MICHÈLE ARTAUD
TERESA ASSUDE

Topogénèse et émergence du rapport institutionnel pour l'élève

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1991, fascicule S6
« Vième école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique », , p. 164-168
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1991___S6_164_0>

THEME 1

Travaux dirigés : "*Topogénèse et émergence du rapport institutionnel pour l'élève*"

par Michèle ARTAUD et Teresa ASSUDE

I.R.E.M. d'Aix-Marseille, 163, avenue de Luminy
13009 MARSEILLE

Le but de cette séance de travaux dirigés était d'amorcer l'étude, et donc de travailler à faire émerger une technique d'étude, du champ de problèmes représenté par l'énoncé générique suivant, que nous commentons un peu plus loin :

> *Soit SD un système didactique et soit O un objet mathématique qui doit être introduit dans SD comme enjeu didactique. Le rapport officiel pour l'élève à l'objet O doit pouvoir satisfaire la contrainte d'évaluabilité.*
> *De quelle façon cette contrainte est-elle satisfaite ?*

Explicitons. Le rapport officiel pour l'élève à l'objet O est le premier rapport institutionnel dans la position d'élève à l'objet O, rapport qui correspond au moment de l'enseignement de O. C'est lors de ce moment que le système d'enseignement se donne à voir à la société en tant qu'institution enseignante. Il doit donc montrer qu'il remplit effectivement sa mission d'enseignement. Pour cela, le rapport personnel à l'objet O de l'élève, R(X,O), doit avoir une composante publique évaluable, c'est-à-dire sur laquelle on puisse faire porter un verdict d'adéquation - ou de non adéquation - au rapport officiel pour l'élève à l'objet O. L'exigence de l'existence d'une composante publique de R(X,O) constitue la *contrainte d'évaluabilité* (nous la noterons CE).

Nous avons étudié trois problèmes particuliers du champ (1), dont nous donnons ci-après les énoncés suivis des points essentiels d'un corrigé, avant de dégager quelques éléments d'une technique d'étude du champ de problèmes ayant émergée à l'issue de cette séance de travaux dirigés.

Problème 1

Soit O l'objet « expression algébrique » introduit dans un système didactique SD en conformité avec le texte présenté par le document 1 (2).

1. Par manque de temps, le troisième problème n'a pu être traité avec les participants.
2. Ce document est composé du chapitre introductif des *Eléments d'algèbre* publié par F. Vernay vraisemblablement vers la fin du XIXe siècle, dans la collection *Les bons livres*.

1. A l'issue de la première phase du cours relatif à l'objet O, quelle composante du rapport personnel de l'élève à l'objet O, R(X,O), se trouve évaluée ?

2. Le critère de conformité ainsi adopté permet-il d'évaluer un élément d'idonéité de R(X,O) au rapport institutionnel à O, $R_{SD,e}$(O), dont la construction est visée ? *(On fera l'hypothèse que cet enseignement est un enseignement acceptable par rapport à la pratique de l'algèbre élémentaire classique.)*

3. A votre avis, les types d'expressions algébriques que l'on demande à l'élève de manipuler continueront-elles à vivre dans l'univers algébrique dont il commence l'exploration ou bien, sont-elles promises à une disparition rapide ? *(On pourra examiner le niveau de complexité ostensive de ces expressions.)*

4. A l'aide des résultats précédents, décrire les effets de la contrainte d'évaluabilité (CE) sur la stratégie didactique mise en oeuvre pour introduire l'objet O.

Corrigé

1. A la fin du document, l'auteur écrit : « Après ces préliminaires, nous pouvons résoudre quelques problèmes qui nous familiariseront avec les valeurs numériques des expressions algébriques. » Suivent deux exercices résolus, dans lesquels on calcule la valeur d'un polynôme connaissant la valeur de la variable ainsi que d'une fraction algébrique connaissant la valeur de la variable et celle des deux paramètres qui y figurent. La composante de R(X,O) qui se trouve évaluée est donc la composante « capaciter de calculer la valeur numérique d'une expression algébrique ».

2. Le rapport institutionnel $R_{SD,e}$(O) dont la construction est visée est celui de l'algèbre élémentaire classique, dans laquelle on manipule des expressions algébriques afin de les factoriser, de résoudre des équations, etc. Ce rapport est caractérisé par la manipulation de lettres. L'auteur commence ce premier chapitre par la phrase suivante : « L'Algèbre n'est autre chose que de l'arithmétique généralisée ; au lieu de raisonner sur des chiffres, on raisonne sur des lettres ». Le fait que l'élève sache calculer des valeurs numériques d'expressions algébriques n'est donc pas un garant de l'idonéité de R(X,O) à $R_{SD,e}$(O).

3. Les expressions algébriques que l'on demande à l'élève d'évaluer sont un polynôme de degré 4 et une fraction algébrique dont le numérateur est de degré 3 et le dénominateur de degré 2 ; elles comportent de nombreux termes, la fraction algébrique ayant de plus deux paramètres. Ce sont donc des expressions dont la complexité ostensive est grande. Or, l'essentiel de l'activité de l'élève consistant en l'étude des équations du premier et du second degrés, ces expressions disparaîtront rapidement.

4. La contrainte d'évaluabilité impose que l'élève puisse faire quelque chose d'évaluable avec l'objet auquel il vient d'être introduit. Comme, somme toute, on n'a fait que peu de choses à son propos dans ces préliminaires, on lui demande de faire quelque chose qu'il connaît déjà, qui a du sens pour lui : comme on l'a vu dans la première question, il s'agit en l'espèce de calculer la valeur numérique d'une expression algébrique. Le rapport à O que l'on fait vivre ainsi pour l'élève, qui est le rapport officiel à O pour l'élève, est encore loin d'être idoine au rapport institutionnel qui prévaudra par la suite (voir la réponse à la deuxième question). De plus, les objets sur lesquels l'élève va travailler en ce premier moment sont ostensivement plus complexes que ceux auxquels on s'intéressera par la suite (voir la troisième question). Si, en effet, le seul problème que l'on sait se poser à propos des expressions algébriques est celui du calcul de leurs valeurs numériques, et si on le pose à propos d'expressions algébriques de degré 1, ou même de degré 2, la performance réalisée par l'élève ne garantit rien quant au fait qu'il ait - ou non - appris. S'il en est ainsi peut naître la présomption qu'il n'y a peut-être rien à apprendre, ce qui tend à illégitimer l'institution d'enseignement. D'où une modification de l'objet, dont on augmente la complexité ostensive, afin de satisfaire la contrainte d'évaluabilité.

Problème 2

Soit O l'objet « équation algébrique du premier degré » introduit dans un certain système didactique SD en conformité avec le texte présenté par le document 2 (3). On notera O' l'objet « problème d'algèbre » qui apparaît dans l'environnement immédiat de O.

1. Décrire la stratégie générale d'introduction de l'objet O dans la séquence d'enseignement représentée par l'**ensemble** du document 2 et préciser en quoi elle vise à permettre la satisfaction de la contrainte d'évaluabilité (CE).

2. L'introduction corrélative, implicite dans la leçon 1, et à titre d'enjeu didactique dès la leçon 2, de l'objet O' est-elle un élément visant à satisfaire la CE ? Si oui, précisez en quoi.

Corrigé

1. Le document débute par une leçon qui présente, à partir d'un problème, l'objet O ; la seconde leçon introduit l'objet O', puis les leçons suivantes traitent des différents types d'équations indiqués par les titres des leçons trois à dix : « Quand l'équation comporte des x négatifs », « Quand il y a plusieurs x », « Quand les x sont parsemés », « L'équation comprend une fraction de x », « L'équation comprend plusieurs fractions de x », « Avec les fractions de x, il y a des x entiers », « Il y a des x fractionnaires accompagnés de fractions de termes connus », « Une équation peut parfois être simplifiée ». L'objet O est donc analysé en plusieurs éléments, de façon à ce que chaque élément marque une progression mesurée par rapport au précédent et qu'à chaque pas l'élève ait quelque chose à faire. (Chacune des leçons citées est suivie d'une liste d'équations à résoudre.) Ainsi la CE est satisfaite à chaque instant. Cette stratégie didactique participe de ce que Michel Foucault nomme *l'analytique du savoir*, qui consiste à découper les objets en segments élémentaires de sorte que chaque segment puisse faire l'objet d'une étude quasi autonome (4). Cela implique une distorsion de l'objet par rapport au savoir savant : l'élève verra plusieurs objets là où le mathématicien n'en voit qu'un.

2. A partir de la troisième leçon, les exercices proposés comportent, outre une liste d'équations à résoudre, un ou deux problèmes qui se modélisent par une équation du type étudié dans la leçon. Ces problèmes conduisent donc à accomplir les gestes mathématiques dont l'apprentissage est visé dans la leçon ; leur présence participe de la création des conditions de possibilité d'une évaluation acceptable dans l'environnement du système didactique considéré. Nous avons dit plus haut que l'évaluation était un moyen de montrer à la société que l'institution remplit bien la mission d'enseignement dont elle est chargée. Il faut donc que ce que l'on montre soit reconnu par la société comme probant à cet égard. Ici, l'institution que nous considérons est soumise aux regards de la culture courante (laquelle comprend en particulier les parents d'élèves) ; et il est vraisemblable que si l'arithmétique est familière à la culture courante, il n'en va pas de même pour l'algèbre. En faisant apparaître l'algèbre comme un outil permettant de résoudre des problèmes qui apparaissent à la culture courante comme des problèmes d'arithmétique, l'institution obtient sa caution.

---

3. Ce document est composé des dix premières leçons de *L'algèbre des débutants*, publiée aux éditions Magnard en 1974 et destinée aux collèges modernes et cours complémentaires.

4. Cette stratégie a vu le jour en même temps que l'école moderne ; en particulier les Petites Ecoles de Lyon fondées par Charles Démia apprenaient à lire de cette manière. Sur ce point on pourra consulter *Sur la formation historique du temps didactique*, d'Yves Chevallard et Alain Mercier, publié par l'IREM d'Aix-Marseille (Publication n°13).

Problème 3

Soit O l'objet « logarithme » introduit dans un système didactique SD en conformité avec le texte présenté par le document 3 (5). *(Dans l'introduction, une contrainte liée à la nature de l'écosystème dans lequel on veut faire vivre l'objet « logarithme » conduit à le présenter comme une fonction d'une variable réelle. Dans la suite de l'étude, on négligera cet aspect.)*
Sachant que, dans le rapport institutionnel classique à l'objet « logarithme » dans l'institution didactique de style moyen dont participent les filières B notamment (ce qu'on admettra), le « logarithme » apparaît comme l'outil adéquat pour résoudre des équations algébriques transcendantes élémentaires du type $a^x = b$, montrer que la CE, en conjonction avec d'autres contraintes que l'on précisera, aboutit à la création didactique de certains types de problèmes, ces problèmes se substituant à ceux classiquement objet de la mise en oeuvre de la fonction logarithme.

Corrigé

Les problèmes créés sont des problèmes de résolution d'équations ou d'inéquations du type $\ln(P(x)) = (\geq) \ln(Q(x))$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes ou des fractions rationnelles, tels que l'on peut les voir dans les exercices 13 à 27 du chapitre. Notons, au passage, que ces exercices sont paradoxaux puisque leur ressort essentiel est *l'élimination* des logarithmes (6). Ces problèmes permettent de satisfaire à la contrainte d'évaluabilité ; il suffit en effet d'avoir fait très peu de choses à propos de l'objet O pour pouvoir les traiter : l'ensemble de définition de la fonction logarithme ainsi que sa stricte croissance sur son ensemble de définition. On les voit d'ailleurs apparaître dans le document 3, par le biais d'exercices résolus aussitôt après le premier paragraphe intitulé *Présentation* (paragraphe qui tient en une page). Pour que les problèmes qui sont classiquement objet de la mise en oeuvre de l'objet O - c'est-à-dire les équations transcendantes élémentaires - occupent la même place, il faudrait disposer, lors de l'introduction de l'objet « logarithme », de l'objet « exponentielle ». Or dans la transposition didactique « moderne », l'objet « logarithme » est introduit comme fonction primitive de la fonction 1/x, et l'est avant que soit introduit l'objet « exponentielle » - comme fonction inverse de la fonction logarithme. De plus, ces problèmes de résolution d'équations transcendantes résultent de la modélisation de problèmes « concrets » (7) qui ne sont plus présents dans le curriculum mathématique contemporain. Les faire revivre demanderait que soient créées des conditions particulières, comme l'introduction d'éléments de mathématiques financières ou de démographie mathématique par exemple.
Ainsi la contrainte d'évaluabilité, en lien avec des contraintes de type *écologique*, va aboutir à la création d'un type inédit de problèmes.

---

5. Ce document est composé de deux extraits du chapitre « Fonction logarithme népérien » d'un livre de mathématiques de terminale B (collection N. Dimathème, Didier, 1988) : soit les quatre premières pages du cours (pp. 200-204) ainsi que le corpus d'exercices intitulé « pour savoir faire » (pp. 208-210).

6. Ainsi, si l'on a à résoudre $\ln(x-1) = \ln(2x+1)$ (exercice 14, page 209), il convient d'abord de déterminer l'ensemble sur lequel cette équation est définie : c'est l'ensemble D des réels x tels que x-1 et 2x+1 soient strictement positifs, ie $D =]1, +\infty[$. Puis, en arguant du fait que ln est une bijection, on écrit que l'équation initiale est équivalente à $(x-1 = 2x+1,\ x \in D)$. On est alors ramené à la résolution d'une équation algébrique de degré un !

7. On peut citer ici, entre autres, les problèmes d'intérêts composés. Par exemple celui-ci : Sachant que je dispose d'un capital C_0 placé au taux d'intérêt r, en combien d'années mon capital a-t-il doublé ?, dont la solution est : si n est le nombre d'années cherché, $C_0(1+r)^n = 2C_0$; d'où $(1+r)^n = 2$ et $n = \ln 2/\ln(1+r)$.

Eléments d'une technique d'étude

Les différents problèmes que nous avons étudiés mettent en évidence le poids de la CE sur deux points essentiels. Le premier est le rapport officiel pour l'élève à l'objet O qu'il s'agit d'introduire. Il n'est pas représentatif du rapport institutionnel qui se mettra en place par la suite. Le second concerne l'objet O lui-même. C'est en fait à une « modification » de O que le rapport de l'élève s'établira : modification vers le haut lorsque le rapport que l'on peut faire vivre est un rapport ancien (problème 1), modification vers le bas lorsque c'est un rapport nouveau.

Nous avons vu qu'un des facteurs constitutifs de la CE est le caractère acceptable de l'évaluation (problème 2). Il en est un autre, très présent, dont on peut souligner l'influence à travers les trois documents étudiés : le temps que, dans une société donnée à un moment donné, les élèves sont capables de passer à suivre sans intervenir autrement l'exposé du professeur. Dans le premier document, ce temps est supposé relativement long (le chapitre de préliminaires comporte neuf pages d'exposé avant les deux exercices résolus). Il s'amenuise dans le second, avec la fragmentation de l'objet à étudier de manière à ce que très vite, l'élève ait quelque chose à faire. Enfin, dans le troisième document, il devient quasiment négatif, avec la présence de ces activités préparatoires qui font manipuler l'objet (ou plutôt une modification de l'objet) avant même que le professeur en ait parlé.

Concluons en soulignant que la présentation des problèmes, du système didactique le plus ancien au système didactique le plus récent n'est pas le fruit du hasard. Lorsque l'on étudie un système didactique décalé dans le temps (ou d'ailleurs dans l'espace) par rapport à ceux que l'on a l'habitude d'observer aujourd'hui, il se produit un effet de déconditionnement, une rupture de la transparence qui permet de repérer plus facilement des phénomènes didactiques devenus pour nous invisibles parce qu'allant de soi.