

MARC PEIGNE

Marche de Markov sur le semi-groupe des contractions de \mathbb{R}^d

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1988, fascicule 1
« Probabilités », , p. 91-114

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1988__1_91_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**MARCHE DE MARKOV SUR LE SEMI-GROUPE
DES CONTRACTIONS DE \mathbb{R}^d**

Marc PEIGNE
IRMAR
UNIVERSITE DE RENNES I
CAMPUS DE BEAULIEU
35042 RENNES CEDEX

Summary

Let E be a locally compact space with countable basis, $(X_n)_{n \geq 0}$ a positive Harris chain on E , $(X_n^*)_{n \geq 0}$ its reverse chain, and f an application from E to the space S of contractions of \mathbb{R}^d . We prove, under reasonable conditions, that on a closed sub-set of \mathbb{R}^d , the sequence of contractions $(f(X_0) \circ \dots \circ f(X_n))_{n \geq 0}$ converge almost surely to a constant. We deduce that the semi-markovian chain $((f(X_{n-1}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*) \alpha)_{n \geq 0}, \alpha \in \mathbb{R}^d$, is Harris recurrent on the open sets of \mathbb{R}^d .

Résumé

Soit E un espace localement compact à base dénombrable, $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur E récurrente positive au sens de Harris, $(X_n^*)_{n \geq 0}$ sa chaîne duale et f une application de E dans l'espace S des contractions de \mathbb{R}^d . Nous montrons, sous des hypothèses raisonnables, que sur un certain sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^d , la suite de contractions $(f(X_0) \circ \dots \circ f(X_n))_{n \geq 0}$ converge presque sûrement vers une fonction constante. Nous en déduisons que la chaîne semi-markovienne $((f(X_{n-1}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*) \alpha)_{n \geq 0}, \alpha \in \mathbb{R}^d$, est récurrente au sens de Harris sur les ouverts de \mathbb{R}^d .

Code A.M.S 60 J 10

I. NOTATIONS ET HYPOTHESES

1. Introduction et notations

* On munit \mathbb{R}^d , $d \geq 1$ de la norme euclidienne $\| \cdot \|$ et l'on note $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d .

* On considère les espaces

$$B = \{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) : \|f\|_B < +\infty \}$$

$$\text{avec } \|f\|_B = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left(\frac{\|f(x)\|}{1 + \|x\|^2} \right)$$

$$L = \{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) : \|f\|_L = \|f\|_B + m(f) < +\infty \}$$

$(B, \| \cdot \|_B)$ et $(L, \| \cdot \|_L)$ sont des espaces de Banach sur \mathbb{R} .

* S désigne le semi-groupe (pour la composition des applications) des contractions de \mathbb{R}^d , i.e des applications lipschitziennes de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d , dont le coefficient de lipschitz est inférieur ou égal à 1.

On a $S \subset L$ et l'on désigne par $\mathfrak{B}(S)$ la tribu des boréliens de S pour la topologie induite par celle de $(L, \| \cdot \|_L)$.

* Soit Q un noyau markovien défini sur un espace localement compact à base dénombrable X ; $(X^{\otimes \mathbb{N}}, \mathfrak{B}(X)^{\otimes \mathbb{N}}, (X_n)_{n \geq 0}, (P_x)_{x \in X})$ la chaîne de Markov canonique associée à Q . On suppose que $(X_n)_{n \geq 0}$ est récurrente positive au sens de Harris; on note π l'unique mesure de probabilité Q -invariante sur X , Q^* l'opérateur dual de Q vis à vis de π et $(X^{\otimes \mathbb{N}}, \mathfrak{B}(X)^{\otimes \mathbb{N}}, (X_n^*)_{n \geq 0}, (P_x)_{x \in X})$ la chaîne de Markov canonique associée à Q^* .

* Soit f une application mesurable de $(X, \mathfrak{B}(X))$ dans $(S, \mathfrak{B}(S))$.

Dans un premier temps, nous nous intéressons au comportement asymptotique de la suite aléatoire de contractions $M_n(\omega) = f(X_0(\omega)) \circ f(X_1(\omega)) \circ \dots \circ f(X_n(\omega))$. Les images de ces contractions forment une suite décroissante (au sens de l'inclusion) et donc, pour presque tout ω , on peut espérer que la suite de fonctions $(M_n(\omega))_{n \geq 0}$ converge, sur un sous-ensemble de \mathbb{R}^d , vers une fonction constante.

Lorsque la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ forme une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (v.a.i.i.d) on est ramené à l'étude d'une marche aléatoire sur S , et à son action sur \mathbb{R}^d (cf [3]).

Dans le cadre plus général où nous nous plaçons, il nous faut introduire la chaîne semi-markovienne sur $X \times S$, définie par son noyau R :

$$R \varphi(x,s) = \int \varphi(y, s \circ f(y)) Q(x, dy)$$

pour toute fonction φ borélienne bornée de $X \times S$ dans \mathbb{R} .

Par contre, les images des contractions $f(X_n^*(\omega)) \circ f(X_{n-1}^*(\omega)) \circ \dots \circ f(X_0^*(\omega))$ ne forment pas une suite décroissante, contrairement à celles de $(M_n(\omega))_{n \geq 0}$ et c'est pourquoi nous nous intéressons plutôt au comportement ératique dans \mathbb{R}^d , de la suite aléatoire $(f(X_n^*(\omega)) \circ f(X_{n-1}^*(\omega)) \circ \dots \circ f(X_0^*(\omega)) a)_{n \geq 0}$, pour $a \in \mathbb{R}^d$.

2. Hypothèses

Introduisons les hypothèses suivantes :

H1. Il existe $c \in]0;1[$ et ν une mesure de probabilité sur $X \times S$ tels que

$$\forall x \in X \quad U_c((x, I), \cdot) \geq \delta(x) \nu(\cdot) \quad (*)$$

où U_c désigne le noyau $\sum_{n=1}^{+\infty} (1-c)^{n-1} R^n$, I la fonction identité sur \mathbb{R}^d , et δ une

fonction borélienne de X dans \mathbb{R} , vérifiant $\pi(\delta) > 0$ et $\delta(x) > 0$ $\bar{\nu}(dx)$ -ps, $\bar{\nu}$ étant la marginale de ν sur X .

Notons ν' la marginale de ν sur S , et $T_{\nu'}$ le semi-groupe engendré par le support de ν' dans S .

H2. Il existe $u \in \mathbb{R}^d$ et $(\zeta_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $T_{\nu'}$ tels que :

$$\forall a \in \mathbb{R}^d \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \zeta_n a = u$$

On dit que $(\zeta_n)_{n \geq 0}$ est une "suite contractante" et u est appelé "point de contraction".

H3. Il existe une application mesurable de X dans $M_1(\mathbb{R}^d)$, l'espace des mesures de probabilité sur \mathbb{R}^d

$$X \rightarrow M_1(\mathbb{R}^d)$$

$$x \rightarrow \lambda_x$$

telle que, pour π -presque tout $x \in X$, on ait :

$$\lambda_x = \int f(y) \lambda_y Q(x, dy).$$

3. Analyse des hypothèses

a) Sous H1, on a $\pi \geq c \pi(\delta) \bar{\nu}$ avec $c \pi(\delta) > 0$.

En effet par projection de (*) sur X , on obtient :

$$\forall x \in X \quad c \overline{U}_c(x, \cdot) = c \sum_{n=1}^{+\infty} (1-c)^{n-1} Q^n(x, \cdot) \geq \delta(x) \overline{v}(\cdot)$$

et donc $\pi = \pi c \overline{U}_c \geq c \pi(\delta) \overline{v}$, d'où le résultat.

b) Lorsque l'hypothèse H1 est vérifiée, avec de plus $\forall x \in X \quad \delta(x) \geq \delta > 0$, la chaîne $(X_n)_{n \geq 0}$ est récurrente positive au sens de Harris.

Dans ce cas, on a en effet $\forall x \in X \quad \overline{U}_c(x, \cdot) \geq \delta \overline{v}(\cdot)$ avec $\overline{U}_c(c) = 1$, i.e $(X_n)_{n \geq 0}$ est récurrente positive au sens de Harris (cf [4] théorème 2.9 page 76).

c) Dans l'énoncé de l'hypothèse H1, on peut remplacer v par une mesure de probabilité v_0 se désintégrant en :

$$v_0(dy, ds) = \int \tau * v_y(ds) \overline{v}(dy)$$

où τ est une mesure de probabilité sur S dont le support S_τ est le semi-groupe T_v et v_y désigne une mesure de probabilité sur S.

En effet, décomposons v en $v(dy, ds) = \int v_y(ds) \overline{v}(dy)$, et montrons par récurrence qu'il existe, pour tout réel $d \in]0; c[$ et tout entier n , une mesure de probabilité τ_n sur S de support $S_{\tau_n} = S_{v'} * n$, et un réel $\delta_n(d)$, $0 < \delta_n(d) < \overline{v}(\delta)^n$, tels que :

$$U_d((x, I), (dy, ds)) \geq \delta_n(d) \delta(x) \int \tau_n * v_y(ds) \overline{v}(dy)$$

Cette inégalité est vérifiée pour $n=0$, car $\forall d \leq c \quad U_d = U_c + (c-d) U_c U_d$ (équation aux résolvantes).

Supposons cette inégalité vérifiée au rang n ; pour φ fonction borélienne positive sur $X \times S$, on a donc :

$$\begin{aligned} U_d \varphi(x, I) &\geq (c-d) U_c U_d \varphi(x, I) \\ &\geq (c-d) \int U_d \varphi(y, s) U_c((x, I), (dy, ds)) \\ &\geq (c-d) \delta(x) \int U_d(\tau_s \varphi)(y, I) v(dy, ds) \quad \text{avec } \tau_s \varphi(x, t) = \varphi(x, s \circ t) \\ &\geq (c-d) \delta(x) \delta_n(d) \int \varphi(z, s \circ t) \tau_n * v_z(dt) \overline{v}(dz) \delta(y) v(dy, ds) \end{aligned}$$

$$\geq (c-d) \delta(x) \delta_n(d) \int \varphi(z, t) [\int \delta(y) v(dy, \cdot)] * \tau_n * v_z(dt) \bar{v}(dz)$$

Comme $\delta(y) > 0$ $\bar{v}(dy)$ -ps, on a $S \int \delta(y) v(dy, \cdot) = S_{v'}$, d'où

$$U_d \varphi(x, I) \geq \delta_{n+1}(d) \delta(x) \int \varphi(z, t) \tau_{n+1} * v_z(dt) \bar{v}(dz)$$

avec $\delta_{n+1}(d) = (c-d) \delta_n(d) \bar{v}(\delta)$ et $\tau_{n+1}(\cdot) = \frac{1}{\bar{v}(\delta)} \int \delta(y) v(dy, \cdot)$

L'inégalité annoncée est donc bien vérifiée au rang $n + 1$.

Par sommation, pour $0 < \alpha < \frac{1}{\bar{v}(\delta)}$, on obtient :

$$U_d((x, I), (dy, ds)) \geq (1-\alpha) \delta(x) \int \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \delta_n(d) \tau_n \right) * v_y(ds) \bar{v}(dy) \\ \geq \delta_0(x) \int \tau * v_y(ds) \bar{v}(dy)$$

où δ_0 est une fonction borélienne de X dans \mathbb{R} vérifiant $\delta_0(x) > 0$ $\bar{v}(dx)$ -ps, et τ une mesure de probabilité sur S dont le support est le semi-groupe $T_{v'}$.

d) L'hypothèse H2 est vérifiée, dès qu'il existe dans $T_{v'}$ une contraction s telle que $m(s) < 1$; la suite $(s^n)_{n \geq 1}$ est contractante (cf théorème du point fixe).

e) On note Q^* l'opérateur dual de Q dans $\mathbb{L}^2(X, \pi)$.

On définit l'opérateur \tilde{Q}^* pour φ fonction borélienne bornée sur $X \times \mathbb{R}^d$ par :

$$\tilde{Q}^* \varphi(x, \alpha) = \int \varphi(y, f(x)\alpha) Q^*(x, dy)$$

L'hypothèse H3 équivaut à l'existence sur $X \times \mathbb{R}^d$ d'une mesure de probabilité

\tilde{Q}^* -invariante λ . En effet, une telle mesure λ se désintègre en $\int \varepsilon_x \otimes \lambda_x \pi(dx)$ car sa marginale sur X est Q^* -invariante et donc égale à π (d'après H1, la chaîne associée à Q est récurrente au sens de Harris, de probabilité invariante π ; l'opérateur dual de Q par rapport à π admet donc une version Q^* dont la chaîne associée $(X_n^*)_{n \geq 0}$ est aussi récurrente au sens de Harris ; Q^* admet donc π comme unique mesure invariante - cf [4] chapitre 2, théorèmes 2.10 et 2.16 -). On a alors :

$$\forall \varphi \in \mathbb{L}^2(X, \pi), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(\cdot), \lambda(A) \rangle_\pi &= \int \varphi(x) \lambda_x(A) \pi(dx) \\
&= \langle \lambda, \varphi \otimes 1_A \rangle = \langle \lambda, \tilde{Q}^*(\varphi \otimes 1_A) \rangle \\
&= \int \varphi(y) 1_A(f(x)a) Q^*(x, dy) \lambda_x(da) \pi(dx) \\
&= \langle Q^*\varphi(\cdot), \int 1_A(f(\cdot)a) \lambda(da) \rangle_\pi \\
&= \langle \varphi(\cdot), \int 1_A(f(y)a) \lambda_y(da) Q(\cdot, dy) \rangle_\pi \\
&= \langle \varphi(\cdot), \langle \int f(y) \lambda_y Q(\cdot, dy), A \rangle \rangle_\pi
\end{aligned}$$

d'où $\lambda_x = \int f(y) \lambda_y Q(x, dy)$ pour π -presque tout x .

Inversement, si la famille $(\lambda_x)_{x \in X}$ vérifie H3, la mesure λ sur $X \times \mathbb{R}^d$ définie par

$\lambda = \int \varepsilon_x \otimes \lambda_x \pi(dx)$ est \tilde{Q}^* -invariante.

II . PRESENTATION DES RESULTATS

Théorème 1

Sous les hypothèses H1, H2 et H3, il existe sur \mathbb{R}^d une variable aléatoire Z telle que :

i) pour \mathbb{P}_π -presque tout ω , la suite de mesures de probabilité $(M_n(\omega) \lambda_{X_n(\omega)})_{n \geq 0}$ converge étroitement vers la masse de Dirac $\varepsilon_{Z(\omega)}$.

ii) pour π -presque tout x , la loi de Z sous \mathbb{P}_x est $f(x) \lambda_x$.

De plus, la famille $(\lambda_x)_{x \in X}$ est unique modulo π à vérifier H3, i-e la mesure

$\lambda = \int \varepsilon_x \otimes \lambda_x \pi(dx)$ est l'unique mesure de probabilité \tilde{Q}^ -invariante sur $X \times \mathbb{R}^d$.*

Théorème 2

Sous les hypothèses H1, H2 et H3, avec de plus $\delta(x) \geq \delta > 0$ $\pi(dx)$ -ps, on a :

$$\forall a \in T_v \cdot u \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega) a = \tilde{Z}(\omega) \quad \mathbb{P}_x\text{-ps} \quad \forall x \in X$$

la convergence étant uniforme sur tout compact de $T_v \cdot u$, et \tilde{Z} désignant une variable aléatoire sur \mathbb{R}^d dont la loi sous \mathbb{P}_x , notée $f(x) \tilde{\lambda}_x$, vérifie

$$\forall x \in X \quad \tilde{\lambda}_x = \int f(y) \tilde{\lambda}_y Q(x, dy).$$

La mesure $\tilde{\lambda} = \int \varepsilon_x \otimes \tilde{\lambda}_x \pi(dx)$ est l'unique mesure de probabilité \tilde{Q}^ -invariante sur $X \times \mathbb{R}^d$.*

Théorème 3

Sous les hypothèses H1, H2 et H3, pour tout ouvert V de \mathbb{R}^d tel que $\int \lambda_x(V) \pi(dx) > 0$,

on a :

$$\forall a \in \mathbb{R}^d \quad \mathbb{P}_\pi \left[\sum_{n=0}^{+\infty} 1_V(f(X_{n-1}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*) a) = +\infty \right] = 1.$$

III. DEMONSTRATION DES THEOREMES

Nous aurons besoin du résultat préliminaire suivant :

Lemme 0

Tout sous-ensemble borné de $(L, \|\cdot\|_L)$ est relativement compact dans $(B, \|\cdot\|_B)$.

La preuve repose sur le théorème d'Ascoli (voir [3] appendice).

Vu que pour $s \in S$, on a $\|s\|_B \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{\|s(0)\| + \|x\|}{1 + \|x\|^2} \leq \|s(0)\| + 1$, toute famille F

de S telle que $\sup_{s \in F} \|s(0)\| < +\infty$ forme donc un sous-ensemble relativement

compact de S .

La démonstration du théorème 1 s'inspire de [1], [2] et [3]. Elle se fait via plusieurs lemmes.

Lemme 1

a) *Sous H3, pour \mathbb{P}_π -presque tout ω , la suite de mesures de probabilité*

$(M_n(\omega)\lambda_{X_n}(\omega))_{n \geq 0}$ converge étroitement vers une mesure de probabilité notée $\theta(\omega)$.

b) *Sous H1 et H3, pour \mathbb{P}_π -presque tout ω , il existe une suite croissante d'entiers*

$(\varphi(n, \omega))_{n \geq 0}$, telle que pour ν -presque tout (y, s) , on ait :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega)\lambda_{X_n(\omega)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_{\varphi(n, \omega)}(\omega) \circ s \lambda_y$$

Preuve :

On considère la fonction

$$F : (X, S) \rightarrow M_1(\mathbb{R}^d)$$

$$(x, s) \rightarrow s \lambda_x$$

Sous \mathbb{P}_π , la loi de X_n est π et donc, sous H3, on a

$$\lambda_{X_n} = \int f(y) \lambda_y Q(X_n, dy) \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

Pour $\Phi \in \mathcal{C}K(\mathbb{R}^d)$, espace des fonctions continues à support compact de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , la propriété de Markov donne alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\pi [\langle F(X_{n+1}, M_{n+1}), \Phi \rangle / \mathcal{F}_n] (\omega) &= \int \Phi(M_n(\omega) \circ f(y) u) \lambda_y(du) Q(X_n, dy) \\ &= \int \Phi(M_n(\omega) u) \lambda_{X_n(\omega)}(du) \\ &= \langle F(X_n(\omega), M_n(\omega)), \Phi \rangle \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la suite $(\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle)_{n \geq 0}$ forme une martingale bornée sous \mathbb{P}_π ; par conséquent, $\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle$ converge \mathbb{P}_π -ps.

$$\text{D'autre part, on a } \forall p \geq 1 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} J_{n,p}(\Phi) \leq 2 \|\Phi\|_\infty^2 p$$

$$\text{où } J_{n,p}(\Phi) = \mathbb{E}_\pi [(\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle - \langle F(X_{n+p}, M_{n+p}), \Phi \rangle)^2] .$$

$$\begin{aligned} \text{En effet } J_{n,p}(\Phi) &= \mathbb{E}_\pi [\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle^2] + \mathbb{E}_\pi [\langle F(X_{n+p}, M_{n+p}), \Phi \rangle^2] \\ &\quad - 2 \mathbb{E}_\pi [\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle \langle F(X_{n+p}, M_{n+p}), \Phi \rangle] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_\pi [\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle^2] + \mathbb{E}_\pi [\langle F(X_{n+p}, M_{n+p}), \Phi \rangle^2] \\
&\quad - 2 \mathbb{E}_\pi [\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle \mathbb{E}_\pi [\langle F(X_{n+p}, M_{n+p}), \Phi \rangle / \mathcal{F}_n]] \\
&= \mathbb{E}_\pi [\langle F(X_{n+p}, M_{n+p}), \Phi \rangle^2] - \mathbb{E}_\pi [\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle^2]
\end{aligned}$$

(en utilisant le fait que $(\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle)_{n \geq 0}$ est une martingale sous \mathbb{P}_π).

$J_{n,p}(\Phi)$ s'écrit donc $e_{n+p}(\Phi) - e_n(\Phi)$ avec $e_n(\Phi) = \mathbb{E}_\pi [\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle^2]$;

$$\text{par conséquent } \forall N > p \quad \sum_{n=0}^N J_n(\Phi) = \sum_{n=N+1}^{N+p} e_n(\Phi) - \sum_{n=0}^{p-1} e_n(\Phi) \leq 2p \|\Phi\|_\infty^2.$$

Par ailleurs $J_{n,p}(\Phi) = \mathbb{E}_\pi [(\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle - \langle F(X_{n+p}, M_{n+p}), \Phi \rangle)^2]$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_\pi [\int (\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle - \langle F(y_p, M_n \circ f(y_1) \circ \dots \circ f(y_p)), \Phi \rangle)^2 Q(X_n, dy_1) \dots Q(y_{p-1}, dy_p)] \\
&= \mathbb{E}_\pi [\int (\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle - \langle F(y_p, M_n \circ s), \Phi \rangle)^2 R^p((X_n, I), (dy, ds))]
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}_\pi [\sum_{n=0}^{+\infty} \int (\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle - \langle F(y, M_n \circ s), \Phi \rangle)^2 R^p((X_n, I), (dy, ds))] \leq 2p \|\Phi\|_\infty^2$$

En multipliant les 2 membres de cette inégalité par $(1-c)^{p-1}$, $c \in]0;1[$, et en sommant sur $p \geq 1$, on obtient :

$$\mathbb{E}_\pi [\sum_{n=0}^{+\infty} \int (\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle - \langle F(y, M_n \circ s), \Phi \rangle)^2 U_c((X_n, I), (dy, ds))] \leq 2 \|\Phi\|_\infty^2 \sum_{p=1}^{+\infty} p(1-c)^{p-1}$$

Sous H1, on a alors :

$$\mathbb{E}_\pi [\int \sum_{n=0}^{+\infty} (\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle - \langle F(y, M_n \circ s), \Phi \rangle)^2 \delta(X_n) \nu(dy, ds)] < +\infty$$

$$\text{d'où } \sum_{n=0}^{+\infty} \int (\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle - \langle F(y, M_n \circ s), \Phi \rangle)^2 \delta(X_n) \nu(dy, ds) < +\infty \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

Comme $\pi(\delta) > 0$, il existe $c_0 > 0$ tel que $\pi[\delta \geq c_0] > 0$; $(X_n)_{n \geq 0}$ étant récurrente au sens de Harris, on a alors

$$\forall x \in X \quad \mathbb{P}_x \left[\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{[\delta(X_n) \geq c_0]}(\omega) = +\infty \right] = 1$$

Donc, pour \mathbb{P}_π -presque tout ω , il existe une suite croissante d'entiers $(\varphi(n, \omega))_{n \geq 0}$ telle que $\forall n \geq 0 \quad \delta(X_{\varphi(n, \omega)}) \geq c_0$, ce qui entraîne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int (\langle F(X_{\varphi(n, \omega)}, M_{\varphi(n, \omega)}), \Phi \rangle - \langle F(y, M_{\varphi(n, \omega)} \circ s), \Phi \rangle)^2 \nu(dy, ds) < +\infty \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

Par conséquent, pour \mathbb{P}_π -presque tout ω et ν -presque tout (y, s)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\langle F(X_{\varphi(n, \omega)}, M_{\varphi(n, \omega)}), \Phi \rangle - \langle F(y, M_{\varphi(n, \omega)} \circ s), \Phi \rangle)^2 < +\infty$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle F(X_n(\omega), M_n(\omega)), \Phi \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle F(y, M_{\varphi(n, \omega)}(\omega) \circ s), \Phi \rangle \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

Sachant qu'une suite de mesures de probabilité $(\nu_n)_{n \geq 0}$ sur \mathbb{R}^d converge vaguement si et seulement si $(\nu_n(\Phi_i))_{n \geq 0}$ converge pour une suite dense de $\mathcal{E}K(\mathbb{R}^d)$, il existe donc, pour \mathbb{P}_π -presque tout ω , une mesure positive sur \mathbb{R}^d , $\theta(\omega)$, telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega) \lambda_{X_n(\omega)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_{\varphi(n, \omega)}(\omega) \circ s \lambda_y = \theta(\omega)$$

Pour $\Phi \in \mathcal{E}K(\mathbb{R}^d)$, $(\langle F(X_n, M_n), \Phi \rangle)_{n \geq 0}$ étant une martingale bornée sous \mathbb{P}_π , on a

$$\mathbb{E}_\pi [\langle \theta(\omega), \Phi \rangle] = \mathbb{E}_\pi [\langle F(X_0(\omega), M_0(\omega)), \Phi \rangle] = \int \varphi(f(x)u) \lambda_x(du) \pi(dx).$$

En prenant une suite croissante $(\Phi_n)_{n \geq 1}$ de fonctions de $\mathcal{E}K(\mathbb{R}^d)$, convergeant vers la fonction constante égale à 1, on obtient $\mathbb{E}_\pi [\langle \theta(\omega), 1 \rangle] = 1$ d'où par convexité

$\langle \theta(\omega), 1 \rangle = 1$ \mathbb{P}_π -ps ; $\theta(\omega)$ est donc une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d .

Lemme 2

Sous H1 et H3, pour \mathbb{P}_π -presque tout ω , on a $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|M_{\varphi(n,\omega)}(\omega) 0\| < +\infty$.

Preuve :

Soit $A = \{ \omega \in \Omega : \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|M_{\varphi(n,\omega)}(\omega) 0\| = +\infty \}$.

Il nous faut montrer que A est de \mathbb{P}_π mesure nulle. Raisonnons par l'absurde et

supposons $\mathbb{P}_\pi(A) > 0$. Il existe donc $\omega_0 \in A$ et $(y,s) \in X \times S$ tels que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{\varphi(n,\omega_0)}(\omega_0) \circ s \lambda_y = \theta(\omega_0)$, $\theta(\omega_0)$ étant une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d

(cf lemme 1).

Considérons une sous-suite d'indices $(n_k)_{k \geq 0}$ telle que la suite

$(\|M_{\varphi(n_k,\omega_0)}(\omega_0) 0\|)_{k \geq 0}$ tende vers $+\infty$. De l'inégalité $\|M_n(\omega) 0\| \leq \|M_n(\omega) x\| + \|x\|$

satisfaite pour tout $n \geq 0$ et pour tout point x de \mathbb{R}^d , il résulte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|M_{\varphi(n_k,\omega_0)}(\omega_0) x\| = +\infty$$

Pour toute fonction Φ de $\mathcal{C}K(\mathbb{R}^d)$, on a donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_y (\Phi \circ M_{\varphi(n_k,\omega_0)}(\omega_0) \circ s) = 0$

d'où $\langle \theta(\omega_0), \Phi \rangle = 0$, ce qui contredit le fait que $\theta(\omega_0)$ soit une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d . Par conséquent $\mathbb{P}_\pi(A) = 0$.

Conséquence immédiate des lemme 0 et 2, sous H1 et H3, pour \mathbb{P}_π -presque tout ω , la suite $(M_{\varphi(n,\omega)}(\omega))_{n \geq 0}$ possède des valeurs d'adhérence dans $(B, \|\cdot\|_B)$.

Démonstration du théorème 1:

D'après le lemme 1 b), il existe $\Omega_0 \subset \Omega$, $\mathbb{P}_\pi(\Omega_0) = 1$, $y_0 \in X$, et une suite $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$

dense dans le support de $\tau * \nu_{y_0}$ tels que, pour tout $\omega \in \Omega_0$, les suites de mesures de

probabilité $M_{\varphi(n,\omega)}(\omega) \circ \xi_i \lambda_{y_0}$ converge étroitement vers $\theta(\omega)$ pour tout entier i .

Soit ω un élément fixé de Ω_0 et $M(\omega)$ une valeur d'adhérence dans $(B, \|\cdot\|_B)$ de

$(M_{\varphi(n,\omega)}(\omega))_{n \geq 0}$. On a donc $\theta(\omega) = M(\omega) \circ \xi_i \lambda_{y_0} \quad \forall i \in \mathbb{N}$; en utilisant le théorème de

convergence dominée de Lebesgue, on peut passer à la fermeture en $\|\cdot\|_B$, d'où :

$$\forall \xi \in S_{\tau * \nu_{y_0}} \quad M(\omega) \circ \xi \lambda_{y_0} = \theta(\omega)$$

Soit $(\xi_k)_{k \geq 0}$ une suite contractante de S_τ de point de contraction u , et s un élément de $S_{\nu_{y_0}}$. La suite $(\xi_k \circ s)_{k \geq 0}$ forme alors une suite contractante de $S_{\tau * \nu_{y_0}}$, de point de

contraction u . Comme S_τ est un semi-groupe, on a :

$$\forall \xi \in S_\tau, \forall k \geq 0 \quad \xi \circ \xi_k \circ s \in S_{\tau * \nu_{y_0}}$$

et donc $\forall \xi \in S_\tau, \forall k \geq 0 \quad M(\omega) \circ \xi \circ \xi_k \circ s \lambda_{y_0} = \theta(\omega)$

ce qui donne, pour $\Phi \in \mathcal{C}K(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle M(\omega) \circ \xi \circ \xi_k \circ s \lambda_{y_0}, \Phi \rangle &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \lambda_{y_0}, \Phi \circ M(\omega) \circ \xi \circ \xi_k \circ s \rangle \\ &= \Phi(M(\omega) \circ \xi u) = \langle \theta(\omega), \Phi \rangle \quad \forall \xi \in S_\tau \text{ i-e } \forall \xi \in T_{y_0}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour \mathbb{P}_π -presque tout ω , $\theta(\omega)$ est une mesure de Dirac $\varepsilon_{Z(\omega)}$.

$\forall \Phi \in \mathcal{E}K(\mathbb{R}^d)$, la suite $(\langle M_n \lambda_{X_n}, \Phi \rangle)_{n \geq 0}$ forme une martingale bornée convergeant \mathbb{P}_π -ps vers $\Phi(Z(\omega))$; la variable aléatoire $\Phi(Z(\omega))$ ferme cette martingale, i-e :

$$\mathbb{E}_\pi [\Phi(Z) / \mathcal{F}_n] (\omega) = \langle M_n(\omega) \lambda_{X_n(\omega)}, \Phi \rangle \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

Donc, pour toute fonction Ψ borélienne bornée sur X :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\pi [\Phi(Z) \Psi(X_0)] &= \mathbb{E}_\pi [\Psi(X_0) E_\pi[\Phi(Z) / \mathcal{F}_0]] = \mathbb{E}_\pi [\Psi(X_0) \langle M_0 \lambda_{X_0} \rangle] \\ &= \int \Psi(x) \langle f(x) \lambda_x, \Phi \rangle \pi(dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Par ailleurs} \quad \mathbb{E}_\pi [\Phi(Z) \Psi(X_0)] &= \int \Phi(Z(\omega)) \Psi(X_0(\omega)) \mathbb{P}_\pi(d\omega) \\ &= \int \left(\int \Phi(Z(\omega)) \mathbb{P}_x(d\omega) \right) \Psi(x) \pi(dx) \end{aligned}$$

d'où, pour π -presque tout x $\int \Phi(Z(\omega)) \mathbb{P}_x(d\omega) = \langle f(x) \lambda_x, \Phi \rangle$; la loi de Z sous \mathbb{P}_x est donc $f(x) \lambda_x$.

Enfin, s'il existe sur $X \times \mathbb{R}^d$ deux mesures de probabilité \tilde{Q}^* -invariantes $\mu = \int \varepsilon_x \otimes \mu_x \pi(dx)$ et $\lambda = \int \varepsilon_x \otimes \lambda_x \pi(dx)$, on a, d'après ce qui précède :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega) \lambda_{X_n(\omega)} = \varepsilon_{Z_1(\omega)} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega) \mu_{X_n(\omega)} = \varepsilon_{Z_2(\omega)} \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps.}$$

Z_1 et Z_2 étant deux variables aléatoires sur \mathbb{R}^d .

La mesure de probabilité $\frac{\lambda + \mu}{2}$ étant aussi \tilde{Q}^* -invariante, il existe sur \mathbb{R}^d une troisième variable aléatoire Z_3 , telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega) \frac{\lambda_{X_n(\omega)} + \mu_{X_n(\omega)}}{2} = \varepsilon_{Z_3(\omega)} \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{1}{2}(\varepsilon_{Z_1} + \varepsilon_{Z_2}) = \varepsilon_{Z_3} \quad \text{soit} \quad Z_1 = Z_2 = Z_3 \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps.}$$

La loi de Z_1 sous \mathbb{P}_x étant $f(x) \lambda_x$ pour π -presque tout x , λ est l'unique mesure de probabilité \tilde{Q}^* -invariante sur $X \times \mathbb{R}^d$.

Démonstration du théorème 2 :

Sous H3, on a $\forall p \geq 1 \lambda \bar{Q}^{*P} = \lambda$, ce qui donne :

$$\forall p \geq 1 \lambda_x = \int f(y_1) \circ \dots \circ f(y_p) \lambda_{y_p} Q(x, dy_1) \dots Q(y_{p-1}, dy_p) \pi(dx)\text{-ps}$$

$$\text{i-e } \lambda_x = \int s \lambda_y R^p((x, I), (dy, ds)) \pi(dx)\text{-ps}$$

$$\lambda_x = c \sum_{p=1}^{+\infty} (1-c)^{p-1} \lambda_x = c \int s \lambda_y U_c((x, I), (dy, ds)) \pi(dx)\text{-ps}$$

$$\geq c \delta(x) \int s \lambda_y \tau * \nu_y(ds) \bar{\nu}(dy) \pi(dx)\text{-ps d'après H1}$$

$$\geq c \delta(x) \rho \pi(dx)\text{-ps avec } \rho = \int s \lambda_y \tau * \nu_y(ds) \bar{\nu}(dy)$$

Le i) du théorème 1 donne, pour Φ fonction positive de $\mathcal{E}K(\mathbb{R}^d)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{X_n(\omega)}(\Phi \circ M_n(\omega)) = \Phi(Z(\omega)) \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

En particulier, si $\Phi(Z(\omega)) = 0$ on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_{X_n(\omega)}(\Phi \circ M_n(\omega)) = 0 \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(X_n(\omega)) \rho(\Phi \circ M_n(\omega)) = 0 \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

Comme $\delta(x) \geq \delta > 0 \pi(dx)\text{-ps}$, cette dernière égalité équivaut à :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(\Phi \circ M_n(\omega)) = 0 \mathbb{P}_\pi\text{-ps (1)}$$

En reprenant alors la preuve du lemme 2, on montre que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|M_n(\omega)\| < +\infty \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

si bien que, pour \mathbb{P}_π -presque tout ω , la famille $(M_n(\omega))_{n \geq 0}$ est relativement compacte dans $(B, \| \cdot \|_B)$ (cf lemme 0).

D'après (1), toute valeur d'adhérence $M(\omega)$ de $(M_n(\omega))_{n \geq 0}$ dans $(B, \| \cdot \|_B)$ envoie $a \in S_\rho$ sur $Z(\omega)$ i-e :

$$\forall a \in S_\rho \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega) a = Z(\omega).$$

Pour déterminer S_ρ , il suffit de remarquer que $\rho(dx) \geq \int s \rho(dx) \tau * \nu'(ds)$, si bien que pour Φ fonction positive de $\mathcal{E}K(\mathbb{R}^d)$:

$$\langle \rho, \Phi \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle s \rho, \Phi \rangle = 0 \tau(ds)\text{-ps}$$

$$\Leftrightarrow \langle s_i \rho, \Phi \rangle = 0 \quad \forall i \geq 1, (s_i)_{i \geq 1} \text{ étant une suite dense de } S_\rho.$$

Via le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on passe à la fermeture en $\|\cdot\|_B$, on utilise une suite contractante de S_τ de point de contraction u , et on obtient :

$$\langle \rho, \Phi \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall \xi \in S_\tau \quad \Phi(\xi u) = 0 \text{ c'est-à-dire } S_\rho = T_{v'} \cdot u.$$

Il existe donc $X' \subset X$, $\pi(X') = 1$ tel que :

$$\forall x \in X', \forall a \in T_{v'} \cdot u \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(\omega) a = Z(\omega) \quad \mathbb{P}_x\text{-ps}$$

Introduisons le temps d'arrêt T par rapport à la filtration canonique :

$$T = \inf \{ n \geq 1 : X_n \in X' \}$$

La chaîne $(X_n)_{n \geq 0}$ étant récurrente au sens de Harris, on a

$$\forall x \in X \quad \mathbb{P}_x [T < +\infty] = 1.$$

On pose alors $M_T = f(X_0) \circ \dots \circ f(X_{T-1})$.

Nous avons le

Lemme 3

$$\forall x \in X, \forall a \in T_{v'} \cdot u \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n a = M_T Z \circ \theta^T \quad \mathbb{P}_x\text{-ps}$$

Preuve :

On a $\forall x \in X', \forall a \in T_{v'} \cdot u, \forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}_x [\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|M_n a - Z\| < \varepsilon] = 1$$

et il nous faut montrer $\forall x \in X, \forall a \in T_{v'} \cdot u, \forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}_x [\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|M_n a - M_T Z \circ \theta^T\| < \varepsilon] = 1$$

soit $\mathbb{E}_x [\liminf_{n \rightarrow +\infty} \Phi_\varepsilon(M_n a - M_T Z \circ \theta^T)] = 1$ avec $\Phi_\varepsilon = 1_{[-\varepsilon; +\varepsilon]}$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x [\liminf_{n \rightarrow +\infty} \Phi_\varepsilon(M_n a - M_T Z \circ \theta^T)] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x [1_{[T=k]} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \Phi_\varepsilon(M_n a - M_T Z \circ \theta^T)] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x [1_{[T=k]} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \Phi_\varepsilon(M_{k-1} \circ M_n^k a - M_{k-1} Z \circ \theta^k)] \end{aligned}$$

$$\text{où } M_n^k = f(X_k) \circ f(X_{k+1}) \circ \dots \circ f(X_n)$$

Comme $\Phi_\varepsilon(M_n^k a - Z \circ \theta^k) \leq \Phi_\varepsilon(M_{k-1} \circ M_n^k a - M_{k-1} Z \circ \theta^k)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x [\liminf_{n \rightarrow +\infty} \Phi_\varepsilon(M_n a - M_T Z \circ \theta^T)] &\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x [1_{[T=k]} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \Phi_\varepsilon(M_n^k a - Z \circ \theta^k)] \\ &\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x [1_{[T=k]} \mathbb{E} [\liminf_{n \rightarrow +\infty} \Phi_\varepsilon(M_{n-k} \circ \theta^k a - Z \circ \theta^k) / \mathcal{F}_k]] \\ &\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x [1_{[T=k]} \mathbb{E}_{X_k} [\liminf_{n \rightarrow +\infty} \Phi_\varepsilon(M_n a - Z)]] \\ &\geq \mathbb{E}_x [\mathbb{E}_{X_T} [\liminf_{n \rightarrow +\infty} \Phi_\varepsilon(M_n a - Z)]] \end{aligned}$$

Le lemme s'en déduit alors immédiatement, vu que $\forall x \in X \quad \mathbb{P}_x [X_T \in X] = 1$.

Par conséquent $\forall x \in X, \forall a \in T_v \cdot u$, la suite aléatoire $(M_n a)_{n \geq 0}$ converge \mathbb{P}_x -ps vers une variable \tilde{Z} , dont on note la loi sous \mathbb{P}_x $f(x) \tilde{\lambda}_x$ ($\tilde{\lambda}_x$ est donc la loi sous \mathbb{P}_x de la variable aléatoire $Z_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(X_1) \circ \dots \circ f(X_n) a$).

Si Φ désigne une fonction de $\mathcal{C}K(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\forall x \in X \quad \langle \tilde{\lambda}_x, \Phi \rangle = \mathbb{E}_x [\Phi(Z_1)] = \mathbb{E}_x [\Phi(f(X_1) Z_1 \circ \theta)]$$

$$= \mathbb{E}_x [\mathbb{E}[\Phi(f(X_0 \circ \theta) Z_1 \circ \theta) / \mathcal{F}_1]]$$

$$= \mathbb{E}_x [\mathbb{E}_{X_1}[\Phi(f(X_0)Z_1)]] \text{ d'après la propriété de Markov}$$

$$= \mathbb{E}_x [\langle f(X_1) \tilde{\lambda}_{X_1}, \Phi \rangle] = \int \langle f(y) \tilde{\lambda}_y, \Phi \rangle Q(x, dy)$$

soit $\forall x \in X \quad \tilde{\lambda}_x = \int f(y) \tilde{\lambda}_y Q(x, dy)$.

Démonstration du théorème 3 :

Notons $((X \times \mathbb{R}^d)^{\otimes \mathbb{N}}, (\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))^{\otimes \mathbb{N}}, (X_n^*, Y_n^*)_{n \geq 0}, (\mathbb{P}_{(x,a)})_{(x,a) \in X \times \mathbb{R}^d})$ la chaîne canonique associée à \tilde{Q}^* ; pour tout $(x,a) \in X \times \mathbb{R}^d$, on a :

$$Y_n^* = f(X_{n-1}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*) \text{ a } \mathbb{P}_{(x,a)}\text{-ps.}$$

λ étant l'unique mesure de probabilité \tilde{Q}^* -invariante, pour toute fonction φ borélienne bornée sur $X \times \mathbb{R}^d$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(X_k^*, Y_k^*) = \langle \lambda, \varphi \rangle \quad \mathbb{P}_\lambda\text{-ps.}$$

Soit $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille croissante de compacts de X tels que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = X$, et B_i la

boule de \mathbb{R}^d , de centre O et de rayon i . Il existe donc Ω_0 , $\mathbb{P}_\lambda(\Omega_0) = 1$, tel que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega_0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{K_i}(X_k^*) 1_{B_i}(Y_k^*) = \lambda(K_i \times B_i)$$

Pour $a \in \mathbb{R}^d$ et $\omega \in \Omega_0$, on considère la mesure de probabilité sur $X \times \mathbb{R}^d$

$$\lambda_{n,\omega,a} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{X_k^*(\omega)} \otimes \delta_{f(X_{k-1}^*(\omega)) \circ \dots \circ f(X_0^*(\omega)) a} ; \text{ soit } \lambda_{\omega,a} \text{ une valeur d'adhérence}$$

de la suite $(\lambda_{n,\omega,a})_{n \geq 1}$ pour la topologie de la convergence vague.

Comme pour tout entier n et i

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{K_i}(X_k^*) 1_{B_{i+||a-Y_0^*||}}(f(X_{k-1}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*) a) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{K_i}(X_k^*) 1_{B_i}(Y_{k-1}^*)$$

on a en particulier pour $\omega \in \Omega_0$ $\lambda_{\omega,a}(K_i \times B_{i+||a-Y_0^*||}) \geq \lambda(K_i \times B_i)$; on en déduit alors, i étant quelconque, que $\lambda_{\omega,a}$ est une mesure de probabilité sur $X \times \mathbb{R}^d$.

Soit φ une fonction continue à support compact sur $X \times \mathbb{R}^d$; la suite

$$(\varphi(X_k^*, f(X_{k-1}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*) a) - \tilde{Q}^* \varphi(X_{k-1}^*, f(X_{k-2}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*) a))_{k \geq 1}$$

forme un accroissement de martingale borné par $2\|\varphi\|_\infty$. Par conséquent, $\forall x \in X$ et $\forall a \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(X_k^*, f(X_{k-1}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*) a) - \tilde{Q}^* \varphi(X_{k-1}^*, f(X_{k-2}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*) a) = 0 \quad \mathbb{P}_x\text{-ps}$$

$\mathfrak{K}(X \times \mathbb{R}^d)$ étant séparable, il existe Ω_1 , $\mathbb{P}_\pi(\Omega_1) = 1$, tel que

$$\forall \omega \in \Omega_1, \forall a \in \mathbb{R}^d$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(X_k^*, f(X_{k-1}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*) a) - \tilde{Q}^* \varphi(X_{k-1}^*, f(X_{k-2}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*) a) = 0$$

$$\forall \varphi \in \mathfrak{K}(X \times \mathbb{R}^d)$$

On a donc $\lambda_{\omega,a}(\varphi) = \lambda_{\omega,a}(\tilde{Q}^* \varphi) \quad \forall \omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$ et pour toute fonction φ de

$\mathfrak{K}(X \times \mathbb{R}^d)$, i-e $\forall \omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$ $\tilde{\lambda}_{\omega,a}$ est \tilde{Q}^* -invariante.

λ étant l'unique mesure de probabilité \tilde{Q}^* -invariante sur $X \times \mathbb{R}^d$, on a donc prouvé

l'existence de $\Omega' \subset \Omega$, $\mathbb{P}_\pi(\Omega') = 1$, tel que $\forall \omega \in \Omega'$ et $\forall a \in \mathbb{R}^d$ la suite

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{X_k^*(\omega)} \otimes \delta_{f(X_{k-1}^*(\omega)) \circ \dots \circ f(X_0^*(\omega)) a} \right)_{n \geq 1}$$

converge étroitement vers λ .

Pour tout ouvert V de \mathbb{R}^d , il existe une suite croissante $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de fonctions de

$\in K(X \times \mathbb{R}^d)$, convergeant vers $1_X \otimes 1_V$. Pour tout point a de \mathbb{R}^d , et pour tout $m \geq 1$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_m (f(X_{k-1}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*) a) = \langle \lambda, \varphi_m \rangle \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

$$\text{Comme } \forall m \geq 1 \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_m (X_k^* f(X_{k-1}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*) a) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_V (X_{k-1}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*) a$$

$$\text{on en déduit } \forall m \geq 1 \quad \langle \lambda, \varphi_m \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_V (f(X_{k-1}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*) a) \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps.}$$

Le théorème de convergence monotone donne alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}^d \quad \int \lambda_x(V) \pi(dx) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_V (f(X_{k-1}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*) a) \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

d'où le résultat, lorsque $\int \lambda_x(V) \pi(dx) > 0$.

VI. CAS PARTICULIER

Nous supposons dans ce paragraphe que $d \geq 2$ et que pour tout $x \in X$, les contractions $f(x)$ sont de la forme $f_1(x) \otimes f_2(x) \otimes \dots \otimes f_d(x)$ i-e :

$$\forall a = (a_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d, \forall x \in X \quad f(x) a = (f_1(x) a_1, f_2(x) a_2, \dots, f_d(x) a_d)$$

où $f_i(x)$, $1 \leq i \leq d$, est une contraction sur \mathbb{R} .

L'hypothèse H2 peut être alors affaiblie en :

H'2. Pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, d\}$, il existe $u_k \in \mathbb{R}$ et $(\xi_n^{(k)})_{n \geq 0}$ une suite de T_V' ,

$$\xi_n^{(k)} = \xi_{n,1}^{(k)} \otimes \xi_{n,2}^{(k)} \otimes \dots \otimes \xi_{n,d}^{(k)}, \text{ tels que :}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_{n,k}^{(k)} a = u_k$$

On dit que $(\xi_n^{(k)})_{n \geq 0}$ est une suite k -contractante.

Proposition

Sous H1, H'2 et H3, les affirmations des théorèmes 1 et 3 sont vérifiées .

Preuve :

Il suffit de prouver le *i*) du théorème 1, les autres assertions en découlant.

En reprenant la démonstration de ce théorème, on établit l'existence de $\Omega_0 \subset \Omega$, $\mathbb{P}_\pi(\Omega_0) = 1$ et $y_0 \in X$ tels que

$$\forall \xi \in S_{\tau * v_{y_0}} \quad M(\omega) \circ \xi \lambda_{y_0} = \theta(\omega)$$

$M(\omega)$ étant une valeur d'adhérence dans B de $(M_{\varphi(n,\omega)}(\omega))$.

Vu que l'on a $M_{\varphi(n,\omega)}(\omega) = M_{\varphi(n,\omega),1}(\omega) \otimes \dots \otimes M_{\varphi(n,\omega),d}(\omega)$, et $\forall k \in \{1, \dots, d\}$

$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|M_{\varphi(n,\omega),k}(\omega)\| < +\infty$, on peut, en vertu du lemme 0, prendre $M(\omega)$ de la

forme $M(\omega) = M(\omega)_1 \otimes M(\omega)_2 \otimes \dots \otimes M(\omega)_d$.

Si $(\xi_n^{(k)})_{n \geq 0}$ est une suite k -contractante de T_v , avec $\forall a \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_{n,k}^{(k)} a = u_k$,

alors, pour tout élément $s = s_1 \otimes s_2 \otimes \dots \otimes s_d$ de S_{v,y_0} , la suite $(\xi_n^{(k)} \circ s)_{n \geq 0}$ de $S_{\tau * v, y_0}$

est k -contractante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_{n,k}^{(k)} \circ s_k a = u_k$.

On a alors pour toute fonction Φ de $\mathcal{E}K(\mathbb{R}^d)$

$$\langle M(\omega) \circ \xi_n^{(1)} \circ s_{\lambda_{y_0}}, \Phi \otimes 1_{\mathbb{R}^d} \otimes \dots \otimes 1_{\mathbb{R}^d} \rangle = \langle \theta(\omega), \Phi \otimes 1_{\mathbb{R}^d} \otimes \dots \otimes 1_{\mathbb{R}^d} \rangle = \langle \theta_1(\omega), \Phi \rangle$$

(avec $\theta_1(\omega)$ marginale de $\theta(\omega)$ sur le premier axe de \mathbb{R}^d)

si bien qu'en passant à la limite en n , on obtient $\langle \theta_1(\omega), \Phi \rangle = \Phi(M(\omega)_1 u_1)$.

$\theta_1(\omega)$ est donc une masse de Dirac sur \mathbb{R} . De la même façon on montre que les autres marginales de $\theta(\omega)$ sont des masses de Dirac ; on en déduit alors l'existence sur \mathbb{R}^d d'une variable aléatoire $Z(\omega)$ telle que $\theta(\omega) = \varepsilon_{Z(\omega)}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ph. CHASSAING "Convergence d'un produit semi-markovien de matrices et simplicité du spectre de la limite", preprint.
- [2] Y. GUIVARC'H - A. RAUGI "Frontière de Fustenberg, propriétés de contractions et théorèmes de convergence"
Zeit. für. Wahr. n°69, p.187-242 (1985).
- [3] J.P. LEGUESDRON "Marche aléatoire sur le semi-groupe des contractions de \mathbb{R}^d . Cas de la marche aléatoire sur \mathbb{R}^+ avec chocs élastiques en zéro"
Thèse de 3^{ème} cycle, Université de Rennes I (1987).
(A paraître aux annales de l'I.H.P)
- [4] D. REVUZ "Markov chains"
North-Holland/Mathematical Library