François Coquet

# Processus de Hellinger des processus ponctuels

*Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, 1988, fascicule 1
« Probabilités », , p. 49-64
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1988___1_49_0>

# PROCESSUS DE HELLINGER DES PROCESSUS PONCTUELS

François COQUET
IRMAR
UNIVERSITE DE RENNES I
CAMPUS DE BEAULIEU
35042 RENNES CEDEX

SUMMARY.

We give a caracterisation of the likelihood process for a filtered experiment in terms of its Hellinger processes, along with a limit theorem, when the statistical model is generated by a quasi-left continuous single point process.

Two counter-examples show that theses results cannot hold when the basic process is a multivariate or not quasi-left continuous point process.

RESUME.

On donne une caractérisation du processus de vraisemblance d'une expérience filtrée à partir de ses processus de Hellinger, ainsi qu'un théorème limite, pour un modèle engendré par un processus ponctuel simple et quasi-continu à gauche.

Deux contre-exemples montrent que ces résultats ne peuvent se généraliser quand le processus de base est multivarié ou non quasi-continu à gauche.

Codes A.M.S.: 60F17, 62M

## INTRODUCTION.

La convergence des processus de Hellinger associés à une suite d'expériences statistiques filtrées entraîne-t-elle la convergence de cette suite d'expériences? A cette question, il existe une réponse positive dans le cas où le modèle statistique limite est donné par un processus à accroissements indépendants (alors il existe une version déterministe des processus de Hellinger associées à l'expérience limite). C'est ce qui est prouvé dans [2]. Il était donc permis d'espérer un résultat général, où du moins s'appliquant à d'autres situations simples, donnant des rapports entre convergence d'expériences et convergence de processus de Hellinger.

En étudiant des modèles statisiques où le processus de base est un processus ponctuel simple, nous montrons qu'il n'en est hélas rien. S'il est possible, dans le cas où ce processus de base est un processus ponctuel simple et quasi-continu à gauche de caractériser le processus de vraisemblance d'une expérience à partir de ses processus de Hellinger et d'une probabilité de base supposée connue a priori, et d'en déduire dans un cadre restreint un théorème limite (c'est l'objet du paragraphe I), le paragraphe II étudie le cas non-continu à gauche et montre que, dans une situation particulière, une telle caractérisation est impossible; un contre-exemple similaire est exhibé dans le cas multivarié à deux marques, même quasi-continu à gauche.

## 0. CADRE.

Soit $\Omega$ l'espace canonique des processus ponctuels (éventuellement explosifs). On munit $\Omega$ de son processus canonique N et de la filtration canonique $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, et on note $\mathcal{F} = \cup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$.

Par ailleurs, pour $\alpha\in]0,1[$ on désignera dans toute la suite par $\varphi_\alpha$ l'application $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ qui au couple (x,y) associe le réel $\alpha x + (1-\alpha)y - x^\alpha y^{1-\alpha}$.

On s'intéresse aux expériences filtrées de la forme $\mathcal{E}=(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P,P')$, où P et P' désignent deux mesures de probabilité sur $\Omega$, et aux processus de Hellinger de telles expériences.

Si Q est une probabilité sur $\Omega$ dominant P et P' (on prendra généralement Q=(1/2)(P+P'), on note:

$$z_t = \frac{dP_t}{dQ_t}\,; \qquad z'_t = \frac{dP'_t}{dQ_t}$$

$$Z_t = \frac{z'_t}{z_t}$$ (qui ne dépend alors pas (P-p.s.) du choix de Q dominant P et P')

$$R_n = \inf\{\, t, z_t < \frac{1}{n}\};\qquad R'_n = \inf\{t, z'_t < \frac{1}{n}\,\};$$

$$\Gamma_1 = \cup_n [0, R_n]$$

$$\Gamma_2 = \cup_n [0, R'_n]$$

$$\Gamma = (\cup_n [0, R_n]) \cap (\cup_n [0, R'_n])$$

On rappelle qu'alors le processus de Hellinger d'ordre $\alpha$ de l'expérience $\mathcal{E}$ est défini à un ensemble Q-évanescent près sur $\Gamma$ par le fait que le processus

$Y(\alpha) + Y(\alpha)_- \,.\, h(\alpha)$ (avec $Y(\alpha) = z^\alpha z'^{1-\alpha}$) soit une Q-martingale.

Le même processus de Hellinger est également caractérisé à un ensemble P-évanescent près sur $\Gamma_1$ par le fait que le processus

$Z^\alpha + Z^\alpha_-.h(\alpha)$ soit une P-martingale

On appellera dans la suite $\Gamma_1$ l'intervalle de détermination des processus de Hellinger de l'expérience $\mathcal{E}$.

Dans tout ce qui suit, on supposera que toutes les probabilités considérées coïncident à l'instant t=0.

## I.CAS QUASI CONTINU A GAUCHE.

### 1. Notations et rappels.

On s'intéresse dans ce paragraphe aux expériences pour lesquelles N est quasi-continu à gauche sous P et P'. Soit une telle expérience filtrée $\mathcal{E}$ sur $\Omega$. On note A (resp. A') le compensateur de N sous P (resp. P'). A et A' sont alors des processus croissants et continus. Soit $\overline{A}$ un processus croissant continu dominant A et A' (par exemple $\overline{A} = A + A'$). On appelle g et g' les densités respectives de A et A' par rapport à $\overline{A}$.

Avec ces notations, on trouve dans [1] (théorème IV.4.2) que, pour tout $\alpha \in ]0,1[$, une version du processus de Hellinger d'ordre $\alpha$ vérifie:

(1): $h(\alpha) = \varphi_\alpha(g,g').\overline{A}$

On rappelle aussi que le processus de rapport des vraisemblances de $\mathcal{E}$ est l'exponentielle de Doléans d'une surmartingale M qui s'écrit:

$$(2): M_t = \int_0^t \left(\frac{g'_s}{g_s} - 1\right)(dN_s - g_s d\overline{A}_s)$$

Remarques: a) Les processus $h(\alpha)$ vérifiant (1) sont continus.

b) S'il existe $\alpha \in ]0,1[$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

(3) $$\varphi_\alpha(x,y) = 0,$$

alors x=y et la relation(3) est vérifiée pour tout $\alpha \in ]0,1[$.

(c'est une conséquence immédiate de la concavité du Log).

c) Une conséquence du b) est que toutes les versions du processus de Hellinger données par (1) (quand $\alpha$ varie) sont équivalentes entre elles.

2.L'expérience minimale.

On considère une famille $(h(\alpha)_{\alpha\in]0,1[})$ de processus croissants continus nuls en 0.

Lemme 1: 1. S'il existe une expérience $\mathscr{E} = (\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, P, P')$ admettant les $h(\alpha)$ comme processus de Hellinger, alors il existe un couple de processus (g,g') tel que la relation:

(4): $\forall\alpha\in]0,1[,\ h(\alpha) = \varphi_\alpha(g,g').h(1/2)$

soit vérifiée d(P + P')-p.s. sur $\Gamma$.

2.Réciproquement, si la famille $(h(\alpha))_{\alpha\in]0,1[}$ vérifie partout la relation (4) pour un certain couple (g,g'), alors pour tout $\alpha$ $h(\alpha)$ est une version du processus de Hellinger associé à une expérience statistique.

démonstration: 1. Soient A le compensateur de N sous P, A' le compensateur de N sous P', et ^A un processus croissant prévisible nul en 0 et orthogonal à h(1/2) tel que $\overline{A}$=h(1/2)+^A domine A et A'.

Considérons alors les processus définis $d\overline{A}$ - p.s. par

$g = dA/d\overline{A}$ et $g' = dA/d\overline{A}$ .

Les processus de Hellinger étant définis à une (P+P')-indistingabilité près sur $\Gamma$, on a alors:

$\forall\ \alpha\in]0,1[,\ h(\alpha) = \varphi_\alpha(g,g').h(1/2) + \varphi_\alpha(g,g').\hat{}A$ d(P+P')-p.s. sur $\Gamma$.

Or la remarque c) du 1. ci-dessus implique que touts les $h(\alpha)$ sont orthogonaux à ^A (de même que h(1/2)). Par suite, $\varphi_\alpha(g,g') = 0$ identiquement pour tout $\alpha$, et on a la propriété annoncée.

2. Supposons (4) vérifiée, et posons:

$A^\circ = g.h(1/2)$

$A^{\circ\prime} = g'.h(1/2)$

(définis dh(1/2) -p.s.)

On définit ainsi deux processus croissants, continus et nuls en 0. Il existe donc deux probabilités (et deux seulement) $P^\circ$ et $P^{\circ\prime}$ telles que $A^\circ$ soit le compensateur de N sous $P^\circ$ et $A^{\circ\prime}$ le compensateur de N sous $P^{\circ\prime}$. Considérons alors l'expérience $\mathscr{E}^\circ = (\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, P^\circ, P^{\circ\prime})$. Les relations (1) et (4) impliquent alors immédiatement que, pour tout $\alpha$, $h(\alpha)$ est une version du processus de Hellinger associé à l'expérience $\mathscr{E}^\circ$, d'où le lemme.

Remarque: Il peut bien sûr exister plusieurs expériences binaires sur $\Omega$ admettant les $h(\alpha)$ comme processus de Hellinger, mais, quand on s'est donné les processus $h(\alpha)$, $g$ et $g'$ vérifiant (4), $\mathcal{E}^\circ$ est la seule pour laquelle $g.h(1/2)$ et $g'.h(1/2)$ soient les compensateurs respectifs de N sous les probabilités étudiées.

Définition: On appelle expérience minimale pour les $h(\alpha)$ l'expérience $\mathcal{E}^\circ$ construite ci-dessus, et on notera $Z^\circ$ son rapport de vraisemblance, défini par:

$$Z^\circ = \frac{dP^{\circ\prime}}{dP^\circ}$$

Théorème 1: Soient $h(\alpha)$ ($\alpha \in ]0,1[$), $g$, $g'$ des processus vérifiant (4), et $\mathcal{E}^\circ=(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P^\circ,P^{\circ\prime})$ l'expérience minimale pour les $h(\alpha)$. Si $\mathcal{E}=(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P,P')$ est une autre expérience admettant les $h(\alpha)$ comme processus de Hellinger sur son intervalle de détermination $\Gamma$, et si de plus $P<<P^\circ$, alors les restrictions à $\Gamma$ de P et $P^\circ$ coïncident.

démonstration: Soient:

$A^\circ$ le compensateur de N sous $P^\circ$,

$A^{\circ\prime}$ le compensateur de N sous $P^{\circ\prime}$,

A le compensateur de N sous P,

A' le compensateur de N sous P'.

On a $A^\circ = g.h(1/2)$ et $A^{\circ\prime} = g'.h(1/2)$. De plus, comme $P<<P^\circ$, A est absolument continu par rapport à $A^\circ$, et donc par rapport à $h(1/2)$.

Ecrivons alors $A = f.h(1/2)$ (f est donc définie $dh(1/2)$-p.s.), et considérons (comme dans la démonstration du lemme) un processus croissant continu $\hat{A}$ orthogonal à $h(1/2)$ et tel que $\bar{A}=\hat{A}+h(1/2)$ domine A et A'.

On peut alors écrire:

$$\begin{cases} A = f\,.\,(h(1/2) + \hat{A}) \\ A' = f'\,.\,(h(1/2) + \hat{A}) \end{cases}$$

(en prenant une version de f nulle sur le support de $\hat{A}$),

et, pour $\alpha \in ]0,1[$, on a P-p.s. sur $\Gamma$, d'après (1):

(5): $h(\alpha) = \varphi_\alpha(f,f')\,.\,h(1/2) + \varphi_\alpha(f,f')\,.\,\hat{A}$

L'équivalence des $h(\alpha)$ entre eux implique alors:

(6): $\forall\alpha\in]0,1[,\ \varphi_\alpha(f,f').\hat{A} = 0$ P-p.s.

et (5) devient:

(7): $h(\alpha) = \varphi_\alpha(f,f')\,.\,h(1/2)$

En comparant avec (3), il vient alors:

(8): $f = g$ $dP\times dh(1/2)$-p.s. sur $\Gamma$

et

(9): $f' = g'$ $dP\times dh(1/2)$-p.s. sur$\Gamma$

(en effet, ces égalités s'obtiennent immédiatement en égalant les parties affines et non affines des $\varphi_\alpha$ quand $f\neq f'$; mais $f=f'$ implique $\varphi_\alpha(f,f')=0$, ce qui est $dh(1/2)$-p.s. exclu d'après l'équivalence des $h(\alpha)$)

d'où:

$A=A^\circ$ P-p.s. et $P=P^\circ$ sur $\Gamma$.

3. Caractérisation des rapports de vraisemblances.

Dans le cas des processus ponctuels, les processus de Hellinger ne suffisent pas à caractériser une expérience statistique, c'est-à-dire qu'ils ne déterminent pas les rapports de vraisemblance. Nous allons montrer une propriété plus faible dans le cadre quasi-continu à gauche (et nous verrons un contre-exemple quand on a des sauts prévisibles).

Théorème 2: Soient $h(\alpha)$ ($\alpha \in ]0,1[$), g, g' des processus vérifiant (4), et P, P', P'' trois probabilités sur $\Omega$. On suppose que les expériences $\mathcal{E}'=(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P,P')$ et $\mathcal{E}''=(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P,P'')$ admettent les $h(\alpha)$ comme processus de Hellinger. Si $\Gamma'$ et $\Gamma''$ désignent les intervalles de détermination respectifs des processus de Hellinger de $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$, alors $\Gamma' = \Gamma''$ P-p.s. et $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ ont le même rapport de vraisemblance par rapport à P.

démonstration: On va en fait s'intéresser uniquement à $\mathcal{E}'$ et montrer que son rapport de vraisemblance ne dépend de P' que dans la définition de $\Gamma'$.

Comme dans la démonstration de théorème 1, appelons:

A le compensateur de N sous P;

A' le compensateur de N sous P';

$\hat{}A$ un processus croissant continu orthogonal à $h(1/2)$ et tel que $\overline{A} = h(1/2) + \hat{}A$ domine A et A';

et écrivons:

$$\begin{cases} A = f\,.\overline{A} \\ A' = f'\,.\overline{A} \end{cases}$$

On retrouve alors successivement les égalités (5) (6), (7),(8) et (9) du théorème 1.

Par ailleurs, $\hat{}A$, orthogonal à $h(1/2)$, ne charge que l'ensemble $\{f=f'\}$

(c'est-à-dire $\varphi_\alpha(f,f')=0$) et on a donc $f.\hat{}A = f'.\hat{}A$ P-p.s.; appelons $\bar{A}$ ce processus: on arrive ainsi aux formules:

(10): $A=g.h(1/2) + \bar{A}$

(11): $A' = g'.h(1/2) + \bar{A}$,

le tout P-p.s. sur $\Gamma'$.

Soit J le support de $dh(1/2)$. La formule (2) donne alors Z' sur $\Gamma'$ comme l'exponentielle de Doléans de M, où:

$$M_t = \int_0^t \left(\frac{g'_s}{g_s} - 1\right)(dN_s - g_s dh(1/2)_s)1_J$$

Il est alors clair que M, donc Z', ne dépend de P' que par le biais de J (et aussi, bien sûr, de h(1/2)!). On en déduit donc l'égalité de Z' et Z'' sur $\Gamma' \cap \Gamma''$.

Il reste à voir que $\Gamma' = \Gamma''$ P-p.s.

Pour cela, soient $T' = \inf\{t;\ Z'_t = 0\}$ et $T'' = \inf\{t;\ Z''_t = 0\}$. Plaçons-nous sur l'ensemble $\{\omega\in\Omega;\ T'(\omega)\leq T''(\omega)\}$, c'est-à-dire $\{\omega\in\Omega,\ \Gamma'(\omega)\subset\Gamma''(\omega)\}$. Deux situations sont alors possibles:

Soit $\Delta Z'_{T'}(\omega) \neq 0$ et alors $T'(\omega)\in\Gamma'$, donc $T'(\omega)\in\Gamma'\cap\Gamma''$, d'où $Z''_{T'}(\omega) = 0$ P-p.s. et $T''(\omega) \leq T'(\omega)$ P-p.s.

Soit $\Delta Z'_{T'}(\omega) = 0$ et alors $Z'_{T'-}(\omega) = 0$, d'où $Z''_{T'-}(\omega) = 0$, et, Z'' étant une P-surmartingale positive, P-p.s. $\forall t\geq T'(\omega)\ Z''_t = 0$, d'où encore $T''(\omega) \leq T'(\omega)$ P-p.s..

Par symétrie, on a donc toujours $T' = T''$ d'où $\Gamma' = \Gamma''$, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

## 4. Théorème limite:

Rappelons tout d'abord la définition de la convergence fonctionnelle d'une suite d'expériences filtrées, telle qu'on la trouve dans [2]:

Définition: On dit qu'une suite $\mathcal{E}^n=(\Omega^n,\mathcal{F}^n,(\mathcal{F}^n_t)_{t\geq 0},P^n,P'^n)$ d'expériences filtrées converge fonctionnellement vers une expérience filtrée $\mathcal{E}=(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P,P')$ si et seulement si les lois sous $P^n$ des processus des rapports de vraisemblances des $\mathcal{E}^n$ convergent faiblement (au sens de la topologie de Skorokhod) vers la loi sous P du processus du rapport des vraisemblances de $\mathcal{E}$.

Cette notion précisée, on se place pour le reste du I dans un cadre restreint. Précisément, on considère dans ce paragraphe des probabilités P, P', $P'^n$ sur $\Omega$

(qui est toujours l'espace canonique des processus ponctuels), et les expériences:

$\mathcal{E}^n = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P, P'^n)$

et

$\mathcal{E} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P, P')$

On note:

$Z^n = \dfrac{dP'^n}{dP}$ le rapport de vraisemblance de $\mathcal{E}^n$,

$Z = \dfrac{dP'}{dP}$ le rapport de vraisemblance de $\mathcal{E}$,

pour $0\leq\alpha\leq 1$, $h^n(\alpha)$ (resp. $h(\alpha)$) le processus de Hellinger d'ordre $\alpha$ associé à $\mathcal{E}^n$ (resp. $\mathcal{E}$),

$A'^n$ (resp. $A'$, $A$ ) le compensateur de N sous $P'^n$ (resp. $P'$, $P$ ).

On suppose par ailleurs $A'$ et, pour tout n, $A'^n$ absolument continus par rapport à A, et on définit dA-p.s. pour tout n $g'^n$ et $g'$ par:

$A'^n = g'^n.A$

$A' = g'.A$.

On suppose également le processus canonique N non explosif sous les probabilités considérées.

On suppose enfin qu'il existe un réel C tel que, pour tout entier naturel n, $0<g'^n<C$.

On a alors le:

Théorème 3: Sous les conditions ci-dessus, les trois propriétés (P1), (P2) et (P3) suivantes sont équivalentes:

(P1): $Z^n$ converge localement uniformément en P-probabilité vers Z quand n tend vers l'infini.

(P2): Pour tout $\alpha\in]0,1[$, $h^n(\alpha)$ converge en variation vers $h(\alpha)$ sous P quand n tend vers l'infini.

(P3): Pour tout $t\geq 0$, $|g'^n - g'|.A_t$ tend en probabilité vers 0 sous P quand n tend vers l'infini.

Démonstration: On montre en fait que (P1) et (P2) sont chacune équivalente à (P3).

Dans un premier temps, montrons que la troisième propriété implique les deux premières: supposons donc (P3) réalisée.

On rappelle que $h^n(\alpha)$ vérifie P-p.s.: $h(\alpha) = \varphi_\alpha(1,g').A$

Sous (P3), $\varphi_\alpha(1,g'^n)$ converge $dA\times dP$-p.s. vers $\varphi_\alpha(1,g')$. Une application immédiate du théorème de convergence dominée ($\varphi_\alpha$ est bornée sur $]0,C]$ )donne alors que

$|\varphi_\alpha(1,g'^n) - \varphi_\alpha(1,g')|.A$ tend en P-probabilité vers 0, et donc
$h^n(\alpha) - h(\alpha)$ tend vers 0 en variation.

Par ailleurs, (P3) implique clairement la convergence de $|g'^n - g'|.A_t$ vers 0 sous P' quand n tend vers l'infini, puisque P'<<P. D'après [1], théorème V.4.39, on a alors pour tout t

$$\|P'^n_t - P'_t\| \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

(au sens de la convergence en variation);
mais alors, le lemme V.4.3 de [1] dit que

$$E_P\,|Z^n_t - Z_t| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

Alors, $Z^n$ et Z étant des P-martingales, on a, par inégalité maximale,

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ P(\sup_{s\le t}|Z^n_s - Z_s| > \varepsilon) \le \frac{3}{\varepsilon}\sup_{s\le t} E_P\,|Z^n_s - Z_s|$$
$$\le \frac{3}{\varepsilon} E_P\,|Z^n_t - Z_t|$$

par suite, $Z^n$ tend vers Z localement uniformément en probabilité, et on a (P1).

<u>Montrons maintenant (P2) ⇒ (P3)</u>:

Supposons donc (P2) vérifiée, et considérons le cas particulier $\alpha = 1/2$. On a alors:

$$|\varphi_{\frac{1}{2}}(1,g'^n) - \varphi_{\frac{1}{2}}(1,g')| \to 0 \quad dA\times dP\text{-p.s. quand } n\to\infty$$

Mais, pour $x\ge0$, $\varphi_{\frac{1}{2}}(1,x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x}-1)^2$ et donc

$$\varphi_{\frac{1}{2}}(1,x) = \varphi_{\frac{1}{2}}(1,y) \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ x = (2-\sqrt{y})^2 \quad (\text{avec } y<1) \end{cases}$$

Il s'ensuit que la suite $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au maximum deux valeurs d'adhérence. En refaisant le même raisonnement pour une autre valeur de $\alpha$ (par exemple $\alpha = 1/4$), on vérifie immédiatement que seule la valeur d'adhérence g' convient. Par suite, $g'^n \to g'$ $dA\times dP$-p.s. et on a (P3).

<u>Il reste à vérifier que (P1) implique (P3)</u>.

Si on a la convergence en probabilité (P1), alors, pour tout $t\ge0$, on a:

$Z^n_t \to Z_t$ dans $L^1(P)$ quand $n\to\infty$.

Par suite,

$P'^n_t - P'_t$ converge en variation vers 0 quand n tend vers l'infini.

Le théorème V.4.39 de [1] donne alors le résultat, et termine la démonstration de ce théorème.

Corollaire: Sous les hypothèses de ce paragraphe, la convergence en variation des processus de Hellinger d'ordre $\alpha$ (pour tout $\alpha$) implique la convergence faible des expériences filtrées.

Remarque: Avec des conditions encore un peu plus contraignantes, on peut avoir en fait l'équivalence entre convergence faible des expériences et convergence en variation des processus de Hellinger. Donnons-nous en effet l'hypothèse suivante:

(R): Pour tout $n \geq 0$, et pour tout $t \geq 0$, $g'^n_t \neq 1$, et, pour tout $t \geq 0$, $g_t \neq 1$.

On a alors le:

Lemme 2: sous (R) et les hypothèses générales de ce paragraphe, la convergence en loi des processus de vraisemblance implique leur convergence localement uniforme en probabilité.

démonstration: La relation (2) (paragraphe I.1) montre que sous nos hypothèses les temps de saut du processus canonique N sont exactement les temps de saut du processus de rapport de vraisemblance Z et, pour tout n, ceux de $Z^n$: en effet, A est continu, donc les sauts de Z (ou $Z^n$) ne peuvent provenir que des sauts de N, et (R) assure que les sauts de N seront tous "comptabilisés" par Z (et $Z^n$). On peut donc écrire, pour tout $n \geq 0$,

$$N_t = \sum_{s \leq t} 1_{\{\Delta Z^n_s \neq 0\}}$$

N n'étant pas explosif, il n'admet donc P-p.s. qu'un nombre fini de sauts sur tout intervalle borné, et il en est donc de même pour les $Z^n$ (et pour Z). On en conclut que l'application $F^t$ définie sur l'espace de Skorokhod par:

$$F^t(x) = \sum_{s \leq t} 1_{\Delta x_s \neq 0}$$

est continue en $Z^n$, et en Z, au sens de la topologie de Skorokhod, quelque soit le réel positif t.

Il s'ensuit que l'on a convergence conjointe en loi sous P du couple ($Z^n$, X) vers (Z, X) quand n tend vers l'infini, d'où (voir [4]) convergence stable de la suite $Z^n$ vers Z.

On en déduit alors (voir par exemple [3]) la convergence en P-probabilité au sens de Skorokhod de la suite de processus $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers Z puis, les sauts de tous les $Z^n$, et ceux de Z, ayant tous lieu aux mêmes instants (ceux des sauts de N) la convergence uniforme en P-probabilité sur [0,t] cherchée, ce qui achève de démontrer le lemme 2.

Le corollaire suivant est alors immédiat:

Corollaire: Sous les hypothèses du Lemme 2, la convergence en variation pour tout $\alpha\in]0,1[$ des processus de Hellinger d'ordre $\alpha$ associés à une suite d'expériences filtrées vers les processus de Hellinger d'une expérience filtrée $\mathcal{E}$ est équivalente à la convergence faible de cette suite d'expériences filtrées vers $\mathcal{E}$.

## II. CAS NON QUASI-CONTINU A GAUCHE. CAS MULTIVARIE.

### 1. Un calcul:

Nous allons voir sur deux exemples que l'on ne peut espérer de théorème général analogue au théorème 2 (et donc de théorème limite) que dans le cadre précédent, c'est-à-dire quand N est, sous les probabilités considérées, un processus ponctuel simple et quasi-continu à gauche.

Les contre-exemples que nous allons exhiber reposent sur le lemme élémentaire suivant:

Lemme 3: Soient x, y et z trois éléments de $]0,1[$. x, y et z sont , pour tout $\alpha\in]0,1[$, solutions de l'équation:

$$(E_\alpha):\quad x^\alpha(y^{1-\alpha}-z^{1-\alpha})=(1-x)^{1-\alpha}((1-z)^{1-\alpha}-(1-y)^{1-\alpha})$$

si et seulement si, soit $y=z$, soit $x=1/2$ et $y=1-z$.

démonstration: il est clair que les deux types de solutions proposés conviennent. Montrons qu'il n'y en a pas d'autre. Pour cela, on suppose $y\neq z$ et $E_\alpha$ vérifiée pour tout $\alpha$. Alors on a, toujours pour tout $\alpha$,

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha=\frac{(1-z)^{1-\alpha}-(1-y)^{1-\alpha}}{y^{1-\alpha}-z^{1-\alpha}}$$

$$\text{d'où } \alpha\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{1-x}\right)=(1-\alpha)\mathrm{Ln}(1-z)+\mathrm{Ln}\left(1-\left(\frac{1-y}{1-z}\right)^{1-\alpha}\right)-(1-\alpha)\mathrm{Ln}y-\mathrm{Ln}\left(1-\left(\frac{z}{y}\right)^{1-\alpha}\right)$$

$$\text{d'où: }\quad \mathrm{Ln}\left(\frac{1-z}{y}\right)+\alpha\,\mathrm{Ln}\left(\frac{y\,(1-x)}{(1-z)\,x}\right)+\mathrm{Ln}\left(1-\left(\frac{1-y}{1-z}\right)^{1-\alpha}\right)-\mathrm{Ln}\left(1-\left(\frac{z}{y}\right)^{1-\alpha}\right)=0$$

En égalant à 0 les parties affine et non affine (en $\alpha$) de cette égalité, il vient alors:

$$\begin{cases} y=1-z \\ \dfrac{y}{1-z}=\dfrac{x}{1-x} \\ \dfrac{1-y}{1-z}=\dfrac{z}{y} \end{cases}$$

d'où $y = 1-z$ et $x = 1/2$.

## 2. Le cas non quasi-continu à gauche.

Considérons maintenant une expérience statistique $\mathcal{E}$, en conservant les mêmes notations qu'au I, mais sans faire l'hypothèse que N est quasi-continu à gauche sous P et P'.

Avec les mêmes notations qu'au I.1, le théorème IV.4.2 de [1] dit que, pour tout $\alpha\in]0,1[$, une version du processus de Hellinger associé à $\mathcal{E}$ est donnée par:

$$(12): h(\alpha) = \varphi_\alpha(g,g').\overline{A}^c + \sum_{s\leq .} \varphi_\alpha(\Delta A_s,\Delta A'_s) + \sum_{s\leq .} \varphi_\alpha(1-\Delta A_s,1-\Delta A'_s)$$

où $\overline{A}^c$ désigne la partie continue de $\overline{A}$, et $\Delta A_s$ le saut de A au point s.

Supposons par ailleurs qu'une autre expérience $\mathcal{E}''=(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P, P'')$ admette P-p.s., pour tout $\alpha\in]0,1[$ le processus $h(\alpha)$ défini par (12) comme processus de Hellinger. On note A'' le compensateur de N sous P'', et, pour simplifier, on choisit $\overline{A}$ dans (12) de telle sorte que $\overline{A}$ domine A, A', <u>et</u> A''. Enfin, posons:

$a_s = \Delta A_s$ ; $a'_s = \Delta A'_s$ ; $a''_s = \Delta A''_s$ .

On aura alors pour tout $\alpha$ et P-p.s. l'égalité

$$\varphi_\alpha(g,g').\overline{A}^c + \sum_{s\leq .} \varphi_\alpha(\Delta A_s,\Delta A'_s) + \sum_{s\leq .} \varphi_\alpha(1-\Delta A_s,1-\Delta A'_s)$$
$$= \varphi_\alpha(g,g'').\overline{A}^c + \sum_{s\leq .} \varphi_\alpha(\Delta A_s,\Delta A''_s) + \sum_{s\leq .} \varphi_\alpha(1-\Delta A_s,1-\Delta A''_s)$$

d'où le système:

$$\begin{cases} \varphi_\alpha(g,g').\overline{A}^c = \varphi_\alpha(g,g'').\overline{A}^c \\ \sum_{s\leq .} \varphi_\alpha(a_s,a'_s) + \sum_{s\leq .} \varphi_\alpha(1-a_s,1-a'_s) = \sum_{s\leq .} \varphi_\alpha(a_s,a''_s) + \sum_{s\leq .} \varphi_\alpha(1-a_s,1-a''_s) \end{cases} \quad \text{P-p.s.}$$

Comme dans la démonstration du théorème 1 (égalité (9)), la première équation implique que $g'=g''$ $dP\times dh(1/2)$-p.s.

La deuxième équation indique que, pour tout $s\geq 0$, et pour tout $\alpha\in]0,1[$ (toujours P-p.s.), $(a_s,a'_s,a''_s)$ est solution de l'équation $(E_\alpha)$. On n'a donc pas, en général, $a'_s=a''_s$. Plus précisément: soit $a'_s=a''_s$, soit $a_s=1/2$ et $a'_s=1-a''_s$.

Avant d'énoncer le théorème correspondant au théorème 2 dans le cadre plus restrictif qui nous est donc imposé, nous allons montrer que la solution "aberrante" amène effectivement des contre-exemples.

Considérons l'exemple suivant, où l'on conserve toutes les notations ci-dessus:

$$A = \frac{1}{2}\, 1_{[1,+\infty[} + \frac{1}{2} 1_{\{\Delta N_1=1\}}\, 1_{[2,+\infty[}$$

$$A' = \frac{1}{4}\, 1_{[1,+\infty[}$$

$A'' = \frac{3}{4} 1_{[1,+\infty[}$

On est très exactement dans le cadre décrit ci-dessus, donc $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ admettent les mêmes processus de Hellinger.

Or, si on appelle Z' (resp. Z'') le processus de rapports de densités relatives de $\mathcal{E}'$ (resp. $\mathcal{E}''$) , Z' et Z'' ont les comportements suivants (voir le théorème III.5.43 de [1] ):

* Entre les instants 0 et 1, Z' = Z'' = 1

*S'il n'y a pas de saut en 1 (i.e. $\Delta N_1 = 0$), sur $[1,+\infty[$, Z' = 3/2 et Z'' = 1/2

*S'il y a un saut en 1 (i.e. $\Delta N_1 = 1$), Z' vaut:

1/2 sur $[1,2[$, 1 sur $[2,+\infty[$ si $\Delta N_2 = 0$, 0 sur le même intervalle si $\Delta N_2 = 1$.

De même, Z'' vaut:

3/2 sur $[1,2[$, 3 sur $[2,+\infty[$ si $\Delta N_2 = 0$, 0 sur le même intervalle si $\Delta N_2 = 1$.

Z' et Z'' ne prennent donc pas les mêmes valeurs (par exemple, Z' ne prend jamais la valeur 3), et n'ont, par conséquent, certainement pas la même loi.

On est donc amené à se contenter du résultat suivant, dont la démonstration, compte tenu du lemme 3, est analogue à celle du théorème 2:

<u>Théorème 4</u>: Soit la condition portant sur P suivante:

(13): Si T est un temps de saut prévisible de N, alors $P(\Delta N_T = 1 \mid \mathcal{F}_{T-}) \neq 1/2$.

On considère deux expériences $\mathcal{E}'=(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P,P')$ et $\mathcal{E}''=(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},P,P'')$ telles que P vérifie (13). On note Z' (resp Z'') le processus de rapport de vraisemblances associé à $\mathcal{E}'$ (resp $\mathcal{E}''$), $\Gamma'$ (resp. $\Gamma''$) l'intervalle de détermination des processus de Hellinger de $\mathcal{E}'$ (resp. $\mathcal{E}''$) et $h(\alpha)$ la version du processus de Hellinger d'ordre $\alpha$ associé à $\mathcal{E}'$ par (12).

Si, pour tout $\alpha \in ]0,1[$, $h(\alpha)$ est une version du processus de Hellinger d'ordre $\alpha$ de $\mathcal{E}''$, alors $\Gamma' = \Gamma''$ et Z' = Z'' (P-p.s.).

## <u>3. Le cas multivarié:</u>

Un exemple analogue va montrer que, même dans le cas quasi-continu à gauche, dès que les sauts du processus de base peuvent prendre 2 valeurs (mettons, 1 et 2), les processus de Hellinger ne suffisent pas en général, même en se fixant une probabilité de base P, à caractériser le processus de vraisemblance d'une expérience similaire à celles étudiées précédemment.

Plus précisément:

$\Omega'$ désignera dans tout ce paragraphe l'espace canonique des processus ponctuels multivariés avec des sauts dans l'ensemble {1,2}. On munit $\Omega'$ de son processus canonique (qui est caractérisée par la loi $\mu$ de ses sauts), de sa filtration canonique $(\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}$, et de la tribu limite $\mathcal{F}'$.

Soit $\mathcal{E} = (\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}, P, P')$ une expérience statistique filtrée sur $\Omega'$. On note $\nu$ le compensateur de $\mu$ sous P, et $\nu'$ le compensateur de $\mu$ sous P'.

Avec ces conventions, on sait que , si $\overline{\nu}$ est n'importe quelle mesure aléatoire prévisible dominant $\nu$ et $\nu'$, (par exemple $\overline{\nu} = \nu + \nu'$), une version du processus de Hellinger d'ordre $\alpha$ associé à $\mathcal{E}$ est donnée pour tout $\alpha \in ]0,1[$ par:

(14): $$h(\alpha) = \varphi_\alpha(U, U') * \overline{\nu}$$

où U et U' sont définis $d\overline{\nu}$-p.s. par

$\nu = U.\overline{\nu}$

$\nu' = U'.\overline{\nu}$

Appelons donc $T_n$ le n-ième temps de saut de $\mu$, et considérons trois probabilités P, P' et P'' telles que $\mu$ admette sous P, P' et P'' les compensateurs suivants (l'analogie avec le contre-exemple du 2. n'est pas fortuite!):

$\overline{\nu}(ds,dx) = ds \times (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(dx)$, $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ désignant respectivement les masses de Dirac en 1 et 2.

Sous P: $\nu = U.\overline{\nu}$ , avec

$$U(t,1) = \frac{1}{2}1_{]0,T_1]} + \frac{1}{2}1_{\{\mu(T_1,1)=1\}}1_{]T_1,T_2]} = U(t,2)$$

Sous P': $\nu' = U'.\overline{\nu}$, avec

$$U'(t,1) = \frac{3}{4}1_{]0,T_1]}$$

$$U'(t,2) = \frac{1}{4}1_{]0,T_1]}$$

Sous P'': $\nu'' = U''.\ \overline{\nu}$, avec

$$U''(t,1) = \frac{1}{4}1_{]0,T_1]}$$

$$U''(t,2) = \frac{3}{4}1_{]0,T_1]}$$

Avec ces notations, considérons les deux expériences $\mathcal{E}'=(\Omega',\mathcal{F}',(\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0},P,P'')$ et $\mathcal{E}''=(\Omega,\mathcal{F}',(\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0},P,P''$. La formule (14), apliquée à $\mathcal{E}'$, et $\mathcal{E}''$, donne alors les mêmes processus de Hellinger pour ces deux expériences. Or, d'après [1], th III.5.43, on obtient les processus de rapport de vraisemblance de $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ comme exponentielle de Doléans de la surmartingale (donnée ici pour $\mathcal{E}'$, et analogue pour $\mathcal{E}''$):

$$(15): M'_t = \sum_{T_n \le t} \left( \frac{U'}{U} - 1 \right)(T_n, \Delta\mu(T_n)) + \int_0^t (U(s,1) + U(s,2) - U'(s,1) - U'(s,2))dt$$

($\Delta\mu(T_n)$ désignant l'amplitude du saut en $T_n$)

Regardons donc le comportement des rapports de vraisemblance Z' et Z" de Ae' et $\mathcal{E}$".

Pour Z':

*entre 0 et $T_1$, M' reste constamment nulle;

*si l'amplitude du saut en $T_1$ est 1, M' vaut constamment $-1/2$ sur $[T_1, +\infty[$;

*si l'amplitude du saut en $T_1$ est 2, $M'_t = 1/2 + (t-T_1)$ pour $t \in [T_1, T_2[$, et M' vaut constamment $M'(T_2 - 0) - 1$ sur $[T_2, \infty[$.

Pour Z":

*entre 0 et $T_1$, M" reste constamment nulle;

*si l'amplitude du saut en $T_1$ est 2, M" vaut constamment $+1/2$ sur $[T_1, +\infty[$;

*si l'amplitude du saut en $T_1$ est 1, $M''_t = -1/2 + (t-T_1)$ pour $t \in [T_1, T_2[$, et M" vaut constamment $M''(T_2 - 0) - 1$ sur $[T_2, \infty[$.

Il est clair que M' et M" (et donc Z' et Z") n'ont pas même loi sous P: par exemple, M' prend p.s. des valeurs strictement supérieures à 1/2, ce qui n'est pas le cas de M".

Cet exemple montre donc que la donnée d'une probabilité de base et d'une famille de processus de Hellinger ne suffit pas à caractériser en géréral une expérience engendrée par un processus ponctuel multivarié. On peut toutefois noter que dans le cas où l'espace des marques est réduit à 2 points, et le processus de base quasi-continu à gauche, les cas aberrants sont, pour les mêmes raisons qu'au 1., exactement ceux où, sous P, toutes les amplitudes des sauts sont équiprobables, et de probabilités différentes, mais symétriques sous P' et P" (c'est-à-dire, par exemple, p sous P' et 1−p sous P"). On pourrait donc, dans ce cadre restrictif, énoncer un théorème analogue au Théorème 4, de démonstration elle aussi analogue.

---

Bibliographie:

J. Jacod, A.N. Shiryaev: [1] Limit Theorems for Stochastics Processes. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1987)

J. Jacod: [2] Convergence of filtered statistical models and Hellinger processes. Preprint (1987)

C. Dellacherie: [3] Convergence en probabilité et topologie de Baxter-Chacon. Séminaire de probabilité XII, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1978)

J. Jacod, J. Mémin: [4] Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité. Séminaire de probabilité XV, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1981)