PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

BELHASSEN DEHMAN
LUC ROBBIANO

La propriété du prolongement unique pour un système elliptique. Le système de Lamé

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992, fascicule 1
« Fascicule d'équations aux dérivées partielles », , p. 208-218
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992___1_208_0>

La propriété du prolongement unique pour un système elliptique. Le système de Lamé

BELHASSEN DEHMAN*

et

LUC ROBBIANO**

0. Introduction

Les déformations élastiques d'un solide sont régies par un système $n \times n$ d'équations aux dérivées partielles connu sous le nom de système de Lamé (cf. [**2**]). Dans le cas d'un solide homogène et isotrope, le système de Lamé linéaire s'écrit

$$L(x,D) = B(x,D) + R(x,D) \tag{0.1}$$

où $R(x,D)$ est un opérateur différentiel matriciel d'ordre ≤ 1 et où la partie principale $B(x,D)$ est donnée par :

$$B(x,D) = -\mu(x)\Delta \cdot I_n - \nu(x)\,\mathrm{grad} \cdot \mathrm{div}\ . \tag{0.2}$$

(Les hypothèses précises seront énoncées au §.1.)

En supposant le système B elliptique (ce qui se traduit par $\mu(\mu+\nu)\neq 0$), nous établissons dans cet article la propriété du prolongement unique pour les solutions u d'inéquations différentielles de la forme

$$|Bu| \leq C \sum_{|\alpha|\leq 1} |D^\alpha u|\ . \tag{0.3}$$

La littérature concernant ce type de problèmes est relativement peu fournie. En fait, hormis une "remarque" de HÖRMANDER ([**1**], chapitre 8), on ne dispose pas d'une méthode générale qui permet d'établir une

*Université de Tunis, Département de Mathématiques, Campus le "Belvèdère", Tunis, Tunisie.

**Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, 91405 Orsay Cedex, et Université de Paris Val de Marne, U.F.R. de Sciences, Av. du Général De Gaulle, 94010 Créteil Cedex, France.

inégalité de Carleman pour des systèmes mêmes raisonnables. Cette méthode consiste à se ramener au cas scalaire en multipliant le système par la matrice des cofacteurs. Elle exige beaucoup de régularité des coefficients et surtout, elle élève la multiplicité des caractéristiques; ce qui rend totalement inopérant la plupart des théorèmes permettant d'établir une inégalité de Carleman, ou même un résultat d'unicité.

Signalons que cette démarche permet de conclure dans le cas du système de Lamé d'ordre 3 grâce à un résultat de WATANABÉ [8]. Nous citerons aussi une remarque de SAUT et SHEURER [6] sur le système de Lamé d'ordre 2, un travail de VOGELSANG [7] et de JERISON [2] sur des problèmes voisins.

La méthode que nous adoptons ici est différente et se base essentiellement sur un calcul pseudo-différentiel à grand paramètre. Suivant LERNER [4], nous considérons le symbole de Weyl b de l'opérateur $B(x,D)$. Après conjugaison par le poids, on réduit par une Jordanisation microlocale le symbole b en un symbole presque diagonal $\widetilde{b}$, comportant un seul bloc de Jordan d'ordre 2. Cette géométrie particulière de $\widetilde{b}$ permet d'établir une bonne inégalité de Carleman; on en déduit alors une inégalité sur b.

1. Notations - Enoncés des résultats

Dans tout le texte Ω désignera un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ le point courant de Ω et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ la variable duale de x. On notera I_n la matrice identité de $\mathbb{R}^n$.

D'autre part pour $\gamma \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ réelle, on notera par ζ le vecteur $\xi + i\gamma\varphi'$ de composantes $\xi_j + i\gamma \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_j}$, $1 \leq j \leq n$: on posera pour $s \in \mathbb{R}$, $\|u\|_{s,\gamma} = \left(\int \left(\gamma^2 + |\xi|^2 \right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2}$. Et, enfin, on conservera la notation standard $D_{x_j} = \dfrac{1}{i} \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

On rappelle, à présent, la notion de prolongement unique.

DÉFINITION 1.1. Nous dirons qu'un opérateur P possède la propriété de prolongement unique dans un ouvert connexe Ω si $u \in H^2(\Omega)$ et $Pu = 0$ dans Ω impliquent $u \equiv 0$ dans Ω dès que $u = 0$ près d'un point de Ω.

Considérons maintenant l'opérateur B de (0.2). Son symbole principal est

$$B(x,\xi) = \mu(x) \, |\xi|^2 + \nu(x) \xi^t \xi \ .$$

Nous supposerons les coefficients μ et ν réels et dans $C^\infty(\Omega)$ et

(H) $\qquad B$ est elliptique sur Ω .

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 1.2. *Sous les hypothèses précédentes, toute fonction* u *de* $H^2(\Omega)$ *solution de* (0.3) *est nulle sur* Ω *dès que* $u \equiv 0$ *près d'un point de* Ω.

Nous en déduisons le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1.3. *Dans le cadre du théorème* 1.2, *le système de Lamé décrit en* (0.1) *possède la propriété de prolongement unique, pour tout opérateur* $R(x,D)$ *à coefficients dans* $L^\infty(\Omega)$.

REMARQUES.

i) La formulation du théorème 1.2 et du corollaire qui le suit autorisent de mettre dans l'opérateur de Lamé certains termes non linéaires d'ordre ≤ 1.

ii) Grâce au calcul paradifférentiel à grand paramètre développé par MÉTIVIER [**5**], on peut remplacer les coefficients μ et ν de $B(x,D)$ dans $C^\infty(\Omega)$ par des coefficients à régularité limitée, $C^k(\Omega)$.

iii) La preuve du prolongement unique consistera à établir une inégalité de Carleman (donc à prouver un théorème d'unicité) par rapport à toute hypersurface $\{\psi(x) = \psi(x_0)\}$ de Ω. Ce qui souligne bien le caractère elliptique de $B(x,D)$.

Le point de l'article est donc de prouver le théorème suivant.

THÉORÈME 1.4. *Pour toute surface* $S : \{\psi(x) = 0\}$, *on pose* $\varphi = \dfrac{e^{\beta\psi}}{\beta}$. *Alors il existe* $C > 0$, $\beta_0 > 0$ *tels que pour tout* $\beta \geq \beta_0$, *il existe* γ_0 *tel que pour* $\gamma \geq \gamma_0$ *et* $u \in C^\infty$ *à support dans* $\left\{x / -\dfrac{1}{\beta} \leq \psi \leq \dfrac{1}{\beta}\right\}$. *On a*

$$\beta \sum_{|\alpha|\leq 2} \gamma^{2-2|\alpha|} \left\|e^{\gamma\varphi} D^\alpha u\right\|^2 \leq C \left\|e^{\gamma\varphi} B(x,D) u\right\|^2 .$$

La preuve du théorème 1.2 est une conséquence classique du théorème 1.4 (voir par exemple HÖRMANDER [**1**]).

2. Preuve du théorème 1.4

On dit que $a(x,\xi,\gamma) \in \Sigma_\gamma^m$ si $a(x,\xi,\gamma)$ est $C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ et

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi,\gamma)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(|\xi|+\gamma)^{m-|\beta|} .$$

Si $a(x,\xi,\gamma) \in \sum_\gamma^m$ alors $\operatorname{op}^w(a) : H_\gamma^{s+m} \to H_\gamma^s$, c'est-à-dire $\|\operatorname{op}^w(a)u\|_{s,\gamma} \leq C\,\|u\|_{s+m,\gamma}$.

Modulo des termes d'ordre 1, on peut écrire l'opérateur sous la forme suivante

$$B = \left(\sum_{j=1}^n D_{x_j} \cdot \mu(x) D_{x_j}\right) \mathrm{Id} + \sum_{j,k=1}^n \left(D_{x_j} \cdot \frac{\nu}{2} \cdot D_{x_k} + D_{x_k} \cdot \frac{\nu}{2} \cdot D_{x_j}\right) e_j \otimes e^k$$

où e_j est la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Un calcul élémentaire (il suffit de remarquer que $e^{\gamma\varphi}(D_{x_j}\, e^{\gamma\varphi}) = D_{x_j} + i\gamma\varphi'_j$ et d'appliquer le calcul symbolique) montre que modulo des termes d'ordre 0, le symbole de Weyl de l'opérateur $e^{\gamma\varphi}(Be^{-\gamma\varphi}\cdot)$ est $b(x,\xi) = \mu^t\zeta\zeta\,\mathrm{Id} + \nu\cdot\zeta\cdot{}^t\zeta$ où $\zeta = \xi + i\gamma\varphi'(x)$.

Le plan de la preuve est le suivant :

1) Etude de b dans une base adaptée
2) Inégalité de Carleman dans cette base
3) Déduction de l'inégalité de Carleman pour l'opérateur B.

Recherche des vecteurs propres de b

Remarquons tout d'abord que le $\det(b)$ est $(\mu+\nu)\mu^{n-1}({}^t\zeta\zeta)^n$; en effet si ζ et $\bar\zeta$ sont libres, on peut écrire dans une base $\eta_1 \ldots \eta_{n-2}$, ζ, $\bar\zeta$ (où η_i sont orthogonaux à ζ et $\bar\zeta$ c'est-à-dire ${}^t\eta_i \cdot \bar\zeta = 0$, ${}^t\eta_i \cdot \zeta = 0$) la matrice b comme suit

$$(2.1) \qquad \begin{pmatrix} \mu({}^t\zeta\zeta) & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ 0 & & \mu({}^t\zeta\zeta) & & \\ & & & (\mu+\nu)({}^t\zeta\zeta) & \nu|\zeta|^2 \\ & & & & \mu\zeta\zeta \end{pmatrix}$$

si ζ et $\bar{\zeta}$ ne sont pas libres, dans une base $\theta_1 \ldots \theta_{n-1}, \zeta$ (avec ${}^t\theta_i \bar{\zeta} = 0$) on a b qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mu({}^t\zeta\zeta) & & & \\ & \ddots & & O \\ & & \ddots & \\ O & & \mu({}^t\zeta\zeta) & \\ & & & (\mu+\nu)({}^t\zeta\zeta) \end{pmatrix}.$$

Donc loin de ${}^t\zeta\zeta = 0$ la matrice b est inversible. Nous travaillerons près de ${}^t\zeta\zeta = 0$ et donc dans cette région ζ et $\bar{\zeta}$ sont libres.

Notons P la matrice

$$P = \frac{1}{|\zeta|}\left(\eta_1, \ldots, \eta_{n-2}, \zeta, \bar{\zeta}\right)$$

où η_i, ζ, $\bar{\zeta}$ sont considérés comme des vecteurs colonnes. $(\eta_1, \ldots, \eta_{n-2})$ est une base de $(\zeta, \bar{\zeta})^{\perp}$ et il est clair qu'on peut choisir cette base dépendant d'une manière C^∞ de ζ et $\bar{\zeta}$ près de chaque point ζ tel que ${}^t\zeta\zeta = 0$.

Nous noterons $\widetilde{b}$ la matrice dans cette base. On a :

$$\widetilde{b} = P^{-1} b P \; .$$

($\widetilde{b}$ est de la forme (2.1)).

LEMME 2.1. *Soit* $q(x,\xi) = {}^t(\xi + i\gamma\varphi')(\xi + i\gamma\varphi')$ *avec* $\varphi = \dfrac{e^{\beta\psi}}{\beta}$ *alors il existe* $C > 0$ *et* $\beta_0 > 0$ *tels que pour tout* $\beta \geq \beta_0$, *il existe* γ_0 *tel que pour tout* $\gamma \geq \gamma_0$ *et* u *à support dans* $\left\{x / -\dfrac{1}{\beta} \leq \psi \leq \dfrac{1}{\beta}\right\}$, *alors*

$$\|q(x,D)u\|^2 \geq C\frac{\beta}{\gamma}\,\|u\|^2_{2,\gamma} \; .$$

REMARQUE. Nous insistons sur le fait que C ne dépend ni de γ ni de β.

La preuve est classique (voir HÖRMANDER [1], théorème 8.3.1), nous avons simplement précisé les constantes.

Nous noterons $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $\widetilde{u} = (u_1, \ldots, u_{n-2})$.

LEMME 2.2. *Avec les notations du lemme* 2.1, *nous avons l'estimation suivante :*

$$\left\|M \operatorname{op}^w(\widetilde{b})u\right\|^2 \geq \frac{C\beta}{\gamma}\,\|\widetilde{u}\|^2_{2,\gamma} + \frac{C\beta}{\gamma}\,\|u_n\|^2_{2,\gamma} + \frac{C\beta^2}{\gamma^2}\,\|u_{n-1}\|^2_{2,\gamma} \geq \frac{C\beta}{\gamma}\,\|Mu\|^2_{2,\gamma}$$

avec $M = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\sqrt{\beta} \times \gamma^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *où* C *ne dépend que de minorants et majorants de* $|\mu|$, $|\nu|$, $|\mu+\nu|$ *mais pas de* β *et* γ.

α ***doit être plus petit qu'une constante positive ne dépendant que de minorants et de majorants*** $|\mu|$, $|\nu|$, $|\mu+\nu|$.

PREUVE : La majoration de $\widetilde{u}$ et u_n est une simple application du lemme 2.1 aux $n-2$ premières composantes et à la $n-$ième.

La minoration de la $(n-1)-$ième ligne s'obtient de la manière suivante. Le terme $\gamma^{-1/2}$ de M permet d'affaiblir la $(n-1)-$ième ligne de $\widetilde{b}$ de sorte que le terme en u_n peut être absorbé par la majoration déjà obtenue sur u_n.

Estimation pour b

Le but est de prouver l'estimation suivante :

PROPOSITION 2.3. *Avec les notations introduites, il existe* $C > 0$, *tels que pour tout* $\beta > 0$ *; il existe* $\gamma_0 > 0$ *tels que pour tout* $\gamma \geq \gamma_0$, *on a :*

$$\frac{\beta}{\gamma^2} \|u\|^2_{2,\gamma} \leq C \left\|\mathrm{op}^w(b)u\right\|^2 \ .$$

Nous avons vu plus haut que près de ${}^t\zeta\zeta = 0$ b et $\widetilde{b}$ sont semblables, ce que nous allons exploiter pour prouver l'inégalité sur b de celle sur $\widetilde{b}$. Loin de ${}^t\zeta\zeta = 0$, b est inversible, l'inégalité est alors facile.

LEMME 2.4. *Soit* $\psi_\varepsilon(x,\xi,\gamma)$ *valant* 0 *pour* $|{}^t\zeta\zeta| < \varepsilon|\zeta|^2$ *et* 1 *pour* $|{}^t\zeta\zeta| \geq 2\varepsilon|\zeta|^2 \cdot \psi_\varepsilon \in \Sigma^0_\gamma$. *Alors pour tout* ε *et* β *il existe* $C_{\varepsilon,\beta}$ *tel que*

$$\left\|\mathrm{op}^w(\psi_\varepsilon)u\right\|^2_{2,\gamma} \leq C_{\varepsilon,\beta}\left[\left\|\mathrm{op}^w(b)u\right\|^2 + \|u\|^2_{1,\gamma}\right] .$$

PREUVE : On a

$$\mathrm{op}^w(b^{-1}\psi_\varepsilon)\,\mathrm{op}^w(b) = \mathrm{op}^w(\psi_\varepsilon) + R^\varepsilon_{-1}$$

où $R^\varepsilon_{-1} \in \mathrm{op}^w(\Sigma^{-1}_\gamma)$ ce qui donne l'inégalité, car $b^{-1}\psi_\varepsilon \in \Sigma^{-2}_\gamma$.

La majoration de b près de ${}^t\zeta\zeta = 0$ est plus longue. La présence du M dans l'estimation du lemme 2.2 pose le problème suivant : a quelle condition sur $A \in \mathrm{op}^w(\Sigma^0_\gamma)$ a-t-on $\|M\,Au\| \leq C\,\|M\,u\|$? Sans hypothèse supplémentaire cette estimation est fausse en général.

LEMME 2.5. *Soit* $a \in \Sigma_\gamma^m$, $a(x,\xi,\gamma) = (a_{ij}(x,\xi,\gamma))_{1\le i,j\le n}$ *tel que* $a_{i,n-1} = 0$ *(modulo* Σ_γ^{m-1}*) pour* $i \neq n-1$ *(c'est-à-dire* $a(x,\xi,\gamma)e_{n-1} = \lambda(x,\xi,\gamma)e_{n-1}$ *(modulo* Σ_γ^{m-1}*) si on note* (e_j) *la base), alors*

$$\|M \operatorname{op}^w(a)u\|_{s,\gamma} \le C\,\|Mu\|_{s+m,\gamma}$$

avec C *ne dépendant que de semi-norme de* $a(x,\xi,\gamma)$ *mais pas de* γ.

Ceci est d'une vérification immédiate et laissée au lecteur.

L'inégalité du lemme 2.2 fait intervenir $\widetilde{b} = P^{-1}bP$. L'idée du calcul est de poser $u = Pv$ et de majorer

$$\begin{aligned}\|u\| = \|Pv\| \le \|v\| \le \|\widetilde{b}v\| &= \|P^{-1}bPv\| \\ &\le \|bPv\| = \|bu\| \ .\end{aligned}$$

Dans le calcul formel ci-dessus on a identifié opérateur et symbole et on n'a pas précisé les normes.

Le but du calcul qui suit est essentiellement d'écrire

$$\begin{aligned}\operatorname{op}^w(\widetilde{b}) &= \operatorname{op}^w(P^{-1}bP) \\ &= \operatorname{op}^w(P^{-1})\operatorname{op}^w(b)\operatorname{op}^w(P)\end{aligned}$$

modulo les restes du calcul symbolique et modulo les troncatures. Ce sont d'ailleurs les restes du calcul symbolique qui vont poser problème.

Dans le calcul qui suit nous allons omettre les troncatures localisant près de $x_0 = 0$ et près de chaque point de ${}^t\zeta\zeta = 0$. On a

$$\widetilde{b} = P^{-1}bP$$

et donc

$$\operatorname{op}^w(P^{-1})\operatorname{op}^w(b)\operatorname{op}^w(P) = \operatorname{op}^w(P^{-1}bP) + \operatorname{op}^w(\ell_1) + \operatorname{op}^w(\ell_0) \tag{2.2}$$

avec $\ell_j \in \Sigma_\gamma^j$, $j = 0,1$.

Calcul de ℓ_1

On a

$$\begin{aligned}\ell_1 = \frac{1}{2i}\Big[&\partial_\xi(P^{-1})(\partial_x b)P - \partial_x(P^{-1})(\partial_\xi b)P + (\partial_\xi P^{-1})b(\partial_x P) \\ &+ P^{-1}(\partial_\xi b)(\partial_x P) - (\partial_x P^{-1})b(\partial_\xi P) - P^{-1}(\partial_x b)\partial_\xi(P)\Big] \\ = \frac{1}{2i}\Big[&(1) + \ldots + (6)\Big] \ .\end{aligned}$$

LEMME 2.6. *$\ell_1 e_{n-1} = \alpha(x,\xi,\gamma)e_{n-1} + W(x,\xi,\gamma) + R(x,\xi,\gamma)$ avec $\alpha \in \Sigma^1_\gamma$, $W \in \Sigma^1_\gamma$ et $W(x,\xi,\gamma)|_{^t\zeta\zeta=0} = 0$ et $R(x,\xi,\gamma) \in \Sigma^1_\gamma$ et $|R(x,\xi,\gamma)| \le C(|\xi|+\gamma)$ où C ne dépend pas de β.*

Nous ne calculerons que le 4ème et le 6ème terme. Ce qui donne une bonne idée de la façon dont les termes s'éliminent.

Calcul de (4)

$$(4) = P^{-1}(\partial_\xi b)(\partial_x P) \ .$$

Calculons $(\partial_{x_j} P)e_{n-1} = \partial_{x_j}\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)$

$$\partial_{\xi_j} b = 2\mu({}^t\zeta\, e_j)\,\mathrm{Id} + \nu(\zeta\,{}^t e_j + e_j\,{}^t\zeta) \ .$$

Donc

$$(\partial_{x_j} P)e_{n-1} = \frac{i\gamma}{|\zeta|}(\varphi''_j) + \zeta\,\partial_{x_j}\left(\frac{1}{|\zeta|}\right) \ . \tag{2.3}$$

On a donc

$$\begin{aligned} &P^{-1}(\partial_{\xi_j} b)(\partial_{x_j} P)e_{n-1} \\ &= P^{-1}\Big(2\mu({}^t\zeta\, e_j)\,\mathrm{Id} + \nu(\zeta\,{}^t e_j + e_j\,{}^t\zeta)\Big)\left[\frac{i\gamma}{|\zeta|}\varphi''_j + \zeta\,\partial_{x_j}\left(\frac{1}{|\zeta|}\right)\right] \\ &\qquad = \left[\frac{2i\gamma\mu}{|\zeta|}({}^t\zeta\, e_j)P^{-1}\varphi''_j + \frac{\nu i\gamma}{|\zeta|}\,{}^t\zeta\,\varphi''_j(P^{-1}e_j)\right] \ , \end{aligned} \tag{2.4}$$

modulo des termes du type annoncé dans le lemme 2.6.

On a $\varphi = \dfrac{e^{\beta\psi}}{\beta}$, $\varphi' = \psi' e^{\beta\psi}$ et

$$\varphi'' = e^{\beta\psi}(\psi'' + \beta\,\psi'\,{}^t\psi') \ . \tag{2.5}$$

Donc

$$\varphi''_j = e^{\beta\psi}(\psi''_j + \beta(\partial_{x_j}\psi)\psi') \ .$$

P^{-1}, $\partial_{\xi_j} b$ et $e^{\beta\psi}$ sont des termes bornés indépendamment de β. Donc les termes de (2.4) provenant de ψ''_j sont du type R du lemme 2.6. L'expression (2.4) devient modulo les termes du lemme 2.6

$$\left[\frac{2i\gamma\mu}{|\zeta|}({}^t\zeta\, e_j)P^{-1}(\beta\,\partial_{x_j}\psi\,\psi') + \frac{\nu i\gamma}{|\zeta|}\,{}^t\zeta(\beta\,\partial_{x_j}\psi\,\psi')(P^{-1}e_j)\right] \ .$$

Donc

$$(2.6)\quad \sum_j P^{-1}\partial_{\xi_j} b\partial_{x_j} P e_{n-1}$$
$$= \frac{i\gamma}{|\zeta|} e^{\beta\psi}\beta \sum_j \partial_{x_j}\psi\Big[2\mu({}^t\zeta e_j)P^{-1}\psi' + \nu({}^t\zeta\psi')(P^{-1}e_j)\Big]$$

or $\sum_j (\partial_{x_j}\psi)e_j = \psi'$, donc de (2.6) on a

$$(2.7)\qquad (4) = \frac{i\gamma}{|\zeta|}\beta(\chi\tilde{\chi})(2\mu+\nu)({}^t\zeta\psi')(P^{-1}\psi') .$$

Calcul de (6)

$$(6) = -P^{-1}(\partial_x b)\partial_\xi(P)$$

$$(2.8)\qquad \partial_{\xi_j}(P)e_{n-1} = \partial_{\xi_j}\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right) = \frac{e_j}{|\zeta|} + \zeta\,\partial_{\xi_j}\left(\frac{1}{|\zeta|}\right) .$$

$$(2.9)\qquad \begin{aligned}\partial_{x_j} b = {} & 2\mu i\gamma({}^t\zeta\varphi_j'')\,\mathrm{Id} + i\gamma\nu(\zeta\,{}^t\varphi_j'' + \varphi_j''\,{}^t\zeta) \\ & + (\partial_{x_j}\mu)\,{}^t\zeta\zeta I + (\partial_{x_j}\nu)\zeta\,{}^t\zeta .\end{aligned}$$

Donc d'après (2.9) on a modulo les termes du lemme 2.6

$$P^{-1}(\partial_x b)(\partial_\xi P)e_{n-1}$$
$$= \frac{i\gamma}{|\zeta|}P^{-1}\sum_j\Big[2\mu({}^t\zeta\varphi_j'')e_j + \nu\Big(\zeta({}^t\varphi_j'' e_j) + \varphi_j''({}^t\zeta e_j)\Big)\Big] .$$

Ceci est égal, par un argument analogue à celui qui suit (2.5) à

$$\frac{i\gamma e^{\beta\psi}\beta}{|\zeta|}P^{-1}\sum_j\Big[2\mu({}^t\zeta\psi')(\partial_{x_j}\psi e_j) + \nu\psi'({}^t\zeta(\partial_{x_j}\psi e_j))\Big]$$

donc

$$(6) = -(\chi\tilde{\chi})\frac{i\gamma e^{\beta\psi}\beta}{|\zeta|}(2\mu+\nu)({}^t\zeta\psi')(P^{-1}\psi') ,$$

donc $(4)+(6) = 0$.

Les autres termes du calcul s'éliminent également deux à deux.

Le lemme 2.6 ne permet pas tout à fait d'appliquer le lemme 2.5 à cause des termes W et R. On a

$$(2.10)\qquad \|M\,\mathrm{op}^w(Rv)\| \le C\,\|v\|_{1,\gamma} + C_\beta\,\|v\|$$

avec C indépendant de β car M est borné, et par l'argument classique utilisant l'inégalité de Gårding et $(\gamma^2+|\xi|^2)C^2\,\mathrm{Id} - \sigma(R^*)\cdot\sigma(R) \ge 0$.

Pour traiter le terme W on va écrire un lemme :

LEMME 2.7. *Si* $r(x,\xi,\gamma) \in \Sigma^1_\gamma$ *et* $r(x,\xi,\gamma)|_{{}^t\zeta\zeta} = 0$ *alors pour tout* $\varepsilon > 0$

$$\|\mathrm{op}^w(r)v\| \leq C_\beta\left[\varepsilon\|v\|_{1,\gamma} + \|\mathrm{op}^w(\psi_\varepsilon)v\|_{1,\gamma}\right] + C_{\beta,\varepsilon}\|v\|$$

où C *dépend de semi-normes de* r, C *dépend de* ε *et de semi-normes de* r *et* ψ_ε *est le symbole défini au lemme* 2.4.

PREUVE : On écrit

$$v = \mathrm{op}^w(\psi_\varepsilon)v + \mathrm{op}^w(1-\psi_\varepsilon)v\ .$$

On remarque que

$$r(x,\xi,\gamma) = ({}^t\zeta\zeta)r_{-1}(x,\xi,\gamma)$$

avec $r_{-1} \in \Sigma^{-1}_\gamma$ (car ${}^t\zeta\zeta = 0$ est une variété). Donc

$$\|\mathrm{op}^w(r)v\| \leq \|\mathrm{op}^w(r)\,\mathrm{op}^w(\psi_\varepsilon)v\| + \|\mathrm{op}^w(r)\,\mathrm{op}^w(1-\psi_\varepsilon)v\|\ .$$

Le premier terme est inférieur à $C_\beta\|\mathrm{op}^w(\psi_\varepsilon)v\|_{1,\gamma}$. Le second s'écrit

$$\mathrm{op}^w(r)\,\mathrm{op}^w(1-\psi_\varepsilon) = \mathrm{op}^w(({}^t\zeta\zeta)r_{-1}(1-\psi_\varepsilon)) + \mathrm{op}^w(r_0)$$

où $r_0 \in \Sigma^0_\gamma$.

D'autre part $|{}^t\zeta\zeta r_{-1}(1-\psi_\varepsilon)| \leq \varepsilon C_\beta\langle\xi,\gamma\rangle$, donc par l'inégalité de Gårding on a :

$$\|\mathrm{op}^w(r)\,\mathrm{op}^w(1-\psi_\varepsilon)v\| \leq C_\beta\varepsilon\|v\|_{1,\gamma} + C_\varepsilon\|v\|$$

ce qui donne le lemme 2.7.

Le reste de la preuve de la proposition 2.3 consiste à enlever les troncatures (que nous n'avons pas considérées ici). Cela pose un petit problème technique car à chaque fois qu'on applique le calcul symbolique il faut vérifier que les termes de reste sont du type de ceux rencontrés au lemme 2.6.

Bibliographie

[1] L. HÖRMANDER : *Linear partial differential operators*, Springer Verlag (1963).

[2] D. JERISON : *Carleman inequalities for the Dirac and Laplace operators and unique continuation*, Adv. in Math. 62 (1986), 118-134.

[3] R.J. KNOPS-L.E. PAYNE : *Uniqueness theorems in linear elasticity*, Springer tracts in natural Philosophy, (1971).

[4] N. LERNER : *Unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs elliptiques*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 17 (1984), 469-505.

[5] G. MÉTIVIER : *Interaction de deux chocs pour un système de deux lois de conservation, en dimension deux d'espace,* Trans. of American Math. Soc., 296 (1986), 431-479.

[5] J.-C. SAUT-B. SCHEURER : *Communication personnelle.*

[7] V. VOGELSANG : *On the strong unique continuation principle for inequalities of Maxwell type,* Math. Ann., 289 (1991), 285-295.

[8] K. WATANABÉ : *On the uniqueness of the Cauchy problem for certain elliptic equations with triple characteristics,* Tohoku Math. Journal, 23 (1971), 473-490.