\partial x^4} L u(s, \bar{X}_p^*) | \leq c_7 (1 + |\bar{X}_p^*|^r)$

$$\begin{aligned}
& (\text{car } |b(x)| \leq K(1 + |x|) \\
& |\sigma(x)| \leq K(1 + |x|)
\end{aligned}$$

les dérivées successives de σ et b sont bornées, et utiliser le théorème I.6 (iii) ;

on a donc

$$E \left[\left(\int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial^4}{\partial x^4} L u(s, \bar{X}_p^*) ds \right)^2 \right]^{1/2} \leq c_8 h E [1 + |\bar{X}_p^*|^{2r}]^{1/2} \\ \leq c_9 h \quad (\text{par } c_1).$$

Le dernier terme est donc en $O(h^3)$.

Nous pouvons donc écrire :

$$\int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial}{\partial t} u(s, \bar{X}_{p+1}) ds \stackrel{E}{=} - \int_{ph}^{(p+1)h} L u(s, \bar{X}_p) ds \\ - (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial}{\partial x} L u(s, \bar{X}_p) ds \\ - \frac{1}{2} (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^2 \int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial^2}{\partial x^2} L u(s, \bar{X}_p) ds + O(h^3) \\ \stackrel{E}{=} -R_1 - R_2 - R_3 + O(h^3).$$

- Commençons par traiter R_1 :

$$R_1 = \int_{ph}^{(p+1)h} L u(s, \bar{X}_p) ds \\ = \int_{ph}^{(p+1)h} b(\bar{X}_p) \frac{\partial}{\partial x} u(s, \bar{X}_p) ds + \frac{1}{2} \int_{ph}^{(p+1)h} \sigma^2(\bar{X}_p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(s, \bar{X}_p) ds.$$

. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{ph}^{(p+1)h} b(\bar{X}_p) \frac{\partial}{\partial x} u(s, \bar{X}_p) ds = \left(\frac{\partial}{\partial x} u(ph, \bar{X}_p) \right) b(\bar{X}_p) h \\ + \int_{ph}^{(p+1)h} b(\bar{X}_p) \int_{ph}^s \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} u(v, x) dv ds \\ = \left(\frac{\partial}{\partial x} u(ph, \bar{X}_p) \right) b(\bar{X}_p) h - b(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} \int_{ph}^s \frac{\partial}{\partial x} L u(v, x) dv ds$$

$$\begin{aligned}
\text{et } \frac{\partial}{\partial x} L u(v, x) &= b'(x) \frac{\partial}{\partial x} u(v, x) + b(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(v, x) \\
&\quad + \sigma(x) \sigma'(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(v, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(v, x) \\
&= b'(x) \left[\frac{\partial}{\partial x} u(ph, x) + (v - ph) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} u(\alpha_v, x) \right] \\
&\quad + b(x) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(ph, x) + (v - ph) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(\beta_v, x) \right] \\
&\quad + \sigma \sigma'(x) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(ph, x) + (v - ph) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(\gamma_v, x) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} u(ph, x) + (v - ph) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(\delta_v, x) \right],
\end{aligned}$$

avec $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v, \delta_v \in]ph, v[$.

On en déduit, par le théorème I.7 (ii), et c_1 , que :

$$\begin{aligned}
\int_{ph}^{(p+1)h} b(\bar{X}_p) \frac{\partial}{\partial x} u(s, \bar{X}_p) ds &\stackrel{E}{=} b(\bar{X}_p) \frac{\partial}{\partial x} u(ph, \bar{X}_p) h \\
&\quad - b b'(\bar{X}_p) \frac{\partial}{\partial x} u(ph, \bar{X}_p) \frac{h^2}{2} \\
&\quad - b^2(\bar{X}_p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(ph, \bar{X}_p) \frac{h^2}{2} \\
&\quad - b \sigma \sigma'(\bar{X}_p) u(ph, \bar{X}_p) \frac{h^2}{2} \\
&\quad - \frac{1}{2} b \sigma^2(\bar{X}_p) \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(ph, \bar{X}_p) \frac{h^2}{2} + 0(h^3) \\
&= R_4.
\end{aligned}$$

. De même,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{ph}^{(p+1)h} \sigma^2(\bar{X}_p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(s, \bar{X}_p) ds &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(ph, \bar{X}_p) \cdot \sigma^2(\bar{X}_p) h \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{ph}^{(p+1)h} \sigma^2(\bar{X}_p) \int_{ph}^s \frac{\partial^2}{\partial x^2} L u(v, \bar{X}_p) dv ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et } \frac{\partial^2}{\partial x^2} L u(v, \bar{X}_p) &= b''(\bar{X}_p) \frac{\partial}{\partial x} u(v, \bar{X}_p) + 2 b'(\bar{X}_p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(v, \bar{X}_p) \\
&\quad + b(\bar{X}_p) \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(v, \bar{X}_p) \\
&\quad + \sigma'^2(\bar{X}_p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(v, \bar{X}_p) + \sigma \sigma''(\bar{X}_p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(v, \bar{X}_p) \\
&\quad + 2 \sigma \sigma'(\bar{X}_p) \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(v, \bar{X}_p) + \frac{1}{2} \sigma^2(\bar{X}_p) \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(v, \bar{X}_p).
\end{aligned}$$

On développe comme précédemment, et les termes contenant $(v-ph)$ donnent des $0(h^3)$ (th. I.7 (ii) et c_1).

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{ph}^{(p+1)h} \sigma^2(\bar{X}_p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(s, \bar{X}_p) ds &\stackrel{E}{=} \frac{1}{2} \sigma^2(\bar{X}_p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(ph, \bar{X}_p) h \\
&- \frac{1}{2} b'' \sigma^2(\bar{X}_p) \frac{\partial}{\partial x} u(ph, \bar{X}_p) \frac{h^2}{2} \\
&- b' \sigma^2(\bar{X}_p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(ph, \bar{X}_p) \frac{h^2}{2} \\
&- \frac{1}{2} \sigma^3 \sigma''(\bar{X}_p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(ph, \bar{X}_p) \frac{h^2}{2} \\
&- \frac{1}{2} \sigma^2 \sigma'(\bar{X}_p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(ph, \bar{X}_p) \frac{h^2}{2} \\
&- \frac{1}{2} \sigma^2 b(\bar{X}_p) \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(ph, \bar{X}_p) \frac{h^2}{2} \\
&- \sigma^3 \sigma'(\bar{X}_p) \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(ph, \bar{X}_p) \frac{h^2}{2} \\
&- \frac{1}{4} \sigma^4(\bar{X}_p) \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(ph, \bar{X}_p) \frac{h^2}{2} + 0(h^3) \\
&= R_5.
\end{aligned}$$

Et on a : $R_1 = R_4 + R_5$.

- Considérons à présent R_2 :

$$R_2 = (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p) \cdot \int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial}{\partial x} L u(s, \bar{X}_p) ds.$$

Grâce à $c_2(i)$,

$$R_2 \stackrel{E}{=} b(\bar{X}_p) h \int_{t_p}^{t_{p+1}} \frac{\partial}{\partial x} L v(s, \bar{X}_p) ds + 0(h^3)$$

et en effectuant les mêmes calculs que pour déterminer R_1 , on obtient :

$$\begin{aligned}
R_2 &\stackrel{E}{=} b b'(\bar{X}_p) \frac{\partial}{\partial x} u(ph, \bar{X}_p) h^2 + b^2 \frac{\partial}{\partial x^2} u(ph, \bar{X}_p) h^2 \\
&+ b \sigma \sigma'(\bar{X}_p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(ph, \bar{X}_p) h^2 \\
&+ \frac{1}{2} b \sigma^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(ph, \bar{X}_p) h^2 + 0(h^3).
\end{aligned}$$

- De même, $R_3 = \frac{1}{2} (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^2 \cdot \int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Lu(s, \bar{X}_p) ds$

$$\stackrel{E}{=} \frac{1}{2} \sigma^2(\bar{X}_p) h \int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial^2}{\partial x^2} Lu(s, \bar{X}_p) ds + O(h^3)$$

$$\begin{aligned} R_3 &\stackrel{E}{=} \frac{1}{2} \sigma^2(\bar{X}_p) b''(\bar{X}_p) \frac{\partial}{\partial x} u(ph, \bar{X}_p) h^2 \\ &\quad + \sigma^2 b'(\bar{X}_p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(ph, \bar{X}_p) h^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 \sigma'(\bar{X}_p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(ph, \bar{X}_p) h^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^3 \sigma''(\bar{X}_p) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(ph, \bar{X}_p) h^2 + \frac{1}{2} b \sigma^2(\bar{X}_p) \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(ph, \bar{X}_p) h^2 \\ &\quad + \sigma^3 \sigma'(\bar{X}_p) \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(ph, \bar{X}_p) h^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \sigma^4(\bar{X}_p) \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(ph, \bar{X}_p) h^2 + O(h^3). \end{aligned}$$

- Revenons à (11) :

$$\begin{aligned} E u((p+1)h, \bar{X}_{p+1}) &= E [u(ph, \bar{X}_p) + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{i!} E [(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^i | \mathcal{F}_p] \frac{\partial^i}{\partial x^i} u(ph, \bar{X}_p)] \\ &= E \int_{ph}^{(p+1)h} \frac{\partial}{\partial t} u(s, \bar{X}_{p+1}) + O(h^3). \end{aligned}$$

En remplaçant le dernier terme par l'expression $-R_1 - R_2 - R_3$, et en utilisant la condition c_2 , on trouve immédiatement

$$u((p+1)h, \bar{X}_{p+1}) \stackrel{E}{=} u(ph, \bar{X}_p) + O(h^3),$$

ce qui achève la démonstration du lemme III.2.

- On peut appliquer le théorème III.1 à un schéma de discrétisation donné, si celui-ci vérifie les conditions c_0 , c_1 et c_2 .

c_0 est triviale ; c_2 se vérifie directement à partir de l'expression explicite de \bar{X}_{p+1} en fonction de \bar{X}_p . Donnons une condition suffisante pour que c_1 soit vérifiée.

Proposition III.3. Soit \bar{X}_p , $0 \leq p \leq N$, un schéma de discrétisation de l'E.D.S. : $t \in [0, T]$,

$$(1) \quad X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds ,$$

où b et σ sont des fonctions de classe c_1 , à dérivées bornées.

On suppose de plus que $(\bar{X}_p)_{p=0, \dots, N}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \bar{X}_0 &= X_0 \\ \bar{X}_{p+1} &= \bar{X}_p + A_1(\bar{X}_p) \Delta B_{p+1} + A_2(\bar{X}_p) h + A_3(\bar{X}_p) (\Delta B_{p+1})^2 \\ &\quad + A_4(\bar{X}_p) (\Delta B_{p+1}) h + A_5(\bar{X}_p) (\Delta B_{p+1})^3 + A_6(\bar{X}_p) (\Delta B_{p+1})^4, \end{aligned}$$

avec les fonctions A_i ($1 \leq i \leq 6$) vérifiant: $\exists c_i$, tels que .

$$|A_i(x)| \leq c_i (1 + |x|) , \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Alors : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante C (dépendant de n) telle que $\forall h = \frac{T}{N}$

$$(N \in \mathbb{N}^*), \quad \forall p = 0, 1, \dots, N, \quad E |\bar{X}_p|^n \leq C .$$

Démonstration. Soit $n \geq 2$. Avec l'hypothèse faite sur le schéma d'approximation, on obtient facilement :

Il existe des constantes c_1, \dots, c_n, K telles que

$$E[|\bar{X}_{p+1}|^n] \leq E[|\bar{X}_p|^n + h \sum_{j=1}^n c_j |\bar{X}_p|^j] + K h .$$

On suppose qu'il existe un nombre $K_p \geq 1$ tel que

$$\sup_{k \leq n} E[|\bar{X}_p|^k] \leq K_p .$$

(Dans ce cas, on prend $K_p = \sup_{k \leq n} E[|\bar{X}_p|^k] \vee 1$).

On a alors : $\exists c > 0$, tel que :

$$(12) \quad E[|\bar{X}_{p+1}|^n] \leq K_p (1 + c h) + K h .$$

$$K_p = \sup_{k \leq n} E[|\bar{X}_p|^k] \vee 1, \text{ donc on peut écrire :}$$

$$K_p \leq K_{p-1} (1 + c h) + K h .$$

On obtient alors, en itérant la relation (12) :

$$\forall p = 0, \dots, N-1,$$

$$E[|X_{p+1}|^n] \leq K_0 (1 + c h)^N + N K h (1 + c h),$$

avec $K_0 = \sup_{k \leq n} E[|X_0|^k] \vee 1$.

On a : $(1 + c h)^N = \exp(c T) + 0(h)$
 $N h K = K T$.

On peut donc trouver une constante \tilde{C} (dépendant de n), t.q. $\forall p = 0, \dots, N$,

$$E[|\bar{X}_p|^n] \leq \tilde{C} \quad (\text{pour } n \geq 2)$$

$$\text{pour } n = 1 : E[|\bar{X}_p|] \leq E[|\bar{X}_p|^2]^{1/2} \leq \sqrt{\tilde{C}}.$$

Remarque III.3.1. Si les fonctions A_i ($1 \leq i \leq 6$) vérifient seulement :

$$\exists c_i \text{ t.q. } |A_i(x)| \leq c_i (1 + |x| + |x|^2), \forall x \in \mathbb{R}$$

la méthode utilisée pour montrer la proposition III.3 ne convient plus, et d'ailleurs il n'est pas évident que sous cette hypothèse, (c_1) soit vérifiée. Cela justifiera les conditions imposées à b et σ pour le schéma de Milshtein.

Au paragraphe II, on a construit deux schémas d'approximation d'ordre h , vérifiant :

$$E f(\bar{X}_{p+1}) = E f(\bar{X}_p) + h E L f(\bar{X}_p) + \frac{h^2}{2} E \tilde{f}(\bar{X}_p) + 0(h^3),$$

avec \tilde{f} , en général, différente de $L^2 f$.

Montrons que pour les schémas vérifiant (c_0) , (c_1) et (c_2) , on a bien $\tilde{f} = L^2 f$.

Proposition II.4. Soit \bar{X}_p , $0 \leq p \leq N$, un schéma de discrétisation de l'E.D.S.

$$(1) \quad X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) d B_s + \int_0^t b(X_s) ds$$

où b et σ sont C^7 , à dérivées jusqu'à l'ordre 7 continues bornées.

– On suppose de plus que ce schéma vérifie les conditions (c_0) , (c_1) et (c_2) .

– Soit f une fonction de classe C^6 vérifiant :

il existe un entier n tel que pour $0 \leq i \leq 6$, $\exists c \in \mathbb{R}^+$,

$$|f^{(i)}(x)| \leq c(1 + |x|^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors $\forall p = 0, \dots, N-1$, ($N \in \mathbb{N}^*$), $h = \frac{T}{N}$, on a :

$$E f(\bar{X}_{p+1}) = E f(\bar{X}_p) + h E L f(\bar{X}_p) + \frac{h^2}{2} E L^2 f(\bar{X}_p) + o(h^3).$$

Démonstration proposition III.4.

$$L f(x) = b f'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''(x)$$

$$L^2 f(x) = b(L f)'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 (L f)''(x)$$

$$L^2 f = b(b' f' + b f'' + \frac{1}{2} f^{(3)} \sigma^2 + f'' \sigma' \sigma)$$

$$+ \frac{1}{2} \sigma^2 (b'' f' + b' f'' + b f'' + b f^{(3)} + \frac{1}{2} f^{(4)} \sigma^2 + f^{(3)} \sigma' \sigma$$

$$+ f^{(3)} \sigma' \sigma + f'' \sigma'' \sigma + f'' \sigma'^2)$$

$$L^2 f = f'(bb' + \frac{1}{2} \sigma^2 b'') + f''(b^2 + b \sigma \sigma' + \sigma^2 b' + \frac{\sigma'' \sigma^3}{2} + \frac{\sigma'^2 \sigma^2}{2}$$

$$+ f^{(3)} (b \sigma^2 + \sigma' \sigma^3) + f^{(4)} (\frac{\sigma^4}{4}).$$

Par le développement de Taylor, on a :

$$E f(\bar{X}_{p+1}) = E f(\bar{X}_p) + E \sum_{i=1}^5 \frac{1}{i!} f^{(i)}(\bar{X}_p) (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^i$$

$$+ E [\frac{1}{6!} f^{(6)}(\bar{X}_p^*) (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^6], \text{ avec } \bar{X}_p \leq \bar{X}_p^* \leq \bar{X}_{p+1}.$$

le dernier terme est en $o(h^3)$, car

$$E [|f^{(6)}(\bar{X}_p^*)| (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^6] \leq \underbrace{E [f^{(6)}(\bar{X}_p^*)^2]^{1/2}}_{\text{borné, par } c_1} E [(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^{12}]^{1/2},$$

$$\leq c h^3, \text{ par } c_2 \text{ (vi).}$$

$$E [|f^{(5)}(\bar{X}_p) (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^5|] \leq c h^3, \text{ par } c_2 \text{ (v).}$$

Il reste donc :

$$E f(\bar{X}_{p+1}) = E f(\bar{X}_p) + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{i!} E [f^{(i)}(\bar{X}_p) E [(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^i | \bar{\mathcal{F}}_p]] + o(h^3).$$

En remplaçant dans cette égalité $E [(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^i | \bar{\mathcal{F}}_p]$ ($1 \leq i \leq 4$) par les valeurs données par c_2 (i), (ii), (iii) et (iv), on obtient immédiatement :

$$E f(\bar{X}_{p+1}) = E f(\bar{X}_p) + h E L f(\bar{X}_p) + \frac{h^2}{2} E L^2 f(\bar{X}_p) + o(h^3).$$

IV - LE SCHEMA DE MILSTEIN.

IV.1 - Première version du schéma de Milstein.

Pour construire ce nouveau schéma de discrétisation, nous reprenons la méthode utilisée au paragraphe II.2 :

$$(13) \quad \bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + \int_{ph}^{(p+1)h} \bar{\sigma}(\bar{X}_s^1) dB_s + \int_{ph}^{(p+1)h} \bar{b}(\bar{X}_s^1) ds ,$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \bar{X}_s^1 &= \bar{X}_p + \int_{ph}^s \sigma(\bar{X}_p) dB_u + \int_{ph}^s b(\bar{X}_p) du \\ &= \bar{X}_p + \sigma(\bar{X}_p) (B_s - B_{ph}) + b(\bar{X}_p) (s - ph). \end{aligned}$$

Et pour obtenir un meilleur ordre de convergence qu'en II.2, nous développons $\bar{\sigma}(\bar{X}_s^1)$ et $\bar{b}(\bar{X}_s^1)$ jusqu'à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\bar{X}_s^1) &= \sigma(\bar{X}_p) + \sigma'(\bar{X}_p) (\bar{X}_s^1 - \bar{X}_p) + \frac{1}{2} \sigma''(\bar{X}_p) (\bar{X}_s^1 - \bar{X}_p)^2 \\ &= \sigma(\bar{X}_p) + \sigma \sigma'(\bar{X}_p) (B_s - B_{ph}) + \sigma' b(\bar{X}_p) (s - ph) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma'' \sigma^2(\bar{X}_p) (B_s - B_{ph})^2 + \frac{1}{2} \sigma'' b^2(\bar{X}_p) (s - ph)^2 \\ &\quad + \sigma'' \sigma b(\bar{X}_p) (B_s - B_{ph}) (s - ph) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{b}(\bar{X}_s^1) &= b(\bar{X}_p) + b'(\bar{X}_p) (\bar{X}_s^1 - \bar{X}_p) + \frac{1}{2} b''(\bar{X}_p) (\bar{X}_s^1 - \bar{X}_p)^2 \\ &= b(\bar{X}_p) + b' \sigma(\bar{X}_p) (B_s - B_{ph}) + b b'(\bar{X}_p) (s - ph) \\ &\quad + \frac{1}{2} b'' \sigma^2(\bar{X}_p) (B_s - B_{ph})^2 + \frac{1}{2} b'' \sigma^2(\bar{X}_p) (s - ph)^2 \\ &\quad + b'' \sigma b(\bar{X}_p) (B_s - B_{ph}) (s - ph) . \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \bar{X}_{p+1} &= \bar{X}_p + \sigma(\bar{X}_p) \Delta B_{p+1} + b(\bar{X}_p) h + \sigma \sigma'(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) dB_s \\ &\quad + \sigma' b(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (s - ph) dB_s + b' \sigma(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + bb'(\bar{X}_p) \frac{h^2}{2} + \frac{1}{2} \sigma'' \sigma^2(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph})^2 dB_s \\
& + \frac{1}{2} \sigma'' b^2(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (s - ph)^2 dB_s + \sigma'' \sigma b(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph})(s - ph) dB_s \\
& + \frac{1}{2} b'' \sigma^2(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph})^2 ds + \frac{1}{2} b'' b^2(\bar{X}_p) \underbrace{\int_{ph}^{(p+1)h} (s - ph)^2 ds}_{= h^{2/3}} \\
& + b'' b \sigma(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph})(s - ph) ds.
\end{aligned}$$

Considérons désormais que σ et b vérifient l'hypothèse (H₁) du th. III.1.

Soit f vérifiant l'hypothèse (H₂). Pour obtenir une convergence d'ordre h^2 , nous devons avoir :

$$|E f(\bar{X}_{p+1}) - E f(\bar{X}_p)| \leq c h^3.$$

Cela nous donne une méthode pour simplifier l'expression \bar{X}_{p+1} : un terme v peut être supprimé de l'expression \bar{X}_{p+1} si $|E [f(\bar{X}_{p+1})] - E [f(\bar{X}_{p+1} - v)]| \leq c h^3$.

$$. v_1 = \frac{1}{2} b'' b^2(\bar{X}_p) \frac{h^3}{3},$$

$$\begin{aligned}
E [f(\bar{X}_{p+1})] - E [f(\bar{X}_{p+1} - v_1)] &= E \underbrace{[f'(\bar{X}_{p+1}) b'' b^2(\bar{X}_p)]}_{\text{borné}} \frac{h^3}{6} + 0(h^3) \\
&= 0(h^3).
\end{aligned}$$

$$. v_2 = \frac{1}{2} \sigma'' b^2(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (s - ph)^2 dB_s + b'' b \sigma(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph})(s - ph) ds$$

$$E [f(\bar{X}_{p+1}) - f(\bar{X}_{p+1} - v_2)] = E [f'(\bar{X}_{p+1}) v_2] + 0(h^3),$$

et par la formule de Taylor appliquée à f' :

$$\begin{aligned}
E [f'(\bar{X}_{p+1}) v_2] &= E \underbrace{[f'(\bar{X}_p) v_2]}_{=0} + E [f''(\bar{X}_p) (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p) v_2] + 0(h^3) \\
&= E [f''(\bar{X}_p) \sigma(\bar{X}_p) s B_{p+1} v_2] + 0(h^3).
\end{aligned}$$

Les autres termes sont négligeables, car les termes restants de $\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p$ sont d'ordre $h^\alpha (\alpha \geq 1)$, et v_2 est d'ordre $h^{5/2}$.

$$E [f'(\bar{X}_{p+1}) v_2] = E \left[\sigma f'' \frac{1}{2} \sigma'' b^2(\bar{X}_p) \right] E \left[\Delta B_{p+1} \int_{ph}^{(p+1)h} (s-ph)^2 dB_s \right] \\ + E[\sigma^2 f'' b'' b(\bar{X}_p)] E \left[\Delta B_{p+1} \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph})(s-ph) ds \right].$$

Remarque. Soient $\tilde{X} = H.X$, et $\tilde{Y} = K.Y$ deux semi-martingales, alors par la formule de Ito :

$$\tilde{X} \tilde{Y} = \int \tilde{Y} H dX + \int \tilde{X} K dY - \int HK d \langle X, Y \rangle ;$$

Dans le cas particulier suivant :

$$X = Y = B \text{ mouvement brownien,}$$

$$\text{et } E \left[\int_0^T |\tilde{Y}_s H_s| ds \right] < \infty, \quad E \left[\int_0^T |\tilde{X}_s K_s| ds \right] < \infty,$$

on obtient :

$$E [H.B) \times (K.B)] = E \left[\int H_s K_s ds \right].$$

On applique cette remarque, en écrivant $\Delta B_{p+1} = \int_{ph}^{(p+1)h} 1 dB_s$:

$$E \left[\Delta B_{p+1} \int_{ph}^{(p+1)h} (s-ph)^2 dB_s \right] = E \left[\int_{ph}^{(p+1)h} (s-ph)^2 ds \right] = \frac{h^3}{3}$$

$$E \left[\Delta B_{p+1} \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph})(s-ph) ds \right] = E \left[\int_{ph}^{(p+1)h} \left(\int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph})(s-ph) ds \right) dB_u \right]$$

$$+ E \left[\int_{ph}^{(p+1)h} (B_{(p+1)h} - B_{ph})(s-ph)(B_s - B_{ph}) ds \right]$$

$$= 0 + \int_{ph}^{(p+1)h} (s-ph) \{ E [(B_{(p+1)h} - B_s)(B_s - B_{ph}) + (B_s - B_{ph})^2] \} ds$$

$$= \int_{ph}^{(p+1)h} (s-ph) E [(B_s - B_{ph})^2] ds = \int_{ph}^{(p+1)h} (s-ph)^2 ds = \frac{h^3}{3}$$

on a montré que $E f(\bar{X}_{p+1}) - E f(\bar{X}_{p+1} - v_2) = 0(h^3)$.

$$v_3 = \frac{b'' \sigma^2}{2} (\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph})^2 ds - \frac{1}{4} b'' \sigma^2 (\bar{X}_p) h^2 \\ + \sigma'' \sigma b(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) (s - ph) dB_s$$

(Ajouter $\frac{1}{4} b'' \sigma^2 (\bar{X}_p) h^2$ dans l'expression de \bar{X}_{p+1}).

$$E [v_3 | \bar{\mathcal{F}}_p] = 0.$$

$$E [f(\bar{X}_{p+1}) - f(\bar{X}_{p+1} - v_3)] = E [f'(\bar{X}_{p+1}) v_3] + 0(h^3) \\ = E [f'(\bar{X}_p) v_3] + E [f''(\bar{X}_p) (\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p) v_3] + 0(h^3) \\ = E [f''(\bar{X}_p) \sigma(\bar{X}_p) \Delta B_{p+1} v_3] + 0(h^3),$$

ce qui donne 2 termes :

$$E [f''(\bar{X}_p) \sigma b'' \sigma^2 (\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph})^2 ds \times (B_{(p+1)h} - B_{ph})] \\ = E [f'' \sigma b'' \sigma^2 (\bar{X}_p)] E [(B_{(p+1)h} - B_{ph}) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - ph)^2 ds]$$

$$\text{et } E[(B_{(p+1)h} - B_{ph}) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph})^2 ds] \\ = E \left[\int_{ph}^{(p+1)h} \left(\int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph})^2 ds \right) dB_u \right] + E \left[\int_{ph}^{(p+1)h} (B_{(p+1)h} - B_{ph}) (B_s - B_{ph})^2 ds \right] \\ = 0 + \int_{ph}^{(p+1)h} E [(B_{(p+1)h} - B_s) (B_s - B_{ph})^2 + (B_s - B_{ph})^3] ds \\ = 0, \text{ car } E [(B_s - B_{ph})^3] = 0 = E(B_{(p+1)h} - B_s).$$

$$E [f''(\bar{X}_p) \sigma^2 \sigma'' b(\bar{X}_p) \left(\int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) (s - ph) dB_s \right) \underbrace{(B_{(p+1)h} - B_{ph})}_{= \int_{ph}^{(p+1)h} 1 dB_s}] \\ = E [f''(\bar{X}_p) \sigma^2 \sigma'' b(\bar{X}_p) E \left(\int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) (s - ph) ds \right)] = 0.$$

Après avoir éliminé v_1, v_2 et v_3 , \bar{X}_{p+1} s'écrit :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + \sigma(\bar{X}_p) \Delta B_{p+1} + (b - \frac{1}{2} \sigma \sigma')(\bar{X}_p) h \\ \quad + \frac{1}{2} \sigma \sigma'(\bar{X}_p) (\Delta B_{p+1})^2 + \sigma' b(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (s-ph) dB_s \\ + b' \sigma(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) ds + b b'(\bar{X}_p) \frac{h^2}{2} \\ + \frac{1}{2} \sigma'' \sigma^2(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph})^2 dB_s + \frac{1}{4} b'' \sigma^2(\bar{X}_p) h^2. \end{array} \right.$$

Sous cette forme, ce schéma n'est pas implémentable sur ordinateur.

En outre, par la formule de Ito :

$$\int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph})^2 dB_s = \frac{1}{3} (\Delta B_{p+1})^3 - \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) ds$$

$$\int_{ph}^{(p+1)h} (s - ph) dB_s = h (\Delta B_{p+1}) - \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) ds .$$

Et $\int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) ds$ suit une loi normale, de moyenne 0. Quelle est sa variance ?

$$V = E \left[\left(\int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) ds \right)^2 \right] = E \left[\left(\int_0^h B_s ds \right)^2 \right],$$

$$\text{car } \mathcal{L}(B_s - B_{ph}) = \mathcal{L}(B_{s-ph}), \quad \forall s \geq ph .$$

La formule de Ito donne : $X^2 = 2 \int X dX + \langle X, X \rangle$.

$$\text{Pour } X_t = \int_0^t B_s ds, \quad \langle X, X \rangle = 0 ,$$

$$\text{donc } V = 2 E \left[\int_0^h B_s \left(\int_0^s B_u du \right) ds \right].$$

On applique de nouveau la formule de Ito à $X_t = B_t$, $Y_t = \int_0^t B_u du$

$$XY = \int X dY + \int Y dX ,$$

$$\text{donc } E \left[B_s \int_0^s B_u du \right] = E \left[\int_0^s \left(\int_0^u B_u du \right) dB_u \right] + E \left[\int_0^s B_u^2 du \right] = \frac{s^2}{2}$$

$$\text{d'où } V = 2 E \left[\int_0^h \frac{s^2}{2} ds \right] = \frac{h^3}{3} .$$

$$\text{Soit } Y = \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) ds .$$

Y est indépendante de $(B_{kh} - B_{(k-1)h})$, $k \leq p$, de loi $\mathcal{N}(0, \frac{h^3}{3})$.

Mais Y et $\Delta B_{p+1} = B_{(p+1)h} - B_{ph}$ ne sont pas indépendantes :

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y, \Delta B_{p+1}) &= \text{cov} \left(\int_0^h B_s ds, B_h \right) \\ &= E \left[B_h \int_0^h B_s ds \right] = \frac{h^2}{2} . \end{aligned}$$

Y et ΔB_{p+1} sont deux variables aléatoires normales, centrées de covariance $\frac{h^2}{2}$.

On écrit $Y = \alpha \Delta B_{p+1} + \beta v$, avec v de loi $\mathcal{N}(0,1)$, indépendante de ΔB_{p+1} .

α et β sont déterminés de manière unique :

$$E[Y \cdot \Delta B_{p+1}] = E[\alpha \Delta B_{p+1}^2 + \beta v \Delta B_{p+1}] = \alpha h ,$$

$$\text{et } E[Y \cdot \Delta B_{p+1}] = \frac{h^2}{2} , \text{ donc } \alpha = \frac{h}{2}$$

$$E[Y^2] = \frac{h^3}{3} = E[\alpha^2 \Delta B_{p+1}^2 + \beta^2 v^2] = \alpha^2 h + \beta^2 ,$$

$$\text{donc } \beta = \frac{h^{3/2}}{2\sqrt{3}} .$$

$$\text{On a donc } Y = \frac{h}{2} \Delta B_{p+1} + \frac{h^{3/2}}{2\sqrt{3}} v, \text{ avec } \mathcal{L}(v) = \mathcal{N}(0,1)$$

pour $1 \leq k \leq p+1$, $v \perp \Delta B_k$.

Finalement, on obtient le schéma de discrétisation suivant :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_0 = X_0 \\ \bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + \sigma(\bar{X}_p) \Delta B_{p+1} + (b - \frac{1}{2} \sigma \sigma')(\bar{X}_p) h \\ \quad + \frac{1}{2} \sigma \sigma'(\bar{X}_p) (\Delta B_{p+1})^2 + \frac{1}{6} \sigma^2 \sigma''(\bar{X}_p) (\Delta B_{p+1})^3 \\ \quad + (b' \sigma + \sigma' b - \frac{\sigma^2 \sigma''}{2})(\bar{X}_p) \frac{h}{2} \Delta B_{p+1} \\ \quad + (b' \sigma - \sigma' b - \frac{\sigma^2 \sigma''}{2})(\bar{X}_p) V_{p+1} \frac{h^{3/2}}{2\sqrt{3}} \\ \quad + (bb' + \frac{1}{2} b'' \sigma^2)(\bar{X}_p) \frac{h^2}{2}. \end{array} \right.$$

Théorème IV.1. On suppose :

(H₁) b et σ sont des fonctions de classe C^7 , et leurs dérivées jusqu'à l'ordre 7 inclus sont continues bornées.

(H₂) f est de classe C^6 , et vérifie : pour $0 \leq i \leq 6$.

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}^+, |f^{(i)}(x)| \leq c(|x|^n + 1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

(H₃) $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, |\sigma^2(x)| \leq M(1 + |x|)$.

Alors le schéma défini par (15) conduit à l'estimation :

$$\exists c > 0, \forall h = \frac{T}{N}, N \in \mathbb{N}^*, |E f(X_T) - E f(\bar{X}_T)| \leq c h^2.$$

Démonstration du théorème IV.1. Les fonctions b et σ étant globalement lipschitziennes, il existe une constante $C > 0$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|b(x)| \leq c(|x| + 1)$$

$$|\sigma(x)| \leq c(|x| + 1).$$

Cette remarque est l'hypothèse (H₃) permettent d'affirmer que la condition (C₁) est vérifiée (voir proposition III.3).

Par ailleurs, en utilisant (15), on montre sans difficulté que ce schéma satisfait (C₂).

Donc, sous les hypothèses (H₁) et (H₂), le théorème III.1 s'applique.

IV.2 - Deuxième version du schéma de Milshtein.

Dans son article, Talay propose une autre version du schéma de Milshtein :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_0 = X_0 \\ \bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + \sigma(\bar{X}_p) \Delta B_{p+1} + (b - \frac{1}{2} \sigma \sigma')(\bar{X}_p) h \\ \quad + \frac{1}{2} \sigma \sigma'(\bar{X}_p) (\Delta B_{p+1})^2 \\ \quad + \frac{1}{2} (b \sigma' + b' \sigma + \frac{1}{2} \sigma^2 \sigma'')(\bar{X}_p) \cdot (\Delta B_{p+1}) h \\ \quad + \frac{1}{2} (bb' + \frac{1}{2} b'' \sigma^2)(\bar{X}_p) h^2 . \end{array} \right.$$

Essayons de comprendre comment on obtient ce schéma. La méthode utilisée est la même qu'au paragraphe IV.1, où on a obtenu :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + \sigma(\bar{X}_p) \Delta B_{p+1} + (b - \frac{1}{2} \sigma \sigma')(\bar{X}_p) h \\ \quad + \frac{1}{2} \sigma \sigma'(\bar{X}_p) (\Delta B_{p+1})^2 + \sigma' b(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (s - ph) dB_s \\ \quad + b' \sigma(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) ds + bb'(\bar{X}_p) \frac{h^2}{2} \\ \quad + \frac{1}{2} \sigma'' \sigma^2(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph})^2 dB_s + \frac{1}{4} b'' \sigma^2(\bar{X}_p) h^2 . \end{array} \right.$$

Les termes contenant des intégrales sont difficilement simulables. Talay en donne une approximation, en remplaçant $(s - ph)$ par sa valeur moyenne sur $[ph, (p+1)h]$: $\frac{1}{h} \int_{ph}^{(p+1)h} (s - ph) ds = \frac{h}{2}$.

De même, il remplace $(B_s - B_{ph})^2$ par son espérance : $(s - ph)$.

$\sigma' b(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (s - ph) dB_s$ devient alors $\sigma' b(\bar{X}_p) \frac{h}{2} (\Delta B_{p+1})$.

Par la formule de Ito, $\int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) ds = h \Delta B_{p+1} - \int_{ph}^{(p+1)h} (s - ph) dB_s$,

donc $b' \sigma(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph}) ds$ est remplacé par

$$h \Delta B_{p+1} - \frac{h}{2} \Delta B_{p+1} = \frac{h}{2} \Delta B_{p+1} .$$

$\frac{1}{2} \sigma'' \sigma^2(\bar{X}_p) \int_{ph}^{(p+1)h} (B_s - B_{ph})^2 dB_s$ est remplacé par

$$\frac{1}{2} \sigma'' \sigma^2(\bar{X}_p) \frac{h}{2} (\Delta B_{p+1}) .$$

On obtient ainsi le schéma (16).

De même que pour la première version du schéma de Milshtein, on a :

Théorème IV.2. (Talay) *On suppose que les hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3) sont vérifiées. Alors le schéma défini par (16) conduit à l'estimation :*

$$\exists c > 0, \forall h = \frac{T}{N} \ (N \in \mathbb{N}^*) , |E f(X_T) - E f(\bar{X}_T)| \leq c h^2 .$$

Remarque. L'hypothèse (H_3) est peu naturelle et restrictive. Malheureusement, elle semble indispensable pour que l'ordre de convergence des schémas de Milshtein soit en $O(h^2)$. (voir proposition III.3 et la remarque III.3.1).

En outre, le calcul des valeurs prises par les dérivées secondes de b et σ peut se révéler coûteux en temps-calcul.

Ceci justifie l'introduction d'un nouveau schéma, du type Runge-Kutta d'ordre 1, que nous désignerons par "schéma Monte-Carlo Runge-Kutta" ou "schéma MCRK" et palliant les défauts du schéma de Milshtein.

V - LE SCHEMA MCRK.

Le schéma MCRK, proposé par Talay, est construit en empruntant aux Equations Différentielles ordinaires la méthode de Runge-Kutta. Exposons ce travail effectué par Talay.

Considérons l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(t) = f(y(t)) , \quad 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Le schéma d'Euler (\tilde{y}_p) , construit à l'aide d'une discrétisation de $[0, T]$, de pas h , s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_0 &= y_0 \\ \tilde{y}_{p+1} &= \tilde{y}_p + h f(\tilde{y}_p) , \quad p = 0, 1, \dots, \frac{T}{h} - 1 . \end{aligned}$$

On suppose f de classe C^3 . On peut trouver une constante c (dépendant éventuellement de T) telle que $\forall p = 0, 1, \dots, N = \frac{T}{h}$,

$$|f(\tilde{y}_p)| \leq c , \quad |f'(\tilde{y}_p)| \leq c , \quad |f''(\tilde{y}_p)| \leq c$$

$$|f(y_{ph})| \leq c , \quad |f'(y_{ph})| \leq c , \quad |f''(y_{ph})| \leq c .$$

- Montrons que $|y(h) - \tilde{y}_1| \leq \text{cte } h^2$.

On a $y(t) = y(0) + \int_0^t f(y(s)) ds$, et la formule de Taylor donne :

$$y(t) = y(0) + t f(y(0)) + \int_0^t (y(s) - y(0)) f'(y(0)) ds \\ + \int_0^t (y(s) - y(0))^2 f''(\xi) ds, \quad y(0) \leq \xi \leq y(s).$$

De même, $y(s) - y(0) = \int_0^s f(y(u)) du$

$$= s f(y(0)) + \int_0^s (y(u) - y(0)) f'(y(0)) du + \dots$$

Donc $\forall 0 \leq t \leq h$,

$$y(t) = y(0) + t f(y_0) + \frac{t^2}{2} f'(y_0) f(y_0) + O(h^3)$$

$$\tilde{y}_0 = y_0, \text{ donc } \tilde{y}_1 = y_0 + h f(y_0).$$

On en déduit :

$$y(h) - \tilde{y}_1 = \frac{h^2}{2} f'(y_0) f(y_0) + O(h^3)$$

i.e. $|y(h) - \tilde{y}_1| \leq \text{cte} \cdot h^2$.

- Montrons que la convergence de \tilde{y}_N vers y_T est d'ordre h .

Soit $p \geq 1$, $y((p+1)h) - \tilde{y}_{p+1} = y_0 + \int_0^{(p+1)h} f(y(s)) ds - (\tilde{y}_p + h f(\tilde{y}_p))$

$$y((p+1)h) - \tilde{y}_{p+1} = y(ph) - \tilde{y}_p + \int_{ph}^{(p+1)h} (f(y(s)) - f(\tilde{y}_p)) ds.$$

Et $\forall ph \leq s \leq (p+1)h$, $f(y(s)) - f(\tilde{y}_p) = (y(s) - \tilde{y}_p) f'(\tilde{y}_p) + \frac{(y(s) - \tilde{y}_p)^2}{2} f''(\tilde{y}_p) + \dots$

avec $y(s) - \tilde{y}_p = y_{ph} - \tilde{y}_p + \int_{ph}^s f(y(u)) du$

$$= y_{ph} - \tilde{y}_p + (s - ph) f(y_{ph}) + O(h^2).$$

D'où :

$$f(y(s)) - f(\tilde{y}_p) = (y_{ph} - \tilde{y}_p) f'(\tilde{y}_p) + (s - ph) f(y_{ph}) f'(\tilde{y}_p) \\ + (y_{ph} - \tilde{y}_p)^2 \frac{1}{2} f''(\tilde{y}_p) + O(h^2)$$

$$\text{et } \int_{ph}^{(p+1)h} f(y(s)) - f(\tilde{y}_p) ds = h (y_{ph} - \tilde{y}_p) f'(\tilde{y}_p) + \frac{h}{2} (y_{ph} - \tilde{y}_p)^2 f''(\tilde{y}_p) + 0(h^2).$$

Donc en posant $\varepsilon_p = y_{ph} - \tilde{y}_p$, on a :

$$\varepsilon_{p+1} = \varepsilon_p + h \varepsilon_p f'(\tilde{y}_p) + \frac{h}{2} \varepsilon_p^2 f''(\tilde{y}_p) + 0(h^2),$$

où $0(h^2)$ est indépendant de p .

ε_1 étant en $0(h^2)$, il est aisé de voir que ε_N est d'ordre $N \times 0(h^2) = 0(h)$.

On a montré que la convergence de \tilde{y}_N vers y_T est d'ordre h .

Nous pouvons améliorer cet ordre de convergence, par la méthode du "point milieu".

En effet, montrons que $|y(h) - (2\tilde{y}_2^{h/2} - \tilde{y}_1^h)| \leq \text{Cte } h^3$, $y^{h/2}$ signifiant que le pas de discrétisation est $\frac{h}{2}$:

$$\begin{aligned} 2\tilde{y}_2^{h/2} - \tilde{y}_1^h &= 2\tilde{y}_1^{h/2} + h f(\tilde{y}_1^{h/2}) - y_0 - h f(y_0) \\ &= y_0 + h f(y_0 + \frac{h}{2} f(y_0)) \\ &= y_0 + h f(y_0) + \frac{h^2}{2} f(y_0) f'(y_0) + 0(h^3) \end{aligned}$$

et on a montré que :

$$y(h) = y_0 + h f(y_0) + \frac{h^2}{2} f'(y_0) f(y_0) + 0(h^3).$$

On a donc bien :

$$|y(h) - (2\tilde{y}_2^{h/2} - \tilde{y}_1^h)| \leq \text{cte } h^3.$$

Posons

$$\begin{cases} \bar{y}_0 = y_0 \\ \bar{y}_1 = \bar{y}_0 + h f(\bar{y}_0) + \frac{h}{2} f'(\bar{y}_0), \end{cases}$$

et interprétons cela comme les premiers termes de la suite récurrente (\bar{y}_p) définie par :

$$\bar{y}_{p+1} = \bar{y}_p + h f(\bar{y}_p) + \frac{h}{2} f'(\bar{y}_p).$$

Ceci définit un nouveau schéma de type Runge-Kutta d'ordre 1 (ou schéma du point-milieu). Montrons que pour ce schéma, la convergence est d'ordre h^2 :

$$y_{(p+1)h} - \bar{y}_{p+1} = y_{ph} - \bar{y}_p + \int_{ph}^{(p+1)h} [f(y_s) - f(\bar{y}_p + \frac{h}{2} f(\bar{y}_p))] ds$$

avec $f(y_s) - f(\bar{y}_p + \frac{h}{2} f(\bar{y}_p))$

$$= (y_s - \bar{y}_p - \frac{h}{2} f(\bar{y}_p)) f'(\bar{y}_p + \frac{h}{2} f(\bar{y}_p)) + (y_s - \bar{y}_p - f(\bar{y}_p) \frac{h}{2})^2 \frac{f''(\cdot)}{2} + \dots$$

et $y_s - \bar{y}_p - \frac{h}{2} f(\bar{y}_p) = y_{ph} - \bar{y}_p + \int_{ph}^s f(y(u)) du - \frac{h}{2} f(\bar{y}_p)$

$$= y_{ph} - \bar{y}_p + (s - ph) f(y_{ph}) - \frac{h}{2} f(\bar{y}_p) + O(h^2).$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} y_{(p+1)h} - \bar{y}_{p+1} &= y_{ph} - \bar{y}_p + h(y_{ph} - \bar{y}_p) f'(\bar{y}_p + \frac{h}{2} f(\bar{y}_p)) \\ &\quad + (y_{ph} - \bar{y}_p)^2 f''(\bar{y}_p + \frac{h}{2} f(\bar{y}_p)) h \\ &\quad + f'(\bar{y}_p + \frac{h}{2} f(\bar{y}_p)) \frac{h^2}{2} \underbrace{(f(y_{ph}) - f(\bar{y}_p))}_{(y_{ph} - \bar{y}_p) f'(\bar{y}_p) + \dots} + O(h^3). \end{aligned}$$

En posant $\varepsilon_p = y_{ph} - \bar{y}_p$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \forall p \geq 1, \varepsilon_{p+1} &= \varepsilon_p + h \varepsilon_p f'(\bar{y}_p + \frac{h}{2} f(\bar{y}_p)) \\ &\quad + \varepsilon_p^2 f''(\bar{y}_p + \frac{h}{2} f(\bar{y}_p)) h + \varepsilon_p \frac{h^2}{2} f'(\bar{y}_p + \frac{h}{2} f(\bar{y}_p)) f'(\bar{y}_p) \\ &\quad + c h^3. \end{aligned}$$

ε_1 étant d'ordre h^3 , on montre facilement :

$$\varepsilon_N \text{ est d'ordre } N \cdot O(h^3) = O(h^2).$$

Ceci prouve que la convergence de \bar{y}_T vers y_T est d'ordre h^2 .

Nous avons construit un schéma dérivant du schéma d'Euler (qui est d'ordre h), car : $\bar{y}_1^h = 2 \bar{y}_2^{h/2} - \bar{y}_1^h$, et ce nouveau schéma est d'ordre h^2 .

Appliquons cette méthode aux équations différentielles stochastiques : nous allons construire un schéma de discrétisation dérivant du deuxième schéma d'ordre h , donné par :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}_{p+1}^h = \tilde{X}_p^h + \sigma(\tilde{X}_p^h) \Delta B_{p+1} + (b - \frac{1}{2} \sigma \sigma')(\tilde{X}_p^h) h \\ \quad + \frac{1}{2} \sigma \sigma'(\tilde{X}_p^h) (\Delta B_{p+1})^2, \text{ avec } \Delta B_{p+1} = B_{(p+1)h} - B_{ph} \\ \tilde{X}_0^h = X_0^h. \end{array} \right.$$

Nous définissons les premiers termes du schéma MCRK par :

$$\bar{X}_0^h = \tilde{X}_0^h = X_0$$

$$\bar{X}_1^h = 2 \tilde{X}_2^{h/2} - \tilde{X}_1^h.$$

$$\text{Posons } \bar{X}_0^+ = \tilde{X}_1^{h/2} = X_0 + \sigma(X_0) (B_{h/2} - B_0) + (b - \frac{1}{2} \sigma \sigma')(X_0) \frac{h}{2} \\ + \frac{1}{2} \sigma \sigma'(X_0) (B_{h/2} - B_0)^2.$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \bar{X}_1^h = X_0 + \{ & 2 \sigma(X_0) (B_{h/2} - B_0) + 2 \sigma(\bar{X}_0^+) (B_h - B_{h/2}) \\ & - \sigma(X_0) (B_h - B_0) \} \\ & + (b - \frac{1}{2} \sigma \sigma')(\bar{X}_0^+) h \\ & + \{ \sigma \sigma'(X_0) (B_{h/2} - B_0)^2 + \sigma \sigma'(\bar{X}_0^+) (B_h - B_{h/2})^2 \\ & - \frac{1}{2} \sigma \sigma'(X_0) (B_h - B_0)^2 \}. \end{aligned}$$

On interprète alors \bar{X}_0^h et \bar{X}_1^h comme les deux premiers termes de la suite

récurrente :

$$\begin{aligned}
(17) \quad & \bar{X}_0 = X_0 \\
& \bar{X}_p^+ = \bar{X}_p + \sigma(\bar{X}_p) (B_{(p+1/2)h} - B_{ph}) + (b - \frac{1}{2} \sigma \sigma') (\bar{X}_p) \frac{h}{2} \\
& \quad + \frac{1}{2} \sigma \sigma' (\bar{X}_p) (B_{(p+1/2)h} - B_{ph})^2 \\
& \bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + \{2 \sigma(\bar{X}_p) (B_{(p+1/2)h} - B_{ph}) + 2 \sigma(\bar{X}_p^+) (B_{(p+1)h} - B_{(p+1/2)h}) \\
& \quad - \sigma(\bar{X}_p) (B_{(p+1)h} - B_{ph})\} \\
& \quad + (b - \frac{1}{2} \sigma \sigma') (\bar{X}_p^+) h \\
& \quad + \{\sigma \sigma' (\bar{X}_p) (B_{(p+1/2)h} - B_{ph})^2 \\
& \quad \quad + \sigma \sigma' (\bar{X}_p^+) (B_{(p+1)h} - B_{(p+1/2)h})^2 \\
& \quad \quad - \frac{1}{2} \sigma \sigma' (\bar{X}_p) (B_{(p+1)h} - B_{ph})^2\} .
\end{aligned}$$

Théorème V.1. (Talay) *Sous les seules hypothèses (H_1) et (H_2) , le schéma MCRK, défini par les égalités (17), conduit à l'estimation :*

$$\exists c > 0, \forall h = \frac{T}{N} \ (N \in \mathbb{N}^*), |E f(X_T) - E f(\bar{X}_T)| \leq c h^2 .$$

Démonstration du théorème V.1. En utilisant le développement de Taylor suivant :

$$\begin{aligned}
f(\bar{X}_p^+) &= f(\bar{X}_p) + \{\sigma(\bar{X}_p) (B_{(p+1/2)h} - B_{ph}) + (b - \frac{1}{2} \sigma \sigma') (\bar{X}_p) \frac{h}{2} \\
& \quad + \frac{1}{2} \sigma \sigma' (\bar{X}_p) (B_{(p+1/2)h} - B_{ph})^2\} f'(\bar{X}_p) \\
& \quad + \{\sigma^2(\bar{X}_p) (B_{(p+1/2)h} - B_{ph})^2 + \sigma^2 \sigma'(\bar{X}_p) (B_{(p+1/2)h} - B_{ph})^3 \\
& \quad + \sigma(\bar{X}_p) (b - \frac{1}{2} \sigma \sigma') (\bar{X}_p) h (B_{(p+1/2)h} - B_{ph})\} f''(\bar{X}_p) \\
& \quad + 0(h^2),
\end{aligned}$$

on peut obtenir une expression de \bar{X}_{p+1} en fonction de \bar{X}_p et on montre alors que le schéma MCRK vérifie la condition (C_2) .

Par la proposition III.3, il vérifie également la condition (C₁).

Donc sous les hypothèses (H₁) et (H₂), le théorème III.1 s'applique.

Grâce à la méthode Runge-Kutta appliquée à (10), nous avons construit un schéma plus simple que le schéma de Milshtein, par le fait que les dérivées seconde de b et σ n'apparaissent plus. Cela est appréciable du point de vue numérique, car le calcul de la valeur prise par ces fonctions, à chaque pas d'itération, peut s'avérer coûteux en temps de simulation.

Pour la même raison, au prochain paragraphe, nous nous intéressons à un cas particulier d'E.D.S. : celles pouvant s'écrire sous la forme d'E.D.S. de type Stratanovitch, mais sans drift. Ainsi, la fonction b n'apparaît plus dans le schéma d'approximation.

Par ailleurs, la méthode de Runge-Kutta dérivant du schéma d'Euler permet d'éliminer également la fonction σ' . Dans ce cas particulier, nous obtenons donc un schéma très simple, où seule σ apparaît.

VI - LE SCHEMA RUNGE-KUTTA-STRATANOVITCH.

Commençons par rappeler certains résultats concernant l'intégrale stochastique au sens de Stratanovitch. (voir par exemple le livre de Ikeda, Watanabé).

VI.1. Relation entre intégrale de Ito et intégrale de Stratanovitch.

Définition VI.1. Soient X et Y deux semi-martingales continues. On définit l'intégrale de Stratanovitch de Y par rapport à X par :

$$\int_0^t Y \circ dX = \int_0^t Y dX + \frac{1}{2} \langle Y, X \rangle_t .$$

Remarques. . L'intégrale de Stratanovitch n'est définie que pour Y semi-martingale.

. Si X est à variation finie,

$$\int Y \circ dX = \int Y dX \quad , \quad \text{car } Y \text{ est continue.}$$

Proposition VI.2. Considérons l'E.D.S. au sens de Stratanovitch :

$$(18) \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(Y_s) \circ dB_s \quad , \quad t \in [0, T] ,$$

où σ est une fonction de classe C^2 , à dérivées première et seconde bornées.

Alors Y est solution de l'E.D.S. de Ito suivante :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma'(Y_s) \sigma(Y_s) ds \quad , \quad t \in [0, T] .$$

Démonstration de la proposition VI.2.

$$\int_0^t \sigma(Y_s) \circ dB_s = \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s + \frac{1}{2} \langle \sigma(Y), B \rangle_t$$

et par la formule de Ito : $\sigma(Y_s) = \int_0^s \sigma'(Y_s) dY_s + \frac{1}{2} \int_0^s \sigma''(Y_s) d\langle Y, Y \rangle_s$

d'où : $\int_0^t \sigma(Y_s) \circ dB_s = \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma'(Y_s) d\langle Y, B \rangle_s .$

Par hypothèse, $\langle Y, B \rangle_t = \int_0^t \sigma(Y_s) \circ dB_s, B \rangle_t$

$$= \left\langle \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s, B \right\rangle_t$$

$$= \int_0^t \sigma(Y_s) ds .$$

On obtient donc :

$$\int_0^t \sigma(Y_s) \circ dB_s = \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma \sigma'(Y_s) ds .$$

$\sigma \sigma'$ n'est pas globalement lipschitzienne, si σ est non borné, car $\sigma \sigma'(x) - \sigma \sigma'(y) = \sigma(x) (\sigma'(x) - \sigma'(y)) + \sigma'(y) (\sigma(x) - \sigma(y)) \Rightarrow$ pour chaque x , $\exists K(x)$ tel que pour tout y ,

$$|\sigma \sigma'(x) - \sigma \sigma'(y)| \leq K(x) |x - y| .$$

$\sigma \sigma'$ est localement lipschitzienne.

Mais on sait que σ est lipschitzienne, donc $|\sigma(x)| \leq K(1 + |x|)$.

Le caractère "localement lipschitzien" + croissance linéaire de σ suffisent à assurer l'existence et l'unicité de la solution de :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma \sigma'(Y_s) ds .$$

On peut "revenir en arrière", ce qui assure l'existence et l'unicité de la solution de l'E.D.S. de Stratanovitch (18).

Application. Si on veut résoudre (ou discrétiser) une E.D.S. de Ito de la forme :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(Y_s) dB_s + \int_0^t b(Y_s) ds ,$$

avec $b(x) = \frac{1}{2} \sigma \sigma'(\xi)$,

alors on peut se ramener à l'E.D.S. de Stratanovitch correspondante.

Exemple. $Y_t = \int_0^t \frac{dB_s}{1+Y_s^2} - \int_0^t \frac{Y_s}{(1+Y_s^2)^3} ds$

a la même solution de l'E.D.S. : $X_t = \int_0^t \frac{1}{1+X_s^2} \circ dB_s .$

VI.2. La méthode Runge-Kutta.

Les résultats énoncés dans ce paragraphe VI.2 sont tirés de l'article de Rümelin. Le théorème VI.3, qui fournit des schémas de type Runge-Kutta convergeant en moyenne quadratique vers la solution de certaines E.D.S., y est démontré et ne présente pas de difficulté.

Considérons l'E.D.S.

$$(1) \quad X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds,$$

avec σ et b fonctions lipschitziennes.

- Le schéma d'approximation le plus simple est le schéma d'Euler (voir paragraphe II.1) qui s'écrit :

$$\bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + \sigma(\bar{X}_p) \Delta B_{p+1} + b(\bar{X}_p) h .$$

- Dans le cas déterministe, un schéma plus précis est le schéma de Heun. Il peut se traduire pour les E.D.S., en définissant :

$$\bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + \frac{1}{2} [\sigma(\bar{X}_p) + \sigma(\tilde{X}_p^{(1)})] \Delta B_{p+1} + \frac{1}{2} [b(\bar{X}_p) + b(\tilde{X}_p^{(1)})] h ,$$

où $\tilde{X}_p^{(1)}$ est le prédicteur d'Euler, défini par :

$$\tilde{X}_p^{(1)} = \bar{X}_p + \sigma(\bar{X}_p) \Delta B_{p+1} + b(\bar{X}_p) h .$$

Mais ce schéma converge en moyenne quadratique vers la solution de :

$$dY_t = \sigma(Y_t) dB_t + (b(Y_t) + \frac{1}{2} \sigma \sigma'(Y_t)) dt ,$$

qui correspond à la solution de (1), interprétée au sens de Stratanovitch (Résultat prouvé par Mc Shene (1974)).

Ces deux schémas sont en fait du type Runge-Kutta, et nous pouvons généraliser cette méthode.

Définissons le schéma de Runge-Kutta d'ordre $(m+1)$:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_0 = X_0 \\ \bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + \sum_{j=0}^m p_j K_j h + \sum_{j=0}^m q_j G_j \Delta B_{p+1} \\ \\ \text{avec } K_0 = b(\bar{X}_p) \quad , \quad G_0 = \sigma(\bar{X}_p) \\ \\ \tilde{X}_p^{(1)} = \bar{X}_p + \beta_{10} K_0 h + \gamma_{10} G_0 \Delta B_{p+1} \\ \\ K_1 = b(\tilde{X}_p^{(1)}) \quad , \quad G_1 = \sigma(\tilde{X}_p^{(1)}) \\ \\ \tilde{X}_p^{(2)} = \bar{X}_p + (\beta_{20} K_0 + \beta_{21} K_1) h + (\gamma_{20} G_0 + \gamma_{21} G_1) \Delta B_{p+1} \\ \\ K_2 = b(\tilde{X}_p^{(2)}) \quad , \quad G_2 = \sigma(\tilde{X}_p^{(2)}) \\ \\ \vdots \\ \\ \tilde{X}_p^{(m)} = \bar{X}_p + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{mk} K_k h + \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_{mk} G_k \Delta B_{p+1} \\ \\ K_m = b(\tilde{X}_p^{(m)}) \quad , \quad G_m = \sigma(\tilde{X}_p^{(m)}) \\ \\ \text{et } \sum_{j=0}^m p_j = \sum_{j=0}^m q_j = 1 . \end{array} \right.$$

Théorème VI.3. (Rümelin) *Considérons l'E.D.S.*

$$(1) \quad X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds \quad , \quad t \in [0, T],$$

où b et σ sont de classe C^2 , à dérivées première et seconde bornées.

Alors le schéma de Runge-Kutta d'ordre $(m+1)$, défini par (19), converge uniformément en moyenne quadratique vers la solution de :

$$dY_t = \sigma(Y_t) dB_t + (b(Y_t) + \lambda \sigma \sigma'(Y_t)) dt ,$$

avec $\lambda = 0$ pour $m = 0$

$$\lambda = \sum_{j=1}^m q_j \sum_{k=0}^{j-1} \gamma_{jk}, \text{ pour } m \geq 1.$$

Remarques. a) Pour la convergence en moyenne quadratique, il y a une grande liberté de choix des coefficients $q_j, p_j, \gamma_{ij}, \beta_{ij}$, et la limite est indépendante des coefficients p_j, β_{ij} . Par contre, pour obtenir une convergence d'ordre h^2 , nous devons imposer des conditions supplémentaires, restreignant fortement le choix de ces coefficients.

b) Pour comprendre la signification du scalaire λ , examinons le schéma d'ordre 2 :

$$\bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + (q_0 \sigma(\bar{X}_p) + q_1 \sigma(\tilde{X}_p^{(1)})) \Delta B_{p+1} + (p_0 b(\bar{X}_p) + p_1 b(\tilde{X}_p^{(1)})) h,$$

avec $\tilde{X}_p^{(1)} = \bar{X}_p + \beta_{10} b(\bar{X}_p) h + \gamma_{10} \sigma(\bar{X}_p) \Delta B_{p+1},$

convergeant vers la solution de :

$$dY_t = \sigma(Y_t) dB_t + (b(Y_t) + \lambda \sigma \sigma'(Y_t)) dt;$$

. pour $q_0 = p_0 = 1, \lambda = 0$, on retrouve le schéma d'Euler et cela correspond à interpréter (1) au sens de Ito,

. pour $q_0 = q_1 = p_0 = p_1 = \frac{1}{2}, \beta_{10} = \gamma_{10} = 1, \lambda = \frac{1}{2}$, on retrouve le schéma de Heun, et cela correspond à interpréter (1) au sens de Stratanovitch.

Il est intéressant de noter que chaque valeur de λ correspond à une certaine définition de l'intégrale stochastique.

VI.3. Construction d'un schéma d'ordre de convergence h^2 : le schéma Runge-Kutta-Stratanovitch.

Pour ses schémas de discrétisation, Rümelin a seulement obtenu une convergence en moyenne quadratique. Nous allons maintenant montrer, par le critère de Talay (théorème III.1) qu'il en existe un dont la vitesse de convergence soit d'ordre h^2 .

Considérons désormais l'E.D.S : $t \in [0, T]$,

$$(20) \quad X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) \circ dB_s = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma \sigma'(X_s) ds,$$

où σ est de classe C^8 , à dérivées jusqu'à l'ordre 8 continues bornées.

Par le théorème VI.3, le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4, défini par (19), avec $b \equiv 0$, et $\lambda = \frac{1}{2}$, converge uniformément en moyenne quadratique vers la solution de (20). Explicitons clairement ce schéma, en ne conservant que les termes d'ordre au plus h^2 (en espérance) :

$$\bar{X}_0 = X_0$$

$$\bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + (q_0 G_0 + q_1 G_1 + q_2 G_2 + q_3 G_3) \Delta B_{p+1},$$

avec $G_0 = \sigma(\bar{X}_p)$

$$G_1 = \sigma(\tilde{X}_p^{(1)}), \text{ avec } \tilde{X}_p^{(1)} = \bar{X}_p + \gamma_{10} G_0 \Delta B_{p+1}$$

$$G_2 = \sigma(\tilde{X}_p^{(2)}), \text{ avec } \tilde{X}_p^{(2)} = \bar{X}_p + \gamma_{20} G_0 \Delta B_{p+1} + \gamma_{21} G_1 \Delta B_{p+1}$$

$$G_3 = \sigma(\tilde{X}_p^{(3)}), \text{ avec } \tilde{X}_p^{(3)} = \bar{X}_p + (\gamma_{30} G_0 + \gamma_{31} G_1 + \gamma_{32} G_2) \Delta B_{p+1}.$$

Pour ce calcul, nous noterons : $\sigma \equiv \sigma(\bar{X}_p)$, $\Delta B \equiv \Delta B_{p+1}$.

$$\tilde{X}_p^{(1)} - \bar{X}_p = \gamma_{10} \sigma \Delta B$$

$$G_1 = \sigma(\tilde{X}_p^{(1)}) = \sigma + (\tilde{X}_p^{(1)} - \bar{X}_p) \sigma' + (\tilde{X}_p^{(1)} - \bar{X}_p)^2 \frac{\sigma''}{2} + \frac{(\tilde{X}_p^{(1)} - \bar{X}_p)^3}{6} \sigma''' + \dots$$

$$\text{donc } \left| \begin{array}{l} G_1 \Delta B = \sigma \Delta B + \gamma_{10} \sigma \sigma' \Delta B^2 + \frac{\gamma_{10}^2}{2} \sigma^2 \sigma'' \Delta B^3 + \frac{\gamma_{10}^3 \sigma^3 \sigma'''}{6} \Delta B^4 \\ \quad \quad \quad + 0(\Delta B^5). \end{array} \right.$$

$$\tilde{X}_p^{(2)} - \bar{X}_p = (\gamma_{20} + \gamma_{21}) \sigma \Delta B + \gamma_{21} \gamma_{10} \sigma \sigma' \Delta B^2 + \frac{\gamma_{21} \gamma_{10}^2}{2} \sigma^2 \sigma'' \Delta B^3$$

$$+ \frac{\gamma_{21} \gamma_{10}^3}{6} \sigma^3 \sigma''' \Delta B^4 + 0(\Delta B^5)$$

$$G_2 = \sigma(\tilde{X}_p^{(2)}) = \sigma + (\tilde{X}_p^{(2)} - \bar{X}_p) \sigma' + (\tilde{X}_p^{(2)} - \bar{X}_p)^2 \frac{\sigma''}{2} + (\tilde{X}_p^{(2)} - \bar{X}_p)^3 \frac{\sigma'''}{6} + \dots$$

donc

$$\begin{aligned}
 G_2 \Delta B &= \sigma \Delta B + (\gamma_{20} + \gamma_{21}) \sigma \sigma' \Delta B^2 + \gamma_{21} \gamma_{10} \sigma' \sigma'^2 \Delta B^3 \\
 &+ \frac{\gamma_{21} \gamma_{10}^2}{2} \sigma^2 \sigma' \sigma'' \Delta B^4 + (\gamma_{20} + \gamma_{21})^2 \frac{\sigma^2 \sigma''}{2} \Delta B^3 \\
 &+ (\gamma_{20} + \gamma_{21}) \gamma_{21} \gamma_{10} \sigma^2 \sigma' \sigma'' \Delta B^4 + (\gamma_{20} + \gamma_{21})^3 \frac{\sigma^3 \sigma'''}{6} \Delta B^4 + 0(\Delta B^5).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}_p^{(3)} - \bar{X}_p &= (\gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32}) \sigma \Delta B + (\gamma_{31} \gamma_{10} + \gamma_{32}(\gamma_{20} + \gamma_{21})) \sigma \sigma' \Delta B^2 \\
 &+ \frac{1}{2} (\gamma_{31} \gamma_{10}^2 + \gamma_{32}(\gamma_{20} + \gamma_{21})^2) \sigma^2 \sigma'' \Delta B^3 \\
 &+ \frac{1}{6} (\gamma_{31} \gamma_{10}^3 + \gamma_{32}(\gamma_{20} + \gamma_{21})^3) \sigma^3 \sigma''' \Delta B^4 \\
 &+ \gamma_{32} \gamma_{21} \gamma_{10} \sigma \sigma'^2 \Delta B^3 \\
 &+ \gamma_{32} \gamma_{21} \gamma_{10} \left(\frac{1}{2} \gamma_{10} + \gamma_{20} + \gamma_{21} \right) \sigma'' \sigma' \sigma^2 \Delta B^4 + 0(\Delta B^5)
 \end{aligned}$$

$$G_3 = \sigma(\tilde{X}_p^{(3)}) = \sigma + (\tilde{X}_p^{(3)} - \bar{X}_p) \sigma' + (\tilde{X}_p^{(3)} - \bar{X}_p)^2 \frac{\sigma''}{2} + (\tilde{X}_p^{(3)} - \bar{X}_p)^3 \frac{\sigma'''}{3} + \dots$$

donc

$$\begin{aligned}
 G_3 \Delta B &= \sigma \Delta B + (\gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32}) \sigma \sigma' \Delta B^2 \\
 &+ (\gamma_{31} \gamma_{10} + \gamma_{32}(\gamma_{20} + \gamma_{21})) \sigma \sigma'^2 \Delta B^3 \\
 &+ \frac{1}{2} (\gamma_{31} \gamma_{10}^2 + \gamma_{32}(\gamma_{20} + \gamma_{21})^2) \sigma^2 \sigma' \sigma'' \Delta B^4 \\
 &+ \frac{1}{2} (\gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32})^2 \sigma^2 \sigma'' \Delta B^3 \\
 &+ (\gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32}) (\gamma_{31} \gamma_{10} + \gamma_{32}(\gamma_{20} + \gamma_{21})) \sigma^2 \sigma' \sigma'' \Delta B^4 \\
 &+ \frac{1}{6} (\gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32})^3 \sigma^3 \sigma''' \Delta B^4 \\
 &+ \gamma_{32} \gamma_{21} \gamma_{10} \sigma \sigma'^3 \Delta B^4 + 0(\Delta B^5).
 \end{aligned}$$

On obtient le schéma suivant :

$$\begin{aligned}
(21) \quad & \bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + (q_0 + q_1 + q_2 + q_3) \Delta B \sigma \\
& + (q_1 \gamma_{10} + q_2(\gamma_{20} + \gamma_{21}) + q_3(\gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32})) \sigma \sigma' \Delta B^2 \\
& + (q_1 \gamma_{10}^2 + q_2(\gamma_{20} + \gamma_{21})^2 + q_3(\gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32})^2) \frac{\sigma^2 \sigma''}{2} \Delta B^3 \\
& + (q_2 \gamma_{21} \gamma_{10} + q_3(\gamma_{31} \gamma_{10} + \gamma_{32}(\gamma_{20} + \gamma_{21}))) \sigma \sigma'^2 \Delta B^3 \\
& + (q_1 \gamma_{10}^3 + q_2(\gamma_{20} + \gamma_{21})^3 + q_3(\gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32})^3) \frac{\sigma^3 \sigma'''}{6} \Delta B^4 \\
& + [q_2 \left(\frac{1}{2} \gamma_{21} \gamma_{10}^2 + \gamma_{21} \gamma_{10}(\gamma_{20} + \gamma_{21}) \right) \\
& + q_3 \left(\frac{1}{2} (\gamma_{31} \gamma_{10}^2 + \gamma_{32}(\gamma_{20} + \gamma_{21})^2) + (\gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32})(\gamma_{31} \gamma_{10} + \gamma_{32}(\gamma_{20} + \gamma_{21})) \right)] \\
& \quad \times \sigma^2 \sigma' \sigma'' \Delta B^4 \\
& + q_3 \gamma_{32} \gamma_{21} \gamma_{10} \sigma \sigma'^3 \Delta B^4 .
\end{aligned}$$

. La première condition est :

$$\boxed{1} \quad q_0 + q_1 + q_2 + q_3 = 1 \text{ (par hypothèse).}$$

. Afin d'obtenir un schéma d'ordre de convergence h^2 , nous souhaitons qu'il vérifie la condition (C₂) du théorème III.1.

Dans (C₂), il faut remplacer b par $\frac{1}{2} \sigma \sigma'$,

$$b' \text{ par } \frac{1}{2} \sigma'^2 + \frac{1}{2} \sigma \sigma'', \quad b'' \text{ par } \frac{3}{2} \sigma' \sigma'' + \frac{1}{2} \sigma \sigma'''.$$

En identifiant terme à terme l'expression $E(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p | \bar{\mathcal{F}}_p)$ (respectivement $E[(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^2 | \bar{\mathcal{F}}_p]$) calculée à partir de (21) et C₂ (i) (respectivement C₂ (ii)), on obtient les conditions suivantes imposées aux coefficients q_j, γ_{ij} :

$$\boxed{2} \quad q_1 \gamma_{10} + q_2(\gamma_{20} + \gamma_{21}) + q_3(\gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32}) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{3} \quad q_3 \gamma_{32} \gamma_{21} \gamma_{10} = \frac{1}{24}$$

$$\boxed{4} \quad q_2 \gamma_{21} \gamma_{10} \left(\frac{1}{2} \gamma_{10} + \gamma_{20} + \gamma_{21} \right) + q_3 (\gamma_{31} \gamma_{10} \left(\frac{1}{2} \gamma_{10} + \gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32} \right) + \gamma_{32}(\gamma_{20} + \gamma_{21}) \left(\frac{1}{2} (\gamma_{20} + \gamma_{21}) + \gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32} \right)) = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{5} \quad q_1 \gamma_{10}^3 + q_2(\gamma_{20} + \gamma_{21})^3 + q_3(\gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32})^3 = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{6} \quad q_2 \gamma_{21} \gamma_{10} + q_3(\gamma_{31} \gamma_{10} + \gamma_{32}(\gamma_{20} + \gamma_{21})) = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{7} \quad q_1 \gamma_{10}^2 + q_2(\gamma_{20} + \gamma_{21})^2 + q_3(\gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32})^2 = \frac{1}{3}.$$

En posant $a = \gamma_{10}$, $b = \gamma_{20} + \gamma_{21}$, $c = \gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32}$, on peut résoudre le système d'équations $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$ et $\boxed{7}$:

$$\begin{cases} q_0 + q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ a q_1 + b q_2 + c q_3 = \frac{1}{2} \\ a^2 q_1 + b^2 q_2 + c^2 q_3 = \frac{1}{3} \\ a^3 q_1 + b^3 q_2 + c^3 q_3 = \frac{1}{4}, \end{cases}$$

qui admet les solutions élémentaires suivantes :

$$q_0 = q_3 = \frac{1}{6}, \quad q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$$

$$a = b = \frac{1}{2}, \quad c = 1.$$

Il reste alors à résoudre : $\gamma_{20} + \gamma_{21} = \frac{1}{2}$, $\gamma_{30} + \gamma_{31} + \gamma_{32} = 1$,

$$\boxed{3} : \gamma_{32} \gamma_{21} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{6} : \gamma_{21} + \frac{1}{2}(\gamma_{31} + \gamma_{32}) = 1$$

$$\boxed{4} : 6 \gamma_{21} + 5(\gamma_{31} + \gamma_{32}) = 8,$$

et on trouve : $\gamma_{10} = \frac{1}{2}$, $\gamma_{20} = \gamma_{30} = \gamma_{31} = 0$, $\gamma_{21} = \frac{1}{2}$, $\gamma_{32} = 1$.

Finalement, on obtient le schéma de discrétisation suivant :

$$(22) \quad \begin{cases} \bar{X}_0 = X_0 \\ \bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + \left(\frac{1}{6} G_0 + \frac{1}{3} G_1 + \frac{1}{3} G_2 + \frac{1}{6} G_3 \right) \Delta B_{p+1} \\ \text{avec } G_0 = \sigma(\bar{X}_p) \\ G_1 = \sigma\left(\bar{X}_p + \frac{1}{2} G_0 \Delta B_{p+1}\right) \\ G_2 = \sigma\left(\bar{X}_p + \frac{1}{2} G_1 \Delta B_{p+1}\right) \\ G_3 = \sigma\left(\bar{X}_p + G_2 \Delta B_{p+1}\right). \end{cases}$$

Théorème VI.4. *Considérons l'E.D.S. suivante :*

$$t \in [0, T], \quad X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma \sigma'(X_s) ds .$$

On suppose les hypothèses (H₁)' et (H₂) vérifiées :

(H₁)' σ est une fonction de classe C⁸, et ses dérivées jusqu'à l'ordre 8 inclus sont continues bornées.

(H₂) f est de classe C⁶, et vérifie : pour $0 \leq i \leq 6$,

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}^+, |f^{(i)}(x)| \leq c(|x|^n + 1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors le schéma de Runge-Kutta-Stratanovitch, défini par (22), conduit à l'estimation :

$$\exists c > 0, \forall h = \frac{T}{N}, N \in \mathbb{N}^*, |E f(X_T) - E f(\bar{X}_T)| \leq c h^2 .$$

Démonstration du théorème VI.4. En utilisant des développements de Taylor pour G_1, G_2, G_3 , on montre facilement que la proposition III.3 s'applique : la condition (C₁) est donc vérifiée.

Les conditions $\begin{cases} (C_2) \text{ (i)} \\ (C_2) \text{ (ii)} \end{cases}$ sont vérifiées par construction et on montre facilement

que (C₂) (iii) à (vi) le sont également. Sous les hypothèses (H₁)' et (H₂), le théorème III.1 s'applique.

Remarque. Lors des tests numériques, nous avons comparé les performances respectives des schémas de Runge-Kutta-Stratanovitch d'ordre 3 et 4.

Pour les exemples considérés, la précision est du même ordre, et le schéma de Runge-Kutta à l'ordre 3 est un peu plus rapide.

Malheureusement, ce dernier ne peut vérifier la condition (C₂), quel que soit le choix des coefficients q_j, γ_{ij} : le terme en $\sigma \sigma'^3$ n'apparaît pas dans le schéma de Runge-Kutta à l'ordre 3. Or, il apparaît dans C₂(i) : $bb' = \frac{1}{4} (\sigma \sigma'^3 + \sigma^2 \sigma' \sigma'')$.

Nous ne connaissons pas l'ordre de convergence de ce schéma :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{X}_0 = X_0 \\ \bar{X}_{p+1} = \bar{X}_p + \left(\frac{1}{6} G_0 + \frac{2}{3} G_1 + \frac{1}{6} G_2 \right) \Delta B_{p+1} \\ \text{avec } G_0 = \sigma(\bar{X}_p) \\ G_1 = \sigma(\bar{X}_p + \frac{1}{2} G_0 \Delta B_{p+1}) \\ G_2 = \sigma(\bar{X}_p + 2 G_1 \Delta B_{p+1}) . \end{array} \right.$$

VII - TESTS NUMERIQUES.

VII.1. Les méthodes de simulation.

a. La simulation du mouvement brownien.

Nous avons à simuler les variables aléatoires $\Delta B_{p+1} = B_{(p+1)h} - B_{ph}$, pour $0 \leq p \leq N-1$. Ces variables aléatoires sont deux à deux indépendantes, de même loi normale $\mathcal{N}(0, h)$.

Il suffit donc d'obtenir des tirages indépendants de la loi normale centrée réduite (que l'on multiplie ensuite par \sqrt{h}) :

- nous utilisons les générateurs aléatoires à congruence linéaire suivants, cités dans le livre de Hammersley :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{\text{sui}} = a * n \text{ mod } m \\ x = n_{\text{sui}} / m , \\ \text{puis on recommence avec } n = n_{\text{sui}} . \end{array} \right.$$

Nous l'avons testé pour $a = 3^{17}$, $m = 2^{29}$,

puis $a = 16807$, $m = 2^{31} - 1$.

Les résultats obtenus sont du même ordre dans les deux cas. Les valeurs prises par x sont indépendamment uniformément distribués sur $[0, 1]$.

- Pour simuler des tirages indépendants de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on utilise alors la propriété suivante :

Soit $V = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ uniformément distribué sur le disque unité. Alors les variables aléatoires

$$Y_1 = \cos \theta \times \sqrt{-2 \text{Log } r^2} \quad \text{et} \quad Y_2 = \sin \theta \times \sqrt{-2 \text{Log } r^2}$$

sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

On obtient donc l'algorithme suivant, $u\emptyset 1$ désignant l'appel au générateur aléatoire :

```

10    $V_1 = 2 u\emptyset 1 - 1$ 

       $V_2 = 2 u\emptyset 1 - 1$  ;  $W = V_1^2 + V_2^2$ 

      if ( $W > 1$ ) goto 10

       $Y = \sqrt{-2 \text{Log}(W)/W}$ 

       $Y_1 = V_1 \times Y$  ;  $Y_2 = V_2 \times Y$  .

```

b. La méthode Monte-Carlo.

La méthode Monte-Carlo permet de déterminer une valeur approchée de l'espérance de fonctionnelles de \bar{X}_t ($0 \leq t \leq T$) (\bar{X}_t est la valeur approchée, donnée par le schéma de discrétisation, de la solution X_t).

Toutefois, nous allons voir que dans certains cas, il faut être prudent quant à l'interprétation des résultats obtenus.

- Soit \bar{X}_t une solution approchée d'E.D.S.

On simule N réalisations indépendantes de \bar{X}_t :

$X_t^{(i)}$, $1 \leq i \leq N$. Alors, d'après la loi forte des grands nombres,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_t^{(i)}) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} E[f(\bar{X}_t)]$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_t^{(i)}) \text{ est un estimateur fidèle de } E[f(\bar{X}_t)].$$

- En outre, posons $\bar{\sigma}_t^2 = \text{var } f(\bar{X}_t)$: le théorème de la limite centrale nous donne :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_t^{(i)}) - E f(\bar{X}_t) \right| \leq \frac{k \bar{\sigma}_t}{\sqrt{N}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k}^k e^{-\frac{y^2}{2}} dy ,$$

ce qui signifie que pour N suffisamment grand,

$$\mathbb{P} \left[\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_t^{(i)}) - E f(\bar{X}_t) \right| \leq \frac{k \bar{\sigma}_t}{\sqrt{N}} \right] \approx p_k ,$$

avec $p_2 = 0,95$, $p_3 = 0,997$, $p_{3,5} = 0,999$, ...

Ce qui nous intéresse est l'erreur "totale" :

$$\begin{aligned}
& |E f(X_t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_t^{(i)})| \\
& \leq |E f(X_t) - E f(\bar{X}_t)| + |E f(\bar{X}_t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_t^{(i)})|.
\end{aligned}$$

Les schémas d'approximation nous permettent d'obtenir

$$|E f(X_t) - E f(\bar{X}_t)| \leq c h^\alpha$$

($\alpha = 1$ ou 2 pour les schémas étudiés).

Si on veut conserver cet ordre de convergence, la méthode Monte-Carlo doit également vérifier :

$$|E f(\bar{X}_t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_t^{(i)})| \leq c' h^\alpha.$$

Or, nous avons vu que l'ordre de convergence est en $\frac{\bar{\sigma}_t}{\sqrt{N}}$, où N est le nombre de simulations.

Il faut donc effectuer $N = \bar{\sigma}_t^2 \times h^{-2\alpha}$ simulations, pour obtenir une convergence d'ordre h^α .

Remarque. Soit $\sigma_t^2 = \text{var } f(X_t)$, $\bar{\sigma}_t^2 = \text{var } f(\bar{X}_t)$.

Alors $\sigma_t^2 - \bar{\sigma}_t^2$ est "négligeable" :

$$\sigma_t^2 = E f^2(X_t) - (E f(X_t))^2$$

donc

$$\begin{aligned}
|\sigma_t^2 - \bar{\sigma}_t^2| & \leq \underbrace{|E f^2(X_t) - E f^2(\bar{X}_t)|}_{\text{en } 0(h^\alpha) \text{ (si } f^2 \text{ vérifie les mêmes hypothèses que } f)} \\
& \quad + \underbrace{|E f(X_t) - E f(\bar{X}_t)|}_{\text{en } 0(h^\alpha)} \times \underbrace{|E f(X_t) + E f(\bar{X}_t)|}_{\text{borné}}
\end{aligned}$$

$$|\sigma_t^2 - \bar{\sigma}_t^2| \leq c h^\alpha.$$

- Le $\bar{\sigma}_t$ apparaissant dans la formule est un facteur limitant pour cette méthode dans de nombreux cas.

Examinons un exemple :

pour $h = 0,1$, $\alpha = 2$ (i.e. une précision de 10^{-2}), il faut effectuer $10\,000 * \bar{\sigma}_t^2$ simulations.

. Supposons que $f(X_t) = B_t^2 : \sigma_t^2 = 2t^2$

pour $t = 1$, cela ne pose pas de problème, mais pour $t = 10$, il faut effectuer 2 000 000 simulations, ce qui nécessite au moins 10 heures de calcul sur SUN.

. Supposons maintenant que $f(X_t) = B_t^4$,

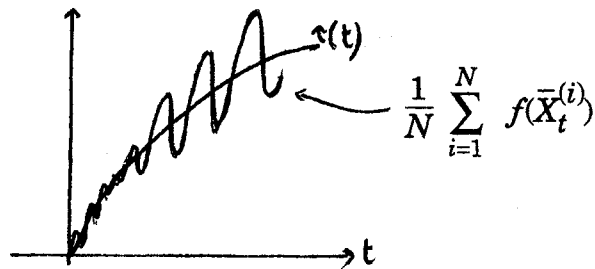
alors $\sigma_t^2 = 96 t^4$.

Pour $t = 10$, il faudrait effectuer 10^{10} simulations !

- Il existe une méthode permettant d'étudier le comportement asymptotique de $E f(X_t)$, dans le cas où σ_t croît avec t :

pour un nombre N réalisable de simulations, on calcule $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_t^{(i)})$, et on

essaie de déterminer une "tendance" de cette moyenne estimée.



S'il existe une fonction τ telle que $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{X}_t^{(i)}) \sim \tau(t)$, on calcule alors

$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(t, \bar{X}_t^{(i)})$, avec $g(t, \bar{X}_t^{(i)}) = f(\bar{X}_t^{(i)}) / \tau(t)$ pour diminuer la croissance en t de σ .

On peut recommencer plusieurs fois cette méthode :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f(\bar{X}_t^{(i)}) / \tau(t)) \sim \beta(t) \dots$$

Ainsi, on obtient une estimation correcte de la valeur de $E f(\bar{X}_t)$.

VII.2. Résultats des tests numériques.

Nous avons considéré l'équation-test suivante :

$$(23) \quad \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_t = \int_0^t \frac{dB_s}{(1+X_s^2)} - \int_0^t \frac{X_s}{(1+X_s^2)^3} ds. \end{cases}$$

Pour pouvoir tester les différents schémas de discrétisation, il nous faut trouver une fonction f telle que $E f(X_t)$ soit connue.

On vérifie qu'il existe une fonction F , telle que

$$X_t = F(B_t) \quad , \quad F'(B_t) = \frac{1}{1+F(B_t)^2}$$

$$F''(B_t) = \frac{-2F(B_t)}{(1+F(B_t)^2)^3} .$$

La formule de Ito nous donne :

$$F(B_t) = \int_0^t F'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(B_s) ds,$$

ce qui est (23).

On a alors une solution F vérifiant l'équation différentielle :

$$F'(x) = \frac{1}{1+F(x)^2} \quad (\text{donc } F''(x) = \frac{-2F(x)F'(x)}{(1+F(x)^2)^2}$$

$$= \frac{-2F(x)}{(1+F(x)^2)^3})$$

$$y' = \frac{1}{1+y^2} \quad , \quad y(0) = 0 \text{ s'écrit :}$$

$$y' + y' y^2 = 1, \text{ et en intégrant : } y + \frac{y^3}{3} = x .$$

$$F(x) \text{ vérifie } F(x) + \frac{F(x)^3}{3} = x ,$$

$$\text{c'est-à-dire que } X_t + \frac{X_t^3}{3} = B_t .$$

En prenant $f(x) = (x + \frac{x^3}{3})^2$, qui vérifie (H₂),

on obtient $E[f(X_t)] = E[B_t^2] = t$.

Le pas de la discrétisation a été fixé à 0, 1 et le nombre de discrétisations à 20.

Nous avons effectué 10 000 simulations de la variable $\bar{X}_p : \bar{X}_p^{(1)}, \dots, \bar{X}_p^{(10000)}$

pour chaque pas de la discrétisation. L'erreur à chaque pas est :

$$e_p = ph - \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} f(\bar{X}_p^{(i)}) = ph - \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} (\bar{X}_p^{(i)} + \frac{\bar{X}_p^{(i)3}}{3})^2 .$$

Finalement, nous avons calculé l'erreur absolue moyenne sur les 20 pas de discrétisation :

$$e = \frac{1}{20} \sum_{p=1}^{20} |e_p|.$$

Nous avons constaté que les résultats dépendent sensiblement de la valeur utilisée pour initialiser le générateur aléatoire. Aussi avons nous effectué 10 expériences distinctes et calculé la moyenne sur ces 10 expériences.

Voici les schémas testés :

- (a) schéma d'Euler
- (b) deuxième schéma d'ordre h (version améliorée du schéma d'Euler)
- (c) première version du schéma de Milshtein
- (d) schéma de Milshtein proposé par Talay
- (e) schéma MCRK
- (f) schéma Runge-Kutta-Stratanovitch (d'ordre 3)
- (g) schéma Runge-Kutta-Stratanovitch (d'ordre 4).

Pour les schémas (a) et (b), on doit trouver une erreur d'ordre $h = 0,1$.

Pour les schémas (c), (d), (e), (g), on doit trouver une erreur d'ordre $h^2 = 0,01$.

L'ordre de convergence du schéma (f) est inconnu.

valeur de l'initialisateur du générateur aléatoire	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
11234567	0,11	0,031	0,024	0,017	0,020	0,009	0,010
1234567	0,12	0,050	0,015	0,013	0,007	0,011	0,011
999	0,10	0,035	0,022	0,014	0,007	0,007	0,010
210967	0,12	0,045	0,013	0,006	0,014	0,005	0,004
5545	0,01	0,029	0,030	0,021	0,008	0,015	0,017
7	0,11	0,046	0,016	0,005	0,016	0,005	0,006
29	0,13	0,065	0,013	0,019	0,013	0,024	0,022
73	0,13	0,053	0,007	0,007	0,013	0,018	0,009
23487	0,12	0,042	0,017	0,008	0,005	0,004	0,004
123	0,13	0,057	0,005	0,009	0,012	0,016	0,013
Moyenne sur les 10 expériences	0,11	0,045	0,016	0,012	0,012	0,011	0,011
Temps de calcul	33"	36"	1'04"	1'01"	54"	36"	40"

Remarque. Nous avons fait le même test ($h = 0,1$ et 10 000 simulations) pour 100 pas d'itérations.

Mais comme $f(X_t) = B_t^2$, $\sigma_t^2 = 2t^2$, donc $\sigma_{10}^2 = 200$.

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, le nombre de simulations (10 000) n'est plus suffisant pour que la méthode Monte-Carlo fournisse directement une erreur d'ordre h^2 . Voici les résultats obtenus pour 100 itérations (moyenne sur 10 expériences) :

Erreur	0,309	0,057	0,039	0,040	0,041	0,041	0,040
Temps	2'42"	2'57"	5'16"	5'04"	4'26"	3'00"	3'20"

Conclusions.

(1) Les résultats confirment les ordres de convergence prédits par la théorie.

Pour le schéma (b), on trouve même un résultat un peu meilleur que celui attendu (0,05 contre 0,1). Cela est peut-être dû à l'exemple choisi.

(2) En ce qui concerne la précision, les cinq derniers schémas donnent des résultats quasiment identiques : il est impossible de les départager.

En outre, les schémas les plus simples (MCRK et surtout Runge-Kutta-Stratanovitch) permettent un gain de temps appréciable par rapport aux schémas de Milshtein.

(3) Les schémas d'ordre h sont les plus rapides (presque deux fois plus rapide que les schémas de Milshtein), mais pour obtenir une précision équivalente, il faudrait multiplier le temps de calcul par 10.

(4) Les deux schémas de Runge-Kutta-Stratanovitch donnent la même précision, et celui d'ordre 3 est un peu plus rapide. Toutefois, ne connaissant pas son ordre de convergence théorique, il est préférable de choisir celui d'ordre 4. Le schéma d'ordre 3 ne se comporte peut être pas aussi bien dans tous les cas.

VIII - CONCLUSION.

Le but de ce mémoire était de construire un schéma efficace permettant d'approcher, par la simulation, l'espérance de fonctionnelles de la solution de l'E.D.S. : $t \in [0, T]$,

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds .$$

Nous avons construit de tels schémas. Toutefois, il faut noter que les ordres de convergence trouvés sont vrais en espérance, mais ne le sont plus lorsqu'il s'agit d'étudier (X_t) trajectoire par trajectoire.

Pour conclure, il convient de distinguer deux cas :

- si $b = \frac{1}{2} \sigma \sigma'$, alors le schéma de Runge-Kutta-Stratanovitch d'ordre 4 s'impose par sa vitesse de convergence et son extrême simplicité,
- dans le cas plus général $b \neq \frac{1}{2} \sigma \sigma'$, le schéma MCRK convient le mieux. A précision égale, il est plus simple, donc plus rapide que les schémas de Milshtein.