MARC ROGALSKI

Enseigner des méthodes en mathématiques

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1989-1990, fascicule 5
« Didactique des mathématiques », , exp. nº 1, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1989-1990___5_A1_0>

ENSEIGNER DES METHODES EN MATHEMATIQUES

Marc ROGALSKI

Professeur à l'Université de Lille

LA CONTRADICTION ENSEIGNEMENT/CONTROLE.

Quand on regarde la réalité de l'enseignement des mathématiques au niveau des lycées et de l'enseignement supérieur, on est frappé par la grande distance qui existe, la plupart du temps, entre l'essentiel de l'enseignement dispensé, et la nature des contrôles qu'on fait subir aux étudiants.

D'un côté, des définitions, des théorèmes, des démonstrations, dans un discours le plus souvent réservé aux enseignants ; de l'autre, des problèmes à résoudre par les étudiants, avec plus ou moins d'indications selon le niveau, et avec une utilisation effective très partielle de ce qui précède. On considère qu'un apprentissage a été fructueux si l'étudiant sait résoudre les problèmes qu'on lui propose... mais l'essentiel de l'enseignement porte sur la construction des concepts figurant dans les énoncés et les théorèmes (et qui serviront à résoudre ces problèmes), et pour une part beaucoup plus marginale, sur la liaison entre concepts et problèmes. On peut se dire qu'a priori une telle démarche pourrait être justifiée, mais la réalité prouve son inefficacité et amène donc à se poser certaines questions.

La liaison entre concepts et problèmes peut se présenter sous deux aspects. Le premier commence à être assez bien analysé par les didacticiens ; il s'agit de la construction des concepts et théories à partir de problèmes pour lesquels ils sont nécessaires ; le rôle des situations-problèmes, de la dialectique concept outil - concept objet, est assez bien établi, en tout cas pour un certain nombre de concepts et pour l'enseignement obligatoire. La démarche inverse au niveau de l'enseignement : comment utiliser les divers concepts construits pour résoudre des problèmes, d'autres problèmes, commence seulement à être prise en compte et analysée. Dans la pratique dominante, on fait des exercices d'application, d'entraînement, où l'enseignant désigne - oralement, ou par <u>des indicateurs</u> écrits - les concepts à utiliser, la démarche à suivre, ses étapes. Et <u>c'est à l'étudiant de "deviner" comment et pourquoi cela marche</u>. Il nous semble que c'est souvent celui qui a déviné, qui a su extraire seul des nombreux exercices qu'il a faits, essayé de faire ou vu faire, des "méthodes générales", qui obtient des résultats positifs aux contrôles un peu difficiles, où des initiatives sont à prendre. Les autres en restent à un niveau médiocre, hésitant, et ne savent résoudre des problèmes que si toutes les difficultés en ont été supprimées, limées, par les indications et le découpage en questions successives.

Cela amène les enseignants à proposer des contrôles très faciles, sans autre pratique qu'algorithmique, et qui n'encouragent pas chez les étudiants, en retour, une autre pratique. Cela semble indiquer qu'il faut autre chose dans l'enseignement, d'autres activités qui permettent de rompre le cercle vicieux entre les trois termes : enseignement de niveau élevé non assimilé - contrôles trop faciles - pratique uniquement algorithmique.

Pourquoi ne pas enseigner explicitement les méthodes qui, dans chaque domaine relativement délimité, permettent d'amorcer la résolution des problèmes de ce domaine ? Ne serait-ce pas un moyen de combler un manque évident dans l'enseignement, de le rendre plus efficace, de mieux dominer les concepts mathématiques en montrant explicitement comment ils servent ?

Si on adopte une telle problématique, trois questions se posent immédiatement :

- Y a-t-il des méthodes ? Qu'est précisément une méthode ?
- Est-il souhaitable d'enseigner des méthodes, que peut-on espérer d'un tel enseignement ?
- Peut-on enseigner des méthodes ? Si oui, comment les enseigner, au moyen de quelles situations didactiques ? En particulier, y a-t-il lieu de changer les contrôles ?

I - Y A-T-IL DES METHODES, QU'EST CE QU'UNE METHODE ?

Le mot "méthode" est souvent utilisé en mathématiques. Il y a d'abord une utilisation intramathématique. D'une part, on a appelé méthode, souvent, une manière de résoudre des problèmes qui correspondait en fait à l'introduction d'un nouveau concept, et qui est devenue ultérieurement une théorie. La "méthode des équipollences" est devenue le calcul vectoriel puis l'algèbre linéaire ; la "méthode des indivisibles" est devenue la théorie de l'intégrale... D'autre part, on appelle aussi méthodes des techniques qui servent souvent dans divers domaines, avec, parfois, des variantes. Par exemple, la "méthode de variation de la constante" est utilisée, sous des formes diverses, dans des problèmes linéaires (équations différentielles, suites récurrentes, équations aux différences finies...). On trouve, enfin, des méthodes qui sont en fait des algorithmes adaptés à un domaine étroit ; par exemple, l'algorithme de la division euclidienne, l'algorithme de la décomposition des fractions rationnelles, celui du calcul des développements limités - même s'il présente des difficultés à propos du choix de ce qu'on peut négliger... En général, ces algorithmes peuvent maintenant être pris en charge par des logiciels.

Nous nous intéressons plutôt aux méthodes dans leur sens métamathématique, proche du mot heuristique. Polya a largement développé l'idée d'heuristique. Dans sa présentation, on peut souligner deux idées ; la première, c'est ce que n'est pas une heuristique ; il rejette explicitement l'idée suivante : "une méthode, c'est un truc qu'on utilise deux fois", idée qui renvoie aux sens évoqués plus haut de technique ou d'algorithme. Pour Polya, une méthode c'est plutôt "comment penser à un truc qui a déjà marché pour le réutiliser". C'est évidemment le "comment penser à" qui est l'aspect essentiel, spécifiquement métamathématique.

En fait, la présentation de l'heuristique de Polya est trop vague parce que trop vaste. A.H. Schoenfeld a bien montré qu'il y a trop de possibilités dans la présentation de Polya : comment changer de points de vue quand le domaine étudié est trop vaste, recèle mille possibilités, mille stratégies possibles ? Comment classer les problèmes, les techniques qui leurs sont adaptés ? L'heuristique générale est inenseignable, elle ne peut guère servir qu'au mathématicien ayant une vaste culture : plus on connait de choses, plus il est facile de penser à telle idée, à telle autre... Les étudiants sont loin de cette situation.

Il est donc nécessaire de restreindre le champ des problèmes, de façon à pouvoir décrire les types de problèmes, les stratégies et techniques adaptées, c.a.d. d'abord rendre possible une classification.

A.H. Schoenfeld a tenté de préciser et rendre enseignable l'heuristique au sens de Polya, en développant une stratégie de résolutions de problèmes ("problem solving"). Il nous semble que ce qu'il propose n'est pas assez adapté aux connaissances mathématiques sous tendues par les problèmes, et ne permet pas la résolution de problèmes relativement complexes, mais seulement de petits problèmes de types olympiades, courts, dont la résolution ne nécessitera que des stratégies peu élaborées, mettant en oeuvre peu de connaissances, et contribuant peu à l'acquisition de connaissances mathématiques. Néanmoins, enseignée après l'enseignement de méthodes concernant des domaines plus précis, l'heuristique peut permettre de mettre en évidence des démarches générales dont il est utile d'être conscient.

Par contre, des méthodes ont été élaborées sur des sujets plus restreints mais riches en concepts mathématiques, et permettant de résoudre des problèmes complexes, avec des résolutions élaborées, comportant des étapes, des techniques différentes, une organisation plus difficile dans les preuves. Citons certaines de ces méthodes.

(a) Une méthode a été élaborée et expérimentée par A. Robert et I. Tenaud pour résoudre les problèmes de géométrie de terminale C. Le domaine étant assez précis, il permet de classer :

. les types de problèmes (incidence, lieux géométriques,...) ;

. les types d'outils (transformations, barycentres, analytique...);

. des configurations de base utiles à reconnaître ou reconstruire dans les problèmes.

Expérimentée dansune classe de terminale, où elle a été enseignée explicitement, puis appliquée par les élèves pour résoudre des problèmes, sans indications, par petits groupes de 4, elle semble améliorer effectivement l'efficacité ultérieure des élèves dans la résolution des problèmes de géométrie.

Cette méthode a aussi été utilisée par A. Robert dans la préparation au CAPES de mathématiques.

(b) Une méthode pour la recherche des primitives en DEUG A a été élaborée et enseignée à l'Université de Lille I ; elle s'inspire en partie d'une méthode analogue utilisée par A. Schoenfeld. Là encore, le domaine restreint permet de classer des formes de fonctions, des tactiques de simplifications, des outils techniques bien définis - à caractère d'ailleurs assez algorithmiques ; seuls les principes guidant les choix d'applications de ces outils relèvent vraiment d'une méthode (comment choisir u et v dans la formule d'intégration par partie ? par ex...). Là aussi, cette méthode semble efficace auprès des étudiants.

(c) Dans la même Université, on a mis au point une méthode pour étudier la convergence des suites qu'on peut rencontrer en DEUG A première année. Le sujet étant plus riche que le précédent, le côté méthodique : "comment penser à...", comment "contrôler" ce qu'on fait..., y est important. On y distingue une stratégie de classement du problème, une stratégie de recherche d'hypothèses, une stratégie de preuve, un procédé de contrôle et reprise. Chaque stratégie comporte des tactiques (par ex, pour la recherche d'hypothèses : changement de point de vue, "faire $n = \infty$"... ; ou pour la preuve : prouver la convergence sans s'occuper de la limite, identifier lalimite, tactique "ε - N avec encadrement"...). Et, bien sûr, on y trouve des principes de classification. Mais cette méthode n'a été que partiellement enseignée, et son efficacité n'a pas été évaluée.

En fait, bien entendu, des méthodes de type assez voisin existent dans d'autres domaines : l'art militaire, les processus de production, la programmation...

On peut donc conclure que des méthodes existent et se risquer à donner une tentative de définition d'une méthode.

Une méthode est la description d'un ensemble d'activités du sujet, portant sur l'analyse et le classement du problème à résoudre dans un domaine assez précis, l'utilisation des outils et des techniques disponibles, les stratégies et tactiques possibles, la gestion dans le temps des choix des stratégies et de leur déroulement, la conscience de ces choix, les moyens de contrôle et de retour en arrière pour procéder à d'autres choix...

Une méthode relève donc du métacognitif portant sur un domaine bien délimité, et doit concerner l'appropriation des connaissances du domaine en question et le moyen de les rendre disponibles pour résoudre les problèmes qui en relèvent, cette résolution étant en général le bon moyen pour donner du sens aux connaissances visées.

Lorsqu'on étudie de près la démarche des mathématiciens, qu'on la leur fait analyser, expliciter, il semble bien, en définitive, qu'ils utilisent effectivement des méthodes, mais qu'elles restent la plupart du temps inconscientes ou implicites. A cela s'ajoute souvent une réticence à avouer l'utilisation de méthodes, qui pourraient sembler limiter la créativité du chercheur. Il s'agit là d'une fausse interprétation de la notion de méthode, qui, au contraire, peut permettre une économie de pensée et de temps, libérant et rendant plus efficace l'imagination créatrice.

II - EST-IL SOUHAITABLE D'ENSEIGNER DES METHODES ?

Deux raisons principales, nous semble-t-il, peuvent inciter à enseigner des méthodes : un constat sur l'enseignement, et une prospective sur l'utilisation professionnelle des mathématiques. On peut alors envisager les objectifs d'un enseignement de méthodes.

(a) Un constat sur les étudiants et les enseignants.

Lorsqu'on regarde des élèves ou des étudiants essayer de résoudre des problèmes, on constate 3 phénomènes très courants :

- ils sont souvent bloqués au départ : ils ne savent pas démarrer ;
- quand ils démarrent, c'est souvent dans une direction qui semble à l'enseignant observateur avoir peu de chances de succès (c'est très rarement la direction qu'aurait choisie un "expert", c.a.d. un mathématicien ; cf. Schoenfeld) ;

- leur attitude devant les exercices est en relation avec une certaine représentation de l'activité mathématique : pour eux, chaque exercice relève d'un truc, d'une astuce, est un cas particulier...sauf s'il y a une recette ou une formule générale.

Ces trois phénomènes fréquemment constatés semblent en rapport étroit avec un certain nombre de défauts qu'on constate chez les étudiants :

1. très grande difficulté de réinvestissement : faire ou voir faire 10 fois la même chose ne leur permet pas de le faire une 11ème fois, dès lors qu'il s'agit de problèmes ouverts ne relevant pas de recettes ;
2. recherche forcenée des formules, de recettes, d'algorithmes ;
3. pertes de sens au niveau des connaissances ;
4. incapacité à envisager des démarches de résolution longues et complexes même au niveau des calculs ;
5. Attitude générale de passivité.

Ces défauts renvoient en retour à l'habitude prise par les enseignants de donner des problèmes découpés en petits morceaux sans vraies difficultés, truffés de "montrer que" et d'indications. C'est en effet le seul moyen qui reste aux enseignants, en l'absence justement d'enseignement de méthodes, pour que les résultats ne soient pas catastrophiques si les contrôles portaient sur le niveau réel de l'enseignement et de la pratique mathématique qu'il est censé induire. Inversement, de tels contrôles présentent aux étudiants une vision de l'activité mathématique qui les pousse aux défauts cités. C'est en fait ce cercle vicieux qu'il s'agit de briser.

(b) Les besoins de l'utilisation des mathématiques par des non-mathématiciens.

Les mathématiques sont amenées à être utilisées par des métiers toujours plus nombreux - sans qu'on ait à exiger de ses utilisateurs des "dons" en mathématiques ou même une très grande qualification dans cette discipline.

Il faudra donc leur donner les moyens de résoudre les problèmes mathématiques dans les domaines qui les concernent sans avoir à leur disposition toutes les connaissances et le savoir faire d'un mathématicien. L'enseignement de méthodes semble alors le bon moyen pour éviter la dérive qu'on rencontre souvent dans l'enseignement de mathématiques pour non mathématiciens : l'abus des recettes et des trucs, les pertes de sens qui en résultent - en mathématique et dans la discipline où on les applique.

De plus, dans certains secteurs d'activité, la place croissante que commencent à prendre des systèmes de résolution informatique devraient amener à former les étudiants à l'utilisation de méthodes. C'est l'essence même d'un système expert que d'être méthodique, et l'expérience montre déjà que l'utilisation d'un tel système n'est efficace que si l'on en comprend bien la démarche et les limites.

(c) Les objectifs possibles de l'enseignement de méthodes.

Les objectifs de l'acquisition de méthodes dans divers domaines mathématiques pourraient, ainsi, être :

1. Mieux saisir les concepts du domaine par leur caractère opératoire pour la résolution de problèmes : c'est au fond l'objectif essentiel de l'apprentissage des mathématiques.

2. Habituer à classer des connaissances mathématiques, des techniques, des problèmes, des inconnues, des situations...

3. Permettre de démarrer une recherche sur un problème.

4. Permettre d'organiser une stratégie de recherche, y compris des processus d'une certaine ampleur (au niveau du calcul comme au niveau du raisonnement) et de faire des anticipations quant à leur déroulement.

5. Habituer aux changements de point de vue sur un sujet, aux reformulations d'un problème sous des formes différentes.

Ces trois derniers points devraient permettre de résoudre mieux plus de problèmes plus difficiles.

6. Permettre de prendre conscience de ce qu'on est en train de faire, des choix qu'on a faits, et ainsi de pouvoir explorer toutes les possibilités, sans en oublier.

7. Se doter de moyens de contrôle et de vérification de ce qu'on fait.

8. Rendre disponible des connaissances auxquelles on ne pense pas toujours à avoir accès (le "comment penser à...").

9. Donner confiance en eux aux étudiants, en leurs possibilités, et les rendre plus autonomes.

10. Changer chez les étudiants la représentation qu'ils ont de l'activité mathématique, la rendre plus proche de celle qu'ontles mathématiciens.

III - PEUT-ON, ET COMMENT, ENSEIGNER DES METHODES EN MATHEMATIQUES ?

Il y a à notre connaissance peu d'expériences actuelles dans ce domaine, essentiellement celles de A. Schoenfeld, aux USA, et A. Robert et I. Tenaud, à Paris.

On peut, à priori, voir trois étapes pour l'enseignement d'une méthode : identifier et élaborer une méthode ; adapter la méthode aux nécessités de son enseignement ; enseigner effectivement la méthode.

1) Identifier et élaborer une méthode.

(a) Identifier les mathématiques en jeu : quel domaine, quelles connaissances, quelles techniques, quels types de problèmes..., bref les moyens d'élaborer des classifications.

(b) Extraire de l'expert sa démarche réelle, ses prévisions, ses choix, ce qu'il pense, les obstacles qu'il voit en situation de résolution de vrais problèmes. Il s'agit d'identifier les courts -circuits de sa pensée, propres justement à son statut d'expert, les éléments automatiques de sa démarche, devenus implicites et inconscients, qui paraissent spontanés... mais ne l'ont pas toujours été !

On obtient alors une "méthode théorique", synthèse entre l'analyse épistémologique des types de problèmes à résoudre et de leurs domaines, et la démarche de recherche du mathématicien.

Telle quelle, elle n'est pas enseignable à l'état brut. Mais, déjà, cette élaboration peut amener à modifier le contenu des connaissances qu'on veut rendre disponibles chez les étudiants.

Exemple. Au lieu d'enseigner le "théorème des gendarmes" sur les suites (si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, et si $v_n \to \ell$ et $w_n \to \ell$, alors $u_n \to \ell$), il vaut mieux enseigner un "théorème d'encadrement" (si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, si $v_n \to \ell$ et $w_n \to w$, alors, $v - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant w + \varepsilon$ pour n assez grand), beaucoup plus opératoire car véhiculant plus de sens en ce qui concerne le concept de convergence (test immédiat sur la suite $u_{n+1} = \sqrt{\frac{n+1}{n} + u_n}$, par ex.).

On s'aperçoit ainsi, très souvent, qu'on a intérêt à désalgorithmiser des énoncés classiques.

2) Adapter la méthode aux nécessités de son enseignement.

Il faut ensuite adapter la méthode, son organisation interne et sa description, en fonction des types d'activités des étudiants que doit garantir son application. Il est important que cela figure explicitement dans la méthode.

Cinq points, aux moins, sont à prendre en considération.

• Repérer les erreurs et blocages persistants chez les étudiants par rapport aux diverses nécessités de la méthode, et en tenir compte dans la description de la méthode et son organisation.

Exemple. Dans l'étude des suites, l'usage de la récurrence bute sur les difficultés du "raisonnement sous hypothèse" ; donc, il faudra aborder la question dans la méthode (ceci est lié, aussi, aux difficultés de l'implication).

• Prévoir, dans la méthode, de faire agir les étudiants dans différents cadres (numérique, graphique, symbolique...), compte-tenu de l'intérêt didactique des jeux de caches ; de plus, ceci favorisera la pratique des changements de point de vue.

• Accorder une grande importance à ce qui peut faciliter la démarche stratégique et organisationnelle dans la méthode, en faisant s'exprimer les étudiants dessus - assurer ainsi la prise de conscience de ce qu'ils sont en train de faire, du point où ils en sont de la résolution.

• Prévoir, très explicitement, des procédures de contrôle et de retour en arrière (dont l'expert mathématicien n'a la plupart du temps, pas besoin : elles sont chez lui une "seconde nature").

• Bien mettre en évidence la distinction entre les procédures algorithmiques, et les démarches qui vont s'appuyer fondamentalement sur le sens des concepts (et qui sont souvent plus importantes mais plus délicates).

Exemple. La tactique : "montrer que u_n est monotone, puis bornée", a un aspect beaucoup plus algorithmique que la tactique "faire n = ∞ avec encadrements", qui demande de bien dominer le concept de convergence en ε - N, et qui, en retour, donne à celui-ci un caractère opératoire, et, donc, en renforce la compréhension

(si $u_{n+1} = \sqrt{\frac{n+1}{n} + u_n}$, "faire n = ∞", c'est remplacer $\frac{n+1}{n}$ par 1 ; puis on encadre u_n par les suites définies par $v_{n+1} = \sqrt{1 + \varepsilon + v_n}$ et $w_{n+1} = \sqrt{1 - \varepsilon + w_n}$).

3) L'enseignement proprement dit de la méthode.

Cet aspect relève précisément de l'approche didactique. Des expériences de A. Schoenfeld ("problem solving") et de A. Robert et I. Tenaud (géométrie), on peut déjà dégager quelques principes - confirmés par des enseignements de méthodes dans d'autres domaines (informatique, sécurité civile, processus de production...).

- La méthode doit être enseignée explicitement, en tant que telle - même si cet enseignement peut être simplifié dans un premier temps ; c'est une illusion de penser que les étudiants vont dégager eux-mêmes une méthode de la pratique vue chez l'enseignant ou même de leur propre pratique.

- Cela ne doit pas exclure de faire travailler avant les étudiants sur des problèmes ou exemples bien choisis, sans utiliser la méthode explicitement, mais en faisant mettre déjà en évidence des "démarches semblables" - ces exemples étant réutilisés lors de l'exposition générale de la méthode.

- Faire discuter entre-eux les étudiants de la méthode et sur la méthode à l'occasion de résolutions de problèmes (voir, à ce propos, l'intérêt du travail en petits groupes).

- Donner des occasions consistantes d'appliquer la méthode, y compris au niveau des contrôles. Par exemple, augmenter (progressivement), dans les énoncés de devoir, puis dans ceux des examens, la proportion des problèmes ouverts, sans indications, où l'usage de la méthode enseignée sera nécessaire.

Enfin, on peut penser que l'enseignement de méthodes sera d'autant plus fructueux qu'il portera sur des points différents du programme (les méthodes étant alors différentes). Il est possible que, au 2e ou 3e enseignement de méthodes, une part plus grande de l'élaboration de la méthode puisse être dévolue aux étudiants eux-mêmes, en particulier si une "heuristique" au sens de Polya ou Schoenfeld a dégagé des traits communs aux méthodes déjà enseignées. Mais cette possibilité reste à expérimenter. C'est toute la question du réinvestissement éventuel d'un enseignement de méthode dans un domaine, permettant l'accès plus facile et plus rapide à une démarche méthodique dans un autre domaine.