MICHEL GUILLEMOT

# Entre arithmétique et algèbre : les méthodes de fausse position

*Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, 1990-1991, fascicule 5
« Didactique des mathématiques », , exp. n° 5, p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1990-1991___5_A5_0>

## ENTRE ARITHMETIQUE ET ALGEBRE : LES METHODES DE FAUSSE POSITION

**Michel GUILLEMOT**
Université de Toulouse

**RESUME.** Très tôt, les savants ont employé de fausses solutions pour résoudre de nombreux problèmes. En géométrie, la considération de figures semblables en est l'exemple le plus caractéristique. En arithmétique, ce sont les méthodes de fausse position, nom donné à ces techniques depuis le Moyen Age. Mises en oeuvre par les Egyptiens, les Chinois,... elles ont été enseignées jusqu'au début de notre siècle. Aujourd'hui ces procédés peuvent être l'objet de reflexions sur certaines pratiques arithmétiques ou algébriques et, plus généralement algorithmiques ou démonstratives.

Peut-on obtenir le vrai à partir du faux ? Il peut paraître incongru de poser une telle question. Provient-elle d'un esprit tortueux qui prêche le faux pour savoir le vrai ? Ou d'un apprenti logicien qui éprouve quelques difficultés à admettre que du faux on peut déduire n'importe quoi ? Quelle signification accordons-nous au vrai ? au faux ? Certains n'affirment-ils pas que la Géométrie est l'art de raisonner sur une figure fausse !

Notre propos se veut ici être ici très modeste. En effet, nous situons notre question dans le vaste champ de la résolution de problèmes mathématiques menée à partir d'une ou de plusieurs fausses solutions. Les procédés mis en oeuvre sont, sans doute, apparus très tôt. En effet, d'une part, lorsque le nombre de cas à envisager n'est pas trop élevé, la technique du tatonnement est peut être celle à laquelle l'on pense tout de suite. Ceci semble être confirmé par certaines expériences menées auprès d'élèves ignorants les premiers rudiments de l'algèbre : l'essai est préféré à une formalisation trop abstraite. D'autre part, la proportionalité géométrique peut être un outil précieux permettant de relier vraie et fausse solution : citons, par exemple, le plan de l'architecte ou la légende qui court sur THALES lorsqu'il mesure à l'aide d'un bâton la hauteur de certains édifices. Sur le plan plus strictement mathématique, cette proportionalité a été utilisée par un scribe mésopotamien pour calculer les dimensions d'un rectangle connaissant sa diagonale et le rapport de ses côtés

[BRUINS, RUTTENS,1961,102].

Mais laissant de côté cet aspect géométrique nous nous situerons ici dans le cadre historique des méthodes de fausse position selon la terminologie qui a été donnée à ces procédés par les arithméticiens du Moyen Age. Mises en oeuvre par les Egyptiens et les Chinois, pratiquées par les Indiens et les Arabes, ces techniques figurent dans la plupart des ouvrages d'arithmétique depuis le Moyen Age jusqu'au début de notre ère. L'introduction de l'algèbre dans l'enseignement du premier cycle du secondaire a conduit à éliminer ce type d'arithmétique au profit d'une algèbre plus générale.

Mais l'étude historique des algorithmes de fausse position n'est pas dénuée d'interêt car elle peut "aider le didacticien" selon les conclusions formulées par Michèle ARTIGUE dans l'un de ses derniers articles "Epistémologie et didactique" :

> "l'analyse épistémologique aide donc le didactitien à contrôler les relations au savoir mathématique des objets qu'il manipule. Elle lui permet aussi de regarder d'un point extérieur le système d'enseignement qu'il étudie et duquel il est souvent presque trop proche. Mais, en mettant en évidence la distance qui sépare le développement historique de la réalité des classes, elle ne manque pas de lui montrer par la même occasion tout ce qui sépare ces deux champs; l'épistémologique et le didactique [ARTIGUE 1991, 279].

En effet, au cours de nos reflexions, nous serons amenés à mettre en évidence certaines attitudes liées :

- à la numération et plus particulèrement aux fractions,
- à la linéarité et à la proportionalité,
- à la place d'une algèbre "sans symbole" selon la terminologie employée par TROPFKE, située entre l'arithmétique et l'algèbre
- et enfin aux démarches algorithmiques ou démonstratives.

En retour, les analyses didactiques menées à propos de ces thémes peuvent aider l'historien (ou l'épistémologue) à mieux comprendre les positions adoptées par nos lointains ancêtres. L'apport indiqué par Michèle ARTIGUE n'est pas à sens unique :

l'échange entre le didacticien et l'épistémologue peut être profitable à tous les deux. Ce texte est écrit pour celà.

**Les méthodes de simple fausse position.**

> "Une lance a la moitié et le tiers dans l'eau et 9 paumes à l'extérieur. Je te demande combien elle a de long" [PELLOS, 1492, 181].

Cette question posée par Francès PELLOS, gentilhomme niçois de la fin du quinzième siècle, ne soulève aucune difficulté particulière pour une personne un tant soit peu habituée aux rudiments de l'algèbre. En effet, elle se ramène à résoudre, dans l'ensemble des rationnels positifs, l'équation

$$x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = 9.$$

Celle-ci admet 54 pour solution : la lance a donc 54 paumes de long.

Avant l'invention de l'algèbre et en l'absence d'un maniement aisé des fractions la résolution de problèmes semblables n'était pas aisée. Aussi, sans que leur origine en soit bien précisée, des algorithmes ont été mis en place : les méthodes de fausse position.

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons seulement aux "méthodes de simple fausse position ". La base de ces procédés est de considérer une valeur particulière de "l'inconnue" et d'effectuer des calculs à partir de cette dernière pour obtenir le résultat exact : d'où le nom donné à ces techniques. La nature linéaire des problèmes où ces règles trouvent leur champ naturel d'application, amène à fonder les calculs sur une certaine proportionalité.

PELLOS procède comme suit :

> "Réponse : pose 12 à ton bon plaisir et la moitié et le tiers de 12 sont 10 et il reste 2. Pour cela, dis aussi : si 2 sont venus de 12, de combien sont venus 9? Et tu trouveras 54. Et c'est le nombre de paumes de cette lance et c'est fait. Et ainsi tu dois faire tous les autres exemples semblables" [PELLOS 1492, 181].

Autrement dit PELLOS adopte la "fausse position" 12 et il explique ici, en l'absence de règles algébriques, la mise en oeuvre de l'algorithme de résolution : si la lance a 12 paumes de long il reste 2 paumes à l'intérieur au lieu des 9 requises. D'où le "si 2 sont venus de 12, combien sont venus 9" qui permet d'obtenir la solution.

Plusieurs questions sont posées par la mise en oeuvre de cet algorithme. La première concerne son champ d'application. Hier comme aujourd'hui le "pourquoi d'une règle n'est pas toujours précisé.

Souvent la répétition d'un grand nombre d'exercices semblables tient lieu d'explication. Plus de trois mille ans avant PELLOS le scribe égyptien AHMES se contente d'indiquer seulement la poursuite des calculs. Voici comment il écrit la résolution du problème 24 du papyrus (afin de faciliter les explications nous n'avons pas respecté la disposition du texte).

| | |
|---|---|
| Une quantité son $\frac{1}{7}$ lui est ajouté, elle devient 19 | $x \in \mathbb{E}$ et $x + \frac{1}{7}x = 19$ |
| / 1   7<br>/ $\frac{1}{7}$   1 | Le scribe adopte la fausse position 7. Il obtient 8. |
| 1   8<br>/ 2   16<br>$\frac{1}{2}$   4<br>/ $\frac{1}{4}$   2<br>/ $\frac{1}{8}$   1 | Le scribe divise 19 par 8<br>$\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. |
| / 1   2 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$<br>/ 2   4 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$<br>/ 4   9 $\frac{1}{2}$ | Le scribe multiplie $(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8})$ par 7<br>$(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8})7 = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ |
| Le fait tel qu'il apparait<br>La quantité 16 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$<br>$\frac{1}{7}$   2 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$<br>Total 19 | "Vérification" et présentation des résultats. |

[CHACE 1928, planche 47]

La "vérification" tient lieu de preuve : le but du papyrus n'est il pas de fournir des "exemples de calcul afin de sonder les choses et connaître tout ce qui est obtenu.... ainsi que tous les mystères"? En fait, il ne s'agit pas d'appliquer aveuglément une certaine règle mais de donner des démarches qui peuvent êtres imitées : l'arithmétique naïve laisse place à plus de liberté que l'-algèbre élémentaire. Dans ces conditions précises le champ d'application d'une technique est souvent illusoire, PELLOS, par exemple, se contente d'affirmer ;

> "Et pour cette règle il faut noter que quand il vous sera fait n'importe quelle question, en laquelle se mettra une quelconque partie comme la moitié, le tiers et le quart, et ainsi de suite "[PELLOS 1492, 179].

Il sera donc amené à fournir des exemples d'additions, de soustraction (comme celui de la lance) de multiplication et de division.
S'insérant plus dans une perspective algébrique, le mathématicien indien BHASKARA II qui vivait au douzième siècle de notre ère, est plus heureux dans son <u>Lilivati</u>, ouvrage dédié à une femme portant ce joli prénom :

> "Un nombre, supposé comme on veut, subit une opération précisée dans le problème particulier, (soit) multipliée, divisée, augmentée ou diminuée au moyen de fractions ; alors, la quantité donnée, multipliée par le nombre supposé et divisée par cela que l'on a trouvé donne le nombre cherché [COLEBROOKE 1817, 23].

Autrement dit, traduites en langage algébrique, les méthodes de simple fausse position correspondent à la réalisation d'équations linéaires de la forme :

$$x \in F \text{ et } \sum_{i=1}^{n} (a_i x) - \sum_{j=1}^{p} (b_j x) = \sum_{k=1}^{q} c_k - \sum_{\ell=1}^{r} d_\ell$$

où F est un ensemble de fractions auquel appartiennent tous les $a_i$, $b_j$ et de $c_k$. Posant

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{p} b_j \text{ et } T = \sum_{k=1}^{q} c_k - \sum_{\ell=1}^{r} d_\ell .$$

on obtient, aujourd'hui, sous la seule réserve que la somme S ne soit pas nulle,

$$x = \frac{T}{S}.$$

Comme nous le propose BHASKARA II on peut "supposer" un certain nombre $x_o$ non nul. On obtient alors pour second membre :

$$T_o = Sx_o$$

La valeur de l'inconnue est alors fournie par l'égalité :

$$x = \frac{Tx_o}{T_o}$$

dont on vérifie immédiatement la validité puisque :

$$\frac{Tx_o}{T_o} = \frac{Tx_o}{Sx_o} = \frac{T}{S}.$$

La simplicité de la traduction algébrique masque la difficulté arithmétique du problème proposé. C'est seulement dans ce cadre que l'on peut essayer de répondre au pourquoi de l'introduction de la méthode proposée. En général, les nombres $c_k$ et $d_\ell$ sont des entiers ce qui permet de calculer aisément la somme T (nous ne connaissons pas d'exemples historiques où ces nombres seraient rationnels). Par contre, lorsque les nombres $a_i$ ou $b_j$ sont de véritables rationnels positifs, le calcul de la somme S n'est pas aisé et celui de la division de T par S peut présenter aussi de sérieuses difficultés d'où l'intérêt de travailler le plus possible avec des entiers. Comme le dit PELLOS

> "il faut poser un nombre en lequel se mettront entièrement les parties proposées et celà pour éviter les nombres fractionnaires, et non pas qu'on puisse bien le faire avec un autre, mais avec davantage de peine [PELLOS 1492, 179].

Il est à noter que PELLOS se situe sur un plan très pratique : sa règle s'applique à des exemples où l'on met "une quelconque partie, comme la moitié, le tiers et le quart". Dès lors pour "éviter les nombres fractionnaires" il lui suffit d'adopter la fausse position 12. Mais dans l'exemple précité de la lance la fausse position 6 aurait aussi suffi.

Dans le problème 24 du papyrus Rhind, le scribe a aussi raisonné "entièrement" en adoptant la fausse position 7. C'est peut être dans le cadre des mathématiques égyptiennes que l'on peut le mieux apprécier la mise en oeuvre des méthodes de simple fausse position. En effet, les scribes de l'ancienne Egypte utilisaient comme seuls nombres :

- les entiers naturels non nuls

- la fraction $\frac{2}{3}$

et les inverses des entiers naturels non nuls que de nombreux historiens appellent les quantièmes.

C'est cet ensemble de nombres que nous notons $\mathbb{E}$. Nous savons aujourd'hui que tout rationnel strictement positif peut s'écrire sous la forme d'une somme d'éléments distincts de $\mathbb{E}$. Les anciens Egyptiens connaissaient certaines de ces écritures : par exemple, celles qui correspondent aux égalitées suivantes :

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, \quad \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}, \quad \frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}.$$

Dans $\mathbb{E}$, la conduite des opérations arithmétiques élémentaires peut conduire à des difficultés certaines. Ainsi, l'addition de deux mêmes quantièmes nécessite la connaissance de relations du type précédemment indiqué. La multiplication ou la division - qui est pratiquée de manière semblables à la multiplication- utilisent les procédés du doublement (multiplication par 2) ou du dédoublement (division par 2).Ainsi, dans le problème 24 précité la division de 19 par 8 est écrite comme suit

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 8 | on pose 1 et le diviseur 8 |
| / 2 | 16 | on double : 2 fois 1 égale 1<br>2 fois 8 égale 16<br>2 doit être pris car le résultat 16 est plus petit que le dividende 19. |
| $\frac{1}{2}$ | 4 | on dédouble car on ne peut pas doubler à nouveau : 32 est plus grand que 19. Mais le total partiel (16+4) est supérieur à 19. On ne prend pas $\frac{1}{2}$. |
| / $\frac{1}{4}$ | 2 | on dédouble à nouveau. Cette fois $\frac{1}{4}$ doit être pris (un tiret sert à l'indiquer) car le total partiel (1b+2) est inférieur à 19. |
| / $\frac{1}{8}$ | 1 | on dédouble à nouveau et le $\frac{1}{8}$ doit être ainsi pris. On obtient, au total 19 et $\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. |

Le lecteur pourra s'assurer facilement que par doublements successifs le scribe a ensuite multiplié $(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8})$ par 7 étant entendu que l'on a

$$7 = 1 + 2 + 4 = 1 + 2 + 2^2 \quad .$$

Pédagogiquement l'exercice 24 s'avère être un excellent exemple : d'une part la division part 7 n'est pas aisée et pourtant elle intervient dans le cadre métrologique habituel : une coudée-mesure de longueur- vaut 7 paumes. D'autre part, la méthode de simple fausse position permet de remplacer la division de 19 par $(1 + \frac{1}{7})$ par celle beaucoup plus élémentaire de 19 par 8. En effet on pourrait procéder comme suit :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{1}{7}$ | | on va multiplier $(1 + \frac{1}{7})$ pour obtenir 19 |
| 2 | 2 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{28}$ | par dédoublement et en utilisant<br>(1) $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ |
| 4 | 4 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{14}$ | par doublement |
| 8 | 9 | $\frac{1}{7}$ | | par doublement |
| / 16 | 18 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{28}$ | par doublement : 16 doit être "pris" |
| / $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{14}$ | | par dédoublement on a le total partiel<br>$18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}$<br>inférieur à 19 : $\frac{1}{2}$ doit être "pris" |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{28}$ | | par dédoublement. On ne peut pas "prendre" $\frac{1}{4}$ car le total partiel est supérieur à 19. |
| / $\frac{1}{8}$ | | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{56}$ | par dédoublement. On "prend" $\frac{1}{8}$ |

et celà suffit car

$$18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{8} + \frac{1}{56} = 19$$

puisque

(2) $\frac{1}{4} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}$

et $\frac{1}{8} = \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{56}$

Autrement dit, il est utile de connaître des relations de la forme (1) ou (2) pour pouvoir conclure aisément.
Les problèmes 24 et 27 du papyrus Rhind peuvent être considérés comme correspondant à la forme générale suivante : résolution dans $\mathbb{E}$ de l'équation

$$x + \frac{1}{n} x = b.$$

Le scribe adopte pour fausse position, $x_0$, la valeur n. Il obtient au second membre $b_0$, Il effectue ensuite la division de l'entier b par l'entier $b_0$ et il multiplie le résultat obtenu par l'entier $x_0$.
Ainsi, il a raisonné le plus possible en entiers :

$$x = (b : b_0)\ x_0.$$

| N° | n | b | $b_0 = n + 1$ | $b:b_0$ | x |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 7 | 19 | 8 | $2\frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$ | $16\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{8}$ |
| 25 | 2 | 16 | 3 | $5\ \frac{1}{3}$ | $10\ \frac{2}{3}$ |
| 26 | 4 | 15 | 5 | 3 | 12 |
| 27 | 5 | 21 | 6 | $3\ \frac{1}{2}$ | $17\ \frac{1}{2}$ |

Pour mieux percevoir la valeur de cette méthode de simple fausse position nous devons examiner un exemple qui cette fois n'est pas historique, mais fabriqué pour. En effet, dans la division de 19 par $(1+\frac{1}{7})$ nous avons utilisé de doublement et le dédoublement mais cela ne suffit pas toujours. Considérons, par exemple, l'équation :

$$x \in \mathbb{E} \quad \text{et } x + \frac{1}{10} x = 19$$

Adoptant la fausse position 10 nous avons à diviser 19 par 11, on peut procéder comme suit :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| / | $1$ | $11$ | | |
| / | $\frac{1}{2}$ | $5\ \frac{1}{2}$ | Total partiel | $16\ \frac{1}{2}$ |
| | $\frac{1}{4}$ | $2\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}$ | | $19\ \frac{1}{4}$ |
| / | $\frac{1}{8}$ | $1\frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$ | | $17\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$ |
| / | $\frac{1}{11}$ | $1$ | Par inversion | |

Total partiel 18 $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$

il manque $\frac{1}{8}$

---

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{22}$ | $\frac{1}{2}$ | |
| $\frac{1}{44}$ | $\frac{1}{4}$ | par dédoublements successifs |
| / $\frac{1}{88}$ | $\frac{1}{8}$ | le résultat : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{88}$ |

D'où, ensuite, immédiatement, le résultat en multipliant par 10 :

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{1}{2}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{88}$ |
| / 2 | 3 | $\frac{1}{4}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{66}\ \frac{1}{44}$ (car $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$ |
| 4 | 6 | $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{33}\ \frac{1}{22}$ |
| / 8 | 13 | $\frac{2}{3}\ \frac{1}{22}\ \frac{1}{66}\ \frac{1}{11}$ (car $\frac{2}{33} = \frac{1}{22} + \frac{1}{66}$ ) |

On obtient $(16 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{22} + \frac{1}{33} + \frac{1}{44}$ ) que l'on peut simplifier compte tenu de l'égalité :

$$(1)\ \frac{1}{6} = \frac{1}{11} + \frac{1}{22} + \frac{1}{33}$$

en $(17 + \frac{1}{4} + \frac{1}{44})$. Autrement dit en utilisant une table donnant la décomposition de $\frac{2}{n}$ en quantièmes distincts - il en existe une pour n impair variant de 3 à 101 dans le papyrus Rhind - et moyennant la connaissance de quelques règles simplificatrices comme (1), la méthode de simple fausse position permet d'obtenir assez facilement le résultat demandé.

En revanche la division de 19 par $(1 + \frac{1}{10})$ peut présenter certaines difficultées : on ne peut pas faire l'économie de l'introduction d'un "multiple" du quantième $\frac{1}{11}$. Autrement dit, on doit savoir, d'une certaine manière que l'on a l'égalité

$$1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10} ,$$

On obtient alors tout d'abord :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| / 1 | 1 | $\frac{1}{10}$ | | | |
| 2 | 2 | $\frac{1}{5}$ | | | |
| 4 | 4 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{15}$ | | (car $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ ) |
| 8 | 8 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{30}$ | (car $\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$ ) |

/ 16 17 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{15}$

En totalisant partiellement, on obtient seulement

$$18 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} .$$

ou encore :

$18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$

si l'on connaît l'égalité :

$$(2) \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} .$$

Mais il faut encore "compléter" pour arriver à 19. C'est ici que 11 apparait en utilisant les relations :

$$\frac{1}{11} (1 + \frac{1}{10} ) = \frac{1}{10} \text{ et } \frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66} .$$

on complète en effet la division comme suit.

| | | |
|---|---|---|
| / $\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{10}$ | (total partiel $18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$) |
| / $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{66}$ | $\frac{1}{5}$ | (total partiel $18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10}$ ) soit 19 d'après (2) |

Cette fois, avec cette méthode directe, le résultat est

$$17 + \frac{1}{11} + \frac{1}{6} + \frac{1}{66} ,$$

IL n'y a pas unicité de la décomposition en quantième !

Il nous semble que cet exemple montre bien la pertinence de l'algorithme : l'introduction naturelle de la fausse position n induit tout aussi naturellement la necessité du quantième $\frac{1}{n+1}$ ou d'un ou plusieurs quantièmes associés. Autrement dit la technique mise ainsi en oeuvre permet de pallier au manque de réduction au même dénominateur.

Mais l'histoire ne s'arrête pas là puisque ce procédé a perducé durant des siècles. A la manipulation mal aisée des fractions les anciens lui ont préféré une méthode plus compréhensible dans la résolution des problèmes concrets qu'ils s'étaient posés.

Toutefois si l'introduction de fausse position peut s'expliquer par le procédé du tatonnement il n'en est plus de même des méthodes qui sont associées. En effet, algébriquement, la résolution de l'équation

$$x \in F \text{ et } ax = b$$

à l'aide de la fausse position $n_0$ amêne à calculer a $x_0$. Si a $x_0$ est égal à b, alors on a trouvé la solution. C'est ce qui se produit au problème 28 du papyrus Rhind où le scribe résoud un prolème correspondant algébriquement à la résolution de l'équation

$$x \in \mathbb{E} \text{ et } (x + \frac{2}{3} x) - \frac{1}{3} (x + \frac{2}{3}x) = 10.$$

Il prend pour fausse position la valeur exacte et "naturelle", 9. Mais si a $x_0$ est distinct de b nous avons

$$x = \frac{b}{a} = \frac{bx_0}{ax_0} = \frac{b}{ax_0} \cdot {}_0 = \frac{x_0}{ax_0} \cdot b.$$

Nous avons vu que dans les problèmes 24 à 27 le scribe appliquait une "méthode" correspondant à l'égalité

$$x = \frac{b}{ax_0} \cdot x_0$$

Par contre dans le problème 29 c'est l'égalité

$$x = \frac{x_0}{ax_0} \cdot b.$$

qui est retenue. Dans sa traduction algébrique, il correspond à la résolution de l'équation :

$$x \in \mathbb{E} \text{ et } \frac{1}{3} [(x+ \frac{2}{3}x) + \frac{1}{3} (x+ \frac{2}{3} x)] = 10$$

Avec la fausse position 27 on obtient successivement.

$$x_0 = 27,\ ax_0 = 20,\ x_0 : ax_0 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10},\ x = 13 + \frac{1}{2}.$$

Le texte de ce problème est incomplet. Mais, en fait, il marque, peut être, la perplexité du scribe. Pourquoi ne pas diviser, selon la première méthode, b par $ax_0$ , c'est à dire 10 par 20, ce qui est immédiat ? Nous pouvons simplement nous abriter derrière le fait que cet exemple d'une nouvelle méthode nous semble mal choisi. Beaucoup plus tard, un persan anonyme proposera trois méthodes pour répondre à la question suivante :

> "Quel est le nombre qui, lorsqu'il est doublé puis multiplié par 6 et divisé par 8, donne 3 ? [SUTER, 1908, 118].

Avec nos notations elles correspondent respectivement aux relations

$$x = (bx_0) : (ax_0),\ x = x_0 : (ax_0 : b),\ x = b : (ax_0 : x_0)$$

Comme quoi l'imagination ne manque pas ou pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué.

Les Méthodes de double fausse position.

Au début du seizième siècle le florentin Francesco GHALIGAI explique en ces termes la différence qu'il peut exister entre les diverses méthodes de fausse position.

> Notons que la position est un concept assimilé à la chose et qui est dénommé selon le savoir de l'esprit mais en parlant d'une chose inconnue. On fait de suite comme si on la connaissait et on appelle alors position une quantité posée selon le cas. Bien qu'elle soit dite des deux positions , souvent, avec une seule position on résout le cas, c'est à dire qu'avec une on trouvera ce dont on a besoin. Et quand avec la première on n'arrive pas à ce que l'on veut alors on pose ensuite les deux positions par lesquelles beaucoup de questions se résolvent [SPIESSER 1982, 1].

Autrement dit, les méthodes de double fausse position permettent de traiter d'autres problèmes dont la nature exacte n'est pas très précisée . Peut être plus poëte, l'orcitaniste Francès PELLOS parle de

> "divers problèmes très subtils et très compliqués dont la solution sans cette règle est une grande fatigue et brisure de l'intelligence de l'homme [PELLOS, 1492,184].

En fait, bien souvent, les exemples indiqués, comme l'a souligné GHALIGAI, peuvent être traités par une méthode de simple fausse position. C'est ainsi que dans son précis d'arithmétique et d'algèbre mis à la portée des débutants "Déchiffrement des secrets sur la science des chiffres de poussière"AL QALASĀDĪ, propose comme exemples de l'opération avec les plateaux, nom donné par certains mathématiciens arabes à la méthode de double fausse position.

> "Une quantité, dont le tiers et le quart additionnés font vingt et un [...].
> une quantité, de laquelle on retranche un tiers et un sixième, il reste vingt quatre" [WOEPCKE, 1858, 417, 418].

Traitons le premier problème. Algébriquement il correspond à la résolution de l'équation

$$x \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{4}\,x = 21$$

Adoptant une première fausse position, $x_1$, égale à 12, le premier membre est égal à 7. On obtient une différence, $d_1$, de 14 avec le second membre. Ensuite, adoptant une seconde fausse position, $x_2$, égale à 24, on obtient cette fois une différence, $d_2$, égale à On a alors

$$x = \frac{x_2\ d_1\ -\ x_1\ d_2}{d_1\ -\ d_2} = \frac{24 \times 14 - 12 \times 7}{14 - 7} = 36.$$

De manière générale on a :

$$a\,x = b\ ,\ a\,x_1 = b + d_1\ ,\ a\,x_2 = b + d_2\ ,\ x = \frac{x_2\ d_1\ -\ x_1\ d_2}{d_1\ -\ d_2}$$

La formule générale

$$x = \frac{x_2\ d_1\ -\ x_1\ d_2}{d_1\ -\ d_2}$$

paraît bien compliquée pour résoudre les questions posées. Pourtant,l'ouvrage d'AL QALASĀDĪ traite des fractions et de l'algèbre. Autant dire qu'en cette fin du quinzième siècle où il écrit son ouvrage la méthode est très prégnante même si l'image des plateaux d'une balance sert à mieux présenter l'algorithme mis en oeuvre. On eut aimé un peu plus d'explications et des exemples plus convaincants.

En fait "les problèmes très subtils et tr-s compliqués " peuvent être traduits algébriquement sous la forme suivante : soit résolution d'une équation du premier degré où l'inconnue figure dans les deux membres, soit résolution d'un système linéaire d'équations à inconnues échelonées. Notons, mais ce n'est pas ici notre propos (voir [SPIESSER 1982]) que la méthode de double fausse position peut être utilisée plusieurs fois pour résoudre les systèmes linéaires d'équations.

Il semble que l'origine de cette méthode de double fausse position se trouve chez les mathématiciens chinois. Dans le Jiuzhang suanshu (les neufs chapitres sur l'art du calcul) rédigé durant la période des Han (-208, + 220) un chapitre lui est consacré "trop et pas assez afin de dominer les choses variées cachées les unes par rapport aux autres".

Les premiers problèmes ne traitent pas à proprement parler de double fausse position mais ils en précisent, peut être l'origine. Citons ici, le quatrième dans une traduction inédite de Jean-Claude MARTZLOFF que nous remercions chaleureusement pour son amicale collaboration :

"Soit un achat collectif de jadeite, si chaque homme

> paye un demi le trop vaut 4 ; si chaque homme paye un tiers le pas assez est de 3. Quels sont respectivement le nombre d'hommes et le prix des pierres ? Réponse : 42 hommes ; prix des pierres : 17.

Raisonnons de manière générale en notant x le nombre d'hommes et y le prix des marchandises. De plus, si chaque homme paye a, ici un demi, le trop est t, ici 4. Ensuite, si chaque homme paye b, ici un tiers, le pas assez est p, ici 3. On a alors les deux relations

$$a\,x = y + t \quad \text{et} \quad b\,x = y - p$$

d'où l'on obtient immédiatement

$$(1)\quad x = \frac{t + p}{a - b} \quad \text{et} \quad y = \frac{ap + bt}{a - b}\ ,$$

Transposons ceci dans le cas de la résolution de l'équation

$$X \in F \quad \text{et} \quad A\,X = B$$

Adoptant une première (resp.deuxième) fausse position $X_1$ (resp. $X_2$) obtient un trop T (resp. un pas assez P) tel que

$$A\,X_1 = B + T \quad (\text{resp. } A\,X_2 = B - P)$$

Alors A et B jouent le rôle des lettres x et y précédentes et on obtient

$$(2)\quad X = \frac{A}{B} = \frac{X_1\ P + X_2\ T}{P + T}$$

Sans que l'on puisse en préciser la source il revient au génie des arithméticiens chinois de la période des Hans d'avoir regroupé dans une même méthode, celle du trop et du pas assez, ce qui correspond, algébriquement, aux formules (1) et (2). Bien entendu, ils considérent aussi les cas où il y aurait deux "trop", ou deux pas assez". (voir annexe 1).

Cette technique est appliquée pour résoudre de nombreux problèmes. Mais, les "fractions" étant connues, il ne s'agit pas de raisonner en "entiers". En fait les fausses positions sont souvent les" meilleures approximations" possibles de la solution en égard aux unités métrologiques adoptées et la méthode du trop et du pas assez revient alors à linéariser. Voici, par exemple, le problème 9.

> "Soit du grain décortiqué dans un tonneau de capacité 10 dou ; on n'en connait pas la quantité. On remplit complètement le tonneau de grain brut que l'on pile pour le décortiquer. On obtient alors 7 dou de grain décortiqué. Question : combien y avait-il initialement de grain décortiqué.
>
> Réponse 2 dou 5 sheng.
>
> Méthode : résoudre cela au moyen de la méthode du trop et du pas assez. Supposons qu'il y avait à l'origine 2

> dou. Il manquerait alors 2 sheng. Supposons maintenant qu'il y avait 3 dou, cela donne alors un reste de 2 sheng".

Pour résoudre ce problème il manque deux données. La première est métrologique, un dou vaut 10 sheng. La deuxième est concrète. Dans le commentaire, que nous n'avons pas reproduit ici, il est dit qu'un dou, c'est-à-dire 10 sheng de grain brut donnent 6 sheng de grain décortiqué. Sur ces bases, en notant X la quantité, en sheng, de grain décortiqué, on peut ramener la résolution de problème à celle de l'équation.

$$X \in Q \quad \text{et } X + \frac{6}{10}(100 - X) = 70$$

On peut aussi noter Y la quantité de grain brut, nécessaire pour remplir le tonneau et considérer alors le système

$$(X,Y) \in Q \times Q \quad \text{et } X + Y = 100. \quad \text{et } X + \frac{6}{10} Y = 70$$

Ceci est sans doute plus près de l'énoncé et de la manière arithmétique explicitée par un commentateur.

> Commentaire : la contenance du tonneau est 1 hu [1 hu = 10 dou]. S'il était rempli à l'origine de 2 dou (de grain décortiqué) il aurait fallu lui ajouter 8 dou de grain brut pour le remplir. Mais 8 dou de grain donnent 4 dou 8 sheng de grain décortiqué. Comparativement à 7 dou cela fait un pas assez de 2 sheng. Si maintenent le tonneau avait été initialement rempli de 3 dou, il aurait fallu 7 dou pour le remplir. Mais 7 dou donnent 4 dou 2 sheng de grain décortiqué. Comparativement à 7 dou cela fait un reste de 2 sheng. En effectuant la multiplication en croix par les fausses hypothèses selon la méthode du trop et du pas assez

on obtient la solution

$$X = \frac{X_1 \ P + X_2 \ T}{P + T} + \frac{20 \times 2 + 30 \times 2}{2 + 2} = 25 = 2 \text{ dou } 5 \text{ sheng}$$

Par induction, les arithméticiens chinois ont appliqué ces techniques à des problèmes non linéaires tels certains problèmes de rencontre : voici, par exemple, le début du problème 19

> Soit un bon cheval et un mauvais cheval qui quittent Chang'an pour aller à Qi. Qi est distant de 3000 li de Chang'an. Le bon cheval fait 193 li le premier jour et augmente ensuite sa course de 13 li par jour, le mauvais cheval fait 97 li le premier jour et diminu ensuite sa course d'un demi-li chaque jour qui sui Le bon cheval gagne d'abord Qi et revient ensuite au

> devant du mauvais cheval. On demande après combien de jours les chevaux se rencontrent et quelle course chacun a effectué ? Réponse : ils se rencontrent au bout de 15 jours et 135/191 jour. Le bon cheval a parcouru 4534 li et 46/191 li. Le mauvais cheval a parcouru 1465 li et 145/191 li.

La méthode consiste à supposer 15 jours, alors le pas assez sera de 337 li et demi. Ensuite supposant 16 jours, le trop est de 140 li. d'où le résultat :

$$X = \frac{X_1 P + X_2 T}{P + T} = \frac{16 \times (337 + \frac{1}{2}) + 15 \times 140}{337 + \frac{1}{2} + 140} = 15 + \frac{135}{191}.$$

Autrement dit, à partir des "approximations" 15 et 16, la méthode du trop et du pas assez a conduit à linéariser ; Ceci bien entendu se situe au plus près du problème posé : on peut calculer successivement les chemins parcourus pour un nombre entier de jours. On obtient ainsi un "encadrement entier" de la solution et la méthode d'approximation linéaire correspond à une course à vitesse constante durant toute une journée. Dès lors la méthode n'est valable que pour les fausses positions choisies : il n'est plus question de prendre n'importe quelle fausse position. L'arithmétique a donc ici certaines limites que seule une étude attentive permet de mettre à jour. En se plaçant dans le cadre des "meilleures approximations" les mathématiciens chinois évitaient, en quelque sorte, de se poser ce genre de questions.
Peut être lorsque ces techniques ont été transmises aux Indiens et aux Arabes elles sont alors restées dans le cadre arithmétique strict dont nous avons parlé au début de ce paragraphe : les fausses positions étant quelconques. Ceci n'a pas empêché des mathématiciens hollandais tels MELLEMA d'appliquer les méthodes de double fausse position à la résolution d'équations du degré : dernier avatar de ces procédés.

**Un fruit bien défendu : les élèves face à un problème du XIIième siècle.**

La résolution , au douzième siècle, d'un problème par la méthode de double fausse position (voir annexe 2) a conduit des animateurs de l'I.R.E.M. de Reims à mener une étude dépassant le cadre historique où cet exercice était posé. Les raisons sont nombreuses :

1°) Ce problème fait appel à des connaissances acquises dans différentes classes par les élèves et il permet d'observer celles qui sont réinvesties.

2°) Plusieurs méthodes permettent de résoudre ce problème, aucune n'étant à priori meilleure que l'autre

3°) Le texte fournit sans justification une solution que les élèves peuvent accepter ou refuser au profit d'une de leur choix

4°) La méthode peut être appliquée, éventuellement, à d'autres situations du même type ou généralisée, ou encore justifiée. Jusqu'où les élèves iront-ils pour se convaincre de sa validité ?

A toutes ces raisons données par les menbres du groupe nous ajouterons celle qui sert de titre à notre étude :

5°) Entre arithmétique et algèbre que choisir ? pourquoi ?

Autrement dit le texte historique se révèle être un très bon champ d'expérience didactique.

L'énoncé du problème est en lui-même très simple et il n'offre aucune difficulté de compréhension. Il peut donc être soumis à toutes les classes du premier ou du second cycle.

> Et si on te dit : un homme est entré dans un verger et il a cueilli des fruits : Mais le verger avait 3 portes, gardées chacune par un gardien. Cet homme donc partagea les fruits avec le premier et lui en donna deux de plus, puis il partagea avec le deuxième et lui en donna deux de plus, enfin il partagea avec le troisième, lui en donna deux de plus, et il sortit en ayant seulement un fruit. Combien de fruits a-t-il cueilli ? Réponse 36, [SPIESSER 1982, 13].

L'énoncé seul n'a pas été soumis aux élèves. La solution par la méthode de double fausse position (voir annexe 2) y était associé. Il est toutefois intéressant de constater que la présentation du texte complet à une classe de seconde avec la seule indication

"qu'en pensez-vous ?"

a poussé ces derniers à s'arrêter à l'énoncé du problème et à le résoudre à leur manière. Est-ce parce que la solution proposée par BEN EZRA leur a paru trop ésotérique et que les élèves ont cherché à s'approprier une solution ? Les auteurs de l'enquête ne répondent pas. Toutefois nous pouvons y voir la croyance très forte en la prééminence d'une résolution de type algébrique.

("une majorité des élèves souhaite faire une lière").

Par contre lorsque les techniques algébriques sont moins connues, les élèves sont amenés à fournir d'autres méthodes dont la principale et de "partir du résultat et à remonter les calculs jusqu'à retrouver le nombre de fruits cueillis". Elles peuvent avoir un caractère strictement arithmétique comme l'exprime cet élève de quatrième.

> Pour résoudre, à notre époque plus facilement ce problème nous pourrions commencer par la fin, c'est-à-dire à à partie du chiffre 1 en faisant toute l'opération inverse.
>
> $\left.\begin{array}{l} 1 + 2 = 3 \\ 3 \times 2 = 6 \end{array}\right\}$ 3ème gardien
>
> $\left.\begin{array}{l} 6 + 2 = 8 \\ 8 \times 2 = 16 \end{array}\right\}$ 2ème gardien
>
> $\left.\begin{array}{l} 16 + 2 = 18 \\ 18 \times 2 = 36 \end{array}\right\}$ 3ème gardien
>
> resultat **36**
>
> Cette méthode est valable pour tous les autres problèmes dont on donne le résultat final. (p.12).

Même si l'élève a tenté de généraliser sa méthode, il n'a pas pu voir la pertinence de la technique de double fausse position. A l'époque de BEN EZRA et bien avant lui ce type de résolution était possible mais comme nous l'avons déja souligné les exemples donnés par les différents arithméticiens ne montrent pas toujours l'interêt des techniques qu'ils mettent en oeuvre. Aujourd'hui, nous aussi, nous interrogeons nous aussi souvent qu'il serait nécessaire sur les exemples que nous produisons ? Il est à noter que la mise sous forme algébrique est certes élémentaire mais assez longue à éffectuer que ce soit en utilisant une seule inconnue ou plusieurs inconnues. C'est justement pour éviter de tels efforts que la méthode de double fausse position est utile. Au lieu d'opérer de manière générale sur une inconnue, on opère sur deux valeurs particulières et on reste ainsi dans un cadre arithmétique simple. Ceci n'a pas échappé à un élève de seconde :

"On comprend très facilement le raisonnement suivi par

> Abraham au cours des deux premiers paragraphes. Un très jeune élève le comprendrait très rapidement" (p.31).

Mais lorsqu'il faut utiliser les résultats donnés par ces deux fausses positions, la remarque change de nature et elle nous interpelle très fortement.

> Dans cette dernière partie du texte il y a une légère ressemblance avec les maths de notre siècle. On a beaucoup plus l'impression qu'il utilise une méthode mathémathique et qu'il ne suit plus la logique. Seuls les bons mathématiciens ayant appris la méthode comprennent ce raisonnement [...].
> C'est à ces hommes là que l'on doit ces difficultés dans cette matière pour les mauvais et ces facilités pour les petits craks, passionnés de maths (p.31).

Autrement dit,"pour les mauvais", la mystification est complète. Certains vont même jusqu'à dire.

> "C'est un fou"
> "Sa méthode est nulle"
> "Ca doit être faux"(p.6).

La justification de la règle prend alors tout son sens. Mais nous devons alors quitter le domaine arithmétique pour nous situer dans le champ de l'algèbre. Toutefois les essais de justification donnent lieu à bien des surprises. Ainsi pour ceux qui ont seulement raisonné à partir d'autres exemples

> "Oui la méthode exposée par Ben Ezra est bonne puisque avec d'autres exemples le résultat est bon, nous trouvons 36" (p.25).

D'autres sont restés à mi-chemin en choisissant comme fausses positions x et 2x. Seuls quelques élèves ont choisi deux variables littérales pour remplacer les fausses positions. Mais aucun n'a tenté spontanément d'appliquer la méthode à d'autres situations. Autrement dit, ils n'ont pas réellement pris conscience de la nature profonde d'un algorithme.

<u>En guise de conclusion</u>

L'expérience menée par le groupe Histoire des Mathématiques de l'I.R.E.M de Reims montre toute la richesse des réflexions que l'on peut être amenées à formuler à partir de l'introduction des textes historiques dans nos classes. Rapidement, nous sommes amenés à nous interroger, à travers des pratiques anciennes, sur nos propres méthodes. Les techniques de fausse position nous semblent être un outil privilégié pour mener ce type d'activité.

La méthode de simple fausse position peut être un tès bon révélateur des difficultés éprouvés dans l'utilisation des fractions. Quittant le domaine chinois des approximations la méthode de double fausse position s'est peu à peu insérée dans un cadre plus strictement arithmétique mais elle resurgit aujourd'hui sous son aspect premier : la régula falsi des approximations numériques. Toutes ces méthodes reposent sur la linéarité ou une certaine proportionalité et elles peuvent être jugées à l'aune d'une algèbre sans symbole. Autant de perspectives qui s'offrent à nous et qui ne manquent pas d'intéresser tant l'épistemologue que le didacticien.

**Annexe 1.**

**La méthode chinoise de trop et du pas assez. (traduction inédite de Jean-Claude MARTZLOFF).**

La méthode du pas assez et du juste assez (ou du) trop et du juste assez dit : Prendre les valeurs **(shu)** du trop ou du pas assez pour dividende. Placer ce que l'on paye, diminuer le beaucoup au moyen du peu, le reste fait le diviseur."Si le dividende est égal au diviseur" on obtient un homme. Pour ce qui est de la recherche du prix des choses, on multiplie le juste assez par le nombre d'hommes et on obtient le prix des choses.

**Si la valeur du trop ou du pas assez fait le dividende, dans les nombres on voit seulement l'écart de la totalité des hommes, c'est pourquoi on le considère comme un dividende. Si on diminue le beaucoup au moyen du peu dans les modules de ce qui est versé le reste fait l'écart d'un homme, c'est pourquoi on le prend pour diviseur. En le divisant part l'écart de la totalité des hommes on trouve le nombre d'hommes. En multipliant le nombre d'hommes par le juste**

assez on obtient alors le prix des choses. L'idée de cette méthode est de dire que quand on diminue le beaucoup au moyen du peu (du point de vue) des modules qui ont été payés le reste correspond à l'écart en pas assez par homme. La valeur du pas assez est l'écart correspondant à la totalité des hommes. En le réduisant au moyen de l'écart d'un homme on obtient donc le nombre d'hommes.

Annexe 2.

## un fruit bien défendu

Chapitre des fruits.
"Et si on dit : un homme est entré dans un verger et il y a cueilli des fruits. Mais le verger avait 3 portes, gardées chacune par un gardien. Cet homme donc partagea les fruits avec le 1er et lui en donna deux de plus, puis il partagea avec le 2ème et lui en donna deux de plus, enfin partagea avec le 3ème, lui en donna deux de plus, et il sortit en ayant seulement 1 fruit. Combien de fruits a t-il cueilli ?

Le chapitre de la numération te propose de placer 100 dans le plateau. Partage avec le premier (gardien) en lui donnant deux (fruits) supplémentaires. Il t'en reste 48 ; partage avec le second et donne lui en 2 de plus, il t'en reste 22 ; enfin partage avec le 3ème et donne lui en deux , et il t'en reste 9.
Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de 8, en excédent. On appelle cela la première erreur.
Ensuite prends dans le second plateau le nombre 200, partage avec le premier (gardien) en lui donnant deux (fruits) de plus ; il t'en reste 98 ; partage avec le second et donne lui en deux de plus, il t'en reste 47 ; enfin partage avec le troisième puis donne lui en deux de plus, et il t'en reste 21 1/2, en plus. Mais compare avec le reste 1. Tu t'es trompé de +20 1/2. Ceci est la deuxième erreur.
Multiplie la par 100 qui est dans le premier plateau et on obtient 2050 ; ensuite multiplie ce qui est dans le second plateau par l'erreur du premier, ce qui revient à multiplier 200 par 8, et

**cela fera 1600. Tu retranche alors le plus petit du plus grand, soit 1600 de 2050 ; il reste 450. Enfin retranche une erreur de l'autre, c'est-à-dire 8 de 20 1/2, il reste 12 1/2. Divise alors 450 par ce nombre, et tu obtiens 36. C'est donc le nombre de fruits qu'il a cueilli.**

SPIESSER, M Equations du premier degré. Méthode de "fausse position" I.R.E.M Toulouse. Toulouse 1982 pages 13-14.

**BIBLIOGRAPHIE.**

ARTIGUE, M ; 1991 ; Epistémologie et didactique
Recherche en didactique des Mathématiques 10 (1991) 241-285
BRUINS, E, M ; RUTTEN, M ; 1961 ; Textes mathématiques de Suse
Paul Geuthner Paris 1961.
CHACE, A, B ; 1979 ; The Rhind Mathématical Papyrus
The National Council of Teachers of Mathématic Reston 1979
COLEBROOKE, H, T ; 1817 .Algebra with arithmétic and mensuration from the sanscrit of Brahmegupta and Bhascara
John Murray London 1817
GROUPE IREM HISTOIRE DES MATHEMATIQUES ; 1988 ;
Un fruit bien défendu. Les élèves face à un problème du XIIe s.
I.R.E.M de Reims Reims 1988.
GUILLEMOT, M ; 1984 ; Les problèmes 24 à 29 du Papyrus Rhind
Actes de l'Université d'Eté sur l'Histoire des Mathématiques 6-13 juillet 1984. Université du Maine Le Mans 1986
MELLEMA, 1586 ; De l'arithmétique
Gillis vanden Rade Anvers 1586.
PELLOS, F 1492, Compendion de l'abaco texte établi d'après l'édition de 1492 par Robert LAFONT.
Editions de la Revue des Langues Romanes Montpellier 1967
AL QALAṢĀDĪ ; 1988 ; kaš f al-asrār ' an ' ilm hurūf av-l ḡubār
Texte établi et traduit par Mohamed SOUISSI Maison Arabe du Livre Carthage 1988
SANFORD, A ; 1951 ; The Rule of False Position
The Mathematics Teacher 44 (1951) 307-310.
SPIESSER ; M ; 1982 Equations du premier degré.Méthode de fausse

position IREM Toulouse Toulouse 1982

WOEPCKE, M ; 1959 ; Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise... Atti dell' accademia Pontifica de Nuovi Lincei 12 (1959) 399-439.