ANNIE BESSOT
ALAIN MERCIER

La dynamique institutionnelle : chronogénèse et évolution du rapport institutionnel

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1991, fascicule S6
« Vième école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique », , p. 169-173
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1991___S6_169_0>

THEME 1

Travaux dirigés : *"La dynamique institutionnelle : chronogénèse et évolution du rapport institutionnel"*

par Annie BESSOT et Alain MERCIER

LSD2-IMAG, Univ. Joseph Fourier 38041 GRENOBLE Cédex
I.R.E.M. d'Aix-Marseille 13009 MARSEILLE

Déclaration d'intentions préliminaire :

« Toute institution didactique tend à fixer le regard de l'observateur sur l'avant-scène didactique, horloge où se lit le temps didactique officiel. Par cela, elle nous dissimule "l'autre scène" : celle où, à l'arrière plan, le rapport officiel, par définition instable et labile, est "travaillé" et va s'institutionnaliser pour se changer en rapport institutionnel.

Ainsi, au moment même où le rapport officiel à un objet neuf apparaît et s'impose au regard, le rapports institutionnels à une foule d'autres objets, antérieurement introduits, sont subrepticement emportés par une dynamique qui les stabilisera un peu plus tard - en attendant parfois une reprise ultérieure d'évolution - et qui prend appui aujourd'hui sur un ensemble de rapports institutionnels dont l'évolution s'est (apparemment) *achevée parfois depuis fort longtemps : des rapports devenus stables et, pour cela, "transparents", qui sont constitutifs du milieu didactique.*

Cette dynamique institutionnelle, que l'institution tend spontanément à masquer, qui dément la fiction d'éternité du rapport officiel en même temps qu'elle le rend possible, sera ici au coeur de l'étude.

On s'attachera notamment à l'un des phénomènes les plus clairement objectivables, celui de l'évolution du rapport officiel (ou du rapport institutionnel) corrélée à la formation d'interrelations nouvelles entre objets : par exemple entre un objet antérieurement introduit et des objets fraîchement présents qui, n'ayant pu être coprésents au moment de son introduction, n'ont pu de ce fait participer à la formation du rapport officiel (ou institutionnel, antérieur). »

Yves Chevallard, présentation de la journée du 4 septembre 1991

Le **moment didactique** du travail réalisé dans une séance de travail dirigé est celui de la première rencontre matérielle d'un ou plusieurs des objets nommés dans le cours d'Yves Chevallard. Les **modalités didactiques** du travail seront celles du recours à l'expérience personnelle, de l'observation clinique, de l'expérimentation appuyée sur une phénoménotechnique. Cette **première rencontre** est **dirigée**, on pourrait dire que nous y sommes les **entremetteurs :** nous assurons que la rencontre que nous avons organisée ne perd pas de vue son objet, en assistant les participants tout au long de son déroulement.

Nous posons **un problème,** sous la forme d'un problème particulier, le premier d'une « classe de problèmes », le représentant d'un « grand problème de didactique ». Il s'agit de **montrer un phénomène annoncé par la théorie :**

> Il existe un rapport institutionnel à l'objet O_1 : $R_I(O_1)$.
>
> Soit l'objet O_2, nouvellement introduit dans l'institution : $R_I^*(O_2)$, le rapport officiel à O_2, émerge.
>
> Montrer que l'existence d'une relation trophique $O_1 \Leftarrow O_2$ (O_1 est outil pour O_2, ou O_2 se nourrit de O_1) impose le travail et la transformation de $R_I(O_1)$.

Premier temps : le recours à l'expérience personnelle

Le style didactique de notre travail sera le suivant :

Nous prétendons organiser ici une première rencontre. Une telle rencontre doit assumer le fait que, peut-être, le phénomène nommé dans le cours n'a pas été reconnu, n'est pas « ce phénomène-là que l'on a déjà vu, bien sûr ». Aussi, nous avons mis en place l'expérience personnelle d'un tel phénomène, pour chacun : nous pourrons alors y faire référence.

Pour faire ensemble l'expérience du phénomène, il suffit de suivre un cours de mathématiques et de se laisser porter par le contrat . Le cours proposé aux participants porte sur le développement d'un nombre réel relatif à une suite de base ; il est suivi d'exercices de calcul d'un tel développement.

Le savoir ancien remanié est la technique de la division entière et décimale.

Problème de didactique

Il s'agit de traiter le problème posé, dans le cas particulier évoqué ci-dessus.

1) Déterminer un objet O_2, déterminer un objet O_1 possible pour O_2 (éliminer les solutions triviales en recherchant un couple (O_1, O_2) dont la relation trophique n'est pas explicitement gérée par le cours).

2) Raconter comment le cours vous a fait vivre en personne la nécessité du re-travail de votre rapport à la technique de la division entière, support de la technique - en principe connue - de la division décimale.

3) Montrer comment le fait que O_1 outille le travail de O_2 implique que le rapport institutionnel à O_1 doive changer.

Vous pourrez à cet effet montrer que l'objet O_1, auquel le rapport institutionnel était stable (nous avons pu sans autre forme de procès décider ensemble que vous connaissiez le champ de l'écriture décimale d'un rationnel et en particulier la division décimale), est pourtant un objet pertinent du problème : il a dû, nécessairement, être travaillé pour que se mette en place la technique nouvelle ; il devra l'être pour que soit assurée la réussite aux exercices de calcul de développements de rationnels, si cela n'avait pas encore été fait au moment de la correction de ce premier exercice.

Correction rapide : Lors du cours précédent, vous avez sans doute vécu l'expérience de **la difficulté du re-travail de la notion de division euclidienne comme outil pour la production d'une technique de fabrication des développements factoriels :** la division des « nombres complexes » de l'arithmétique scolaire. Il n'était pas possible pour vous de faire l'économie du retravail de votre rapport personnel, d'assurer sans ce travail **la présence d'un rapport idoine à la division lorsqu'elle sert au calcul de développements de rationnels dans une suite de base.**

Deuxième temps : l'observation clinique

Première observation, le cahier de cours d'une élève de Terminale D.

L'observation clinique donne ici la première systématicité de la recherche d'un phénomène que nous voulons rechercher partout où nous regardons. Il s'agit de nous constituer une collection de cas. Voici en exemple le contenu résumé d'un cahier d'élève.

.../...

4°) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

Exemples : *(trois limites sont déterminées par comparaison avec une des fon ctions x^n, $n \in Z$)*

Propriétés : Quand x tend vers x_0 (fini ou infini) : .../...

si lim $\lvert f(x)\rvert = L$	∞	$L \neq 0$	0
si lim $\lvert g(x)\rvert = L'$	∞	∞	∞
alors lim $\lvert f(x).g(x)\rvert = L.L$	∞	∞	on ne peut pas conclure, forme indéterminée

Exemples : I) Etudier la limite en $+\infty$ et $-\infty$ de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

$$f(x) = x^3\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}\right) \text{ etc.}$$

II) Limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$ *(même méthode)*

5) <u>Limite d'un polynôme à l'infini :</u>

Propriété : La limite à l'infini d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.

Exemple : $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 1$

on fait : $f(x) = 5x^3\left(1 - \dfrac{2}{5x} + \dfrac{1}{5x^3}\right)$ etc.

Exercices: *(il s'agit donc des premiers exercices, à proprement parler : nous n'avions précédemment que des exemples, i.e. des exercices que le professeur traite lui-même)*

a) Limite à l'infini de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+x-1}}{x - 2}$

On fait : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4(1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4})}}{x(1 - \frac{2}{x})} = \dfrac{x^2\sqrt{1 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}}}{x(1 - \frac{2}{x})}$ etc.

Enoncés des exercices suivants :

b) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 3x^2 + 1$

d) Limite à l'infini de $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1} + x$

e) de $f(x) = 3x + x\cdot\sin x$ etc.

Problème de didactique

Vous pouvez ici observer une occurrence particulière du problème général, cette observation portera sur l'objet O_1 : « Factorisation des expressions polynomiales ».

1) Montrez que le retravail de $R_I(O_1)$ est ici géré expressément - sans que O_1 ne soit pourtant nommé dans le cahier de Delphine - par l'introduction d'un objet O_2 qui n'a pas d'autre fonction didactique.

2) Pouvez-vous dire quelle est l'utilité de ce retravail, au delà du traitement des questions portant sur O_2 ? (Pouvez-vous, par exemple, imaginer d'autres objets O2 possibles ?)

Correction : (...) la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x}$ serait un objet possible pour ce travail, mais elle n'est pas disponible à ce moment de l'année.

Une observation « naturelle »

(...) Delphine, élève de Terminale D, vient poser des questions sur des calculs de limites. Deux fonctions comportant le logarithme sont apparues successivement dans l'énoncé de son devoir surveillé, on demande leur étude sur $\mathbb{R}_+^*$. D'abord la fonction $g(x) = 1 + x\cdot(1 - \ln x)$, puis $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x}$

Pour chacune d'elles, Delphine a déterminé l'ensemble de définition, mais elle dit qu'elle « n'a pas réussi à lever l'indétermination ». Delphine demande en particulier comment on lève l'indétermination pour la première limite, c'est-à-dire « comment on peut obtenir la limite de g en $+\infty$? » Elle a, dit-elle, beaucoup "séché" sur cette question durant l'interrogation écrite avant de renoncer ; elle en a parlé à ses camarades de classe, aucun de ceux qu'elle a interrogés n'a su lui répondre. Elle montre son brouillon :

$$\text{lim}\,(1 + x(1 - \ln x))\ \text{en}\ +\infty\,? \qquad \ln x \longrightarrow +\infty \qquad \begin{cases} 1 - \ln x \longrightarrow -\infty \\ \text{et}\ x \longrightarrow +\infty \end{cases}$$

« Il y a donc indétermination, commente-t-elle, et il n'y a pas de théorème du cours dans ce cas. »

Problème de didactique

1) Pouvez-vous imaginer un théorème du cours de Delphine qui répondrait à sa question (l'objet O_1) ? Le trouveriez-vous dans la même partie du cours que le théorème précédemment utilisé ?

L'absence de ce théorème pour Delphine est donc, d'abord, « une question de contrat didactique sur ce que sont les théorèmes du cours » (ceux qui doivent lui être disponibles), mais le phénomène didactique que l'incident rapporté révèle est plus complexe et relève du problème général que nous étudions :

2) Soit O_2 = étude de fonctions comprenant des logarithmes, $R_I(O_1)$ = rapport institutionnel à O_1 (ce rapport est stabilisé au moment de l'observation rapportée), $R_I^*(O_2)$ = rapport officiel à O_2, il existe une relation trophique entre O_1 et O_2 : « O_2 se nourrit de O_1 ; ou : O_1 est pertinent pour O_2 » (Nous avons noté cette relation : « $O_1 \Leftarrow O_2$ »).

2-1) Enoncez le théorème pertinent O_1, donnez-le sous la forme qu'il revêt dans le cours de Delphine. Caractérisez la relation trophique de O_2 à O_1.

2-2) A l'aide de la notion de partage topogénétique du rapport institutionnel (soit, à l'aide de la distinction de $R_{I,e}(O_1)$ et $R_{I,E}(O_1)$) et en observant le cours et les exercices du cahier de Delphine, caractérisez $R_I(O_1)$, à tout instant t précédant l'émergence de $R_I^*(O_2)$.

2-3) Décrivez la situation qui devrait être réalisée pour O_1, à tout instant t' suivant l'institutionnalisation de O_2.

2-4) Montrez comment la gestion de l'évolution nécessaire de $R_I(O_1)$ est traitée différemment de celle de l'évolution du rapport $R_I(O_f)$ à la factorisation O_f. Pouvez-vous énoncer une conjecture générale à propos de cette différence de traitement didactique ?

Correction : (...) **Le rapport institutionnel pour l'élève** (au calcul des limites quand x tend vers l'infini), **doit s'enrichir d'un cas.** Cet enrichissement est laissé entièrement à la charge de l'élève, parce que ce cas-ci est considéré par l'enseignant comme faisant déjà, de longue date, partie du rapport institutionnel ; le travail de la factorisation était, lui, didactiquement géré par l'enseignant. L'enrichissement attendu ne peut se faire, dans le cas du théorème sur les produits de limites, que sur l'initiative propre de l'élève (et, même, ici, la nécessité de l'enrichissement se rencontre au cours d'une interrogation écrite).

Troisième moment de la séance : le moment expérimental

Le retour sur le premier moment montre qu'il est possible de reproduire expérimentalement les phénomènes observés, pour une population donnée. La réussite de ce moment est en effet une réussite expérimentale. Nous n'en dirons pas plus ici, il y faudrait l'**analyse a priori** du montage de cette partie du T.D., ce qui n'est pas notre objet.