A. Errera

Sur les travaux de M. L. A. Antoine

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1988, fascicule S6
« Journée Louis Antoine », , exp. n° 3, p. 49-58
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1988___S6_A3_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIETE MATHEMATIQUE

DE BELGIQUE

TOME IX

Fascicule 1

1957

EXTRAIT

Sur les travaux M. L.A. ANTOINE

par

A. ERRERA

EDITIONS J. DUCULOT, S.A. GEMBLOUX

Sur les travaux de M. L. A. Antoine.

A. ERRERA.

Louis Auguste ANTOINE, né à Mirecourt (Vosges) le 23 novembre 1888, vient d'être admis à la retraite (fin septembre 1957). A cette occasion, il est intéressant de dire quelques mots de la carrière dramatique de ce mathématicien éminent et de rappeler ses contributions au progrès de la science, particulièrement de la topologie.

Élève, en spéciales, de Jules Haag, entré à l'École Normale Supérieure en 1909, agrégé en 1912, il est mobilisé dès le premier jour de la guerre, après avoir professé pendant un an au lycée de Dijon. Il va gravir une rapide carrière militaire, grâce à sa conduite exceptionnelle : blessé à plusieurs reprises, dont une fois à Ramscappelle, cité fréquemment à l'Ordre du Jour, il est capitaine à vingt-neuf ans et déjà, chose rare, officier de la Légion d'Honneur. Mais une affreuse blessure à la face, reçue en première ligne, va le priver définitivement de la vue.

Voici ce qu'a écrit de lui Henri Lebesgue, dans un texte qui se trouve aux archives de l'Académie des Sciences (1) :

« Dès sa rééducation, il se préoccupe, avec un autre aveugle de guerre, lui aussi professeur de mathématiques, M. Bourguignon, d'adapter l'écriture Braille aux notations mathématiques, ce qui, soit dit entre parenthèses, devait être bientôt utile à un troisième aveugle de guerre, M. Roger Roy...

« M. Antoine se proposait de continuer sa carrière dans l'enseignement secondaire.

« On vous nommera dans l'enseignement supérieur, lui dis-je.

— Mais je ne suis pas docteur !

(1) Ces lignes nous ont été communiquées par M. Bouligand, à qui nous sommes redevable également de nombre d'indications biographiques que nous reproduisons ici.

— Ce grade n'est pas indispensable... » Mais j'eus beau insister : « c'est dans l'enseignement supérieur que vous rendrez le plus service » ; il ne voulait rien entendre. Pourtant, quelques jours après, il me dit :

« Vous avez raison, je remplirais mieux ma tâche dans l'enseignement supérieur ; mais je veux y entrer régulièrement ; dans quelle direction me proposez-vous de travailler pour une thèse ? »

— Et je l'aiguillai vers la géométrie de situation.

Lebesgue pensait qu'une note d'analysis situs qu'il avait publiée et dont le développement exigerait un gros mémoire, allait fournir l'essentiel de la thèse. Mais au lieu de se laisser entrainer dans cette voie trop facile à son gré, M. Antoine réfléchit à la notion de courbes et de variétés enlacées.

Pendant un an, Lebesgue trembla à l'idée qu'il pouvait l'avoir conduit dans une impasse ; car, comme il le dit, cette idée qui s'était imposée à Gauss et, pour la physique, à Maxwell, puis à Thomson et à Tait, n'était apparue à Listing, l'un des fondateurs de l'analysis situs, que comme une curiosité mathématique. On en était donc resté à une sorte de catalogue d'exemples plus ou moins simples, puisqu'on manquait de la technique nécessaire et qu'« on ne savait même pas formuler les problèmes à envisager ; pour avancer, il fallait faire preuve d'une intelligence pénétrante et d'une originalité puissante qui permettent de tout tirer de soi : et M. Antoine a réussi à avancer. »

Ce dernier soutint sa thèse (²) en 1921, à Strasbourg où, depuis deux ans, il était maître de conférences. Puis, en 1923, il fut titularisé à la Faculté des Sciences de Rennes pour succéder à Gambier. Ici, il y avait peu de personnel et il eut à s'occuper d'un vaste enseignement.

Or il devait se faire lire les mémoires et ne pouvait, comme ceux qui voient, les parcourir « en diagonale », ce qui permet de distinguer rapidement l'essentiel. Il lui fallait exécuter ses calculs de tête, les noter pour lui-même, puis pour ceux qui voient et, pendant ses leçons, faire écrire des formules au tableau. On

(²) Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages, Gauthier-Villars, 1921.

conçoit aisément, combien tout cela est long, difficile et fastidieux.

On a pu s'en rendre compte lorsque, pour un exposé qu'il présenta au congrès mathématique de Strasbourg, en 1920, il dut employer un tableau noir portant, sur chaque montant, une rangée de trous, où l'on enfonçait une fiche ; sur celles-ci pouvait reposer une longue latte horizontale lui permettant d'écrire sans dévier.

Au début, sa femme l'avait assisté dans ses travaux ; mais par la suite, elle dut se consacrer à ses enfants ; c'est là surtout ce qui explique que la production scientifique d'Antoine se soit ralentie.

Cependant, il compléta sa thèse par un beau mémoire des Fundamenta Mathematicae ([3]) et publia quelques notes.

Il aurait pu, en quelque sorte, valoriser sa blessure, pour obtenir de grands honneurs. Mais ce n'est certainement pas à la suite d'intrigues de sa part, que ce travailleur aussi méritant que modeste est devenu Grand Officier de la Légion d'Honneur. Il préférait continuer sans bruit son enseignement, alors qu'il avait fait, ainsi que Carathéodory nous l'a dit, en 1928, peut-être la découverte la plus importante de l'immédiat après-guerre.

L'héroïque handicap dont a souffert M. Antoine tout au long de sa carrière ne l'a pas empêché de chercher, dans ses cours, à améliorer et à clarifier les procédés classiques. En voici un exemple ingénieux.

Il s'agit d'une méthode originale pour calculer l'expression $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$: il le fait en ramenant son étude à celle de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx$, qui est constant pour n impair ([4]).

De même, M. Antoine avait envisagé l'équation différentielle de Lagrange,

$$xf(y') + yg(y') + h(y') = 0,$$

([3]) Sur les voisinages de deux figures homéomorphes, Tome V, 1924.

([4]) Bulletin de la Société Scientifique de Bretagne, T. XXVII, 1952.

du point de vue des intégrales singulières [5]. Il y parvint par une méthode courte et élégante. Si l'équation n'est pas du type de Clairaut et si elle a une intégrale singulière, celle-ci est formée de fonctions linéaires.

On peut citer aussi, de lui, une interprétation géométrique ingénieuse du double produit vectoriel de trois vecteurs [6] : les doubles produits sont proportionnels aux côtés d'un triangle, face d'un tétraèdre orthocentrique, dont les 3 autres arêtes sont parallèles aux 3 vecteurs. Mais nous avons hâte d'en venir à sa thèse.

On ne voit pas comment on pourrait en faire une plus belle analyse, que celle qu'a signée Lebesgue dans le Bulletin des Sciences mathématiques de janvier 1922. Nous n'en donnerons donc ici qu'un court aperçu.

Deux ensembles de points sont dits, avec Poincaré, homéomorphes, s'il existe entre eux une correspondance bi-univoque et bi-continue. M. Antoine envisage spécialement les *courbes* et les ensembles parfaits partout discontinus, que dans la suite nous appellerons brièvement *ensembles discontinus ;* et nous allons considérer cette notion, aujourd'hui classique, comme connue.

Or a priori, trois cas sont possibles :

1) l'homéomorphie peut être étendue à tout l'espace ;

2) l'homéomorphie ne peut être étendue qu'à un voisinage des figures considérées ;

3) l'homéomorphie ne peut être étendue à aucun voisinage et l'on dira que les ensembles sont *homéomorphes en eux-mêmes.*

Le résultat fondamental contenu dans la thèse de M. Antoine peut s'énoncer : on est toujours dans le premier cas, quand il s'agit de figures planes ; avec des figures gauches, les trois cas se présentent effectivement.

Pour les figures planes, le résultat était connu et apparaissait en quelque sorte, dit Lebesgue, « comme le complément de la démonstration, par M. de la Vallée Poussin, du théorème fonda-

---

(5) Bulletin mathématique des Facultés des Sciences et des Grandes Ecoles. Tome I, 1934, pp. 70 à 74.

(6) ibid. pp. 202 à 207.

mental de Jordan » (intuitivement évident depuis toujours), d'après lequel toute courbe fermée, simple, tracée dans un plan, divise celui-ci en deux domaines d'un seul tenant, qu'on ne peut relier sans la traverser ou sans sortir du plan.

Mais dès qu'on dépasse le plan, un fait nouveau se présente : sans entrer dans les belles démonstrations de M. Antoine et en ne faisant appel qu'à l'intuition naïve de chacun, on voit bien qu'il suffit de considérer, d'une part, une courbe fermée présentant un nœud (c'est forcément une courbe gauche) et d'autre part, une circonférence de cercle, pour voir que leur homéomorphie ne peut pas s'étendre à leurs espaces respectifs à trois dimensions ; on est dans le deuxième cas, puisqu'on peut, en quelque sorte, supposer les courbes comme axes respectifs de deux tuyaux, suffisamment minces pour que celui qui est noué ne se rencontre pas lui-même.

Quant au troisième cas, on peut en esquisser un exemple, comme ceci : on considère une courbe gauche fermée, de longueur finie, présentant une infinité de nœuds de plus en plus petits et qui s'accumulent en un point limite ; dans cet exemple, aucun tube ne sera assez mince pour épouser tous les nœuds sans se rencontrer lui-même et l'homéomorphie avec le cercle ne saurait donc s'étendre à aucun voisinage. Bien entendu, les exemples de M. Antoine sont exposés en détail et démontrés en toute rigueur.

Pour ce qui est des ensembles discontinus, on savait déjà, par un théorème de F. Riesz et de M. Denjoy, dont M. Antoine donne une nouvelle démonstration, que par un tel ensemble, E, on peut toujours faire passer un arc de Jordan simple, c'est-à-dire l'homéomorphe d'un segment rectiligne ; on peut même prendre pour cet arc, une ligne polygonale, telle que les points de E en sont, ou des sommets (qui forment une infinité dénombrable) ou des points d'accumulation de sommets.

Dans le cas d'un ensemble discontinu plan, la courbe sera elle-même plane et on pourra la traverser en n'importe quel point n'appartenant pas à l'ensemble (car ces points sont accessibles au sens de Schoenflies), ce qui fait que celui-ci ne saurait diviser le plan en domaines séparés. Deux pareils ensembles sont homéomorphes et rentrent dans le premier cas.

Comme ensemble gauche discontinu, appelons-le P, M. Antoine a construit un exemple, aussi célèbre qu'ingénieux, qu'on peut décrire comme ceci.

On aura à considérer une infinité de tores, tous métriquement semblables à un tore T_0 initial ; et les proportions de celui-ci sont choisies de telle manière qu'il soit possible de former, à l'aide d'un nombre fini, n par exemple, de tores égaux, une chaîne simple, fermée sur elle-même ; autrement dit, ces n tores particuliers constituent une suite cyclique, dont chaque chaînon est *enlacé* avec ses deux voisins, sans que deux de ces tores se touchent (cette notion a été définie pour des variétés quelconques par Lebesgue en 1911 et donne lieu à une étude de M. Antoine, préparant celle des courbes tracées sur le tore).

On part donc de T_0. Les n tores T_1 seront suffisamment petits, pour que leur chaine puisse se placer dans l'épaisseur de T_0 et tourner une fois autour de son axe sans toucher sa surface.

Dans chacun des tores T_1, on dispose pareillement une chaîne de n tores T_2, dont les dimensions sont réduites en proportion ; en tout, il y a donc n^2 tores T_2.

On continue ainsi, à l'infini, cette construction de tores emboîtés, chacun des n^k tores T_k contenant une chaîne de n tores T_{k+1} tournant autour de son axe.

L'ensemble P cherché est celui des points appartenant à toute suite infinie de tores emboîtés de tous ordres (ou indices), T_0, T_1, T_2, ..., T_k, ..., Et l'on voit sans peine que P est fermé et sans point isolé ; c'est donc un ensemble parfait.

Or deux points distincts de P appartiennent forcément à deux tores différents ayant un certain ordre k et, par suite, à des tores distincts de tous les ordres supérieurs. L'ensemble est donc discontinu en toutes ses parties, puisqu'on ne peut relier deux tores du même ordre sans en sortir.

Remarquons que la filiation des tores pourrait très bien se schématiser par un de ces réseaux infinis considérés, entre autres, par Dénès König ; mais la liaison topologique disparaîtrait.

Par conséquent, l'ensemble P est situé tout entier dans l'épaisseur de T_0, dans celle des n tores T_1, des n^2 tores T_2, etc. Et, bien que totalement discontinu, P a des propiétés remarquables et inattendues, par exemple celles-ci :

Considérons un cercle C, enlacé au tore T_0 sans le toucher. Si l'on essaie de déplacer le cercle, de façon à le « désenlacer » de T_0, il devra forcément, au cours de son déplacement, rencontrer des tores de tous les ordres et par conséquent, des points de P, cela malgré la discontinuité de celui-ci. L'ensemble des points rencontrés a même la puissance du continu. L'ensemble P fait penser à une fonction discontinue, qui passe cependant par toutes les valeurs intermédiaires à deux d'entre elles.

De même, toute surface en forme de calotte simple, limitée par le cercle C, aura des points communs avec P (pour traverser P sans le rencontrer, la calotte devrait être de connexion infinie et se glisser en quelque sorte entre les tores enlacés de tous ordres).

Un second ensemble discontinu, p, peut s'obtenir en emboîtant cette fois des sphères, dont les centres sont tous situés sur une droite ; p est donc lui-même sur cette droite.

On voit sans peine que P et p sont homéomorphes et l'on peut établir qu'ils le sont en eux-mêmes.

Dans un article paru aux Comptes-Rendus de Paris de 1921 ([7]), M. Antoine montre que, par l'ensemble P, on peut toujours faire passer une variété W_{n-1} d'un espace E_n (à $n \geqq 2$ dimensions), de façon que l'une des régions déterminées par W_{n-1} dans E_n soit homéomorphe à l'une des régions déterminées par un hyperplan w_{n-1} dans un espace e_n, cette homéomorphie faisant correspondre à P, un ensemble donné p, parfait, discontinu, rectiligne, situé sur w_{n-1}.

L'auteur note aussi qu'on peut construire un ensemble rectiligne, discontinu, dont la correspondance à P ne peut s'étendre qu'aux intérieurs respectifs des surfaces W_{n-1} et w_{n-1} : ceci améliore le cas 3), mais sans atteindre ni 2) ni 1).

Dans les Fundamenta ([8]), M. Antoine reprend, en les généralisant, tous les résultats précédents. Entre autres, il donne un ensemble discontinu dont une projection est continue.

Cette généralisation consiste à remplacer les tores qui définissent P par toutes sortes de variétés. Il montre que tout ensemble parfait discontinu peut se définir ainsi ; deux pareils ensembles sont homéomorphes et par des modifications appropriées des variétés de définition, on peut obtenir toute homéomorphie

---

([7]) Tome 173, page 284.

([8]) Tome V, 1924.

donnée entre les deux ensembles, si l'un au moins de ceux-ci est plongé dans un espace ayant au moins deux dimensions.

Parmi les théorèmes de M. Antoine, citons ceux-ci : toute homéomorphie entre deux ensembles discontinus P et p, appartenant à des espaces à n dimensions ($n \geqq 2$), peut s'étendre soit à des régions bornées ou non bornées, limitées par des variétés à i dimensions, homéomorphes à des hyperplans et contenant respectivement P et p ($1 \leqq i \leqq n-1$), soit, en particulier, à ces variétés à i dimensions elles-mêmes.

L'auteur donne divers exemples et étudie aussi le cas où $i = n$.

Entre autres conséquences, il y a l'impossibilité, dans les espaces à trois dimensions, d'étendre, en général, l'homéomorphie entre deux surfaces à leurs voisinagès. Il montre alors pourquoi la démonstration du théorème de Jordan généralisé à un espace quelconque, exige des méthodes différentes de celles du plan.

Ces questions, signalées par de nombreux auteurs, tels que M. J. W. Alexander, de Kerékjártó et d'autres, ont été reprises récemment dans sa thèse de Princeton, par M. W. A. Blankinship (*), qui généralise la construction des tores enchaînés décrite ci-dessus, en faisant tourner, dans un espace à n dimensions ($n \geqq 3$), un cercle (et son intérieur) autour de $n-2$ hyperplans de dimension $n-2$, choisis de manière à rendre l'ensemble obtenu, isomorphe au produit topologique d'une cellule à 2 dimensions avec $n-2$ circonférences de cercles ; un tel ensemble s'appellera un *n-tube*.

On partira d'un n-tube initial A_0 et, pour former A_1, on enlacera les uns aux autres, k pareils n-tubes d'une manière appropriée, après les avoir plongés dans A_0.

La suite de la construction est inspirée de celle de M. Antoine et l'ensemble A auquel on aboutit, analogue à notre ensemble P, est l'intersection de la suite des ensembles emboités A_0, A_1, ... Pour l'étude des importantes propriétés de A, on ne peut que renvoyer le lecteur à l'excellente thèse de M. Blankinship.

Le très grand mérite de M. Antoine est d'avoir ouvert une voie nouvelle à la topologie et cela en l'emportant sur deux grandes difficultés : la première, c'est qu'à l'époque de sa thèse,

(*) Annals of Math., t. 53, n° 2, mars 1951.

la mise en liaison de cette science avec la théorie des ensembles était chose assez nouvelle et presque inattendue ; la seconde était due aux écueils particuliers qu'a rencontrés l'auteur, pour la glorieuse raison dont nous avons parlé au début de ces lignes.

Et cette voie qu'il a ouverte est loin d'avoir été complètement explorée. On peut en apercevoir des développements récents et peut-être même futurs.

Faisons également le vœu que l'*otium cum dignitate* dont il va jouir, lui permettra de reprendre de fructueux travaux, que les obligations de tous les jours l'avaient en quelque sorte obligé à interrompre.