MICHÈLE ARTIGUE
JEAN-LUC DORIER

Ingénierie didactique d'un point de vue méthodologique : étude d'une recherche sur l'enseignement de l'algèbre linéaire

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1989, fascicule S6
« Vème école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique », , p. 131-139
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1989___S6_131_0>

Vendredi 1er septembre 1989

Travaux dirigés : *"Ingéniérie didactique d'un point de vue méthodologique : étude d'une recherche sur l'enseignement de l'algèbre linéaire"*

*par Michèle **ARTIGUE**, Jean-Luc **DORIER***

Université PARIS 7
Institut Fourier, Université de GRENOBLE 1

I - OBJECTIFS ET PRESENTATION GLOBALE DU TD

Cet atelier a pour objectif d'engager les participants dans l'analyse d'un point de vue méthodologique de textes relatifs à une recherche d'ingénierie didactique. Il s'agit d'une recherche en cours sur l'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année, menée par J.L.Dorier à l'Université de Grenoble 1. Les textes fournis aux participants sont des textes provisoires et, en particulier, ils ne correspondent pas aux standard que l'on peut inférer du cours sur l'ingénierie didactique de la matinée. Si nous avons choisi ce type de texte, en dépit des difficultés que cela pouvait susciter, c'est parce que justement ils sont encore proches du travail privé du chercheur et que, comprendre leur organisation, le type de fonctionnement dont ils témoignent, analyser en quoi ce qui est en jeu là se rapproche ou se différencie d'un travail canonique d'ingénierie didactique, en quoi ce qui est écrit se rapproche où se différencie d'un texte achevé, comment peut se guider à partir de ce point le travail didactique, est à nos yeux un exercice didactique fondamental.

La recherche de J.L.Dorier est menée dans une section expérimentale où fonctionne une stratégie globale de débat scientifique (cf. cours de G.Arsac et M.Legrand) et elle s'appuie sur les résultats pratiques et théoriques qui ont été obtenus à ce niveau macro-didactique. Elle s'appuie aussi sur les recherches déjà menées sur l'algèbre linéaire, en particulier celles d'A.Robert et J.Robinet, de G.Harel et de B.Artmann. Par ailleurs une partie de cette recherche consiste en une anlyse historique des conditions d'émergence du concept d'espace vectoriel et de son évolution au sein de l'édifice mathématique. La partie proposée pour l'analyse concerne une activité métamathématique où sont introduits les axiomes de la structure d'espace vectoriel : après un travail individuel introductif sur les groupes, ces axiomes sont dégagés d'un ensemble de propriétés perçues comme nécessaires à la résolution simple de certaines équations. Le texte relatif à cette partie de l'ingénierie était trop long pour pouvoir être lu et travaillé dans le temps imparti. Nous avons décidé de centrer l'analyse sur deux moments de ce texte : l'un qui décrit et justifie les choix globaux effectués à ce niveau, l'autre qui présente une partie de l'analyse a priori de la situation d'introduction de l'axiomatique. Il s'agit d'une partie seulement puisque la séance s'appuie sur un travail préalable autonome des étudiants concernant justement la structure de groupe et la résolution d'équations sur la base d'un texte qui n'est pas fourni ici.

Il est clair qu'il s'agit là d'un compromis entre deux contraintes contradictoires : donner un texte suffisamment complet, donner un texte lisible en un temps relativement court et que la transformation de l'exercice fondamental décrit ci-dessus en exercice d'école oblige à un tel compromis.
A priori, les extraits choisis ici nous semblent réaliser un compromis acceptable. Nous faisons l'hypothèse que, bien que partiels, ils doivent permettre de lancer le travail méthodologique sans trop le fausser. Pour réduire les inconvénients du compromis, il est d'autre part prévu que J.L.Dorier puisse apporter des informations aux participants qui le demanderaient lors du travail en groupe, ou qu'il prenne la parole dans les phases

collectives si les interprétations apportées lui semblent pouvoir être invalidées par des éléments dont les participants n'auraient pas eu connaissance.

II - ORGANISATION PEDAGOGIQUE

L'organisation pédagogique prévue est articulée en quatre phases :

1) Introduction et mise en place de la phase 2 (10 minutes) :
Dans cette phase, il s'agit dans un premier temps de situer rapidement la recherche au sein de laquelle se situe le travail présenté, de présenter les objectifs du TD en soulignant le caractère provisoire et décontextualisé des extraits à analyser et en donnant les raisons de ce choix effectué et enfin de fixer clairement le contrat : il ne s'agit pas de juger de la pertinence des choix effectués mais d'analyser le travail d'un point de vue méthodologique à partir des éléments dont on dispose. Ceci est d'autant plus important que la tendance naturelle au dérapage sera sans doute ici particulièrement forte du fait même des choix effectués qui peuvent apparaître comme très formels.
Dans un deuxième temps, il s'agit de mettre en place l'activité de la phase 2, en précisant qu'on demande là une première analyse encore relativement grossière et qu'il importe de ne pas se perdre dans les détails. On donne aussi le temps imparti à cette activité : 50 minutes.

2) La première analyse des textes (50 minutes) :
Il est prévu de séparer les participants en groupes de 4 ou 5 personnes, avec si possible 2 groupes au moins et 3 au plus pour chaque texte. La lecture des textes est guidée par les questions suivantes :

Texte 1 :
1 - Réaliser un organigramme qui rende compte des éléments d'analyse présents dans ce texte d'introduction, de leur nature et de leur structuration (il s'agit de construire assez rapidement un instrument de travail pour aborder les autres questions)
2 - Quelles sont les dimensions d'analyse privilégiées ? Y-a-t- il des dimensions qui n'ont pas été prises en compte ? Ceci peut-il s'interpréter didactiquement ?
3 - Comment est organisée, l'interaction entre les considérations dépendant du contexte étudié ici et les considérations plus générales ?

Texte 2 :
1 - Représenter par un organigramme la structure de cette analyse a priori (il s'agit de construire assez rapidement un instrument de travail pour aborder les autres questions)
2 - La partie a-didactique de l'analyse : Qu'est-ce-qui est explicité dans cette composante au niveau descriptif, au niveau prédictif ?
3 - La place de l'enseignant dans l'analyse a priori : Quels sont les types d'intervention, les décisions de l'enseignant qui sont pris en compte ? Ceci peut-il s'interpréter didactiquement ?

Soulignons qu'à nos yeux, les organigrammes ont également pour fonction de constituer un support à la communication intergroupes dans la phase suivante.

3) Présentation et comparaison des travaux des différents groupes (30 minutes) :
L'objet de cette phase est d'abord de faire en sorte que chaque participant ait une vision des deux aspects (global et local) de l'analyse bien qu'il n'en ait traité personnellement qu'un. Il est ensuite, par la confrontation des productions relatives à un même texte, d'aider à mieux saisir l'enjeu d'un tel exercice didactique, son intérêt mais aussi sa difficulté. Il est enfin de parvenir au sein du TD à une cohésion suffisante par rapport au

travail engagé dans la phase 2 pour que la discussion collective prévue à la phase suivante puisse fonctionner efficacement.

4) Débat (30 minutes) :
L'objet de cette phase est de lancer le débat, en s'appuyant sur le cas particulier étudié, sur des questions, à nos yeux cruciales :
1 - En quoi l'analyse a priori effectuée dans le texte engage-t-elle une démarche de validation ?
2 - Ces textes véhiculent-ils une conception de la reproductibilité et si oui, laquelle ?
3 - Quelles propositions ferions-nous à un chercheur, d'un point de vue méthodologique, sur la base d'un texte comme celui-ci ?

Nous voudrions signaler que, malgré le travail fourni par les participants et le respect quasi-unanime du contrat passé, le TD n'a pas réussi à respecter cette organisation, la phase de constitution des organigrammes ayant pris plus d'une heure et demie au lieu des 50 minutes initialement prévues.

2) Analyse a priori.

Les axiomes : un enjeu métamathématique.

I) Problématique et hypothèses.

Avant d'expliciter le type d'introduction que nous avons mis sur pied pour ce cours, il nous semble important de résumer, succintement, le trajet qui nous y a conduit.

Nous avons donc parallèlement à notre étude historique et à l'explicitation des prérequis, tenté de déterminer quel contenu et quelle forme pouvait prendre une introduction du cours d'algèbre linéaire tout en essayant de mieux cerner les connaissances visées par cet enseignement. Nos premières recherches nous ont amené à nous forger quelques hypothèses dans ce sens.

Tout d'abord nous pensons qu'on ne peut justifier une étude des concepts d'algèbre linéaire en se restreignant à la géométrie ou aux dimensions deux et trois. Au contraire nous croyons que c'est en donnant un champ d'applications le plus vaste possible, que l'on peut montrer l'intérêt de l'algèbre linéaire, qui, à notre avis, réside essentiellement dans l'aspect unificateur et simplificateur de la théorie des espaces vectoriels. Ce point de vue est déjà en opposition avec le contenu du programme auquel nous sommes tenu (cf annexe), il a par contre déjà été exprimé lors d'autres travaux sur cette question (ref J.Robinet A.Robert).

Ce premier point explicité, nous avons cherché du côté des résultats théoriques en didactique, un outil d'analyse pour mettre au point notre séquence d'introduction. Nous avons, tout d'abord, utilisé les travaux de G.Brousseau (ref) et surtout de R.Douady (ref). En nous appuyant sur la théorie de la dialectique outil-objet et du changement de cadre, nous avons cherché un problème satisfaisant aux conditions énoncées par R.Douady pour permettre d'introduire le concept un peu flou de linéarité ou un concept central en algèbre linéaire. Nous rappelons ici ces conditions en citant l'auteur (in RDM vol 7 n°2 p13, 1986).

" -L'énoncé (contexte et questions) a du sens pour les élèves.

- Compte-tenu de leurs connaissances, les élèves peuvent engager une procédure de résolution, mais ils ne peuvent pas résoudre complétement le problème.

- Les connaissances visées par l'apprentissage (contenu ou méthode) sont des outils adaptés au problème.

- Le problème peut se formuler dans deux cadres différents. ..."

En outre, nous avons eu connaissance de quelques tentatives menées par une équipe de Paris VI, qui ne répondaient que partiellement à notre problématique. Ensuite nous avons essayé de mettre une séquence au point en nous appuyant, sur notre étude épistémologique et sur la théorie citée plus haut.

Notre choix s'est porté sur une étude des suites de Fibonacci. En effet si on s'intéresse à la convergence de ces suites (u_0 et u_1 quelconques et $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$), on a intuitivement l'idée que toutes divergent vers plus ou moins l'infini. Ceci peut se confirmer par des essais sur ordinnateur ou avec une calculette. De plus, on peut grâce à des outils d'analyse montrer la divergence dans un nombre de cas assez large. Mais si on examine le problème sous un jour linéaire, après avoir reconnu un espace vectoriel de dimension 2 , par un "bon" changement de base, on montre qu'il y a une droite de suites convergentes vers 0, les autres étant effectivement divergentes.

Partant de ces remarques et en utilisant la théorie de R.Douady, nous avons écrit un scénario de séquence, que nous avons expérimenté en 1988 en DEUG A à Grenoble. Cette expérience nous a conduit à un constat d'échec, au moins partiel, que nous imputons essentiellement à la difficulté qu'il y a, dans cette situation, à gérer le changement de cadre en interaction avec la connaissance visée. Schématiquement on peut dire que les deux cadres dans lesquels le problème peut se formuler sont un cadre analytique d'expérimentation locale et un cadre algébrique d'exploration plus globale. Or plus qu'une idée de linéarité ou de changement de base, qui ne sont peut-être que des "petits" problèmes techniques -dans la situation présente-, la connaissance réellement en jeu dans ce problème semble bien être la prise de conscience de la nécessité du changement de point de vue du local au global. Il faut savoir passer d'une étude au coup par coup, en fonction des valeurs de u_0 et u_1, à une vision globale du problème. En outre, par rapport à la problématique d'étude de la convergence, la découverte de la suite géométrique convergente vers 0 est un fait plus déterminant que l'utilisation de l'algèbre linéaire qui n'est vraiment performante que pour l'explicitation d'un résultat complet. Or la recherche de suites géométriques semble être entièrement du domaine de l'heuristique, et ne pouvoir être suggérée que par des artifices peu justifiables. Ces difficultés sont un obstacle à une bonne dévolution du problème, dont une articulation décisive repose sur un deus ex machina (la découverte de la suite géométrique convergente vers 0), de plus elles rendent la phase finale d'institutionnalisation très délicate, car on ne peut pas réellement cerner l'objet de savoir mis en place.

Plus généralement, ces interrogations soulèvent le problème de savoir si tous les concepts -particulièrement en algèbre linéaire- peuvent avoir un aspect outil avant d'avoir été des objets de savoir. Dans la séquence précédente, par exemple, dégage-t-on vraiment la notion de famille génératrice ou de base, alors qu'une fois les deux suites géométriques exhibées, tout se résume à une banale résolution de système 2x2. Il semblerait bien plutôt que ces notions sans être fondamentales pour ce problème, permettent, si on les connaît, donc a posteriori, de mieux justifier certaines étapes dans la résolution et de classer ce type de problèmes dans une classe plus vaste ce qui permet de mettre en place automatiquement, des processus d'investigation.

En définitive, les véritables situations ayant justifié historiquement l'utilisation de l'algèbre linéaire sont hors de portée des étudiants de DEUG et de toute façon ne touchent pas aux premiers concepts. De plus il semble que si beaucoup de problèmes mathématiques ont trouvé des solutions plus élégantes plus simples ou plus complètes grâce à l'algèbre linéaire, aucun ne saurait à lui seul justifier l'introduction des premiers concepts d'algèbre linéaire. Pourrait-on habilement utiliser une transposition didactique ou y-a-t-il vraiment un écueil théorique ? C'est une question de fond à laquelle on ne peut que donner des éléments de réponse partiels.

Pour notre part, incapable de trouver le "bon" problème permettant d'introduire l'algèbre linéaire, nous avons essayé de trouver un détour. Pour ce faire, nous nous sommes appuyé sur les réflexions d'A. Robert. S'appuyant sur les spécificités de l'enseignement post-obligatoire, A Robert suggère en effet qu'il est possible d'utiliser de nouveaux "leviers" en particulier le "levier" métamathématique.

Pour travailler dans cette direction il était nécessaire d'arriver à clarifier notre épistémologie de l'algèbre linéaire. Comme nous l'avons dit plus haut, nous pensons que l'intérêt principal de l'algèbre linéaire est d'unifier et de simplifier. Elle permet d'appliquer des résultats théoriques à une classe d'ensembles très variés, dont on oublie certaines carctéristiques extérieures, pour n'utiliser que la structure linéaire. La reconnaissance de cette structure linéaire, repose sur peu de critères qui sont les axiomes, dont tous les autres résultats, aussi élaborés soient-ils, découlent. Pour le spécialiste, dont la culture est étendue, l'algèbre linéaire représente donc un gain de temps aussi bien qu'une économie de pensée, puisqu'elle lui permet de répondre à des problèmes extérieurement très différents avec des outils identiques particulièrement performants. Ces considérations sont pourtant beaucoup trop générales pour le débutant qui manque de points de référence.

Pour une introduction, il faut donc trouver une transposition de cette épistémologie globale à un niveau plus local et accessible aux débutants. Dans le paragraphe qui suit nous allons montrer comment nous avons essayer de résoudre cette difficulté, et nous décrirons la séquence mise en place.

ii) Proposition

Un étudiant standart de première année de DEUG A ne semble pas avoir conscience de la nécessité de disposer d'algorithmes ou de mécanismes de pensée reproductibles dans différents ensembles. Ces connaissances ne sont pas encore assez étendues, et il n'a pas le recul nécessaire, pour ressentir ce besoin "spontanńément". Pourtant, il a déjà intégré, plus ou moins inconsciemment, certains de ces algorithmes, sans toujours en connaître le domaine de validité. Un exemple des plus simples, est la résolution des équations du type $x \square a=b$, où $\square$ est une loi de composition interne dans un ensemble E. Dans un groupe, cette équation se résoud facilement, toujours de la même façon, et se résume à la recherche du symétrique de a. Dans les autres cas, on doit mettre en place une technique ad hoc spécifique à l'ensemble et à la loi de l'exemple. On peut voir, par ailleurs, que dans les étapes de résolution de ce type d'équation dans un groupe, on utilise tour à tour les trois axiomes de la structure dans leur quasi généralité. Un étudiant n'a pas en général conscience de tous ces points, pourtant il résoud souvent de ces équations dans des ensembles assez variés. Par ailleurs, la plupart du temps, il connait la définition axiomatique d'un groupe et les exemples classiques (même si ses connaissances sur ce sujet ne sont en général guère plus étendues). Si nous admettons nos hypothèses sur l'état moyen des connaissances d'un étudiant en première année, nous disposons donc d'une problématique accessible en DEUG A, qui pourrait faire l'objet d'un enseignement métamathématique. Pour la section A11 à laquelle ce cours est initialement destiné, nous disposions d'assez d'informations pour pouvoir confirmer avec beaucoup de certitude nos hypothèses.

Nous proposons d'utiliser cette idée, comme point de départ pour notre séquence d'introduction. Nous mettons ainsi en place une étape initiatique à notre problématique globale de "simplification-unification", dans un domaine où la question a une plus grande pertinence pour les étudiants. De plus, la question soulevée permet l'explicitation des axiomes d'une structure en fonction d'une nécessité. En effet, on peut dire que les axiomes apparaisent comme les propriétés minimales pour que les équations $x \square a=b$ se résolvent "simplement". Il sera intéressant de retrouver cette démarche lors de l'explicitation des axiomes d'espace vectoriel. Enfin la structure de groupe est une composante de la structure d'espace vectoriel, ainsi notre propos est non seulement inaugural sur le plan métamathématique mais aussi d'un point de vue strictement mathématique, il nous place déjà dans la voie de la structure vectorielle.

Pour rattacher cette première étape à la suite nous utiliserons deux fils directeurs. Tout d'abord, nous nous inspirerons de ce qu'écrit Peano (cf partie hist), nous introduirons la loi externe (dans un premier temps) sur $\mathbb{Q}$, comme un prolongement de la multiplication par un entier relatif qui se fait "naturellement" sur un groupe "additif". L'utilité de ce prolongement peut se justifier par le besoin d'une proportionalité plus opérationnelle en particulier, pour la résolution des équations du type $2x=3a$. Ensuite, il nous semble important, toujours dans notre problématique générale de montrer dès le départ, le côté opérationnel et simplificateur des axiomes. Ainsi nous essaierons de mettre en place une activité où les étudiants auront à leur charge de dégager les axiomes d'un ensemble plus vaste de propriétés -on envisagera plusieurs scénarios permettant d'arriver à cet ensemble de propiétés-.

TEXTE 1

Nous avons donc explicité les grandes lignes de la séquence d'introduction. Les principales connaissances que nous pensons pouvoir ainsi viser sont :

-La définition axiomatique des espaces vectoriels et leurs premières propriétés -règles de calculs-, pour ce qui est du contenu strictement mathématique.

et sur un plan plus métamathématique :

-Un aspect de l'approche simplificatrice et unificatrice de l'étude des structures. Cet aspect est très local mais il a l'avantage d'être opérationnel et il servira d'amorce à un discours métamathématique récurrent dans notre cours.

- Une implication personnelle (des étudiants) dans l'explicitation d'une axiomatique, qui oblige à l'utilisation du formalisme.

TEXTE 2

Nous allons , à présent donner une description détaillée de ce que nous avons mis en place, avec une analyse a priori des comportements possibles des étudiants.

Le discours métamathématique sur les équations $a\Box x=b$, devant opérer à des degrés différents sur les individus, nous avons décidé de le présenter sous forme de polycopié distribué, plusieurs jours avant le premier cours. Pour avoir un retour sur cette activité de travail individuel, nous avons proposé quelques exercices en demandant de rédiger des solutions (on trouvera le contenu de ce polycopié en annexe).

Le contenu de ce polycopié, a été en partie justifié plus haut. Nous allons maintenant mieux expliciter certains choix plus locaux.

Par rapport aux deux équations explicites proposées en exemple au début du polycopié, voici les raisons qui nous les ont fait choisir. Nous pensons que les deux opérations en jeu (composition des bijections du plan affine et produit vectoriel) sont connues des étudiants mais pas assez encore pour qu'ils trouvent ces deux équations "faciles". Leurs résolutions devrait être à la portée des étudiants sans être trop facile. De plus toutes deux paraissent de difficultés a priori identiques, pourtant les mécanismes de pensée à mettre en œuvre ont des natures fondamentalement différentes. Pour la première on peut appliquer un schéma connu qui est celui des équations numériques les plus simples, la structure de groupe nous permet de résoudre cette équation quasiment sans parler de bijections du plan affine ; on a une solution unique: $F=T(2e_1)\circ R(0;-\pi/2)$. Par contre la deuxième équation demande d'avoir plus de connaissances sur le produit vectoriel et la méthode de résolution spécifique à ce cas précis ne peut pas être reproduite dans d'autres ; il faut savoir que l'on a une droite affine de solutions ou résoudre un système de trois équations linéaires avec les coordonnées de V en inconnues. Les résolutions effectives ne sont pas données pour que l'étudiant ait une part active dans sa lecture, il doit de lui-même donner du sens au discours métamathématique qui risque fort sinon de ne laisser que peu de traces. Par ailleurs en demandant aux étudiants de rédiger les quelques exercices du polycopié, on a un renseignement partiel (écrit) sur l'engagement et les difficultés rencontrées par les étudiants.

Il nous a semblé important d'insister sur le fait que les axiomes sont , pour les exemples proposés au niveau du DEUG, faciles à vérifier ou à mettre en défaut, même s'il est vrai qu'il y a des cas plus élaborés où cette tâche est très délicate. Cette remarque est encore vraie pour les espaces vectoriels.

TEXTE 2

On ne fait pas un cours sur les groupes, on a donc arrêté très vite l'examen des propriétés découlant des axiomes. L'explicitation de l'unicité du neutre et de celle du symétrique permet de donner un exemple d'utilisation des axiomes et du formalisme. Par ailleurs c'est un résultat intéressant pour la structure de groupe. On donne ensuite un exercice (conjecture: dans un groupe si $x\Box x=x$ alors x est le neutre) pour que le lecteur prenne en charge une démonstration découlant des axiomes, mais aussi parce que cette propriété est souvent utile. On prépare ainsi le terrain pour le travail qui va se faire sur les axiomes d'espace vectoriel, ce résultat sert en effet à montrer que $0x=0$ par exemple.

Le terme de groupe additif est très criticable d'un point de vue de spécialiste. Comment en effet définir une addition ? N'est-ce pas tout simplement le nom donné à une loi commutative ? Ainsi le terme de groupe commutatif serait peut-être plus juste. Pourtant si on se restreint aux exemples donnés par la suite et par ailleurs largement suffisants au niveau où nous nous plaçons, le terme d'addition a un sens concret qui, semble-t-il, ne prête pas à ambiguïté, pour les étudiants.

Nous pensons que la conjecture : $n.x=(-n).(-x)$ tout en favorisant l'activité du lecteur devrait permettre de se questionner sur les fonctionnements élémentaires de la multiplication externe et de sa cohérence. Une façon de la résoudre est la suivante : on peut supposer $n>0$; alors $(-n).(-x)=-((-x)+...+(-x))$ n fois. Or en utilisant les axiomes de groupe on a que $((-x)+...+(-x))+x+...+x=0$ donc $(-n).(-x)=n.x$. Cette démonstration est tassez délicate et il n'est pas du tout certain que les étudiants puissent la prendre en charge, un premier but est qu'ils en évitent les pièges les plus gros (illusion de transparence) et qu'ils voient qu'il y a réellement quelque chose à démontrer. Il serait bon, au vu des résultats donnés par écrit, de retravailler cette question en TD pour y répondre entièrement.

Nous allons voir ci-dessous comment le dernier exercice pourra nous être utile pour envisager un scénario de prolongement de cette première activité.

Avant tout, il faudra s'occuper du devenir de ce polycopié. On pourra en parler, avant le cours, en séance de TD, pour recueillir les premières impressions, et pour éventuellement restimuler ceux qui auraient négligé cette activité. L'introduction mise en tête du polycopié pousuit le même but ; elle doit être complétée par un petit discours lors de la distribution de ce polycopié et par des rappels lors des cours.

Avant le cours, les feuilles d'exercices auront été relevées par l'enseignant. En fonction du contenu des réponses en particulier à la dernière question nous envisageons deux déroulements possibles.

<u>Première alternative</u> "favorable" : les étudiants ont dans leur réponses écrites proposé majoritairement, un nombre suffisant propriétés "intéressantes" de la multiplication externe. En particulier, les restrictions à $\mathbb{Z}$ des trois axiomes : $n(m.x)=(nm).x$, $(n+m).x=n.x+m.x$ et $n.(x+y)=n.x+n.y$, se retrouvent dans un nombre suffisant de copies. Il y a une part de subjectivité, que l'enseignant devra assumer, pour évaluer où placer la barre.

Dans cette alternative, pour commencer l'atelier, l'enseignant recopie alors (en les numérotant) les propriétés les "plus souvent rencontrées". Il y a encore une part de subjectivité dans les choix de l'enseignant. On peut néanmoins donner quelques règles qui permttrons de se guider. Il ne faut pas essayer d'écarter des difficultés, surtout si elles sont récurrentes ou significatives. Par exemple, on peut mettre plusieurs énoncés d'une même propriété. On demandera alors aux étudiants, en amphithéâtre, de commencer par un tri. On peut de même recopier des énoncés non conformes, ou correspondant à de fausses propriétés. L'activité de tri est dans ces cas une étape méthodologique habituelle en situation de débat quand les étudiants proposent leurs conjectures. Dans le cas présent le recul doit permettre à l'enseignant d'écarter certains énoncés qui n'enrichirait pas le débat à cause de leur caractère spécifique. Ces problèmes individuels pourront être résolus par un corrigé écrit de chaque copie. D'autre part s'il s'avérait que le nombre de propriétés était très grand, l'enseignant doit ne donner que les plus souvent citées, en expliquant que c'est pour que le débat à suivre soit pratiquement gérable.

Ensuite l'enseignant introduit le prolongement de la multiplication externe au rationnel qui pourra se faire en substance de la façon suivante:

" -Cette multiplication par des entiers existe dans tous les groupes additifs. Mais elle a des inconvénients ou des lacunes. En particulier, elle introduit une "proportionnalité" non réciproque. En effet si $y=2.x$ on aurait bien envie de dire que $x=(1/2).y$. En somme il peut être intéressant de savoir définir la multiplication par les "inverses" d'entiers et en fait pour tous les rationnels. Parce qu'une fois qu'on connaît $(1/2).y$, on veut définir par exemple $3.[(1/2).y]$, dont il serait "pratique" que ça vaille $(3/2).y$. Bien sûr cette multiplication doit prolonger celle par les entiers c'est-à-dire que pour $n\in\mathbb{Z}$, $n.x$ doit avoir la même signification que l'on considère que n est entier ou rationnel, et que les propriétés que l'on vient de trouver restent valables avec les rationnels. Quand on peut définir une telle multiplication externe sur un groupe additif on dit que l'on a un espace vectoriel. C'est une nouvelle structure un peu plus sophistiquée que celle de groupe additif ; on va essayer de voir ensemble quels en sont les axiomes." (il faudra peut-être à ce niveau , si la nécessité s'en fait sentir chez les étudiants, définir plus précisément ce qu'est un axiome, avec l'aide du débat).

<u>Deuxième alternative</u> : L'exercice 4 n'a pas donné beaucoup de résultats, en particulier les restrictions à $\mathbb{Z}$ des axiomes de la structure d'espace vectoriel n'ont pas été dégagés par les étudiants. L'enseignant ayant constaté cela sur les copies rendues par les étudiants devra prévoir un début de séance légèrement différent.

Il introduit directement le prolongement à $\mathbb{Q}$, sans insister sur les propriétés avec les entiers. Pour ce faire, on peut proposer de résoudre l'équation $2.x=3.x_0$ où x_0 est un élément d'un groupe additif. Pour écrire $x=(3/2)x_0$ on a besoin de savoir définir la multiplication par un rationnel, c'est à dire en fait que l'on prolonge la loi externe à $\mathbb{Q}$.

Puis, en s'inspirant de ce qui a été fait pour les groupes, l'enseignant explique que l'on voudrait pouvoir résoudre dans les espaces vectoriels des équations en x du type (1) $a.x=b.x_0$ où a et b sont des rationnels et x et x_0 des éléments de l'espace vectoriel et du type (2) $a.x=b.(x+x_0)$ avec $a\neq b$. Il demande alors quelles sont les propriétés nécessaires pour obtenir "simplement" les solutions $x=(b/a).x_0$ pour (1) et $x=(b/(a-b)).x_0$ pour (2).

Regardons ainsi quelles seront les propriétés dégagées.

Pour résoudre (1) on utilise la propriété de pseudo associativité $(a.(b.x)=(ab).x)$ pour écrire $(a/b).x=1.x_0$ on a alors besoin pour conclure de la propriété $1.x=x$. Cette dernière propriété est comprise dans la définition de la loi externe sur les entiers. On peut remarquer au passage que c'est un des avantage de cette présentation que de donner une sign,ification à cette propriété qui figure au rang des axiomes, mais et d'une nature différente des autres.

Pour résoudre (2) on a besoin de la première distributivité ($a.(x+y)=a.x+a.y$) pour pouvoir écrire $a.x=b.x+b.x_0$ puis $a.x-b.x=b.x_0$ on peut alors utiliser $-b.x=(-b).x$ (propriété dont il faudra voir qu'elle se déduit des axiomes) et l'axiome de l'autre distributivité ($(a+b).x=a.x+b.x$) on se ramène ainsi au premier type : $(a-b).x=b.x_0$. On peut utiliser d'autres démarches, mais on utilise forcèment les deux distributivités.

Dans le cas de la première alternative, on peut engager cette activité après avoir expliciter les axiomes, comme une application.

Après ces deux débuts de séance possibles on arrive à un état commun. Les espaces vectoriels ont été définis comme des groupes additifs munis d'une multiplication externe par des rationnels, devant vérifier certaines propriétés. Celles-ci ne seront pas exactement les mêmes dans tous les cas, pourtant leur nombre devrait être sensiblement identique (autour de dix) et posséder un tronc commun important:

les propriétés liées au prolongement de $\mathbb{Z}$ (reprises du polycopié) :

(1) $0.x=0_E$

(2) $1.x=x$

(3) $n\in\mathbb{N}$ $n.x=x+x+...+x$ n fois.

(4) $n\in\mathbb{Z}$ $n.x=-(-n).x$

les axiomes (non encore reconnus comme tels) :

(5) $a(b.x)=(ab).x$

(6) $a.(x+y)=a.x+a.y$

(7) $(a+b).x=a.x+b.x$

Il semble fort probable a priori que l'on ait d'autres propriétés comme:

(8) $(-n)(-x)=nx$

(9) $(-b).x=-(b.x)$

(10) $b.(-x)=-(b.x)$

etc...

Pour mieux gérer le débat qui va suivre, il est utile de numéroter ces propriétés.

On demande donc de trouver les axiomes, c'est-à-dire le minimun de propriétés dont toutes les autres se déduisent (cf. débat éventuel sur la définition d'un axiome). Le temps de réflexion à laisser aux étudiants sera plus ou moins long suivant le nombre de propriétés relevées. Il peut être utile, après un temps de réflexion intermédiaire, de demander quelle est la méthodologie à employer pour arriver aux axiomes. En l'occurence la méthodologie qui semble s'imposer consiste à rayer une à une les propositions qui se déduisent des autres jusqu'à ce que ce ne soit plus possible ; les propriétés restantes seront alors les axiomes.

Pour aider à la compréhension on peut en même temps que l'on raye

effectivement les propositions au tableau, construire en parallèle un arbre matérialisant les déductions et qui permettra de remonter aux axiomes.

Lors de cette activité, on peut, a priori, se heurter à deux types de problèmes:

- Un étudiant propose de rayer un axiome. Si la raison invoquée n'est pas valable, ce n'est pas un problème, le débat fera ce qu'il faut. Il peut arriver par contre surtout au début que l'on ait des propriétés suffisamment fortes pour pouvoir rayer des axiomes. L'enseignant peut alors intervenir pour expliquer que c'est dangereux et qu'il vaut mieux essayer d'abord de rayer les "grosses" propriétés (dont on peut montrer qu'elles contiennent les autres comme cas particuliers). Il y a là une difficulté épistémologique réelle qu'il faudra gérer le cas échéant. On pourra d'ailleurs tester une certaine "évidence" des axiomes en fonction de l'apparition ou non de ce premier type de problème. A notre connaissance, il n'y a pas eu (historiquement) en algèbre linéaire de systèmes d'axiomes équivalents ayant eu une existence autonome. Peano, qui semble être le premier à avoir énoncé une définition axiomatique, a immédiatement -à des variations de détail près- donné les axiomes sous leur forme actuelle (cf.partie hist.). Quand les mathématiciens ont ensuite eu la nécessité d'une définition axiomatique, ils se sont référés à celle-ci, qui s'est dès lors imposée sans concurrence. A moins que la question ne viennnent des étudiants, il ne nous semble donc pas utile de mettre en avant ce problème de coexistence de plusieurs systèmes équivalents d'axiomes. C'est en effet une véritable question dans certains domaines (définition des entiers, géométrie...) mais ce ne semble pas très problématique en algèbre linéaire.

- Le deuxième type de problème serait un arrêt prématuré de l'activité. Il y a en effet une probabilité non négligeable que certaines propriétés ne puissent être rayées facilement par les étudiants et qu'un consensus apparaisse pour s'arrêter sur un ensemble de propriétés plus large que les axiomes classiques. Comment débloquer la situation? Il semble bien que l'enseignant soit alors obligé d'intervenir de façon plus ou moins directive, soit en essayant d'inciter à chercher plus loin soit au pire en prenant en charge les dernières démonstrations. Il y a ici un paramètre que l'on devra tester lors de l'expérimentation. Du point de vue de l'apprentissage, si l'activité a été productive au début et si quelques propriétés ont pu être déduites par les étudiants, notre but aura été en grande partie atteint. Même si l'enseignant doit reprendre en charge la fin, on peut penser que les étudiants auront vu de manière active le rôle des axiomes et que la définition axiomatique et les démonstrations à suivre auront un sens plus fort pour eux.

Plus généralement comment peut-on se décider à s'arrêter ? En théorie, pour montrer que des propriétés ne sont pas déductibles les unes des autres, il faudrait produire des contre-exemples, c'est-à-dire des ensembles qui les vérifient toutes sauf une, et ce pour chaque propriété. Il ne semble pas utile d'expliciter cette question -sauf peut-être si elle correspondait à une demande très forte d'une groupe important d'étudiants-, nous pensons que l'arrêt de l'activité sur une opinion collective subjective devrait être satisfaisant pour notre problématique. Finalement l'indépendance des axiomes n'est pas vitale, ce qui est important c'est d'avoir peu de propriétés à vérifier.

L'institutionnalisation de cette activité d'introduction portera donc sur l'effort de simplification mis en place. Après avoir précisé qu'on peut pareillement prolonger la loi externe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans certains cas, on donnera la définition axiomatique et les premières propriétés d'un espace vectoriel. On montrera la facilité de vérification des axiomes sur un exemple précis, puis on donnera la liste des espaces vectoriels classiques qui serviront de référence pour la suite.