Marc Peigne

Vitesse de convergence dans le théorème du renouvellement

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1989-1990, fascicule 1 « Probabilités », , p. 74-89

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1989-1990___1_74_0>

VITESSE DE CONVERGENCE DANS LE THEOREME DU RENOUVELLEMENT

Soit $\mathcal{H}$ la classe des fonctions Φ intégrables sur $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier $\hat{\Phi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (i-e admettant des dérivées à tout ordre) et à support $S(\hat{\Phi})$ compact.

$\mathcal{H}$ possède des fonctions positives sur $\mathbb{R}$; en effet, $\Phi_0^{\ 2} \in \mathcal{H}$, Φ_0 étant la fonction dont la transformée de Fourier est définie par

$$\hat{\Phi}_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to 1_{[-1,1]}(x)\ exp\,(-\frac{1}{1-x^2})$$

I.CAS DE VARIABLES ALEATOIRES INDEPENDANTES

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, adaptée, admettant un moment d'ordre 1 et telle que $m = \int_{\mathbb{R}} x\,\mu(dx) \in\ ]\,0\,,+\infty\,[$.

On pose $G(x,.) = \varepsilon_x \otimes \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^{*n}$, μ^{*n} étant la convolée d'ordre n de μ.

Théorème 1
Lorsque μ admet un moment d'ordre $2+\alpha$, $\alpha > 0$, il existe A_1, B_1 et ε éléments de $\mathbb{R}^{*+}$ tels que, pour toute fonction Φ de $\mathcal{H}$, on ait :

$$|G\Phi(c)| \le \frac{K_1(\Phi)}{|c|} \quad lorsque\ c > 0$$

$$et\ \ |G\Phi(c) - \frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}} \Phi(t)\,dt| \le \frac{K_1(\Phi)}{|c|} \quad lorsque\ c < 0$$

$$avec\ K_1(\Phi) = A_1\,(\|\hat{\Phi}\|_\infty + \|\hat{\Phi}'\|_\infty + \|\Phi'_1\|_1) + B_1 \left(1 + \underset{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda| > \varepsilon \\ 0 < r < 1}}{Sup} \frac{1}{|1 - r\hat{\mu}(\lambda)|}\right)^2 (\|\hat{\Phi}\|_1 + \|\hat{\Phi}'\|_1)$$

Φ_1 étant la fonction définie par $\Phi_1(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{\hat{\Phi}(\lambda)}{1 + (\frac{\lambda a}{2m})^2} - \hat{\Phi}(0)\right) \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}^*$,

et $a = \int x^2\,\mu(dx)$.

Si μ admet un moment d'ordre $3+\alpha$, $\alpha > 0$, il existe A_2, B_2 et ε éléments de $\mathbb{R}^{*+}$ tels que, pour toute fonction Φ de $\mathcal{H}$, on ait :

$$|G\Phi(c)| \leq \frac{K_2(\Phi)}{|c|^2} \quad \textit{lorsque } c > 0$$

$$\textit{et } \left|G\Phi(c) - \frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}} \Phi(t)\, dt\right| \leq \frac{K_2(\Phi)}{|c|^2} \quad \textit{lorsque } c < 0$$

$$\textit{avec } K_2(\Phi) = A_2\,(\|\hat{\Phi}\|_\infty + \|\hat{\Phi}'\|_\infty + \|\hat{\Phi}''\|_\infty + \|\Phi''_2\|_1)$$

$$+ B_1 \left(1 + \sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda| > \varepsilon \\ 0 < r < 1}} \frac{1}{|1 - r\hat{\mu}(\lambda)|}\right)^3 (\|\hat{\Phi}\|_1 + \|\hat{\Phi}'\|_1 + \|\hat{\Phi}''\|_1)$$

Φ_2 étant la fonction définie par $\Phi_2(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{\hat{\Phi}(\lambda)(1 - \frac{b\lambda^2}{6m})}{(\frac{a\lambda}{2m})^2 + (1 - \frac{b\lambda^2}{6m})^2} - \hat{\Phi}(0)\right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*,$

et $b = \int x^3 \mu(dx)$.

II. CAS MARKOVIEN

Soit P un noyau markovien sur $\mathbb{R}$, quasi-compact, ergodique, de mesure de probabilité invariante π.
On définit le noyau U, pour Φ fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, par

$$\forall (x,a) \in \mathbb{R}^2 \quad U\Phi(x,a) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(y, a+x)\, P(x,dy)$$

et l'on pose $G = \sum_{n=0}^{+\infty} U^n$.
On définit l'opérateur "transformée de Fourier" P_λ associé à P par :

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R}^2 \quad P_\lambda\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda y}\, \Phi(y)\, P(x,dy).$$

On introduit les hypothèses

. π est décentrée, i.e $0 < \int x\,\pi(dx) < +\infty$

. P est adapté i.e $P_\lambda\,\Phi = \Phi \Leftrightarrow \lambda = 0$ et Φ est constante.

. les valeurs spectrales de module 1 de P_λ sont des valeurs propres (condition S).

Théorème 2

Si P admet des moments d'ordre $2+\alpha$, $\alpha > 0$, (i.e $\underset{x\in\mathbb{R}}{\mathrm{Sup}} \int \|y\|^{2+\alpha} P(x,dy) < +\infty$)

il existe A_1, B_1 et $\varepsilon > 0$ éléments de $\mathbb{R}^{*+}$ tels que, pour toute fonction Φ de $\mathcal{H}$, on ait

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\mathrm{Sup}}\ |G(1_{\mathbb{R}}\otimes\Phi)(x,c)| \le \frac{K_1(\Phi)}{|c|} \quad \text{lorsque } c > 0$$

$$\text{et}\quad \underset{x\in\mathbb{R}}{\mathrm{Sup}}\ |G(1_{\mathbb{R}}\otimes\Phi)(x,c) - \frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}} \Phi(t)\,dt| \le \frac{K_1(\Phi)}{|c|} \quad \text{lorsque } c < 0$$

$$\text{avec } K_1(\Phi) = A_1\left(\|\hat\Phi\|_\infty + \|\Phi'\|_\infty + \underset{x\in\mathbb{R}}{\mathrm{Sup}}\|\Phi_x{}'\|_1\right)$$

$$+ B_1\left(1 + \underset{\substack{\lambda\in S(\hat\Phi)\\ |\lambda|>\varepsilon\\ 0<r<1}}{\mathrm{Sup}} \|(I-rP_\lambda)^{-1}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} + \underset{\substack{\lambda\in S(\hat\Phi)\\ |\lambda|>\varepsilon\\ 0<r<1}}{\mathrm{Sup}} \|\frac{d}{d\lambda}((I-P_\lambda)^{-1})\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})}\right)(\|\hat\Phi\|_1 + \|\hat\Phi'\|_1)$$

Φ_x étant la fonction définie par $\Phi_x(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{\hat\Phi(\lambda)\,(1+\lambda\,\pi_0{}'\,1(x))}{1+(\frac{a\lambda}{2m})^2} - \hat\Phi(0)\right)\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}^*,$

$\pi_0{}'$ un opérateur borné sur $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ et $a = \int x^2\,\pi(dx)$.

Lorsque P admet des moments d'ordre $3+\alpha$, $\alpha > 0$, il existe A_2, B_2 et ε éléments de $\mathbb{R}^{*+}$ tels que, pour toute fonction Φ de $\mathcal{H}$, on ait

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\mathrm{Sup}}\ |G(1_{\mathbb{R}}\otimes\Phi)(x,c)| \le \frac{K_2(\Phi)}{|c|^2} \quad \text{lorsque } c > 0$$

$$\text{et}\quad \underset{x\in\mathbb{R}}{\mathrm{Sup}}\ |G(1_{\mathbb{R}}\otimes\Phi)(x,c) - \frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}} \Phi(t)\,dt| \le \frac{K_2(\Phi)}{|c|^2} \quad \text{lorsque } c < 0$$

$$\text{avec } K_1(\Phi) = A_1\left(\|\hat\Phi\|_\infty + \|\hat\Phi'\|_\infty + \|\hat\Phi''\|_\infty + \underset{x\in\mathbb{R}}{\mathrm{Sup}}\|\Psi_x{}''\|_1\right)$$

$$+ B_1\left(1 + \underset{\substack{\lambda\in S(\hat\Phi)\\ |\lambda|>\varepsilon\\ 0<r<1}}{\mathrm{Sup}} \|(I-rP_\lambda)^{-1}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} + \underset{\substack{\lambda\in S(\hat\Phi)\\ |\lambda|>\varepsilon\\ 0<r<1}}{\mathrm{Sup}} \|\frac{d}{d\lambda}((I-P_\lambda)^{-1})\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})}\right.$$

$$+ \underset{\substack{\lambda\in S(\hat{\Phi})\\ |\lambda|>\varepsilon \\ 0<r<1}}{Sup} \left\| \frac{d^2}{d\lambda^2}((I-P_\lambda)^{-1})\right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} \Bigg) (\|\hat{\Phi}\|_1+\|\hat{\Phi}'\|_1+\|\hat{\Phi}''\|_1)$$

Ψ_x étant la fonction définie par

$$\Psi_x(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{(1-\frac{b\lambda^2}{6m})\,\hat{\Phi}(\lambda)\,(1+\lambda\,\pi_0'\,1(x)+\frac{\lambda^2}{2}\pi_0''1(x))}{(1-\frac{b\lambda^2}{6m})+(\frac{a\lambda}{2m})^2} - \hat{\Phi}(0)\right) \quad \forall\,\lambda\in\mathbb{R}^*,$$

π_0' et π_0'' des opérateurs bornés sur $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ et $b = \int x^3\,\pi(dx)$.

<u>Remarque</u>

$\hat{\Phi}$ étant à support compact, avec par exemple $S(\hat{\Phi}) \subset [-a,a]$, nous pouvons majorer de façon élémentaire l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\hat{\Phi}(\lambda)-\hat{\Phi}(0)}{\lambda}\right)\right| d\lambda.$

On a
$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\hat{\Phi}(\lambda)-\hat{\Phi}(0)}{\lambda}\right) = \frac{\hat{\Phi}'(\lambda)}{\lambda} - \frac{\hat{\Phi}(\lambda)-\hat{\Phi}(0)}{\lambda^2}$$
$$= \frac{\hat{\Phi}'(\lambda)-\hat{\Phi}'(0)}{\lambda} - \frac{\hat{\Phi}(\lambda)-\hat{\Phi}(0)-\lambda\,\hat{\Phi}'(0)}{\lambda^2}$$
$$= \hat{\Phi}''(\theta_1\lambda) - \frac{1}{2}\,\hat{\Phi}''(\theta_2\lambda)$$

d'où
$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\hat{\Phi}(\lambda)-\hat{\Phi}(0)}{\lambda}\right)\right| d\lambda \;\le\; 3\,a\,\|\hat{\Phi}''\|_\infty.$$

De la même façon, comme $\|\Phi_1''\|_\infty \le K(\|\hat{\Phi}''\|_\infty + \|\hat{\Phi}'\|_\infty + \|\hat{\Phi}\|_\infty)$ avec K constante indépendante de Φ, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\Phi_1(\lambda)-\Phi_1(0)}{\lambda}\right)\right| d\lambda \;\le\; 3\,a\,K\,(\|\hat{\Phi}\|_\infty + \|\hat{\Phi}'\|_\infty + \|\hat{\Phi}''\|_\infty).$$

III.DEMONSTRATION DES RESULTATS

Nous aurons besoin de deux lemmes préliminaires :

Lemme 1

i) Si f est une fonction dérivable de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, avec $f' \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, alors

$$| c \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{icx}\, dx \,| \leq \|f'\|_1$$

ii) Si f est une fonction deux fois dérivable de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ avec f' et $f'' \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, alors

$$| c^2 \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{icx}\, dx \,| \leq \|f''\|_1$$

Preuve :
Il suffit de faire une intégration par parties

$$\int_{-A}^{+A} f(x)\, e^{icx}\, dx = \frac{e^{icA} f(A)}{ic} - \frac{e^{-icA} f(-A)}{ic} - \frac{1}{ic} \int_{-A}^{+A} e^{icx} f'(x) dx$$

puis de faire tendre A vers $+\infty$ □

Lemme 2

Soit $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ une identité approchée et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions bornées sur $\mathbb{R}$. Si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une fonction f, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, \varphi_n(x)\, dx = f(0).$$

La démonstration de ce lemme est évidente.

Démonstration du théorème 1

Cette démonstration s'inspire des tchniques développées dans [1] et [3].

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a.i.i.d de loi μ. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ avec $S_0 = 0$.
On note $\hat{\mu}$ la transformée de Fourier de μ : $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}\ \ \hat{\mu}(\lambda) = \mathbb{E}[e^{i\lambda X_1}]$.

1er cas : μ admet un moment d'ordre $2+\alpha$

$\hat{\mu}$ est alors de classe C^2 et l'on a $\hat{\mu}(\lambda) = 1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2} + \lambda^{2+\alpha}\varepsilon(\lambda)$ avec $\lim_{\lambda \to 0} \varepsilon(\lambda) = 0$

et $a = \int_{\mathbb{R}} x^2\, \mu(dx)$.

Comme pour toute fonction positive Φ de $\mathcal{H}$

$$G\,\Phi(c)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}\,[\Phi(c+S_n)] = \lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}}\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\,\mathbb{E}\,[\Phi(c+S_n)] = \lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} G_r\Phi(c)$$

avec $\forall\, r<1 \quad G_r\Phi(c)=\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\,\mathbb{E}\,[\Phi(c+S_n)]$, il suffit de montrer que

$$\Big|\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} G_r\Phi(c)\Big| \le \frac{K_1(\Phi)}{|c|} \quad \text{lorsque } c>0$$

et $\Big|\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} G_r\Phi(c)-\frac{1}{m}\int_{\mathbb{R}}\Phi(t)\,dt\,\Big| \le \frac{K_1(\Phi)}{|c|}$ lorsque $c<0$.

D'après la formule inverse de Fourier, on a

$$G_r\Phi(c)=\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\,\mathbb{E}\,\Big[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{\Phi}(\lambda)\,e^{i\lambda(c+S_n)}\,d\lambda\,\Big]=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{\Phi}(\lambda)\,\frac{e^{i\lambda c}}{1-r\hat{\mu}(\lambda)}\,d\lambda$$
$$=I_{1,r}(c)+I_{2,r}(c)$$

avec $$I_{1,r}(c)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{\Phi}(\lambda)\,e^{i\lambda c}\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(\lambda)}-\frac{1}{1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})}\Big)\,d\lambda$$

et $$I_{2,r}(c)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{\Phi}(\lambda)\,e^{i\lambda c}\,\frac{1}{1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})}\,d\lambda\,.$$

Etude de $I_{1,r}(c)$.

La fonction $\lambda\to\hat{\Phi}(\lambda)\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(\lambda)}-\frac{1}{1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})}\Big)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de

dérivée :

$$\lambda\to\hat{\Phi}'(\lambda)\Big(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(\lambda)}-\frac{1}{1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})}\Big)+\hat{\Phi}(\lambda)\Big(\frac{r\hat{\mu}'(\lambda)}{(1-r\hat{\mu}(\lambda))^2}-\frac{r(im-a\lambda)}{(1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2}))^2}\Big)$$

Montrons que cette dérivée est une fonction de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.

Fixons $\varepsilon>0$ tel que, pour $|\lambda|<\varepsilon$ on ait simultanément $|\hat{\mu}'(\lambda)-im+\lambda a|\le|\lambda|^{1+\alpha}$, $|1-r\hat{\mu}(\lambda)|\ge rm|\lambda|$, $|\hat{\mu}(\lambda)-(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})|\le|\lambda|^{2+\alpha}$ et $|\hat{\mu}'(\lambda)|\le 2m$.

Nous avons alors

$$\int_{[\,|\lambda|<\varepsilon]} |\hat{\Phi}'(\lambda)\left(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(\lambda)}-\frac{1}{1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})}\right)|\,d\lambda$$

$$\leq \int_{[\,|\lambda|<\varepsilon]} |\hat{\Phi}'(\lambda)\,\frac{\hat{\mu}(\lambda)-(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})}{r(m\lambda)^2}|\,d\lambda$$

$$\leq \frac{\|\hat{\Phi}'\|_\infty}{r\,m^2}\int_{[\,|\lambda|<\varepsilon]} |\lambda|^\alpha d\lambda\ .$$

Par ailleurs, μ étant adaptée, $\hat{\mu}(\lambda)=1 \Leftrightarrow \lambda=0$; pour $\lambda \in S(\hat{\Phi}) \cap [-\varepsilon,\varepsilon]^c$, on a donc

$$\forall\, r\in[\tfrac{1}{2},1[\qquad \left|\frac{1}{1-r\hat{\mu}(\lambda)}-\frac{1}{1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})}\right| \leq \frac{2}{m\varepsilon}+\operatorname*{Sup}_{\substack{\lambda\,\in\, S(\hat{\Phi})\\ |\lambda|>\varepsilon\\ 0<r<1}} \frac{1}{|1-r\hat{\mu}(\lambda)|} < +\infty$$

si bien que

$$\int_{[\,|\lambda|\geq\varepsilon]} |\hat{\Phi}'(\lambda)\,(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(\lambda)}-\frac{1}{1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})})|\,d\lambda \leq \|\hat{\Phi}'\|_1\,(\frac{2}{m\varepsilon}+\operatorname*{Sup}_{\substack{\lambda\,\in\, S(\hat{\Phi})\\ |\lambda|>\varepsilon\\ 0<r<1}} \frac{1}{|1-r\hat{\mu}(\lambda)|})$$

Il reste à montrer l'intégrabilité de la fonction

$$\lambda \to \hat{\Phi}(\lambda)\left(\frac{r\hat{\mu}'(\lambda)}{(1-r\hat{\mu}(\lambda))^2}-\frac{r(im-a\lambda)}{(1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2}))^2}\right)$$

On a

$$\frac{r\hat{\mu}'(\lambda)}{(1-r\hat{\mu}(\lambda))^2}-\frac{r(im-a\lambda)}{(1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2}))^2}=\frac{r\hat{\mu}'(\lambda)(1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2}))^2-(1-r\hat{\mu}(\lambda))^2 r(im-\lambda a)}{(1-r\hat{\mu}(\lambda))^2(1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2}))^2}$$

$$=\frac{r\hat{\mu}'(\lambda)\left((1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2}))^2-(1-r\hat{\mu}(\lambda))^2\right)}{(1-r\hat{\mu}(\lambda))^2(1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2}))^2}$$

$$+\ \frac{r\,(\hat\mu\,'(\lambda)-(im-\lambda a))}{(1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2}))^2}$$

Par conséquent, pour $|\lambda| < \varepsilon$, on a d'une part

$$\left|\frac{r(\hat\mu\,'(\lambda)-im+\lambda a)}{(1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2}))^2}\right| \le \frac{r|\lambda|^{1+\alpha}}{(rm\lambda)^2}$$

et d'autre part $\left|\dfrac{r\hat\mu\,'(\lambda)\left(1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})\right)^2-(1-r\hat\mu(\lambda))^2\Big)}{(1-r\hat\mu(\lambda))^2(1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2}))^2}\right|$

$$=\left|\frac{r\hat\mu\,'(\lambda)\left(1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})+1-r\hat\mu\,(\lambda)\right)\left(r\hat\mu\,(\lambda)-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})\right)}{(1-r\hat\mu(\lambda))^2(1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2}))^2}\right|$$

$$\le\frac{4r^2m\,|\lambda|^{2+\alpha}}{(rm|\lambda|)^3}$$

si bien que, $\forall\, r\in[\frac{1}{2},1[$

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\,\hat\Phi(\lambda)\left(\frac{r\hat\mu\,'(\lambda)}{(1-r\hat\mu(\lambda))^2}-\frac{r(im-a\lambda)}{(1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2}))^2}\right)\right|d\lambda \le \frac{10\,\|\hat\Phi\|_\infty}{m^2}\int_{[|\lambda|<\varepsilon]}\frac{d\lambda}{|\lambda|^{1-\alpha}}$$

$$+\ \|\hat\Phi\|_1\left(\frac{2}{m\varepsilon^2}+\frac{2a}{m^2\varepsilon}+2m\left(\sup_{\substack{\lambda\in S(\hat\Phi)\\ |\lambda|\ge\varepsilon\\ 0<r<1}}\frac{1}{|1-r\hat\mu(\lambda)|}\right)^2\right)$$

Finalement, on obtient, via le lemme 1.*i*)

$$|\,c\,I_{1,r}(c)\,| \le \frac{10\,\|\hat\Phi\|_\infty}{m^2}\int_{[|\lambda|<\varepsilon]}\frac{d\lambda}{|\lambda|^{1-\alpha}}+\frac{2\|\hat\Phi'\|_\infty}{m^2}\int_{[|\lambda|<\varepsilon]}|\lambda|^\alpha d\lambda$$

$$+\ \|\hat\Phi\|_1\left(\frac{2}{m\varepsilon^2}+\frac{2a}{m^2\varepsilon}+2m\left(\sup_{\substack{\lambda\in S(\hat\Phi)\\ |\lambda|\ge\varepsilon\\ 0<r<1}}\frac{1}{|1-r\hat\mu(\lambda)|}\right)^2\right)$$

$$+\ \|\hat\Phi'\|_1\left(\frac{2}{m\varepsilon}+\sup_{\substack{\lambda\in S(\hat\Phi)\\ |\lambda|\ge\varepsilon\\ 0<r<1}}\frac{1}{|1-r\hat\mu(\lambda)|}\right)$$

ε étant un réel strictement positif ne dépendant que de μ.

Etude de $I_{2,r}(c)$.

$$I_{2,r}(c) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda)\, e^{i\lambda c} \frac{1}{1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})}\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda)\, e^{i\lambda c} \frac{1-r+r\frac{a\lambda^2}{2}}{(1-r+r\frac{a\lambda^2}{2})^2+(rm\lambda)^2}\, d\lambda + \frac{rim}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda\,\hat{\Phi}(\lambda)\, e^{i\lambda c}}{(1-r+r\frac{a\lambda^2}{2})^2+(rm\lambda)^2}\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_{\mathbb{R}} \frac{t\,\hat{\Phi}(\lambda)\, e^{i\lambda c}}{(1+t\frac{a\lambda^2}{2})^2+(mt\lambda)^2}\, d\lambda + \frac{1}{2\pi r}\int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda)\, e^{i\lambda c} \frac{\frac{a(\lambda t)^2}{2}}{(1+t\frac{a\lambda^2}{2})^2+(mt\lambda)^2}\, d\lambda$$

$$+ \frac{rim}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda\,(\hat{\Phi}(\lambda)\, e^{i\lambda c} - \hat{\Phi}(-\lambda)\, e^{-i\lambda c})}{(1-r+r\frac{a\lambda^2}{2})^2+(rm\lambda)^2}\, d\lambda \qquad \text{avec} \quad t = \frac{r}{1-r}.$$

Lorsque r tend vers 1, la suite de fonctions $\left(\lambda \to \dfrac{1+(mt\lambda)^2}{(1+t\frac{a\lambda^2}{2})^2+(mt\lambda)^2}\,\hat{\Phi}(\lambda)\, e^{i\lambda c}\right)_{t>0}$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\dfrac{m^2}{m^2+\frac{(a\lambda)^2}{4}}\,\hat{\Phi}(\lambda)\, e^{i\lambda c}$. En appliquant alors

le lemme 2, avec $\varphi_n(x) = \dfrac{n}{\pi(1+(nx)^2)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi r}\int_{\mathbb{R}} \frac{t\,\hat{\Phi}(\lambda)\, e^{i\lambda c}}{(1+t\frac{a\lambda^2}{2})^2+(mt\lambda)^2}\, d\lambda$$

$$= \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi r}\int_{\mathbb{R}} \frac{t}{1+(mt\lambda)^2}\left(\hat{\Phi}(\lambda)\, e^{i\lambda c} \frac{1+(mt\lambda)^2}{(1+t\frac{a\lambda^2}{2})^2+(mt\lambda)^2}\right) d\lambda = \frac{\hat{\Phi}(0)}{2m}$$

Enfin, pour $r \in [\frac{1}{2};1[$, on a

$$|\hat{\Phi}(\lambda)\frac{\frac{a(\lambda t)^2}{2}}{(1+t\frac{a\lambda^2}{2})^2+(mt\lambda)^2}| \leq \frac{a|\hat{\Phi}(\lambda)|}{2m^2}$$

et $|\lambda\frac{\hat{\Phi}(\lambda)\,e^{i\lambda c}-\hat{\Phi}(-\lambda)\,e^{-i\lambda c}}{(1-r+r\frac{a\lambda^2}{2})+(rm\lambda)^2}| \leq \frac{4}{m^2}\,|\frac{\hat{\Phi}(\lambda)\,e^{i\lambda c}-\hat{\Phi}(-\lambda)\,e^{-i\lambda c}}{\lambda}|$

si bien que, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi r}\int_{\mathbb{R}}\hat{\Phi}(\lambda)\,e^{i\lambda c}\frac{\frac{a(\lambda t)^2}{2}}{(1+t\frac{a\lambda^2}{2})^2+(mt\lambda)^2}\,d\lambda = \frac{a}{4\pi m^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{\hat{\Phi}(\lambda)}{1+(\frac{a\lambda}{2m})^2}e^{i\lambda c}\,d\lambda$$

et $$\lim_{r\to 1}\frac{rim}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\lambda\frac{\hat{\Phi}(\lambda)\,e^{i\lambda c}-\hat{\Phi}(-\lambda)\,e^{-i\lambda c})}{(1-r+r\frac{a\lambda^2}{2})^2+(rm\lambda)^2}\,d\lambda = \frac{i}{4\pi m}\int_{\mathbb{R}}\frac{\hat{\Phi}(\lambda)\,e^{i\lambda c}-\hat{\Phi}(-\lambda)\,e^{-i\lambda c}}{\lambda(1+(\frac{a\lambda}{2m})^2)}\,d\lambda$$

En écrivant $\frac{\hat{\Phi}(\lambda)}{1+(\frac{a\lambda}{2m})^2} = \hat{\Phi}(0)+\lambda\,\Phi_1(\lambda)$, on obtient

$$\frac{i}{4\pi m}\int_{\mathbb{R}}\frac{\hat{\Phi}(\lambda)\,e^{i\lambda c}-\hat{\Phi}(-\lambda)\,e^{-i\lambda c}}{\lambda(1+(\frac{a\lambda}{2m})^2)}\,d\lambda = \frac{i}{4\pi m}\left(\hat{\Phi}(0)\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\lambda c}-e^{-i\lambda c}}{\lambda}\,d\lambda + \int_{\mathbb{R}}(\Phi_1(\lambda)\,e^{i\lambda c}+\Phi_1(-\lambda)\,e^{-i\lambda c})\,d\lambda\right)$$

$$= \frac{-\hat{\Phi}(0)}{2\pi m}\int_{\mathbb{R}}\frac{sin(\lambda c)}{\lambda}\,d\lambda+\frac{2i}{4\pi m}\int_{\mathbb{R}}\Phi_1(\lambda)\,e^{i\lambda c}\,d\lambda.$$

Le lemme 1.*i*) nous donne alors, d'une part

$$|\,c\int_{\mathbb{R}}\frac{\hat{\Phi}(\lambda)}{1+(\frac{a\lambda}{2m})^2}e^{i\lambda c}\,d\lambda| \leq \|\hat{\Phi}'\|_1+\frac{a}{m}\|\hat{\Phi}\|_1$$

et d'autre part $\quad |\,c\int_{\mathbb{R}}\Phi_1(\lambda)\,e^{i\lambda c}\,d\lambda| \leq \|\Phi_1'\|_1.$

Il suffit alors de remarquer que $\int_{\mathbb{R}}\frac{sin(\lambda c)}{\lambda}\,d\lambda = \pi$ lorsque $c > 0$ et $-\pi$ lorsque $c < 0$.

2ème cas : μ admet des moments d'ordre 3+α

$\hat{\mu}$ est alors de classe C^2 et l'on a $\hat{\mu}(\lambda) = 1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2} - i\frac{b\lambda^3}{6} + \lambda^{3+\alpha}\varepsilon(\lambda)$ avec $\lim_{\lambda\to 0} \varepsilon(\lambda) = 0$.

On décompose $G_r\,\Phi(c)$ en $I_{1,r}(c) + I_{1,r}(c)$ avec cette fois

$$I_{1,r}(c) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda)\, e^{i\lambda c} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(\lambda)} - \frac{1}{1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2} - i\frac{b\lambda^3}{6})} \right) d\lambda$$

et $$I_{2,r}(c) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda)\, e^{i\lambda c} \frac{1}{1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2} - i\frac{b\lambda^3}{6})} d\lambda \ ;$$

la suite de la démonstration se calque sur la précédente.

Démonstration du théorème 2

Etude de l'opérateur "transformée de Fourier".

Lorsque $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables indépendantes et de même loi, l'égalité $\mathbb{E}[e^{i\lambda S_n}] = \mathbb{E}[e^{i\lambda X_1}]^n$ joue un rôle crucial dans l'étude du potentiel G. Lorsque la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov, cette égalité n'est plus vérifiée, mais certaines propriétés spectrales de P_λ permettent néanmoins d'utiliser des techniques similaires, d'où l'intérèt d'étudier de façon assez précise l'opérateur "transformée de Fourier". On a la

Proposition

Sous les hypothèses du théorème 2, lorsque P admet des moments d'ordre k

i) la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}) \\ \lambda & \to & P_\lambda \end{array}$ *est de classe* C^k.

ii) au voisinage de 0, on peut écrire $P_\lambda = k(\lambda)\,\pi_\lambda + r_\lambda$ *avec*

. $k(\lambda)$ valeur propre dominante de P_λ

. π_λ projecteur propre associé à $k(\lambda)$ et r_λ opérateur borné sur $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$, de rayon spectral $\rho(r_\lambda) < 1$, tels que $r_\lambda\,\pi_\lambda = \pi_\lambda\, r_\lambda = 0$.

. $\lambda \to k(\lambda)$, r_λ et π_λ sont des fonctions de classe C^k.

En particulier, lorsque P admet des moments d'ordre 2+α, α >0, on a

$k(\lambda) = 1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2} + \lambda^{2+\alpha}\varepsilon(\lambda)$ *avec* $m = \int x\ \pi(dx)$ *et* $a = \int x^2\ \pi(dx)$, *et lorsque*

P admet des moments d'ordre $3+\alpha$, *on a* $k(\lambda) = 1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2} - i\frac{b\lambda^3}{6} + \lambda^{3+\alpha}\varepsilon(\lambda)$ *avec* $b = \int x^3\ \pi(dx)$.

Preuve (cf. [2],[3],[4])

i) Lorsque P admet des moments d'ordre 1, on peut définir l'opérateur U_λ par $\forall\ \Phi \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})\quad U_\lambda\Phi(x) = i\,\mathbb{E}_x[X_1 e^{i\lambda X_1}\Phi(X_1)]$; pour toute fonction Φ de $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$, on a $U_\lambda\Phi(x) = \frac{d}{d\lambda}(P_\lambda\Phi(x))$ i-e $U_\lambda = \frac{dP_\lambda}{d\lambda}$.

Pour montrer la continuité de la fonction $\lambda \to P_\lambda$, on écrit

$$\|U_\lambda - U_{\lambda_0}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} \le \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_x[\,|(e^{i\lambda X_1} - e^{i\lambda_0 X_1})X_1|\,]$$
$$\le \sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_x[\,|(e^{i(\lambda-\lambda_0)X_1} - 1)X_1|\ 1_{[|X_1|\le c]}] + 2\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_x[\,|X_1|\ 1_{[|X_1|>c]}]$$

On fixe c de façon à rendre négligeable le terme $\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbb{E}_x[\,|X_1|\ 1_{[|X_1|>c]}]$, puis l'on fait tendre λ vers λ_0.

ii) P étant quasi-compact et irréductible, il existe sur $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ un opérateur borné r de rayon spectral $\rho(r) < 1$ et tel que $P = \pi + r$, avec $\pi r = r\pi = 0$. D'après ce qui précède, l'opérateur P_λ est une pertubation de P au voisinage de 0, d'où le *ii)* du lemme.

iii) on a $P_{\frac{\lambda}{n}}^{\,n} 1(x) = \mathbb{E}_x[e^{i\lambda\frac{S_n}{n}}] = k(\frac{\lambda}{n})^n\,\pi_{\frac{\lambda}{n}} 1(x) + r_{\frac{\lambda}{n}}^{\,n} 1(x)$.

Par conséquent

$$\frac{d}{d\lambda}\left(P_{\frac{\lambda}{n}}^{\,n} 1(x)\right) = i\,\mathbb{E}[\,\frac{S_n}{n} e^{i\lambda\frac{S_n}{n}}\,]$$
$$= k'(\frac{\lambda}{n})\,k(\frac{\lambda}{n})^{n-1}\,\pi_{\frac{\lambda}{n}} 1(x) + \frac{1}{n}k(\frac{\lambda}{n})^n\,\pi'_{\frac{\lambda}{n}} 1(x) + \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} r_{\frac{\lambda}{n}}^{\,l}\ r'_{\frac{\lambda}{n}}\ r_{\frac{\lambda}{n}}^{\,n-l-1} 1(x)$$

En prenant $\lambda = 0$, on obtient $\quad i\,\mathbb{E}_x[\frac{S_n}{n}] = k'(0) + \frac{1}{n}\pi'_0 1(x) + \frac{1}{n} r^{n-1} r' 1(x)$,

d'où $k'(0) = i \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_x[\frac{S_n}{n}] = im$.

Lorsque P admet des moments d'ordre $2+\alpha$, nous introduisons la fonction

$H(x,\lambda) = \mathbb{E}_x[e^{i\frac{\lambda}{\sqrt{n}}(S_n - nm)}] = e^{-i\lambda m\sqrt{n}}\ P_{\frac{\lambda}{\sqrt{n}}}^{\,n} 1(x)$; cette fonction est de classe $C^{2+\alpha}$ et l'on obtient, en prenant la valeur de la dérivée seconde à l'origine :

$$-\frac{1}{n}\,\mathbb{E}_x\,[(S_n-nm)^2]-k''(0)-m^2=\frac{1}{\sqrt{n}}\,\pi_0'1(x)+\frac{1}{\sqrt{n}}\,r^{n-1}\,r_0'\,1(x)+\frac{1}{n}\,\pi_0''\,1(x)$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-2} r^l\,r_0'\,r^{n-2-l}\,r_0'1(x)\;+\;\frac{1}{n}\,r^{n-2}\,r_0''\,1(x),$$

d'où $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\,\mathbb{E}_x\,[(S_n-nm)^2]+k''(0)+m^2=0.$

Comme $\forall\, x\in\mathbb{R}\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\,\mathbb{E}_x\,[(S_n-nm)^2]=\int_{\mathbb{R}}(x-m)^2\,\pi(dx)$, on a finalement

$k''(0)=-\,a^2.$

Pour conclure cette étude de la famille $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$, notons que lorsque P est adapté, 1 n'est pas valeur propre de P_λ pour $\lambda\neq 0$; par conséquent, sous la condition S, pour $\lambda\neq 0$, $I-P_\lambda$ est inversible, et en particulier la fonction $\quad \lambda\to\ \|\,(I-P_\lambda)^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.

1er cas : P admet des moments d'ordre $2+\alpha$

Pour toute fonction positive Φ de $\mathcal{K}$, on a

$$G(1\otimes\Phi)(x,c)\;=\;\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}}\;G_r(1\otimes\Phi)(x,c)$$

où $\forall\, r<1\quad$
$$G_r(1\otimes\Phi)(x,c)=\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\,\mathbb{E}_x\,[\Phi(c+S_n)]$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{\Phi}(\lambda)\,e^{i\lambda c}\,\sum_{n=0}^{+\infty} r^n\,\mathbb{E}_x\,[e^{i\lambda S_n}]\,d\lambda$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{\Phi}(\lambda)\;e^{i\lambda c}\;(I-rP_\lambda)^{-1}1(x)\;d\lambda$$

et l'on décompose $G_r(1\otimes\Phi)(x,c)$ en $I_{1,r}(x,c)+I_{2,r}(c)$ avec

$$I_{1,r}(x,c)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{\Phi}(\lambda)\,e^{i\lambda c}\left((I-rP_\lambda)^{-1}1(x)-\frac{1+\lambda\,\pi_0'1(x)}{1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})}\right)d\lambda$$

et $I_{2,r}(x,c)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda)\, e^{i\lambda c}\, \frac{1+\lambda\,\pi_0\,'1(x)}{1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})}\, d\lambda.$

Etude de $I_{1,r}(x,c)$.

Elle se calque sur celle du théorème 1 ; en particulier, il nous faut prouver l'intégrabilité de la fonction

$$\lambda \to \hat{\Phi}'(\lambda)\left((I-rP_\lambda)^{-1}1(x) - \frac{1+\lambda\pi_0\,'1(x)}{1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})}\right)$$

$$+\ \hat{\Phi}(\lambda)\,\frac{d}{d\lambda}\left((I-rP_\lambda)^{-1}1(x) - \frac{1+\lambda\pi_0\,'1(x)}{1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})}\right)$$

On fixe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $|\lambda| < \varepsilon$, on ait $P_\lambda = k(\lambda)\,\pi_\lambda + r_\lambda$, avec simultanément

$\rho(r_\lambda) \le \rho_\varepsilon<1$, $|k(\lambda)-1-im\lambda+\frac{a\lambda^2}{2}|\le A_\varepsilon|\lambda|^{2+\alpha}$, $|k'(\lambda)-im+\lambda a|\le A_\varepsilon|\lambda|^{1+\alpha}$

$\|\pi_\lambda-1-\lambda\pi_0'\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})}\le A_\varepsilon|\lambda|^2$, $\|\pi_\lambda'-\pi_0'\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})}\le A_\varepsilon|\lambda|$ et $\|\pi_\lambda\|\le 2$.

L'hypothèse $\rho_\varepsilon<1$ entraîne en particulier l'existence d'une constante $M_\varepsilon < +\infty$ telle que

$$\sup_{|\lambda|<\varepsilon} \Big\|\sum_{n=0}^{+\infty} r_\lambda^{\,n}\Big\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\le M_\varepsilon \quad\text{et}\quad \sup_{|\lambda|<\varepsilon}\Big\|\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{n-1} r_\lambda^{\,l}\, r_\lambda{}'\, r_\lambda^{\,n-l-1}\Big\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\le M_\varepsilon .$$

Pour $|\lambda| < \varepsilon$, on a d'une part

$$(I-rP_\lambda)^{-1}1(x) - \frac{1+\lambda\pi_0'1(x)}{1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n\, r_\lambda^n 1(x) + \left(\frac{\pi_\lambda 1(x)}{1-rk(\lambda)} - \frac{1+\lambda\pi_0'1(x)}{1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} r^n\, r_\lambda^n 1(x) + \frac{\pi_\lambda 1(x) - (1+\lambda\pi_0'1(x))}{1-rk(\lambda)} + (1+\lambda\pi_0'1(x))\frac{r(k(\lambda)-(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2}))}{(1-rk(\lambda))(1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2}))}$$

si bien que, d'après le choix de ε, il existe une constante $A_\varepsilon > 0$ telle que

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ |\lambda|<\varepsilon\\ \frac{1}{2}<r<1}} \left|(I-rP_\lambda)^{-1}1(x) - \frac{1+\lambda\pi_0'1(x)}{1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})}\right| \le A_\varepsilon < +\infty$$

d'où la majoration

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2}<r<1}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\Phi}(\lambda)| \left((I-rP_\lambda)^{-1} 1(x) - \frac{1+\lambda \pi_0{}'1(x)}{1-r(1+im\lambda \frac{a\lambda^2}{2})} \right) | d\lambda \leq A_\varepsilon \|\hat{\Phi}\|_\infty$$

$$+ \|\hat{\Phi}\|_1 \left(\frac{2}{m\varepsilon} + \sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda|>\varepsilon \\ 0<r<1}} \| (I-rP_\lambda)^{-1} \| \right)$$

D'autre part, nous avons

$$\frac{d}{d\lambda} \left((I-rP_\lambda)^{-1} 1(x) - \frac{1+\lambda\pi_0{}'1(x)}{1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2})} \right) = \frac{(1-rk(\lambda))\pi_\lambda{}'1(x) + rk(\lambda)\pi_\lambda 1(x)}{(1-rk(\lambda))^2}$$

$$+ \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \sum_{l=0}^{n-1} r_\lambda^l \, r_\lambda{}' \, r_\lambda^{n-l-1} 1(x) - \frac{(1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2}))\pi_0{}'1(x) + (rim-\lambda a)(1+\lambda\pi_0{}'1(x))}{(1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2}))^2}$$

Le choix de ε permet alors de montrer que cette fonction est bornée sur $[-\varepsilon;\varepsilon]$, si bien que

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\Phi}(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \left((I-rP_\lambda)^{-1} 1(x) - \frac{1+\lambda\pi_0{}'1(x)}{(1-r(1+im\lambda-\frac{a\lambda^2}{2}))^2} \right) | d\lambda \leq K_\varepsilon \|\hat{\Phi}\|_\infty$$

$$+ \sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda|>\varepsilon \\ 0<r<1}} \left(\| \frac{d}{d\lambda} ((I-rP_\lambda)^{-1}) \|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} \right) \|\hat{\Phi}\|_1$$

Notons que $\displaystyle \sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda|>\varepsilon \\ 0<r<1}} \| (I-rP_\lambda)^{-1} \|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} < +\infty$.

La suite de la démonstration se calque sur celle du théorème 1 ; en particulier, pour l'étude de $I_{2,r}(x,c)$, on remplace, dans la preuve du théorème 1, $\hat{\Phi}(\lambda)$ par $(1+\lambda\pi_0{}'1(x))\, \hat{\Phi}(\lambda)$.

2ème cas : P admet des moments d'ordre $3+\alpha$

On reprend l'étude précédente avec cette fois

$$I_{1,r}(x,c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} \left((I-rP_\lambda)^{-1} 1(x) - \frac{1+\lambda\,\pi_0{}'1(x) + \frac{\lambda^2}{2}\pi_0{}''1(x)}{1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2} - i\frac{b\lambda^3}{6})} \right) d\lambda$$

$$\text{et } I_{2,r}(x,c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda)\, e^{i\lambda c} \left(\frac{1 + \lambda\, \pi_0\,'1(x) + \frac{\lambda^2}{2}\pi_0\,''1(x)}{1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2} - i\,\frac{b\lambda^3}{6}} \right) d\lambda. \qquad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BREIMAN L. *"Probability"*
Addison Wesley Publishing Company, 1968

[2] DUNFORD N. & SCHWARTZ J. *"Linear operators"* Part I
Interscience, 1971

[3]GUIVARC'H Y. *"Application d'un théorème limite local à la transience et à la récurrence de marches de Markov"*
Springer Verlag Lectures Notes 1096, p.301-332, 1984

[4] LEPAGE E. *"Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires"*
Springer Verlag Lectures Notes 928, p.258-303, 1984

PEIGNE Marc
I.R.M.A.R.
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 RENNES CEDEX