CHRISTOPHE CHEVERRY

Justification de l'optique géométrique non linéaire pour une loi de conservation scalaire

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 1
« Fascicule d'équations aux dérivées partielles », , p. 55-84
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992___1_55_0>

CHEVERRY
Christophe

JUSTIFICATION DE L'OPTIQUE GEOMETRIQUE NON LINEAIRE POUR UNE LOI DE CONSERVATION SCALAIRE

0 . Résumé .

Cet article traite pour une loi de conservation scalaire du problème des oscillations de petite amplitude.

Plus précisément, on considère une solution u de classe C^∞, bornée et définie sur la bande de temps $[0,T]$ $\{T$ éventuellement égal à l'infini$\}$ du problème de Cauchy suivant :

$$(0.1) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f_i\big(u(t,x)\big) = 0 & \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \end{cases}$$

On modifie ensuite la condition initiale en lui ajoutant $\varepsilon\, h\big(x, \varphi(x)/\varepsilon\big)$ où $h(x,\theta)$ désigne une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ à valeurs réelles, à support compact en la première variable et périodique de période un par rapport à la seconde variable. Quant à φ, on lui impose simplement d' être régulière : $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Le comportement oscillant lorsque ε tend vers zéro de la condition initiale perturbée se traduit par la formation de chocs au bout d'un temps fini $T^*(\varepsilon)$ pour u_ε solution de :

$$(0.2) \qquad \begin{cases} \partial_t u_\varepsilon(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f_i\big(u_\varepsilon(t,x)\big) = 0 & \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ u_\varepsilon(0,x) = u_0(x) + \varepsilon\, h\Big(x, \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Lorsque ε tend vers zéro, $T^*(\varepsilon)$ converge vers une constante T^* que l'on suppose inférieure à T. Pour t appartenant à $[0,T]$, on recherche $u_\varepsilon(t,x)$ sous la forme de $w_\varepsilon(t,x) = u(t,x) + \varepsilon\, v(t,x,\varphi(t,x)/\varepsilon)$. En reportant w_ε dans (0.2) et en égalant les termes en facteur de la même puissance de ε, on obtient les deux problèmes de Cauchy résolubles suivants :

(i) Une équation eiconale pour la phase φ :

$$
(0.3) \quad \begin{cases} \partial_t\varphi(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \dot{f}_i\big(u(t,x)\big)\, \partial_{x_i}\varphi(t,x) = 0 & \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ \varphi(0,x) = \varphi(x) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \end{cases}
$$

(ii) Une loi de conservation {écrite sous forme conservative} pour le profil v :

$$
(0.4) \quad \begin{cases} \partial_t v(t,x,\theta) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}\Big(\dot{f}_i\big(u(t,x)\big)\, v(t,x,\theta)\Big) \\ \qquad + \partial_\theta \left(\sum_{i=1}^{n} \ddot{f}_i\big(u(t,x)\big)\, \partial_{x_i}\varphi(t,x) \left(\dfrac{v^2(t,x,\theta)}{2}\right)\right) = 0 \\ \qquad\qquad \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ v(0,x,\theta) = h(x,\theta) \qquad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \end{cases}
$$

Soit $\eta > 0$, avec $T^* - \eta > 0$. Pour $t < T^* - \eta$ et ε choisi suffisamment petit, J-M-R [3] ont estimé la différence L^1 entre la solution exacte u_ε de (0.2) et le modèle w_ε {construit à l'aide de (0.3) et (0.4)}. Les auteurs utilisent à cet effet des estimations L^∞ entre u_ε et w_ε. Cependant ces estimations obtenues en intégrant le long des caractéristiques de (0.2) "explosent" dès que t s'approche de T^*. En fait, outre les travaux formels de Kalyakin [4], le seul résultat global en temps connu à ce jour a été obtenu par DiPerna-Majda [1] et concerne l'étude des oscillations linéaires de grande amplitude qui se produisent dans les solutions faibles d'une loi de Burgers. Le choix des hypothèses plus restrictives { phase linéaire $(\varphi(x) = x)$, dimension égale à un $(n = 1)$, état initial pris constant $(u_0(x) \equiv u_0)$, perturbation periodique $(h(x,x/\varepsilon) = h(x/\varepsilon))$ et comportement quadratique du terme non linéaire $(f(u) = a\,u^2 \quad \text{avec} \quad a \neq 0)$ } ainsi qu'un changement de variable temps $(\tau = \varepsilon\, t)$ font de leurs résultats une conséquence du théorème qui suit.

On se place maintenant sous les hypothèses générales {phase non planaire, état initial non constant, dimension quelconque} et on cherche à établir la validité du modèle général construit ci-dessus {obtenu en procédant aux calculs d'optique géométrique} et ce, pour tout temps $t \leq T$, y compris postérieur à la formation des chocs ($t > T^*$).

En d'autres termes, on établit le résultat suivant :

THEOREME.

Soient φ et v vérifiant respectivement (i) et (ii). Alors pour tout temps t inférieur à T, il existe une constante $C(t)$ dépendante du temps mais indépendante de ε telle que :

$$\| u_\varepsilon(t,.) - u(t,.) - \varepsilon \big(tr_{S_\varepsilon} v\big)(t) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(t)\, \varepsilon^2 .$$

où $\big(tr_{S_\varepsilon} v\big)(t)$ désigne la trace sur l'hypersurface C^∞ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ d'équation $S_\varepsilon = \big\{(x,\theta)\,,\ \theta - \frac{\varphi(t,x)}{\varepsilon} = 0\big\}$ de la fonction à variation bornée $v(t,.,.)$ qui à $(x,\theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ associe $v(t,x,\theta) \in \mathbb{R}$.

Remarque.

L'intérêt de ce théorème réside dans le fait qu'aucune limite en temps n'est imposée. Si par exemple $u_0(x) \equiv u_0$ {u_0 figure un état constant}, $u(t,x) \equiv u_0$ est solution de (0.1) avec T qui vaut l'infini. T^* reste fini et $\varphi(t,x)$ prend la forme suivante : $\varphi(t,x) = \varphi\big(x - t\,\dot f(u_0)\big)$. Dans les nouvelles variables (s,y,θ) {obtenues en changeant (t,x,θ) en $(t = s\,,\ x - t\,\dot f(u_0) = y\,,\ \theta = \theta)$}, (0.4) s'écrit :

$$(0.5)\quad \begin{cases} \partial_s v(s,y,\theta) + \partial_\theta \left(\Big(\nabla_y \varphi(s,y).\ddot f(u_0)\Big) \dfrac{v^2(s,y,\theta)}{2} \right) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ v(0,y,\theta) = h(y,\theta) \qquad\qquad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \end{cases}$$

Un développement limité dans $C\big([0,\infty[\,;L^1(\mathbb{R}^n)\big)$ de la solution entropique de (0.2) existe donc pour tout temps, nonobstant le fait que $u_\varepsilon(t,x)$ devienne discontinue pour $t > T^*$. Qui plus est, il s'obtient à l'aide de manipulations simples : Il suffit de substituer $\varphi(y)$ à la variable θ de v, la solution moyennée de (0.5) $\big\{$(0.5) s'interprête comme une loi de Burgers paramétrée par y de sorte que v est définie en tout point et prend aux points de discontinuité en θ la valeur de la demi-somme de la limite à gauche et à droite de $v(s,y,.)\big\}$. La forme asymptotique recherchée est alors donnée dans les coordonnées initiales par :

$$u_0 + \varepsilon\, v\left(t\,,\ x - t\,\dot f(u_0)\,,\ \frac{\varphi\big(x - t\,\dot f(u_0)\big)}{\varepsilon}\right).$$

SOMMAIRE

CHAPITRE I

STABILITE L^1 DES LOIS DE CONSERVATION SCALAIRES PAR PERTURBATION DU TERME NON LINEAIRE PROBLEME GENERIQUE

1.1 Introduction .

Dans le cas où la condition initiale prend la forme d'une valeur constante u_0, les termes non linéaires $f_i(u)$ s'écrivent : $f_i(u) = Q_i(u) + R_i(u)$ avec $Q_i(u) = f_i(u_0) + \dot{f}_i(u_0).(u-u_0) + \frac{1}{2}\ddot{f}_i(u_0).(u-u_0)^2$, $R_i(u)$ étant le reste de taylor d'ordre deux de f_i.

u_ε restant proche de u_0, il semble raisonnable d'espérer une contribution négligeable des restes $R_i(u_\varepsilon)$, c'est à dire en désignant par v_ε la solution entropique de (1.1) :

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \partial_t v_\varepsilon(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} Q_i\big(v_\varepsilon(t,x)\big) = 0 & \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ v_\varepsilon(0,x) = u_0 + \varepsilon\, h\Big(x, \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \end{cases}$$

une estimation du type suivant :

$$(1.2) \qquad \| u_\varepsilon(t,.) - v_\varepsilon(t,.) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(t)\, \varepsilon^2.$$

Le but de ce chapitre est d'établir (1.2) dans le cadre général des hypothèses du résumé $\{ u_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ non forcément constant$\}$.

On remarque ensuite que le modèle fourni par les calculs d'optique géométrique pour (0.2) conduit aux mêmes équations de phase et de profil que pour (1.1).

Il suffit dès lors d'établir la validité du modèle pour des équations de la forme (1.1).

1.2 Localisation du problème près de la condition initiale

On rappelle que $u(t,x)$ et $u_\varepsilon(t,x)$ désignent respectivement les solutions des problèmes de Cauchy (0.1) et (0.2) {cf Résumé}.

Par conséquent, la différence $w_\varepsilon(t,x) = u_\varepsilon(t,x) - u(t,x)$ satisfait :

$$(1.3)\quad \begin{cases} \partial_t w_\varepsilon(t,x) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} F_i\big(t,x,w_\varepsilon(t,x)\big) = 0 & \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ w_\varepsilon(0,x) = \varepsilon\, h\Big(x, \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où on a posé $F_i(t,x,v) = f_i\big(u(t,x)+v\big) - f_i\big(u(t,x)\big)$.

La solution {unique ! !} de (1.3) est à comprendre au sens de Kruzkov [5].

On considère maintenant le flot χ_t attaché à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \partial_t\, \varrho_x(t) = \dot{f}\Big(u\big(t, \varrho_x(t)\big)\Big) & \text{avec} \qquad \dot{f} = (\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_n) \\ \varrho_x(0) = x \end{cases}$$

On pose $\chi_t(x) = \varrho_x(t)$.

L'application ψ^{-1} définie par $\psi^{-1} : (t, x) \longrightarrow \big(s = t, y = \chi_t^{-1}(x)\big)$ réalise un C^1 difféomorphisme global de $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ sur lui-même. On exprime alors (1.3) dans les nouvelles coordonnées (s,y) de manière à supprimer le terme linéaire en v qui apparait dans l'expression des F_i. En prenant soin de conserver la forme divergentielle, on obtient que $\tilde{w}_\varepsilon = \psi^* w_\varepsilon = w_\varepsilon \circ \psi$ satisfait le problème de Cauchy suivant :

$$(1.4)\quad \begin{cases} \partial_s \tilde{w}_\varepsilon(s,y) + \sum_{l=1}^{n} \partial_{y_l}\Big(a_l(s,y)\dfrac{\tilde{w}_\varepsilon^2}{2} + G_l(s,y,\tilde{w}_\varepsilon)\,\tilde{w}_\varepsilon^3\Big) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ \tilde{w}_\varepsilon(0,y) = \varepsilon\, h\Big(y, \dfrac{\varphi(y)}{\varepsilon}\Big) \qquad\qquad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad a_l(s,y) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left(\frac{d^3 f_i}{d^3 u}\right)\big(u \circ \psi(s,y)\big)\; J_{il}(s,y)$$

$$\text{et} \quad G_l(s,y,\tilde{w}_\varepsilon) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left(\int_0^1 \frac{(1-r)^2}{2}\left(\frac{d^3 f_i}{d^3 u}\right)\Big(u \circ \psi(s,y) + r\, \tilde{w}_\varepsilon(s,y)\Big) dr\right) J_{il}(s,y)$$

où J_{il} désigne le $(i,j)^{\grave{e}m}$ mineur principal de $D\psi(s,y)$.

On estime maintenant en fonction de ε l'erreur d'approximation engendrée par la suppression dans (1.4) du terme d'ordre trois en ε : $G_l(s,y,\tilde{w}_\varepsilon)\,\tilde{w}_\varepsilon^3$ {à priori petit}.

On suppose désormais que le problème se présente directement sous la forme simplifiée (1.4) et afin de conserver des notations cohérentes avec celles de l'introduction, on pose $u_\varepsilon = \tilde{w}_\varepsilon$. Quant à la solution du problème "générique" {dans lequel est oublié le terme cubique}, on la désigne par v_ε.

1.3 Estimations L^1

THEOREME.

Soit $h(x,\theta)$ une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ à valeurs réelles, à support compact en la première variable et périodique de période un par rapport à la seconde variable.
Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, une fonction phase.
Soit v_ε la solution entropique généralisée de :

$$(1.5)\qquad \begin{cases} \partial_t v_\varepsilon(t,x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}\Big(a_i(t,x)\frac{v_\varepsilon^2}{2}\Big) = 0 & \text{sur}\quad \Omega = [0,T]\times \mathbb{R}^n \\ v_\varepsilon(0,x) = \varepsilon\, h\Big(x, \dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big) & \text{sur}\quad \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Alors v_ε se compare à u_ε {solution de (1.4)} avec l'estimation suivante : pour tout temps t inférieur à T, il existe une constante $C(t)$ dépendante du temps mais indépendante de ε telle que :

$$\|\, u_\varepsilon(t,.) - v_\varepsilon(t,.)\,\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \;\le\; C(t)\,\varepsilon^2 .$$

Preuve.

On note $\Omega_T =]0,T[\times \mathbb{R}^n$.

Soit $g(t,x,s,y) \ge 0$ une fonction de classe C^∞ et à support compact dans $\Omega_T \times \Omega_T$. Suivant Kruzkov [5], on écrit que u_ε {resp v_ε} est solution entropique associée aux flux $|u-k|$. Dans les inégalitées ainsi obtenues, on remplace k par $v_\varepsilon(s,y)$ et $f(t,x)$ par $g(t,x,s,y)$ {resp k par $u_\varepsilon(t,x)$ et $f(s,y)$ par $g(t,x,s,y)$}, on intègre sur Ω_T dans les variables (s,y) {resp (t,x)} puis on somme les deux expressions ainsi obtenues, on obtient :

$$(I_1^\varepsilon) \qquad \iiiint |u_\varepsilon(t,x) - v_\varepsilon(s,y)| \, (\partial_t g + \partial_s g)(t,x,s,y) \; dt\, dx\, ds\, dy$$

$$\begin{aligned}
(I_2^\varepsilon) \qquad & + \iiiint \textstyle\sum_{l=1}^n sgn\big(u_\varepsilon(t,x) - v_\varepsilon(s,y)\big)\,(1/2)\, \big[a_l(t,x)\; u_\varepsilon^2(t,x) \\
& \qquad - a_l(s,y)\; v_\varepsilon^2(s,y)\big] \,(\partial_{x_l} g + \partial_{y_l} g)(t,x,s,y)\; dt\,dx\,ds\,dy \\
(I_3^\varepsilon) \qquad & + \iiiint \textstyle\sum_{l=1}^n sgn\big(u_\varepsilon(t,x) - v_\varepsilon(s,y)\big)\,(1/2)\, \big[a_l(s,y)\; u_\varepsilon^2(t,x) \\
& \qquad - a_l(t,x)\; u_\varepsilon^2(t,x)\big] * \partial_{y_l} g(t,x,s,y)\; dt\,dx\,ds\,dy \\
& + \iiiint \textstyle\sum_{l=1}^n sgn\big(u_\varepsilon(t,x) - v_\varepsilon(s,y)\big)\,(1/2)\, \big[a_l(s,y)\; v_\varepsilon^2(s,y) \\
& \qquad - a_l(t,x)\; v_\varepsilon^2(s,y)\big] * \partial_{x_l} g(t,x,s,y)\; dt\,dx\,ds\,dy \\
& + \iiiint \textstyle\sum_{l=1}^n sgn\big(u_\varepsilon(t,x) - v_\varepsilon(s,y)\big)\,(1/2)\, \big[\partial_{y_l} a_l(s,y)\; u_\varepsilon^2(t,x) \\
& \qquad - \partial_{x_l} a_l(t,x)\; v_\varepsilon^2(s,y)\big] * g(t,x,s,y)\; dt\,dx\,ds\,dy \\
(I_4^\varepsilon) \qquad & + \iiiint \textstyle\sum_{l=1}^n sgn\big(u_\varepsilon(t,x) - v_\varepsilon(s,y)\big)\, \big[G_l(t,x,u_\varepsilon)\; u_\varepsilon^3(t,x) \\
& \qquad - G_l(t,x,v_\varepsilon(s,y))\; v_\varepsilon^3(s,y)\big] * \partial_{x_l} g(t,x,s,y)\; dt\,dx\,ds\,dy \\
& - \iiiint \textstyle\sum_{l=1}^n sgn\big(u_\varepsilon(t,x) - v_\varepsilon(s,y)\big)\; \partial_{x_l} G_l(t,x,v_\varepsilon(s,y))\; v_\varepsilon^3(s,y) \\
& \qquad * g(t,x,s,y)\; dt\,dx\,ds\,dy
\end{aligned}$$

$$\geq 0 .$$

Avec le choix particulier de f, fonction test à support compact contenu dans le cylindre $[\varrho\,, T - 2\,\varrho] \times B(0, r - 2\,\varrho)$ avec $2\,\varrho \leq min(T,r)$, on donne à g la forme particulière suivante :

$g_h(t,x,s,y) \;=\; f(\frac{t+s}{2}\,,\, \frac{x+y}{2})\;\; \delta_h(\frac{t-s}{2})\;\prod_{i=1}^n\; \delta_h(\frac{x_i - y_i}{2})$

avec $h \leq \varrho\,,\;\; \lambda_h(t,x,s,y) \;=\; \delta_h(\frac{t-s}{2})\;\prod_{i=1}^n\; \delta_h(\frac{x_i - y_i}{2})$

et $\delta_h(x) = \frac{1}{h}\,\phi(\frac{x}{h})\,, \qquad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ positive et d'intégrale un.

Puis on fait tendre h vers 0. On obtient d'après Kruzkov [5] :

$$(1.6) \qquad \iint |u_\varepsilon - v_\varepsilon|\; \partial_t f(t,x)\; dt\,dx \;+\; \iint \sum_{l=1}^n\; sgn\big(u_\varepsilon - v_\varepsilon\big)$$

$$* \; \frac{a_l(t,x)}{2}\; \big(u_\varepsilon^2(t,x) - v_\varepsilon^2(t,x)\big)\; \partial_{x_l} f(t,x)\;\; dt\,dx \;+\; \limsup_{h \to 0}\; I_4^{h,\varepsilon} \;\geq\; 0\,.$$

La notation $I_4^{h,\varepsilon}$ marque la dépendance en h de I_4^ε $\{g$ dépend de h avec le choix de la fonction test effectué ci-dessus$\}$.

On souhaite désormais estimer la dépendance en fonction du paramètre ε de la $\limsup_{h \to 0}$.

Rappelons tout d'abord les estimations classiques suivantes qui traduisent la stabilité L^1, L^∞ et BV des équations considérées :

(α) On dispose d'un contrôle L^∞ de u_ε {resp v_ε} :

$$\| u_\varepsilon(t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1(t) \| u_0 \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \hat{C}_1(t)\,\varepsilon .$$

$$\| v_\varepsilon(t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1(t) \| v_0 \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \hat{C}_1(t)\,\varepsilon .$$

(β) On dispose pour tout t d'un contrôle de la norme BV de u_ε :

$$V\big(u_\varepsilon(t)\big) \leq C_2(t) \ \Big\| \varepsilon\,(\nabla_x h)\Big(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big) + (\partial_\theta h)\Big(x, \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big)\ \nabla_x\varphi(x) \Big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \hat{C}_2(t) .$$

de même, $\quad V\big(v_\varepsilon(t)\big) \leq \hat{C}_2(t)$.

(γ) On dispose enfin d'un contrôle L^1 de u_ε {resp v_ε } :

$$\| u_\varepsilon(t) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_3(t)\,\varepsilon \qquad \{\text{resp } \| v_\varepsilon(t) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_3(t)\,\varepsilon \} .$$

On sépare maintenant I_4^ε en deux termes dont on observe successivement le comportement pour $h \to 0$:

(i) Etude de $A_h^\varepsilon = \iiiint \sum_{l=1}^n sgn\big(u_\varepsilon(t,x) - v_\varepsilon(s,y)\big)\ \partial_{x_l} G_l\big(t,x,v_\varepsilon(s,y)\big) * v_\varepsilon^3(s,y)\ g_h(t,x,s,y)\ dt\,dx\,ds\,dy$:

$$|A_h^\varepsilon| \leq \iint \Big\{ \iint \sum_{l=1}^n |\partial_{x_l} G_l\big(t,x,v_\varepsilon(s,y)\big)|\ |v_\varepsilon^3(s,y)| * |g_h(t,x,s,y)|\ ds\,dy \Big\}\ dt\,dx$$

$v_\varepsilon(s,y)$ étant à support compact en les variables (s,y),
$v_\varepsilon(s,y)\ g_h(t,x,s,y)$ est à support compact en les variables (t,x,s,y).

Par conséquent G_l prend ses valeurs sur un compact {indépendant de ε} sur lequel la fonction et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre trois sont bornées disons par M. On a alors d'après (γ) :

$$|A_h^\varepsilon| \leq n\,M\,\hat{C}_1^2\,\varepsilon^2 \iint |f(t,x)| \Big\{ \iint |v_\varepsilon(s,y)|\ \lambda_h(t,x,s,y)\ ds\,dy \Big\}\ dt\,dx$$

Puisque $\iint |v_\varepsilon(s,y)|\ \lambda_h(t,x,s,y)\ ds\,dy$ converge pour presque tout (t,x) vers $|v_\varepsilon(t,x)|$ en restant borné, le théorème de Lebesgues s'applique et fournit :

$$\limsup_{h\to 0} |A_h^\varepsilon| \leq n\,M\,\hat{C}_1^2\,\varepsilon^2 \iint |f(t,x)|\ |v_\varepsilon(t,x)|\ dt\,dx$$
$$\leq C_4(t)\ \varepsilon^3\ \| f(t,x) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

(ii) Etude de $B_h^\varepsilon = \iiiint \sum_{l=1}^n sgn\big(u_\varepsilon(t,x)-v_\varepsilon(s,y)\big)\ \big[G_l(t,x,u_\varepsilon)\ u_\varepsilon^3(t,x)$

$- G_l\big(t,x,v_\varepsilon(s,y)\big)\ v_\varepsilon^3(s,y)\big] * \partial_{x_l} g_h(t,x,s,y)\ dt\,dx\,ds\,dy$:

On pose $\quad T_l(t,x,\theta) = G_l(t,x,\theta)\ \theta^3$
et $\quad H_l(t,x,\theta,\acute\theta) = \int_0^1 \partial_\theta T_l\big(t,x,\theta+s(\acute\theta-\theta)\big)\,ds$
de sorte que $\quad G_l(t,x,u_\varepsilon)\,u_\varepsilon^3 - G_l(t,x,v_\varepsilon)\,v_\varepsilon^3 = H_l(t,x,u_\varepsilon,v_\varepsilon)\,(u_\varepsilon - v_\varepsilon)$

Puisque $\partial_\theta T_l(t,x,\theta) = (\partial_\theta G_l)(t,x,\theta)\ \theta^3 + 3\ G_l(t,x,\theta)\ \theta^2$, on a les estimations L^∞ suivantes :

$$|\,H_l(t,x,u_\varepsilon,v_\varepsilon)\,| \leq \sup_{t,x}\ \{\ sup_{s\in[0,1]}\ M\left(u_\varepsilon + s\,(v_\varepsilon - u_\varepsilon)\right)^2(t,x)\}$$

$$\leq \acute M\,\varepsilon^2 \qquad\qquad \text{d'après (i)}$$

$$|\partial x_l H_l| \leq \acute M\ \varepsilon^2 \qquad \text{et}$$
$$|\partial_\theta H_l| \leq \acute M\ \varepsilon.$$

On fixe les variables t, s et y de l'intégrale et on applique Fubini :

$$B_\varepsilon^h =$$

$$\iiint_{t,s,y} dt\,ds\,dy\ \left\{\int_x \sum_{l=1}^n |u_\varepsilon(t,x) - v_\varepsilon(s,y)|\,H_l\big(t,x,u_\varepsilon(t,x),v_\varepsilon(s,y)\big)\,\partial_{x_l} g\ dx\right\}$$

$$= - \iiint_{t,s,y} K(t,s,y)\ dt\,ds\,dy$$

où $K(t,s,y)$ désigne :

$$\sum_{l=1}^n \left\langle \partial_{x_l}\Big(|u_\varepsilon(t,x) - v_\varepsilon(s,y)|\ H_l\big(t,x,u_\varepsilon(t,x),v_\varepsilon(s,y)\big)\Big)\ ,\ g\right\rangle_{D'_x\times D_x}.$$

Pour presque tout (t,s,y), l'application $U_{t,s,y}$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $U_{t,s,y}(x) = |u_\varepsilon(t,x) - v_\varepsilon(s,y)|\ H_l\big(t,x,u_\varepsilon(t,x),v_\varepsilon(s,y)\big)$ est une fonction $(L^\infty \bigcap BV)(\mathbb{R}^n)$.

En effet, $|h(x) - k|$ $\{k \in \mathbb{R}\}$ appartient à $BV(\mathbb{R}^n)$ dès que $h(x)$ appartient à $BV(\mathbb{R}^n)$. De plus, si $f(.,.) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, et si $h(x)$ est une fonction BV, alors $f\big(.,h(.)\big)$ apparait comme la composée d'une fonction BV et d'une application C^∞. Il s'agit donc d'après un résultat de Volpert [7] d'une fonction BV.

$\big(L^\infty \bigcap BV\big)(\mathbb{R}^n)$ étant une algèbre, on a finalement obtenu que $U_{t,s,y}$ est dans $\big(L^\infty \bigcap BV\big)(\mathbb{R}^n)$. Le terme entre crochet peut donc s'interpréter comme l'intégrale de la fonction $g(t,.,s,y)$ par rapport à la mesure $\partial_{x_l}(\ \ )$. Qui plus est, on dispose de la formule de dérivation suivante qui permet d'estimer en fonction de ε le poids de la mesure considérée :

$$\partial_{x_l}\Big(\,|u_\varepsilon(t,.)-v_\varepsilon(s,y)|\;H_l\big(t,.,u_\varepsilon(t,.),v_\varepsilon(s,y)\big)\Big)\;=$$

$$\overline{H_l\big(t,.,u_\varepsilon(t,.),v_\varepsilon(s,y)\big)}\;\diamond\;\partial_{x_l}|u_\varepsilon(t,.)-v_\varepsilon(s,y)|$$
$$+\;\overline{|u_\varepsilon(t,.)-v_\varepsilon(s,y)|}\;\diamond\;\partial_{x_l}\Big(H_l\big(t,.,u_\varepsilon(t,.),v_\varepsilon(s,y)\big)\Big)\;=$$

$$\overline{H_l\big(t,.,u_\varepsilon(t,.),v_\varepsilon(s,y)\big)}\;\;\overline{sgn\big(u_\varepsilon(t,x)-v_\varepsilon(s,y)\big)}\;\diamond\;\partial_{x_l}u_\varepsilon(t,.)$$
$$+\;\overline{|u_\varepsilon(t,.)-v_\varepsilon(s,y)|}\;\Big\{\partial_{x_l}H_l(t,.,u_\varepsilon,v_\varepsilon)\;+\;\widehat{\partial_\theta H_l}(t,.,u_\varepsilon,v_\varepsilon)\;\diamond\;\partial_{x_l}u_\varepsilon(t,.)\Big\}$$

On précise les notations :

$$\overline{f}(x)\;=\;\lim_{h\to 0}\,(f*\delta_h)(x)\qquad\qquad\{\text{valeur moyenne de f}\}$$
$$\text{et}\quad\widehat{\partial_\theta f}\big(x,u_\varepsilon(x)\big)\;=\;\int_0^1\,\partial_\theta f\big(\,x\,,\,t\,l_\nu u_\varepsilon(x)+l_{-\nu}u_\varepsilon(x)(1-t)\,\big)\;dt$$

Ces deux expressions sont définies en tout point de régularité de la fonction à variations bornées u_ε, c'est à dire en dehors d'un ensemble de H_{n-1} mesure de Haussdorf nulle. Suivant Volpert [7], on désignent par $l_\nu u(x)$ {resp $l_{-\nu}u(x)$ } les valeurs limites dans les directions ν et $-\nu$ de la fonction $u(x)$.

Le symbole $\diamond$ signifie que l'on procède à la multiplication d'une mesure {par exemple $\partial_{x_l}u_\varepsilon(t,.)$ } par une fonction intégrable par rapport à cette mesure et bien définie en dehors d'un ensemble que ne charge pas cette même mesure.

On peut désormais écrire le terme B_h en explicitant le crochet de dualité par une intégration explicite :

$$B_h\;=\;-\iiint_{t,s,y}K(t,s,y)\;\;dt\,ds\,dy$$

avec cette fois-ci :

$$K(t,s,y)\;=$$

$$\int_x\sum_{l=1}^{n}\Big[\,\overline{H_l\big(t,.,u_\varepsilon(t,.),v_\varepsilon(s,y)\big)}\;\overline{sgn\big(u_\varepsilon(t,x)-v_\varepsilon(s,y)\big)}\Big]\;\diamond\;\partial_{x_l}u_\varepsilon(t,.)\;g_h$$
$$+\;\int_x\sum_{l=1}^{n}\overline{|u_\varepsilon(t,.)-v_\varepsilon(s,y)|}$$
$$*\;\Big[\partial_{x_l}H_l(t,.,u_\varepsilon(t,.),v_\varepsilon)+\widehat{\partial_\theta H_l}(t,.,u_\varepsilon,v_\varepsilon)\;\diamond\;\partial_{x_l}u_\varepsilon(t,.)\Big]\;g_h$$

On utilise alors les estimations L^∞ portant sur H_l et $\widehat{\partial_\theta H_l}$, valables en dehors d'un ensemble de mesure nulle pour la variation totale $|\partial_{x_l} u_\varepsilon|$ associée à $\partial_{x_l} u_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
&| \overline{H_l(t,.,u_\varepsilon(t,.),v_\varepsilon(s,y))} \; \overline{sgn(u_\varepsilon(t,x)-v_\varepsilon(s,y))} \; | && \leq M\,\varepsilon^2 \\
&| \overline{|u_\varepsilon(t,.)-v_\varepsilon(s,y)|} \; \partial_{x_l} H_l(t,.,u_\varepsilon(t,.),v_\varepsilon) \,| && \leq M'\,\varepsilon^3 \\
&| \overline{|u_\varepsilon(t,.)-v_\varepsilon(s,y)|} \; \widehat{\partial_\theta H_l}(t,.,u_\varepsilon(t,.),v_\varepsilon) \,| && \leq M''\,\varepsilon^2
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|B_h| \;\leq\; \iiint_{t,s,y} \left[\sum_{l=1}^{n} (M\,\varepsilon^2 + M'\,\varepsilon^2 + M''\,\varepsilon^2) \int_x |g_h| \, |\partial_{x_l} u_\varepsilon| \right] dt\,ds\,dy$$

En appliquant Fubini, ce que rend possible le fait que la mesure $|\partial_{x_l} u_\varepsilon| \,.\, dt$ est indépendante des variables (s,y), on a :

$$\begin{aligned}
|B_h| \;&\leq\; M'''\,\varepsilon^2 \iint_{t,x} \left\{ \iint_{s,y} |g_h| \; ds\,dy \right\} \; |\partial_{x_l} u_\varepsilon(t,.)| \,.\, dt \\
&\leq\; M''''\,\varepsilon^2 \iint_{t,x} \| f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \; |\partial_{x_l} u_\varepsilon(t,.)| \,.\, dt \\
&\leq\; M''''\,\varepsilon^2 \; \| f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_0^T |(\partial_{x_l} u_\varepsilon)(t)|(\mathbb{R}) \;\; dt \\
&\leq\; \breve{M}\,\varepsilon^2\, T \; \| f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \; V(u_\varepsilon)(0) \;\leq\; C(t)\,\varepsilon^2 \; \| f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

On dispose donc finalement de l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
(1.7) \qquad & \iint |u_\varepsilon(t,x) - v_\varepsilon(t,x)| \; \partial_t f(t,x) \;\; dt\,dx \\
&+ \iint \sum_{l=1}^{n} sgn\big(u_\varepsilon(t,x) - v_\varepsilon(t,x)\big) \\
&\qquad * \; a_l(t,x)\,(1/2)\,\big(u_\varepsilon^2(t,x) - v_\varepsilon^2(t,x)\big) \;\; \partial_{x_l} f(t,x) \;\; dt\,dx \\
&\qquad\qquad + \; C(T)\;\varepsilon^2 \;\; \| f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \;\geq\; 0\,.
\end{aligned}$$

En appliquant la méthode de Kruzkov [5] $\{$choisir $f = [\,\alpha_h(t-\varrho) - \alpha_h(t-s)]\; \chi_\mu(t,x)$ avec $\chi_\mu = 1 - \alpha_\mu(\,|x| + N\,t - R + \mu\,)$, $\mu > 0$ et $\alpha_h(\sigma) = \int_{-\infty}^{\sigma} \delta_h(l)\,dl\,\}$, on obtient en faisant tendre μ puis h vers zéro :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(t,x) - v_\varepsilon(t,x)| \;\; dx \;\;\leq\;\; C(t)\;\varepsilon^2$$

ce que l'on souhaitait démontrer .

CHAPITRE II

PROBLEMES DE SUBSTITUTION ET DE TRACE

2.1 Introduction :

Le caractère intrinsèque du modèle fourni par les calculs d'optique géométrique {les développements limités commutent aux changements de variable} permet désormais de considérer le problème sous la forme (1.5) {cf page 7}. L'équation de la phase devient alors : $\partial_t \varphi(t,x) = 0$ et en reportant $\varepsilon\, u(t,x,\varphi(x)/\varepsilon)$ dans (1.5), on obtient que $u(t,x,\theta)$ doit satisfaire :
(2.1)

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x,\theta) + \varepsilon \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}\big(a_i(t,x)\, u^2(t,x,\theta)\big) \\ \qquad + \partial_\theta \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\, \partial_{x_i}\varphi(x) \left(\frac{v^2(t,x,\theta)}{2} \right) \right) = 0 \\ \qquad\qquad \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u(0,x,\theta) = h(x,\theta) \qquad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \end{cases}$$

On note $\Upsilon(t,x) = \sum_{i=1}^n a_i(t,x)\, \partial_{x_i}\varphi(x)$.

L'idée de l'optique géométrique consiste alors à négliger le terme en facteur de ε c'est à dire d'approcher (2.1) par :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \partial_t \tilde{u}_x(t,x,\theta) + \partial_\theta \Big(\Upsilon(t,x)\, (\tilde{u}_x)^2(t,x,\theta) \Big) = 0 \\ \qquad\qquad \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ \tilde{u}_x(0,x,\theta) = h(x,\theta) \qquad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \end{cases}$$

système qui s'interprète comme une loi de Burgers paramétrée par x.

On espère alors décrire la solution de (1.5) par $\tilde{v}_\varepsilon(t,x) = \varepsilon\, \tilde{u}_x\big(t,x,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\big)$. Dans le cas où la donnée initiale h est régulière, les lois (1.5), (2.1) et (2.2) developpent des chocs au bout d'un temps T^* fini.

Pour $t < T^*$, des considérations géométriques portant sur des estimations L^∞ le long des caractéristiques fournissent :

$$\| (u_\varepsilon - \tilde{v}_\varepsilon)(t,.) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(t)\,\varepsilon^2 \tag{2.3}$$

Pour prolonger (2.3) après la formation des chocs $(t > T^*)$ se pose le problème de la substitution de $\varphi(x)/\varepsilon$ à θ, dans des données qui peuvent présenter des sauts de continuité. Ce problème se formule en termes de trace de fonctions $BV(\mathbb{R}^{n+1})$ $\{u(t,x,\theta)$ solution de (2.1) ou $\tilde{u}_x$ solution de (2.2)$\}$ sur des sous-variétés C^∞ {le graphe de $(t,x) \longrightarrow \left(t,x,\theta = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\right)$ } de dimension $n+1$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. L'objet de ce chapitre consiste à donner un sens à la manipulation ainsi effectuée.

2.2 Rappels sur les fonctions $BV(\mathbb{R}^n)$:

On se donne un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, a un vecteur unitaire, $u \in BV(\mathbb{R}^n)$ et Π_a l'hyperplan $\{x, x.a = 0\}$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x' = pr_{\Pi_a}(x)$ la projection orthogonale de x sur Π_a et $l_a(x')$ la droite issue de x' et de vecteur directeur a. Un point de $\mathbb{R}^n$ est naturellement repéré par ses coordonnées $x' \in \Pi_a$ et $x_n = d(x, \Pi_a)$.

On peut alors trouver $F \subset \Pi_a$ de $(n-1)$ mesure totale {c'est à dire $H^{(n-1)}(F^c) = 0$, telle que pour $x' \in F$, $u_{|_{l_a(x')}}$ appartienne à $BV(\mathbb{R})$. On pose alors pour x tel que $Pr_{\Pi_a}(x) \in F$,

$$\begin{aligned}\bar{u}_a(x) &= (1/2)\,[\lim_{h \to 0^+} u(x+h\,a) + \lim_{h \to 0^-} u(x+h\,a)] \\ &= \lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}} u(x+h\,a)\,\chi_\delta(h)\,dh\end{aligned}$$

où χ_δ figure $(1/\delta)\chi(x/\delta)$ avec $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\chi \equiv 1$ sur un voisinage de l'origine, χ paire et d'intégrale 1.

On note $u \sim^a v$ si $\lambda_a(E) = \lambda(Pr_{\Pi_a}(E)) = 0$, avec λ la mesure de lebesgues sur Π_a et $E = \{x, u(x) \neq v(x), x \in \Omega\}$.

On rappelle {Volpert [7]} :

THEOREME.

Soit $u \in BV(\mathbb{R}^n)$. Alors pour tout vecteur unité a, $\bar{u} \sim^a \bar{u}_a$ où $\bar{u}(x)$ désigne la valeur moyenne de u en x {cf page 11}.

Soit $u \in (BV \cap L^\infty)(\mathbb{R}^n)$, soit G le graphe d'une fonction s de classe C^1 au dessus de Π_a $\{G : \Omega' \subset \Pi_a$ ouvert borné $\longrightarrow \mathbb{R}^n\}$ et si h est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $\bar{u}$ qui est définie en dehors d'un ensemble de $H_{(n-1)}$ mesure nulle, est définie presque partout sur G et satisfait {c'est une application du théorème précédant} :

$$\lim_{\delta\to 0} \int\int_{\Omega'\times \mathbb{R}} h(u(x))\ \chi_\delta(s(x')+x_n)\ dx'\,dx_n$$

$$= \int_{\Omega'} h\Big(\bar{u}(s(x'))\Big)\ dx'.$$

2.3 Interprétation de (2.1) et (2.2) :

La solution du système (2.1) est C^∞ sur la bande de temps $[0,T^*]$ {avec T^* indépendant de ε}, domaine sur lequel la substitution de $\varphi(x)/\varepsilon$ à θ dans (2.1) donne de toute évidence la solution de (1.5). A t'on un résultat analogue après la formation des chocs ? ? C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 2.3.1. *Soit $u \in BV([0,T]\times \mathbb{R}^{n+1})$ la solution entropique de (2.1). Alors $\bar{u}$ fonction moyennée de u coincide avec u en dehors d'un ensemble de mesure de Lebesgues nulle et est donc aussi solution entropique de (2.1). De plus, la substitution {cf 2.2} de $\varphi(x)/\varepsilon$ à θ dans $\varepsilon\,\bar{u}(t,x,.)$ fournit la solution généralisée de (1.5) {et du coup $tr_{S_\varepsilon}u \in BV(\mathbb{R}^{n+1})$}.*

Preuve. On écrit que $\bar{u}$ est solution entropique généralisée de (2.1) : Pour tout $\psi \in C_0^\infty(\Omega_T)$, $\psi \geq 0$,

$$\text{(2.3.2)}\qquad \int_{\Omega_T} |\,\bar{u}(t,x,\theta)-k\,|\ \partial_t\psi(t,x,\theta)\ dt\,dx\,d\theta$$

$$+\ \varepsilon\int_{\Omega_T} sgn\big(\bar{u}(t,x,\theta)-k\big)\Big(\frac{\bar{u}^2-k^2}{2}\Big)\Big(\sum_{i=1}^n a_i(t,x)\ \partial_{x_i}\psi(t,x,\theta)\Big)\ dt\,dx\,d\theta$$

$$+\int_{\Omega_T} sgn\big(\bar{u}(t,x,\theta)-k\big)\Big(\frac{\bar{u}^2-k^2}{2}\Big)\Big(\sum_{i=1}^n a_i(t,x)\,\partial_{x_i}\varphi(x)\Big)\partial_\theta\psi(t,x,\theta)\ dt\,dx\,d\theta$$

$$-\ \varepsilon\int_{\Omega_T}\sum_{i=1}^n sgn\big(\bar{u}(t,x,\theta)-k\big)\,(\partial_{x_i}a_i)(t,x)\Big(\frac{k^2}{2}\Big)\ \psi(t,x,\theta)\ dt\,dx\ \geq\ 0\,.$$

puis on fait le choix particulier de $\psi(t,x,\theta)\ =\ \psi(t,x)\ \chi_\delta\big(\theta-\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\big)$, et on effectue le changement de variable : $(\ x_i=p_i\,,\ \theta-\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}=q\ )$ dans l'inégalité (2.3.2).

Avec le choix particulier de ψ effectué, on a $\psi(t,p,q)=\psi(t,p)\ \chi_\delta(q)$.

On exprime alors (2.3.2) dans les nouvelles coordonnées (p,q) et en faisant tendre δ vers zéro, on obtient :

$$
(2.3.3) \qquad \int_{\Omega_T} |\varepsilon \bar{u} - \varepsilon k| \; \partial_t \psi(t,p,q) \; dt\, dp\, dq
$$

$$
+ \int_{\Omega_T} \left(\frac{(\varepsilon \bar{u})^2 - (\varepsilon k)^2}{2} \right) sgn(\varepsilon \bar{u} - \varepsilon k) \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(t,p) \; \partial_{p_i} \psi\Big(t, p, \frac{\varphi(p)}{\varepsilon}\Big) \right) \; dt\, dp
$$

$$
- \; \varepsilon \int_{\Omega_T} \sum_{i=1}^{n} sgn(\varepsilon \bar{u} - \varepsilon k) \; (\partial_{p_i} a_i)(t,p) \left(\frac{(\varepsilon k)^2}{2} \right) \psi\Big(t, p, \frac{\varphi(p)}{\varepsilon}\Big) \; dt\, dp \; \geq \; 0 \, .
$$

expression dans laquelle $\bar{u}$ est pris au point $(t, p, \phi(p)/\varepsilon)$.

La condition initiale {critère (ii) de Kruzkov [2]} s'obtient en remarquant que les solutions de (1.5) et (2.1) sont régulières sur la bande de temps $[0, T^*]$. Ceci, joint à (2.3.3) exprime finalement que $\varepsilon\, \bar{u}(t, p, \varphi(p)/\varepsilon)$ est solution de (1.4), ce que l'on souhaitait démontrer.

On désigne désormais par (2.4) le problème de Cauchy associé à (2.2) considéré non plus comme une loi de Burgers paramétrée par x mais comme un problème de Cauchy posé sur $[0, \infty] \times \mathbb{R}^{n+1}$. On a alors le :

Lemme 2.3.2. *Soit, pour tout x, u_x une solution entropique de (2.2). Pour tout (t,x), $u_x(t,.) \in BV(\mathbb{R})$. On note $\bar{u}_x(t,.)$ la solution moyennée associée de sorte que $u : (t,x,\theta) \longrightarrow \bar{u}_x(t,\theta)$ est définie en tout point de $[0,T] \times \mathbb{R}^{n+1}$. C'est une solution entropique de (2.4). Qui plus est, $\bar{u}_x\big(t, \varphi(x)/\varepsilon\big)$ coïncide presque partout avec $tr_{S_\varepsilon} u = \bar{u}_{|S_\varepsilon}$.*

Preuve.

$\bar{u}_x$ satisfait :
Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, pour tout $\psi(t,\theta)$ de classe C^∞ et positive,

$$
(2.3.4) \qquad \int_{\Omega_T} |\bar{u}_x - k| \, \partial_t \psi(t,\theta) \; dt\, d\theta
$$

$$
+ \int_{\Omega_T} sgn(\bar{u}_x - k) \left(\frac{(\bar{u}_x)^2 - k^2}{2} \right) \Upsilon(t,x) \; \partial_\theta \psi(t,\theta) \; dt\, d\theta \; \geq \; 0 \, .
$$

On multiplie (2.3.4) par $\varphi(x)$ fonction positive de classe C^∞. On intègre en x et on utilise un résultat de densité pour obtenir l'inégalité entropique associée à u.

Par ailleurs, d'après le théorème page 14, $\bar{u} \sim^a \bar{u}_a$. Appliqué avec $a = (0_{\{t\}}, 0_{\{x\}}, 1_{\{\theta\}})$, on a pour presque tout (t,x), $\bar{u}(t,x,.) \equiv \bar{u}_x(t,.)$ et en particulier pour presque tout (t,x), $\bar{u}(t,x,\varphi(x)/\varepsilon) = \bar{u}_x(t, \varphi(x)/\varepsilon)$, ce qui termine la démonstration du lemme 2.3.2.

CHAPITRE III

JUSTIFICATION DU MODELE POUR UNE LOI DE CONSERVATION ESTIMATIONS L^1

3.1 Introduction :

La démonstration du théorème énoncé dans le résumé repose sur une bonne compréhension de la forme géométrique des solutions du système (1.5), forme géométrique imposée par les oscillations de petite amplitude qui apparaissent dans la condition initiale. Pour x variant dans un petit domaine D de diamètre ε, $\varphi(x)/\varepsilon$ parcourt un intervalle dont la grandeur est contrôlée par une constante.

Dès lors, la forme de la solution v de (1.5) sur le cône de propagation $K_l = \{(t,x), |x-l| \leq C\,\varepsilon\,(1+t)\}$ où l appartient à D est essentiellement gouvernée par le comportement de h par rapport à la seconde variable, c'est à dire {pour simplifier} par un problème de Cauchy avec donnée initiale $x \longrightarrow h\big(l, \varphi(x)/\varepsilon\big)$. La phase φ dans $h\big(l, \varphi(x)/\varepsilon\big)$ sélectionne une direction privilégiée de propagation que l'on note par exemple $\breve{\theta}$. Un simple changement de variable permet alors de se rendre compte que la variable θ du modèle joue le rôle de $\breve{\theta}$, la variable x intervenant comme simple paramètre. En assimilant θ à $\breve{\theta}$, on obtient la comparaison L^1 souhaitée, la difficulté étant d'effectuer des opérations licites sur des fonctions dont on sait qu'elles peuvent développer des discontinuités d'ordre zéro.

Dans tout ce qui suit l'expression "on remplace θ par" est à comprendre en termes de trace comme expliqué dans le chapitre précédant. On appelera aussi "bonne approximation locale" une estimation L^1 controlée par une constante {qui peut dépendre du temps} fois ε^{n+2}.

3.2 Localisation en la première variable :

3.2.1 Cas de $v_\varepsilon(t,x)$ solution de (1.5).

On s'interesse à $v_\varepsilon(t,.)$ en restriction à $C^\varepsilon_{(k)}$ où $(k) = (k_1, \ldots\ldots, k_n)$ désigne un multiindice $\{ k_i$ représente un entier$\}$ et on convient de noter $C^\varepsilon_{(k)}$ le cube $\prod_{i=1}^n [\varepsilon\, k_i ; \varepsilon\,(k_i+1)]$. Soit enfin $l^{(k)}_\varepsilon$ le centre du cube $C^\varepsilon_{(k)}$.

Les estimations de Kruzkov[5] permettent d'affirmer que l'information se propage à vitesse finie. Plus précisément, les valeurs de u au temps t et en restriction à $C^\varepsilon_{(k)}$ dépendent uniquement de celles prises dans un cône de sommet $C^\varepsilon_{(k)}$ et de pente controlée par N avec :

$$N = \sup_{(t,x)\in[0,T]\times \mathbb{R}^n \text{ et } |u|\le M} \left\{ [\sum_{i=1}^n a_i^2(t,x)]^{1/2}\ |u| \right\}$$

où M est une estimation L^∞ de v_ε.

Par construction, $[\sum_{i=1}^n a_i^2(t,x)]^{1/2}$ est borné sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ tandis que M est controlé par $C(t)\ \| v_\varepsilon(0,.) \|_{L^\infty}$. N est donc de l'ordre d'une constante fois ε et $\tilde{C}^\varepsilon_{(k)}$ {section du cône au temps $t=0$} figure du coup un domaine centré en $l^{(k)}_\varepsilon$ et de taille controlée par $C(t)\,\varepsilon$.

$v_\varepsilon(t,x)$ se compare alors en restriction à $C^\varepsilon_{(k)}$ à la solution de (3.2.1) :

$$(3.2.1) \quad \begin{cases} \partial_t v^{(k)}_\varepsilon(t,x) + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\Big(a_i(t,x)\,\dfrac{(v^{(k)}_\varepsilon)^2}{2}\Big) = 0 & \\ & \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ v^{(k)}_\varepsilon(0,x) = \varepsilon\, h^{(k)}_\varepsilon\Big(\dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où on a posé $h^{(k)}_\varepsilon(\theta) = h(\,l^{(k)}_\varepsilon, \theta)$.

Le travail de Kruzkov [5] fournit l'existence, l'unicité pour (3.2.1) ainsi que la comparaison suivante :

$$\| v^{(k)}_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t) \|_{L^1(C^\varepsilon_{(k)})} \le C_1(t)\ \| v^{(k)}_\varepsilon(0) - v_\varepsilon(0) \|_{L^1(\tilde{C}^\varepsilon_{(k)})}$$

avec $C_1(t) = e^{\gamma\, t}$, où γ est indépendante de ε et de k.

On remarque alors que :

$$\| v^{(k)}_\varepsilon(0) - v_\varepsilon(0) \|_{L^1(\tilde{C}^\varepsilon_{(k)})} \le C_2(t)\ \varepsilon\ \| \nabla_x h(.,.) \|_{L^\infty} \int_{\tilde{C}^\varepsilon_{(k)}} \| x - l^{(k)}_\varepsilon \|\ dx$$

$$\le C_3(t)\ \varepsilon^{n+2}\ \big(t + \frac{1}{2}\big)^{n+1} \le C_4(t)\,\varepsilon^{n+2}$$

avec $C_4(t)$ indépendant de ε et de k.

Soit $\tilde{v}_\varepsilon$ la fonction construite en "recollant" les $v_\varepsilon^{(k)}$, c'est à dire : $\tilde{v}_{\varepsilon|C^\varepsilon_{(k)}} \equiv v_\varepsilon^{(k)}(t)_{|C^\varepsilon_{(k)}}$. On a alors :

$$\| v_\varepsilon(t) - \tilde{v}_\varepsilon(t) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(t) \sum_{(k)\,,\ \sup|\varepsilon k_i| \leq D} \varepsilon^{n+2}$$

où D est controlé par la taille du support de h {qui est compact}. ε étant fixé, le nombre de cubes intervenant dans la sommation est de l'ordre $C\,\varepsilon^{-n}$ avec C constante. On dispose finalement de l'estimation :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ ,\ \| v_\varepsilon(t,.) - \tilde{v}_\varepsilon(t,.) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(t)\, \varepsilon^2 .$$

3.2.2 Cas de $\varepsilon\, u\big(t,x,\varphi(x)/\varepsilon\big)$ avec u solution de (3.2.2.1).

On rappelle que u est solution de :

$$(3.2.2.1) \qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x,\theta) + \partial_\theta \big(\Upsilon(t,x)\, u^2(t,x,\theta)\big) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ \\ u(0,x,\theta) = h(x,\theta) \qquad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \end{cases}$$

On considère alors (3.2.2.2) :

$$(3.2.2.2) \qquad \begin{cases} \partial_t u_\varepsilon^{(k)}(t,x,\theta) + \partial_\theta \big(\Upsilon(t,x)\,(u_\varepsilon^{(k)})^2(t,x,\theta)\big) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ \\ u_\varepsilon^{(k)}(0,x,\theta) = h(l_\varepsilon^{(k)},\theta) \qquad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \end{cases}$$

On souhaite comparer en norme L^1 sur $C^\varepsilon_{(k)}$ les fonctions $\varepsilon\, u\big(t,x,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\big)$ et $\varepsilon\, u_\varepsilon^{(k)}\big(t,x,\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}\big)$.

On estime d'abord la différence $\delta(x,\theta) = h(x,\theta) - h(l_\varepsilon^{(k)},\theta)$.

On a encore $\delta(x,\theta) = \Big\{\int_0^1 (\nabla_x h)\big(l_\varepsilon^{(k)} + s\,(x - l_\varepsilon^{(k)}),\theta\big)\, ds\Big\} . (x - l_\varepsilon^{(k)})$ L'application $\theta \longrightarrow (\nabla_x h)(x,.)$ étant périodique, le terme intégral est borné sur $C^\varepsilon_{(k)} \times \mathbb{R}$. $\delta(x,\theta)$ est donc estimé sur $C^\varepsilon_{(k)} \times \mathbb{R}$ par $C(t)\,\varepsilon$.

On peut donc encadrer les conditions initiales de (3.2.2.1) et (3.2.2.2) de la manière suivante :

$\exists\, m > 0,\ \forall x \in \tilde{C}^\varepsilon_{(k)},\ \theta \in \mathbb{R},$

$h_1(\theta) \leq h(x,\theta) \leq h_2(\theta)$ et $h_1(\theta) \leq h(l_\varepsilon^{(k)},\theta) \leq h_2(\theta)$

avec $h_1(\theta) = h(l_\varepsilon^{(k)},\theta) - m\,\varepsilon$ et $h_2(\theta) = h(l_\varepsilon^{(k)},\theta) + m\,\varepsilon$.

A x fixé, le système (3.2.2.2) est une simple loi de Burgers et satisfait à ce titre un principe du maximum : Si on note $w_1(t,x,\theta)$ {resp $w_2(t,x,\theta)$ } les solutions moyennées de (3.2.2.2) associées à la donnée initiale h_1 {resp h_2 }, on a la comparaison suivante valable pour tout $(x,\theta) \in C^{\varepsilon}_{(k)} \times \mathbb{R}$:

$$w_1(t,x,\theta) \leq u(t,x,\theta) \leq w_2(t,x,\theta)$$

$$\{\text{resp } w_1(t,x,\theta) \leq u^{(k)}_{\varepsilon}(t,x,\theta) \leq w_2(t,x,\theta)\}$$

On a :

$$\varepsilon \int_{C^{\varepsilon}_{(k)}} |u(t,x,\tfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}) - u^{(k)}_{\varepsilon}(t,x,\tfrac{\varphi(x)}{\varepsilon})| \, dx \leq \varepsilon \int_{C^{\varepsilon}_{(k)}} |w_1(t,x,\tfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}) - w_2(t,x,\tfrac{\varphi(x)}{\varepsilon})| \, dx$$

Il s'agit donc d'estimer en fonction de ε le terme intégral de droite. La démonstration précise de cette estimation {en ε^{n+2} } est une conséquence du chapitre 3.4. On se contente pour l'heure d'avancer les arguments :

On redresse dans un premier temps la phase φ : Supposons donc que $\varphi(x) = x_n - l$. On note $x = (x', x_n)$. Dans (3.2.2.2), on peut regarder x' comme un paramètre, ce qui permet {cf chp 3.4.2} de se ramener à un problème en une dimension d'espace. Supposons donc que $n = 1$ et $x_n = x$, un principe de localisation du paramètre x qui intervient dans le coefficient de $\Upsilon(t,x)$ permet {cf chp 3.4.3}, en restriction à $C^{\varepsilon}_{(k)}$, de remplacer w_1 {resp w_2 } par $\tilde{w}_1$ {resp $\tilde{w}_2$ } solution de (3.2.2.2) dans lequel $\Upsilon(t,x)$ est remplacé par $\Upsilon(t,l)$ et $h(l^{(k)}_{\varepsilon},\theta)$ par $h_1(\theta)$ {resp $h_2(\theta)$ } et ce avec une bonne approximation locale {c'est dire en $C_1(t)\,\varepsilon^3$ {resp en $C_2(t)\,\varepsilon^3$ }}. Or

$$\varepsilon \int_{C^{\varepsilon}_{(k)}} |\tilde{w}_1(t,\tfrac{x-l}{\varepsilon}) - \tilde{w}_2(t,\tfrac{x-l}{\varepsilon})| \, dx \leq C\,\varepsilon^2 \int_P |\tilde{w}_1(t,\theta) - \tilde{w}_2(t,\theta)| \, d\theta$$

où P est un intervalle de taille de l'ordre d'une constante indépendante de ε.

$\tilde{w}_1$ et $\tilde{w}_2$ satisfont une simple loi de Burgers {le coefficient de dérivation ne dépend plus de x }. Le principe de stabilité L^1 s'applique au terme de droite qui se majore donc par $C(t)\,\varepsilon^2 \int_{\tilde{P}} |\tilde{w}_1(0,s) - \tilde{w}_2(0,s)| \, ds \leq C_3(t)\,\varepsilon^3$ puisque d'une part, on dispose d'une estimation L^∞ entre $w_1(0,s) = h_1(s)$ et $w_2(0,s) = h_2(s)$ et que d'autre part, le diamètre de $\tilde{P}$ est de l'ordre d'une constante.

Une fois la phase rendue linéaire et le problème ramené à une dimension d'espace, on a donc :

$$\begin{aligned} \varepsilon \int |w_1(t,x,\tfrac{x-l}{\varepsilon}) - w_2(t,x,\tfrac{x-l}{\varepsilon})| \, dx &\leq \varepsilon \int |[w_1 - \tilde{w}_1 + \tilde{w}_1 - \tilde{w}_2 + \tilde{w}_2 - w_2](t,x,\tfrac{x-l}{\varepsilon})| \, dx \\ &\leq \big(C_1(t) + C_2(t) + C_3(t)\big)\,\varepsilon^3 \qquad \{\varepsilon^{n+2} \text{ pour la dimension } n\} \end{aligned}$$

Résumons :

Si on note $\tilde{u}_\varepsilon$ la fonction construite en "recollant" les $u^{(k)}_{\varepsilon}\big(t,x,\varphi(x)/\varepsilon\big)$, c'est à dire en posant :

$$\tilde{u}_{\varepsilon|C^{\varepsilon}_{(k)}} \equiv \varepsilon\, u^{(k)}_{\varepsilon}\big(t,x,\varphi(x)/\varepsilon\big)_{|C^{\varepsilon}_{(k)}},$$

on dispose après sommation sur les (k) tels que $\varepsilon\,|(k)| \leq D$, de l'estimation :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ ,\ \| \varepsilon\, u(t,.,\varphi(.)/\varepsilon) - \tilde{u}_\varepsilon(t,.) \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(t)\, \varepsilon^2 .$$

On a donc localisé la variable x au niveau des deux systèmes à comparer et ce, en conservant une estimation adéquate.

Reste donc désormais à préciser les arguments avancés ci-dessus et à estimer {toujours localement} la différence L^1 entre $\tilde{u}_\varepsilon$ et $\tilde{v}_\varepsilon$.

3.3 Problème localisé en phase négligeable :

On rappelle que $v_\varepsilon^{(k)}(t,x)$ est solution de :

$$(3.2.1)\quad \begin{cases} \partial_t v_\varepsilon^{(k)}(t,x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}\Big(a_i(t,x)\,\frac{(v_\varepsilon^{(k)})^2}{2}\Big) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ v_\varepsilon^{(k)}(0,x) = \varepsilon\, h_\varepsilon^{(k)}\Big(\dfrac{\varphi(x)}{\varepsilon}\Big) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Une autre manière d'obtenir $v_\varepsilon^{(k)}(t,x)$ {cf chapitre II} est de résoudre :

$$(3.3)\quad \begin{cases} \partial_t w_\varepsilon^{(k)}(t,x,\theta) + \varepsilon \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}\Big(a_i(t,x)\,\frac{(w_\varepsilon^{(k)})^2(t,x,\theta)}{2}\Big) \\ \qquad + \partial_\theta\Big(\Upsilon(t,x)\,\dfrac{(w_\varepsilon^{(k)})^2(t,x,\theta)}{2}\Big) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ w_\varepsilon^{(k)}(0,x,\theta) = h(l_\varepsilon^{(k)},\theta) \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \end{cases}$$

puis de considérer $\varepsilon\, w_\varepsilon^{(k)}(t,x,\varphi(x)/\varepsilon)$.

Pour ε suffisamment petit, $\exists\, \alpha > 0$, tel que s'il existe $x \in C^{\varepsilon}_{(k)}$ avec $|\nabla_x \varphi(x)| \leq \alpha$, alors $w_\varepsilon^{(k)}$ est de classe C^∞ sur $\tilde{C}^{\varepsilon}_{(k)} \times [0,T] \times \mathbb{R}$ {les coefficients de (3.2.2.2) et (3.3) sont rendus petits}. Du coup les solutions de (3.2.2.2) et (3.3) sont régulières et se comparent localement {en norme L^1 } grâce aux méthodes classiques de l'optique géométrique à ε^{n+2} près { ε^{n+2} provient de l'intégration locale}.

3.4 Problème localisé en phase oscillante :

On regarde le cas complémentaire de celui qui précède :

$$\forall x \in \tilde{C}^{\varepsilon}_{(k)}, \quad |\nabla_x \varphi(x)| \geq \alpha \qquad \text{avec} \qquad \alpha > 0 \ \text{ fixé.}$$

Sous cette hypothèse, on procède à un changement de variables permettant de prendre en compte la géométrie de la phase φ.

3.4.1 Redressement de la phase.

On a obtenu l'estimation L^1 locale souhaitée entre la solution et le modèle {localisés en la première variable de $h(.,.)$} pour l'ensemble des cubes $\tilde{C}^{\varepsilon}_{(k)}$ pour lesquels il existe $x \in \tilde{C}^{\varepsilon}_{(k)}$ avec $|\nabla_x \varphi(x)| \leq \alpha$.

Si maintenant, $\forall x \in \tilde{C}^{\varepsilon}_{(k)}$, $|\nabla_x \varphi(x)| \geq \alpha$, il existe χ difféomorphisme C^∞ d'un voisinage $\tilde{V}^{(k)}_\varepsilon$ de $l^{(k)}_\varepsilon$ sur $\tilde{C}^{\varepsilon}_{(k)}$ avec :

$$\begin{cases} \chi : \tilde{V}^{(k)}_\varepsilon \longrightarrow \tilde{C}^{\varepsilon}_{(k)} \\ \chi(l^{(k)}_\varepsilon) = l^{(k)}_\varepsilon \qquad ; \qquad \varphi \circ \chi(y) = y_n - l^{n,(k)}_\varepsilon \end{cases}$$

où $l^{n,(k)}_\varepsilon$ désigne la $n^{\grave{e}m}$ coordonnée de $l^{(k)}_\varepsilon$ et $\tilde{V}^{(k)}_\varepsilon$ satisfait :

$$\sup_{y \in \tilde{V}^{(k)}_\varepsilon} d(y, l^{(k)}_\varepsilon) \leq C(t)\,\varepsilon .$$

En d'autres termes, χ "redresse" la phase en gardant la taille du voisinage de $l^{(k)}_\varepsilon$.

On pose $z_1(s,y) = v^{(k)}_\varepsilon\big(s, \chi(y)\big)$ et $z_2(s,y) = u\big(s, \chi(y), \theta\big)$. On transcrit ensuite les lois de conservation (3.2.1) et (3.2.2.2) dans les coordonnées (s,y) {changement de variable $\psi : (s,y) \longrightarrow \big(s = t\,, y = \chi^{-1}(x)\big)$}. Comparer $v^{(k)}_\varepsilon$ et u revient alors à comparer z_1 et la trace de z_2 sur l'hypersurface $S = \{(y,\theta)\,,\, \theta = \frac{y_n - l^{n,(k)}_\varepsilon}{\varepsilon}\}$ sur les sections en temps du cône de propagation $\tilde{K}$, transformé de K par ψ {$\tilde{K} = \psi^{-1}(K)$}. Le calcul fournit pour z_1 et z_2 les deux systèmes suivants :

$$(3.4.1.1) \quad \begin{cases} \partial_s z_1(s,y) + \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \partial_{y_l}\Big(a'_l(s,y)\,\frac{z_1^2}{2}\Big) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ z_1(0,y) = \varepsilon\, h\Big(\dfrac{y_n - l^{n,(k)}_\varepsilon}{\varepsilon}\Big) \qquad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \end{cases}$$

et

$$(3.4.1.2) \quad \begin{cases} \partial_s z_2(s,y) + \partial_\theta\Big(a'_n(s,y)\,\dfrac{z_2^2}{2}\Big) = 0 & \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ z_2(0,y) = h(\theta) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \end{cases}$$

où on considère $\varepsilon\, z_2\big(s, y, \frac{y_n - l_\varepsilon^{n,(k)}}{\varepsilon}\big)$ {la dépendance de la donnée initiale h vis à vis de ε et (k) est omise}.

3.4.2 La variable de propagation $\breve{\theta}$.

THEOREME 3.4.2.

(3.4.1.1) *peut s'approcher par* (3.4.2.1) *{où est localisé le* y *des coefficients de dérivation} :*

$$(3.4.2.1) \quad \begin{cases} \partial_s z_3(s,y) + \sum\limits_{l=1}^{n} \partial_{y_l} \Big(a_l'(s, l_\varepsilon^{(k)})\, \frac{z_3^2}{2} \Big) = 0 & \\ & \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times I\!R^n \\ z_3(0,y) \;=\; \varepsilon\, h\Big(\dfrac{y_n - l_\varepsilon^{n,(k)}}{\varepsilon} \Big) & \text{sur} \quad I\!R^n \end{cases}$$

avec l'estimation suivante : $\| z_3(s,.) - z_1(s,.) \|_{L^1(\tilde{K}_s)} \;\leq\; C(s)\, \varepsilon^{n+2}$
$\{ \tilde{K}_s$ *désigne la section au temps* s *de* $\tilde{K}\}$.

Preuve.

On se contente cette fois-ci de donner des indications de démonstration dans la mesure où celle-ci est calquée sur celle du chapitre I.

Le terme d'erreur à estimer est donné par :

$$\iiiint \sum_{l=1}^{n} sgn\big(z_3(s,y) - z_1(t,x)\big)\, \big(a_i'(s, l_\varepsilon^{(k)}) - a_i'(s,y)\big) \Big(\tfrac{z_3^2(s,y) - z_1^2(t,x)}{2} \Big) * \partial_{y_l} g(t,x,s,y)\; dt\, dx\, ds\, dy$$
$$- \iiiint \sum_{l=1}^{n} sgn\big(z_3(s,y) - z_1(t,x)\big)\, (\partial_{y_l} a_l')(s,y)\, \tfrac{z_3^2(s,y)}{2} * g(t,x,s,y)\; dt\, dx\, ds\, dy$$

Le premier terme s'interprète par dualité {cf chapitre I} : Lorsque la dérivée touche $\big(a_i'(s, l_\varepsilon^{(k)}) - a_i'(s,y)\big)$, on gagne du ε^2 grâce à l'estimation L^∞ de $\Big(\frac{z_3^2(s,y) - z_1^2(t,x)}{2}\Big)$ et ε^n provient de l'intégration locale. Lorsque la dérivée touche $sgn\big(z_3(s,y) - z_1(t,x)\big) \Big(\frac{z_3^2(s,y) - z_1^2(t,x)}{2}\Big)$, on obtient une mesure de Radon multipliée par $|z_3(s,y) - z_1(t,x)|\, \big(a_i'(s, l_\varepsilon^{(k)}) - a_i'(s,y)\big)$ qui est majoré {au voisinage de $l_\varepsilon^{(k)}$} par du ε^2, l'intégration locale fournissant là encore le ε^n complémentaire.
Quant au second terme, une estimation L^∞ donne directement du ε^{n+2}.

Dans le système (3.4.2.1), $\hat{y} = (y_1, ..., y_{n-1})$ n'intervient ni dans la condition initiale, ni dans les $a_l'(s, l_\varepsilon^{(k)})$. On en déduit que z_3 est indépendant de $\hat{y}$, ce qui signifie que l'information dans (3.4.2.1) est gouvernée par la variable y_n. En d'autres termes, z_3 est aussi solution de :

$$(3.4.2.2)\qquad \begin{cases} \partial_s z_3(s,y) + \partial_{y_n}\Big(a'_n(s,l_\varepsilon^{(k)})\,\dfrac{z_3^2}{2}\Big) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \Omega = [0,T]\times \mathbb{R}^n \\ z_3(0,y) = \varepsilon\, h\big(\dfrac{y_n - l_\varepsilon^{n,(k)}}{\varepsilon}\big) \qquad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \end{cases}$$

En répétant l'argument précédant { cf théorème (3.4.2) }, on peut comparer z_3 à $\tilde{z}_3$ solution de :

$$(3.4.2.3)\qquad \begin{cases} \partial_s \tilde{z}_3(s,y) + \partial_{y_n}\Big(a'_n(s,\hat{y},l_\varepsilon^{n,(k)})\,\dfrac{\tilde{z}_3^2}{2}\Big) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \Omega = [0,T]\times \mathbb{R}^n \\ \tilde{z}_3(0,y) = \varepsilon\, h\big(\dfrac{y_n - l_\varepsilon^{n,(k)}}{\varepsilon}\big) \qquad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \end{cases}$$

toujours avec une estimation valable à ε^{n+2} près.

On pose $\theta = (y_n - l_\varepsilon^{n,(k)})/\varepsilon$, puis on remarque que $z_4(s,\hat{y},\theta) = (1/\varepsilon)\,\tilde{z}_3(s,\hat{y},l_\varepsilon^{n,(k)} + \varepsilon\,\theta)$ est solution de :

$$(3.4.2.4)\qquad \begin{cases} \partial_s z_4(s,\hat{y},\theta) + \partial_\theta\Big(a'_n(s,\hat{y},l_\varepsilon^{n,(k)})\,\dfrac{z_4^2}{2}\Big) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sur} \quad \Omega = [0,T]\times \mathbb{R}^n \\ z_4(0,\hat{y},\theta) = h(\theta) \qquad \text{sur} \quad \mathbb{R}^n \end{cases}$$

c'est à dire précisément (3.4.1.2) où on a remplacé y par $(\hat{y}\,,\,l_\varepsilon^{n,(k)})$.

Finalement, pour comparer à ε^{n+2} près z_1 et z_2, il suffit de pouvoir comparer z_4 et z_2 avec la même estimation sur l'hyperplan $\theta = \frac{y_n - l_\varepsilon^{n,(k)}}{\varepsilon}$. Dans (3.4.1.2) et (3.4.2.4), $\hat{y}$ joue le rôle d'un paramètre que l'on "gèle" en considérant les solutions entropiques particulières construites au lemme (2.3.2) page 16.

L'intégration locale en $\hat{y}$ fournit du ε^{n-1}. Pour obtenir du ε^{n+2} {et donc après sommation sur les supports compacts de nos fonctions une estimation globale de l'ordre de ε^2 }, il suffit d'obtenir une estimation L^1 d'ordre ε^3 entre (3.4.1.2) et (3.4.2.4) à $\hat{y}$ fixé.

Ceci revient précisément à se poser le problème de la validité du modèle pour une loi scalaire en une dimension d'espace.

3.4.3 Le problème en une dimension d'espace.

On s'est donc ramené au problème scalaire en une dimension d'espace et à phase linéaire suivant :

$$(3.4.3.1) \quad \begin{cases} \partial_s u_\varepsilon(s,y) + \partial_y\Big(a(s,y)\,\dfrac{u_\varepsilon^2}{2}\Big) = 0 & \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R} \\ u_\varepsilon(0,y) = \varepsilon\, h(\dfrac{y-l}{\varepsilon}) & \text{sur} \quad \mathbb{R} \end{cases}$$

$y \in \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et périodique de période 1.

On s'interesse à la description de $u_\varepsilon(s,.)$ sur V_ε, voisinage de l tel que $\sup_{y \in V_\varepsilon} |y-l| \leq \varepsilon$. Plus précisément, on souhaite approcher u_ε par $v_\varepsilon(s,y) = \varepsilon\, w_y\big(s,(y-l)/\varepsilon\big)$ où $w_y(s,\theta)$ est solution du problème de Cauchy suivant {paramétré par $y \in \mathbb{R}$} :

$$(3.4.3.2) \quad \begin{cases} \partial_s w_y(s,y,\theta) + \partial_\theta\Big(a(s,y)\,\dfrac{w_y^2}{2}\Big) = 0 & \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R}^2 \\ w_y(0,y,\theta) = h(\theta) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

On rappelle {cf théorème 3.4.2 page 23} que l'on peut comparer (3.4.3.1) à $\tilde{u}_\varepsilon$ solution de (3.4.3.3) :

$$(3.4.3.3) \quad \begin{cases} \partial_s \tilde{u}_\varepsilon(s,y) + \partial_y\Big(a(s,l)\,\dfrac{\tilde{u}_\varepsilon^2}{2}\Big) = 0 & \text{sur} \quad \Omega = [0,T] \times \mathbb{R} \\ \tilde{u}_\varepsilon(0,y) = \varepsilon\, h(\dfrac{y-l}{\varepsilon}) & \text{sur} \quad \mathbb{R} \end{cases}$$

et ce, avec une bonne estimation locale :

$$(3.4.3.4) \qquad \| (\tilde{u}_\varepsilon - u_\varepsilon)(s) \|_{L^1(V_\varepsilon)} \leq C(s)\,\varepsilon^3 .$$

On remarque maintenant que $\sigma_\varepsilon(s,\theta) = (1/\varepsilon)\,\tilde{u}_\varepsilon(s, l+\varepsilon\,\theta)$ est solution de (3.4.3.2) avec $y = l$, c'est à dire que $\sigma_\varepsilon(s,\theta) = w_l(s,\theta)$.

Par suite $\int_{V_\varepsilon} |\tilde{u}_\varepsilon(s,y) - \varepsilon\, w_y\big(s,(y-l)/\varepsilon\big)|\; dy$

$$\leq \varepsilon^2 \int_{[-C;C]} |w_l(s,\theta) - w_{l+\varepsilon\,\theta}(s,\theta)|\; d\theta .$$

Admettons provisoirement le théorème suivant :

THEOREME.

Il existe une constante C indépendante de ε et de l,

$$\int_{[-C;C]} |w_l(s,\theta) - w_{l+\varepsilon\,\theta}(s,\theta)|\; d\theta \leq C(s)\,\varepsilon .$$

On déduit alors de (3.4.3.4) et de ce théorème que :

$$\int_{V_\varepsilon} |u_\varepsilon(s,y) - \varepsilon\, w_y\Big(s,\frac{y-l}{\varepsilon}\Big)|\; dy \leq C(s)\,\varepsilon^3 .$$

ce que l'on souhaitait obtenir.

La preuve de ce théorème repose sur deux lemmes :

Lemme 3.4.3.1. *Pour tout* s *et* y, $w_y(s,.) \in BV_{loc}(\mathbb{R})$. *De plus, pour tout couple d'intervalles compacts* (I, J) *fixé, il existe des constantes* C_0 *et* C_1 *telles que l'on ait pour tout* $(s,y) \in [0,T] \times I$, *les estimations suivantes :*

(i) $\| w_y(s,.) \|_{BV(J)} \leq C_0$.

(ii) $\| w_y(s,.) - w_{y'}(s,.) \|_{L^1(J)} \leq C_1 \, |y - y'|$.

Preuve.

(i) A y fixé, w_y est solution d'une loi de Burgers. Sa régularité $BV_{loc}(\mathbb{R})$ et son caractère borné dans cet espace résulte des théorèmes classiques sur les solutions de lois de conservation.

(ii) Quant à la comparaison L^1 donnée, elle s'obtient grâce à des calculs analogues à ceux développés au chapitre I : Il suffit de majorer la quantité $|a(s,y) - a(s,y')|$ par $C \, |y - y'|$.

Remarque.

Le lemme (3.4.3.1) exprime que l'application ψ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $L^1(J)$ définie par $\psi(y) = w_y(s,.)$ est lipshitzienne de rapport C_1.

C'est la traduction analytique d'un fait géométrique : Les surfaces de choc de (3.4.3.2) ont une normale unitaire ν qui satisfait l'équation de Rankine-Hugueniot : $\nu_t\,[u] + \nu_\theta\,[a(s,y)\,(u^2/2)] = 0$. Si sur le choc ν_θ vaut 0 alors ν_t vaut 1 et donc $[u] = 0$, ce qui est absurde. ν_θ est donc différent de zéro, ce qui signifie que les surfaces de choc sont transverses aux hyperplans $y = C$ sur lesquels on regarde la norme L^1.

Lemme 3.4.3.2. *Soient* I *et* J *deux intervalles bornés d'intérieur non vide. On se donne* $w : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$, *satisfaisant :*

(i) $w \in L^\infty(I \times J)$.

(ii) pour tout y, $h_y : \theta \longrightarrow w(y,\theta) \in BV(J)$.

$h_y(.)$ *est définie en tout point par sa valeur moyenne* $\left(\frac{h_y^+(\theta)+h_y^-(\theta)}{2}\right)$ *{il s'agit d'une fonction à variations bornées d'une variable réelle} et satisfait l'estimation* $\| h_y \|_{BV(J)} \leq C_0$.

(iii) $\forall\,(y,y') \in I \times I,\ \int_J |w(y,\theta) - w(y',\theta)| \, d\theta \leq C_1 \, |y - y'|$.

Alors $w \in BV(I \times J)$ *et si* $l + \varepsilon\,\theta \in I$ *pour tout* θ *dans* J,

$$\int_J |w(l + \varepsilon\,\theta, \theta) - w(l,\theta)| \, d\theta \leq C\,\varepsilon. \tag{3.4.3.5}$$

où l *désigne le milieu de* I.

Le théorème énoncé dans ce chapitre est une application directe du lemme (3.4.3.2) à la fonction : $(y,\theta) \longrightarrow w_y(s,\theta)$.

Preuve. Soit $\varrho < \inf(|I|; |J|)$. On pose :
$\bar{I}^\varrho = \{ x \in I,\ d(x, Fr\,I) \geq \varrho \}$ et $\bar{J}^\varrho = \{ x \in J,\ d(x, Fr\,J) \geq \varrho \}$.

On commence par établir (3.4.3.5) sur $\bar{J}^\varrho$ pour ϱ quelconque avec une constante C indépendante de ϱ. L'inégalité (3.4.3.5) s'obtient alors par passage à la limite pour ϱ tendant vers 0.

ϱ étant maintenant fixé, on régularise w :

Soit $\psi_\mu(y,\theta) = (1/\mu^2)\,\varphi(y/\mu)\,\varphi(\theta/\mu)$, avec $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, paire, positive, d'intégrale un et à support compact. On pose :

$$v_\mu(y,\theta) \;=\; (\psi_\mu * w)(y,\theta) \;=\; \iint_{\mathbb{R}^2} w(y-z,\theta-\theta')\;\psi_\mu(z,\theta')\;dz\,d\theta'\,.$$

Pour $\mu << \varrho$, $v_\mu(y,\theta)$ est définie sur $\bar{I}^\varrho \times \bar{J}^\varrho$. Du fait de la régularisation effectuée, v_μ est une fonction C^∞ de ses deux variables. Par ailleurs, pour $(y,y') \in \bar{I}^\varrho \times \bar{I}^\varrho$,

$$\text{(3.4.3.6)}\qquad \int_{\bar{J}} |v_\mu(y,\theta) - v_\mu(y',\theta)|\;d\theta$$

$$\leq\; \iint_{z,\theta'} \Big\{ \int_J |w(y-z,\theta) - w(y'-z,\theta)|\;d\theta \Big\}\;\psi_\mu(z,\theta')\;dz\,d\theta'$$

$$\leq\; C_1 \iint_{z,\theta'} |y-y'|\;\psi_\mu(z,\theta')\;dz\,d\theta' \;\leq\; C_1\,|y-y'|\,.$$

v_μ satisfait donc aussi l'inégalité (ii) et ce avec la même constante C_1 que celle donnée pour w. On pose :

$$C_\mu \;=\; \sup_{(y,\theta)\,\in\,\bar{I}^\varrho\times\bar{J}^\varrho} |\partial_y v_\mu(y,\theta)|\,.$$

On a alors pour $(y,y') \in \bar{I}^\varrho \times \bar{I}^\varrho$,

$$\frac{|v_\mu(y,\theta) - v_\mu(y',\theta)|}{|y-y'|} \;=\; \Big|\int_0^1 \partial_y v_\mu(y + s(y'-y),\theta)\;ds\,\Big| \;\leq\; C_\mu\,.$$

$$\lim_{y'\to y} \frac{|v_\mu(y,\theta) - v_\mu(y',\theta)|}{|y-y'|} \;=\; |\partial_y v_\mu(y,\theta)|\,.$$

Le théorème de Lebesgues s'applique et on a, après passage à la limite $\{\,y' \longrightarrow y\,\}$ dans (3.4.3.6) :

$$\int_{\bar{J}} |\partial_y v_\mu(y,\theta)|\;d\theta \;\leq\; C_1\,.$$

De sorte que :

$$\text{(3.4.3.7)}\quad \int_J |v_\mu(l+\varepsilon\,\theta,\theta) - v_\mu(l,\theta)|\;d\theta \;\leq\; \int_J \int_{[l;l+\varepsilon\,\theta]} |\partial_y v_\mu(z,\theta)|\;dz\,d\theta$$

$$\leq\; \int_{[l-\varepsilon\,D\,;\,l+\varepsilon\,D]} \Big\{ \int_{\bar{J}} |\partial_y v_\mu(z,\theta)|\;d\theta \Big\}\;dz \;\leq\; 2\,\varepsilon\,C_1\,D$$

$$\text{avec}\qquad D \;=\; |J|\,.$$

Pour obtenir (3.4.3.5) sur l'intervalle $\bar{J}^\varrho$, il faut pouvoir passer à la limite dans l'expression (3.4.3.7) pour $\mu \longrightarrow 0$. Ceci n'est pas immédiat : On a la convergence de v_μ vers w pour presque tout $(y,\theta) \in \bar{I}^\varrho \times \bar{J}^\varrho$ mais non pour preque tout point de la droite D_ε d'équation $y = l + \varepsilon\,\theta$. Pour pouvoir passer à la trace, il faut être un peu plus précis.

On commence par remarquer que v_μ est une suite uniformément bornée de $BV(\bar{I}^\varrho \times \bar{J}^\varrho)$.

En effet, v_μ est uniformément bornée dans $L^1(\bar{I}^\varrho \times \bar{J}^\varrho)$ et pour toute $\varphi \in C_0(\bar{I}^\varrho \times \bar{J}^\varrho)$,

$$(\alpha) \qquad |\langle \partial_y v_\mu, \varphi\rangle| = |\textstyle\iint_{y,\theta} \partial_y v_\mu(y,\theta)\,\varphi(y,\theta)\;dy\,d\theta|$$
$$\leq \|\varphi\|_{L^\infty} \int_y \left\{\int_\theta |\partial_y v_\mu(y,\theta)|\,d\theta\right\} dy \;\leq\; C_1\,|\bar{I}^\varrho|\,\|\varphi\|_{L^\infty}$$

$$(\beta) \qquad |\langle \partial_\theta v_\mu, \varphi\rangle| = |\langle(\partial_\theta w) * \psi_\mu, \varphi\rangle|$$
$$= \iint_{y,\theta} w(y,\theta)\,\partial_\theta(\varphi * \psi_\mu)\,dy\,d\theta = \int_y \left\{\int_\theta w(y,\theta)\,\partial_\theta(\varphi * \psi_\mu)\,d\theta\right\} dy$$
$$\leq \int_{y \in \bar{I}^\varrho} \|w(y,.)\|_{BV(\bar{J}^\varrho)}\,\|\varphi * \psi_\mu(y,.)\|_{L^\infty(\bar{I}^\varrho)}\;dy \;\leq\; C_0\,|\bar{I}^\varrho|\,\|\varphi\|_{L^\infty}$$

Comme par ailleurs, v_μ converge dans $L^1(\bar{I}^\varrho \times \bar{J}^\varrho)$ vers w {elle converge presque partout vers w et est uniformément bornée d'après (i)} et ses dérivées sont uniformément bornées dans $L^1(\bar{I}^\varrho \times \bar{J}^\varrho)$, on a $w(y,\theta) \in BV(\bar{I}^\varrho \times \bar{J}^\varrho)$.

Soit $\hat{v}$ la fonction moyennée associée à w. $\hat{v}$ est définie en dehors d'un ensemble de H^1 mesure nulle et donc en particulier presque partout sur la droite D_ε {d'équation $y = l + \varepsilon\,\theta$}. v_μ, régularisée de w, converge vers $\hat{v}$ en tout point régulier de w. L'ensemble de ces points est de mesure totale sur D_ε {car de H^1 mesure nulle sur $I \times J$}. Par conséquent, $v_{\mu|D_\varepsilon}$ converge presque partout sur D_ε vers $\hat{v}_{|D_\varepsilon}$ {en restant bornée !}. On a donc :

$$\lim_{\mu \to 0} \int_{\bar{J}^\varrho} |v_\mu(l + \varepsilon\,\theta, \theta) - v_\mu(l,\theta)|\;d\theta \;=\; \int_{\bar{J}^\varrho} |\hat{v}(l + \varepsilon\,\theta, \theta) - \hat{v}(l,\theta)|\;d\theta$$

Le terme de gauche vérifiant (3.4.3.7), on a, par passage à la limite :

$$(3.4.3.8) \qquad \int_{\bar{J}^\varrho} |\hat{v}(l + \varepsilon\,\theta, \theta) - \hat{v}(l,\theta)|\;d\theta \;\leq\; 2\,\varepsilon\,C_1\,D$$

Reste à établir un lien entre (3.4.3.8) et $\int_{\bar{J}^\varrho} |w(l + \varepsilon\,\theta, \theta) - w(l,\theta)|\;d\theta$. On utilise à cet effet le théorème de Vol'pert {cf page 14} avec le choix particulier de $a = (0_{(y)}, 1_{(\theta)})$. On a : $\hat{v} \sim^a \bar{w}_a$.

Mais d'après l'hypothèse (ii), $\bar{w}_a(y,\theta)$ est pour presque tout y définie pour tout θ et, lorsqu'elle est définie, vaut identiquement $w(y,\theta)$. w et $\hat{v}$ coincident donc presque partout en restriction à D_ε et on peut dès lors écrire :

$$\int_{\bar{J}^\varrho} |\hat{v}(l + \varepsilon\,\theta, \theta) - \hat{v}(l,\theta)|\;d\theta \;=\; \int_{\bar{J}^\varrho} |w(l + \varepsilon\,\theta, \theta) - \hat{v}(l,\theta)|\;d\theta$$

On pose $h(y) = \int_{\bar{J}^\varrho} |w(y,\theta) - \hat{v}(y,\theta)|\, d\theta$. On a donc d'après (3.4.3.8) :

$$\int_{\bar{J}^\varrho} |w(l+\varepsilon\,\theta,\theta) - w(l,\theta)|\ d\theta\ \leq\ 2\ \varepsilon C_1\ D\ +\ h(l)$$

On termine la preuve du lemme (3.4.3.2) en prouvant que h est identiquement nulle.

$$\begin{aligned}
|h(y) - h(y')| &\leq \int_{\bar{J}^\varrho} \big|\,|w(y,\theta) - \hat{v}(y,\theta)| - |w(y',\theta) - \hat{v}(y',\theta)|\,\big|\ d\theta \\
&\leq \int_{\bar{J}^\varrho} |w(y,\theta) - w(y',\theta) - \hat{v}(y,\theta) + \hat{v}(y',\theta)|\ d\theta \\
&\leq \int_{\bar{J}^\varrho} |w(y,\theta) - w(y',\theta)|\ d\theta + \int_{\bar{J}^\varrho} |\hat{v}(y,\theta) - \hat{v}(y',\theta)|\ d\theta \\
&\leq C_1\ |y - y'| + \int_{\bar{J}^\varrho} |\hat{v}(y,\theta) - \hat{v}(y',\theta)|\ d\theta
\end{aligned}$$

Comme v_μ converge vers $\hat{v}$ en dehors d'un ensemble de H_1 mesure nulle, v_μ converge en particulier vers $\hat{v}$ pour presque tout θ à y fixé. On a donc :

$$\lim_{\mu\to 0} \int_{\bar{J}^\varrho} |v_\mu(y,\theta)\ -\ v_\mu(y',\theta)|\ d\theta\ =\ \int_{\bar{J}^\varrho} |\hat{v}(y,\theta) - \hat{v}(y',\theta)|\ d\theta$$

Comme par ailleurs,

$$\begin{aligned}
&\int_{\bar{J}^\varrho} |v_\mu(y,\theta) - v_\mu(y',\theta)|\ d\theta \\
&\qquad \leq \iint_{\theta\,\in\,\bar{J}^\varrho,\ z\,\in\,[y,y']} |\partial_z v_\mu(z,\theta)|\ dz\, d\theta\ \leq\ C_1\ |y - y'|
\end{aligned}$$

on a, $|h(y) - h(y')| \leq 2\ C_1\, |y - y'|$.

En particulier h est continue {puisque lipschitzienne} et par suite :

$$\lim_{\mu\to 0} \int_z \varphi_\mu(z)\ h(y-z)\ dz\ =\ h(y)$$

Mais le terme de gauche s'écrit

$$\int_z \varphi_\mu(z)\ h(y-z)\ dz\ =\ \iint_{z,\theta} \varphi_\mu(z)\ |w(y-z,\theta) - \hat{v}(y-z,\theta)|\ dz\, d\theta$$

et comme w et $\hat{v}$ coincident presque partout sur $\bar{I}^\varrho \times \bar{J}^\varrho$, le terme de droite est identiquement nul et on obtient après passage à la limite $\{\,\mu \longrightarrow 0\,\}$ que $h(y) = 0$, ce que l'on souhaitait obtenir.

References

1. R. J. DiPerna , A. Majda, *The validity of nonlinear geometric optics for weak solutions of conservation laws*, Comm. Math. Physics (1985).

2. J. Hunter , J. Keller, *Weakly Nonlinear High Frequency Waves*, Comm. Pure. App. Math. **36** (1983), 547–569.

3. J. L. Joly , G.Metivier , J.Rauch, *Resonant One Dimensional Nonlinear Geometric Optics*, Preprint (1985).

4. L. A. KALYAKIN, *Long Waves Asymptotics of Solutions of Nonlinear Systems of equations with dispersion*, Dokl. An. SSSR **288** (1986).

5. S. N. Kruzkov, *First order quasilinear equations in several independant variables*, Math. USSR. Sbornik. **10** (1970).

6. Tai Ping Liu, *Decay to N-waves of solutions of general systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*, Comm. Math. Physics. (1985).

7. A. I. Volpert, *The spaces BV and quasilinear equations*, Math. USSR. Sbornik. **2** (1967).