

M. F. ALLAIN

Intégrales stochastiques et processus Fonctionnelles du brownien

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1988, fascicule 1
« Probabilités », , p. 1-48

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1988__1_1_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**INTEGRALES STOCHASTIQUES ET PROCESSUS
FONCTIONNELLES DU BROWNIEN**

MF ALLAIN
I R M A R
UNIVERSITE DE RENNES I
CAMPUS DE BEAULIEU
35042 RENNES CEDEX

Résumé

Pour β mouvement Brownien standard et Φ fonction "smooth" de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , soit $\Phi(\beta, \beta)$ le processus : $(\Phi(\beta_u, \beta_s))(u, s) \in [0,1]^2$. On donne une représentation de la variation de $\Phi(\beta, \beta)$ sur un rectangle, qui fait intervenir des intégrales stochastiques au sens de Itô et au sens de Skorohod.

Abstract

Let β be a standard Brownian motion and let Φ be a smooth function from \mathbb{R}^2 to \mathbb{R} . Let $\Phi(\beta, \beta)$ be the process : $(\Phi(\beta_u, \beta_s))(u, s) \in [0,1]^2$. We give a representation of the variation of $\Phi(\beta, \beta)$ on a rectangle, using stochastic integrals in the sense of Itô and of Skorohod.

Key Words : Brownian Motion, Stochastic integrals, Stochastic Calculus.

Code A.M.S. : 60 G - 60 H

INTRODUCTION

Soit $\mathcal{E}_{k,p}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions Φ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} possédant des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k et telles que Φ et ses dérivées partielles soient dominées par un polynôme.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}, (\beta_t)_{t \in [0,1]}, P)$ un mouvement Brownien standard à valeurs réelles.

Pour Φ élément de $\mathcal{E}_{4,p}(\mathbb{R}^2)$ on note $\Phi(\beta, \beta)$ le processus :

$$(\Phi(\beta_u, \beta_s))(u, s) \in [0,1]^2.$$

Le but de ce travail est de prouver les résultats suivants :

- Le processus $\Phi(\beta, \beta)$ définit une mesure vectorielle μ^Φ sur

$(]0,1]^2, \mathcal{B}(]0,1]^2))$ à valeurs dans $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que :

$$\mu^\Phi(]0,a] \times]0,b]) = \Phi(\beta_a, \beta_b) - \Phi(\beta_a, 0) - \Phi(0, \beta_b) + \Phi(0,0)$$

- Au processus $\Phi(\beta, \beta)$ on peut associer des mesures vectorielles

$(\mu^{(k)})_{k=1\dots 4}$ sur $(]0,1]^2, \mathcal{B}(]0,1]^2))$ possédant les propriétés suivantes :

* pour Φ_1 appartenant à $\mathcal{E}_{4,p}(\mathbb{R}^2)$, $A =]a, b] \times]c, d]$ et $k \in \{1, \dots, 4\}$ on peut définir une intégrale stochastique de $\Phi_1(\beta, \beta) 1_A$ par rapport à $\mu^{(k)}$ qui est la limite dans $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de

$$\left(\sum_{i,j} \Phi_1(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n}) \mu^{(k)}(1_A 1_{A_{i,j}^n}) \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ où } (\{]a_i^n, a_{i+1}^n] \mid i=1\dots i(n)\})_{n \in \mathbb{N}}$$

est une suite de partitions de $]0,1]$ dont le pas tend vers zéro et

$$A_{i,j}^n =]a_i^n, a_{i+1}^n] \times]a_j^n, a_{j+1}^n]$$

* pour toute fonction ψ appartenant à $\mathcal{E}_{4,p}(\mathbb{R})$:

$$\psi \circ \Phi(\beta_a, \beta_b) - \psi \circ \Phi(\beta_a, 0) - \psi \circ \Phi(0, \beta_b) + \psi \circ \Phi(0,0)$$

$$= \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k!} \mu^{(k)}(]0,a] \times]0,b]) \psi^{(k)} \circ \Phi(\beta, \beta).$$

On a en particulier $\mu^{(1)} = \mu^\Phi$, et, pour $A =]a, b] \times]c, d]$

$$\mu^{(4)}(1_A) = 6 \int_{[0,1]^2} 1_A(u, s) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2(\beta_u, \beta_s) \, duds$$

La formule précédente est du type formule de Itô ; elle donne une représentation de $\psi \circ \Phi$ qui fait intervenir des intégrales stochastiques au sens de Itô et au sens de Skorohod, elle étend un résultat prouvé dans [2].

Dans le paragraphe II on considère deux semi-martingales $(X_k)_{k=1,2}$, indexées par $[0,1]$ et telles que :

$$X_k(t) = \int_0^t h_k(s) d\beta_s + \int_0^t g_k(s) ds$$

où h_k et g_k sont des processus prévisibles appartenant à

$L_4([0,1] \times \Omega, \mathcal{B}([0,1]^2) \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes P)$. On note \mathcal{P}_Λ la tribu sur $[0,1]^2 \times \Omega$ engendrée par : $\{]a, b[\times]c, d[\times F : a, b, c, d \in [0,1], F \in \mathcal{F}_{a \wedge c}\}$.

On établit que le processus $X_1 \otimes X_2 = (X_1(u) X_2(s))_{(u,s) \in [0,1]^2}$ définit une mesure stochastique $\mu_{X_1 \otimes X_2}$ sur $([0,1]^2 \times \Omega, \mathcal{P}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et on donne une représentation par des intégrales stochastiques au sens de Itô de $\mu_{X_1 \otimes X_2}(h)$ pour h processus élémentaire \mathcal{P}_Λ -mesurable.

Dans le paragraphe III on considère des processus $(X_k)_{k=1,2}$ tels que $X_k = (\varphi_k(\beta_u))_{u \in [0,1]}$, $\varphi_k \in \mathcal{C}_{\infty,p}(\mathbb{R})$ et on prouve que les puissances de $X_1 \otimes X_2$ définissent des mesures stochastiques sur $([0,1]^2 \times \Omega, \mathcal{P}_\Lambda)$, à valeurs dans $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Le résultat démontré dans [2], n'est pas utilisable car $X_1 \otimes X_2$ n'est pas \mathcal{P}_Λ -mesurable. Cependant, en utilisant l'intégrale de Skorohod il est possible de donner une autre représentation de $\mu_{X_1 \otimes X_2}(1_A)$ ($A =]a, b[\times]c, d[$) qui permet d'établir les résultats annoncés (paragraphe V et VI).

Les paragraphes I et IV donnent les définitions et propriétés nécessaires concernant les mesures stochastiques et l'intégrale de Skorohod respectivement.

I - MESURES STOCHASTIQUES. GENERALITES

Les références sont : [1], [5].

1 - Définitions

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé, soit $T =]0,1]^d$ et soit

$$\mathcal{A} = \left\{ A = \prod_{i=1}^d]a_i, b_i[: a_i, b_i \in [0,1] \right\}.$$

On note $\mathcal{B}(T)$ la tribu borélienne sur T .

1.1 - Tribu prévisible

Soit $(\mathcal{G}(A))_{A \in \mathcal{A}}$ une famille de sous tribus de \mathcal{F} telle que :

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{G}(B) \subseteq \mathcal{G}(A).$$

On appelle tribu prévisible, la tribu \mathcal{P} sur $T \times \Omega$ engendrée par la semi-algèbre :

$$\mathcal{R} = \{A \times F : A \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{G}(A)\}.$$

1.2 - Différents espaces de processus prévisibles

On note $\mathcal{X}_b(\mathcal{P})$ l'espace vectoriel des processus prévisibles, à valeurs réelles et bornés.

On note $\mathcal{X}_b^1(\mathcal{P})$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{X}_b(\mathcal{P})$ tel que :

$$h \in \mathcal{X}_b^1(\mathcal{P}) \Leftrightarrow h = \sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{A_k}$$

où $A_k \in \mathcal{A}$ et α_k est une variable aléatoire $\mathcal{G}(A_k)$ - mesurable et bornée.

1.3 - Mesure stochastique

Une mesure stochastique sur $(T \times \Omega, \mathcal{P})$, à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, est une application μ de \mathcal{P} dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, σ -additive et vérifiant :

$$\forall A \times F \in \mathcal{R} : \mu(A \times F) = 1_F \mu(A \times \Omega).$$

2 - Propriétés

Dans ce paragraphe intervient une seule tribu prévisible \mathcal{P} , pour simplifier les notations on utilisera \mathcal{X}_b et \mathcal{X}_b^1 au lieu de $\mathcal{X}_b(\mathcal{P})$ et $\mathcal{X}_b^1(\mathcal{P})$.

Pour $p \geq 0$ $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est l'espace $L_p^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$; pour $p = 0$

$\|f\|_0 = E(|f| \wedge 1)$, pour $0 < p < 1$ $\|f\|_p = E(|f|^p)$, pour $p \geq 1$ $\|f\|_p$ est la norme usuelle.

2.1 - Théorème

Soit \mathcal{R}' l'algèbre engendrée par \mathcal{R} , soit μ une application additive de \mathcal{R}' dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vérifiant :

i) $\forall A \times F \in \mathcal{R} \quad \mu(A \times F) = 1_F \mu(A \times \Omega).$

ii) $\mu(\mathcal{R}')$ est une partie bornée de $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

iii) Pour toute suite décroissante $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{R}' telle que $\bigcap_n D_n = \emptyset$ on a : $\lim_n \|\mu(D_n)\|_p = 0.$

2.1.1 - Alors μ admet une extension sur \mathcal{P} qui est une mesure stochastique, à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

2.1.2 - L'application μ définie sur \mathcal{K}_b^1 par :

$$\mu(h) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k \times \Omega) \quad \text{si } h = \sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{A_k}$$

admet une extension, notée également μ , sur \mathcal{K}_b , à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, linéaire et telle que : pour toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{K}_b qui converge vers h élément de \mathcal{K}_b et qui est uniformément bornée, la suite $(\mu(h_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mu(h)$ dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Dans certains cas on peut prouver l'existence d'une extension linéaire de μ , définie sur un espace \mathcal{K} contenant \mathcal{K}_b , à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et telle que le théorème de convergence dominée reste valable. Les éléments de \mathcal{K} sont alors dits : μ -intégrables. Le corollaire suivant en donne un exemple.

2.2 - Corollaire

Soit μ une application additive de \mathcal{A} dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vérifiant :

$$\forall A \times F \in \mathcal{A} : \mu(A \times F) = 1_F \mu(A \times \Omega).$$

Pour h élément de \mathcal{K}_b^1 on définit $\mu(h)$ comme en 2.1.2.

Soit \mathcal{K} un espace vectoriel de processus prévisibles, stable par \vee et \wedge et tel que :

- $\mathcal{K}_b \subseteq \mathcal{K}$
- $\forall h \in \mathcal{K}, \forall g \in \mathcal{K}_b \quad hg \in \mathcal{K}.$

Soit θ une application de \mathcal{K} dans \mathbb{R}_+ telle que :

i) $\forall h \in \mathcal{K}_b^1 : \|\mu(h)\|_p \leq \theta(h)$

ii) $|h| \leq |g| \Rightarrow \theta(h) \leq \theta(g)$

iii) Pour toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{K} qui converge simplement vers 0 et qui est dominée par un élément de \mathcal{K} , la suite $(\theta(h_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Alors μ satisfait aux hypothèses du théorème I.2.1 et admet une extension linéaire de \mathcal{K} dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. De plus, si on note μ cette extension on a :

$$2.2.1 - \forall h \in \mathcal{X} \quad \|\mu(h)\|_p \leq \theta(h)$$

$$2.2.2 - \forall h \in \mathcal{X}, \forall A \times F \in \mathcal{R} : \mu(h 1_{A \times F}) = 1_F \mu(h 1_A \times \Omega)$$

Remarque. 2.2.1 implique que le théorème de convergence dominée est valable pour μ , sur \mathcal{X} . Le résultat est évident quand $\mathcal{X} = L_2(T \times \Omega, \mathcal{P}, \nu)$ où ν est une probabilité et $\|\mu(h)\|_2 = \|h\|_2 \forall h \in \mathcal{X}_b^1$

3 - Mesure stochastique associée à un processus

Soit X un processus sur $(T \times \Omega, \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{F})$, à valeurs réelles et tel que :
 $\forall t \in T, X_t \in L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Pour A élément de \mathcal{A} , on note $\Delta_A X$ la variation de X sur A .

Soit \mathcal{P} une tribu prévisible sur $T \times \Omega$.

Tout élément D de \mathcal{R}' peut se mettre sous la forme :

$$\bigcup_{i=1}^k (A_i \times F_i) \text{ où } A_i \times F_i \in \mathcal{R} \text{ et } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ si } i \neq j.$$

L'expression $\sum_{i=1}^k 1_{F_i} \Delta_{A_i} X$ ne dépendant pas de l'écriture de D , on peut définir

sur \mathcal{R}' une application additive μ^X , à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ par :

$$\mu^X(D) = \sum_{i=1}^k 1_{F_i} \Delta_{A_i} X.$$

Si μ^X satisfait aux hypothèses du corollaire I.2.2, son extension à \mathcal{P} est appelée : mesure stochastique associée à X , son extension à \mathcal{X} : intégrale stochastique par rapport à X .

II - PRODUIT DE MESURES STOCHASTIQUES

1 - Hypothèses et notations

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}, (\beta_t)_{t \in [0,1]}, P)$ un mouvement Brownien standard à valeurs réelles. Soit $T_1 =]0,1]$, soit $\mathcal{A}_1 = \{A =]a, b] : a, b \in [0,1]\}$ et, pour $A =]a, b]$ soit $\mathcal{G}(A) = \mathcal{F}_a$; on note \mathcal{P}_1 la tribu prévisible sur $T_1 \times \Omega$ engendrée par $\mathcal{R} = \{A \times F : A \in \mathcal{A}_1, F \in \mathcal{G}(A)\}$ (c'est la tribu prévisible usuelle).

Il est bien connu que dans ce cas, pour $p = 2$, les hypothèses du corollaire I - 2.2 sont satisfaites par μ^β quand :

$$\mathcal{X} = L_2(T_1 \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$$

$$\theta(h) = \|h\|_2 (= \|\mu(h)\|_2)$$

Il résulte de l'inégalité de Burkholder qu'elles sont également satisfaites par μ^β quand $p = 4$ et :

$$\mathcal{H} = L_4(T_1 \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$$

$$\theta(h) = 16 \|h\|_4$$

Dans la suite on écrira $\int_0^1 h(s) d\beta_s$ au lieu de $\mu^\beta(h)$ et on utilisera les propriétés de

cette intégrale et en particulier le calcul stochastique, sans justification lorsqu'il s'agira d'utilisation classique.

Soit $T_2 =]0,1]^2$, soit $\mathcal{A}_2 = \{A = \prod_{i=1}^2]a_i, b_i] : a_i, b_i \in [0,1]\}$ et, pour $A \in \mathcal{A}_2$, soit

$\mathcal{G}_\Lambda(A) = \mathcal{F}_{a_1 \wedge a_2}$ et $\mathcal{G}_V(A) = \mathcal{F}_{a_1 \vee a_2}$; on note \mathcal{P}_Λ la tribu prévisible sur $T_2 \times \Omega$

engendrée par $\mathcal{R}_\Lambda = \{A \times F : A \in \mathcal{A}_2, F \in \mathcal{G}_\Lambda(A)\}$ et \mathcal{P}_V celle engendrée par

$\mathcal{R}_V = \{A \times F : A \in \mathcal{A}_2, F \in \mathcal{G}_V(A)\}$, on note \mathcal{B} la tribu prévisible sur $T_2 \times \Omega$

engendrée par les processus déterministes indexés par T_2 . Soient X et Y deux

processus sur $([0,1] \times \Omega, \mathcal{B}([0,1]) \otimes \mathcal{F})$, adaptés à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}$; on

note $X \otimes Y$ le processus sur $([0,1]^2 \times \Omega, \mathcal{B}([0,1]^2) \otimes \mathcal{F})$ tel que :

$X \otimes Y(s, t) = X(s) Y(t)$. Si X est constant et égal à α on utilisera la notation $\alpha \otimes Y$.

Soit $A \in \mathcal{A}_2$, alors $\Delta_A(X \otimes Y) = (X_{b_1} - X_{a_1})(Y_{b_2} - Y_{a_2})$.

Dans le cas particulier où $X = Y = \beta$ on a :

$$E(\Delta_A(\beta \otimes \beta) | \mathcal{G}_V(A)) = E(\Delta_A(\beta \otimes \beta) | \mathcal{G}_\Lambda(A)) = \int_0^1 1_A(u, u) du.$$

Soit V le processus sur $([0,1]^2 \times \Omega, \mathcal{B}([0,1]^2) \otimes \mathcal{F})$ tel que $V(s, t) = s \wedge t$, alors

$\Delta_A V = \int_0^1 1_A(u, u) du$ et V définit une probabilité sur $\mathcal{B}([0,1]^2) \otimes \mathcal{F}$ notée v .

La famille de tribus $(\mathcal{F}_{(s,t)}^V)_{(s,t) \in T_2}$ telle que $\mathcal{F}_{(s,t)}^V = \mathcal{F}_{s \vee t}$ ne satisfait pas

à la condition F_4 , par contre la famille de tribus $(\mathcal{F}_{(s,t)}^\Lambda)_{(s,t) \in T_2}$ telle que

$\mathcal{F}_{(s,t)}^\Lambda = \mathcal{F}_{s \wedge t}$ satisfait à la condition F_4 et on a : $\mathcal{F}_{(s,t)}^* = \mathcal{F}_{s \vee t}$. Le processus

$\beta \otimes \beta - V$ est une martingale faible relativement à la famille $(\mathcal{F}_{(s,t)}^V)_{(s,t) \in T_2}$.

Afin d'alléger les notations on écrira parfois dans la suite $L_p(P), L_p(\lambda \otimes P)$,

$L_p(\lambda \otimes \lambda \otimes P)$, $L_p(v \otimes P)$ au lieu de $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $L_p(T_1 \times \Omega, \mathbb{B}(T_1) \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes P)$, $L_p(T_2 \times \Omega, \mathbb{B}(T_2) \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes \lambda \otimes P)$, $L_p(T_2 \times \Omega, \mathbb{B}(T_2) \otimes \mathcal{F}, v \otimes P)$ respectivement.

2 - Proposition

Soient h_1 et h_2 appartenant à $L_4(T_1 \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$. Pour $i \in \{1, 2\}$ soit M_i la martingale telle que :

$$M_i(s) = \int_0^s h_i(u) d\beta_u.$$

Alors :

i) Le processus $M_1 \otimes M_2$ définit une mesure stochastique sur $(T_2 \times \Omega, \mathcal{P}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

ii) Pour tout h appartenant à $\mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$:

$$\|\mu^{M_1 \otimes M_2}(h)\|_{L_2(P)} \leq C \theta(h, h_1, h_2)$$

où C est une constante

$$\begin{aligned} \theta(h, h_1, h_2) = & (\|h_1\|_{L_4(\lambda \otimes P)} \|h(1 \otimes h_2)\|_{L_4(\lambda \otimes \lambda \otimes P)} \\ & + \|h_2\|_{L_4(\lambda \otimes P)} \|h(h_1 \otimes 1)\|_{L_4(\lambda \otimes \lambda \otimes P)} + \|h(h_1 \otimes h_2)\|_{L_2(v)}). \end{aligned}$$

iii) Pour tout h appartenant à $\mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ on a :

$$\begin{aligned} \mu^{M_1 \otimes M_2}(h) = & \int_0^1 h_1(s) \left(\int_0^s h(s, u) h_2(u) d\beta_u \right) d\beta_s \\ & + \int_0^1 h_2(s) \left(\int_0^1 h(u, s) h_1(u) d\beta_u \right) d\beta_s + \int_{[0,1]^2} h(u, s) h_1(u) h_2(s) v(du, ds). \end{aligned}$$

Démonstration.

Soit h un élément de $\mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ il existe alors une partition de $]0, 1]$ de la forme

$\{A_i =]a_{i-1}, a_i], i = 1 \dots n\}$ telle que :

$$h = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} 1_{A_i \times A_j}$$

α_{ij} étant $\mathcal{F}_{a_{i-1} \wedge a_{j-1}}$ -mesurable et borné.

Pour s fixé le processus $(h(u, s))_{u \in]0,1]}$ est \mathcal{P}_1 -mesurable et :

$$\int_0^s h(u, s) h_1(u) d\beta_u \underset{L_2(P)}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} 1_{A_j}(s) \int_0^s 1_{A_i}(u) h_1(u) d\beta_u.$$

$$\text{Soit } H_1(s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} 1_{A_j}(s) \int_0^s 1_{A_i}(u) h_1(u) d\beta_u$$

H_1 appartient à $L_4(T \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$.

Par conséquent on peut définir :

$$\int_0^1 H_1(s) h_2(s) d\beta_s \underset{L_2(P)}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \int_{a_{j-1}}^{a_j} h_2(s) \left(\int_0^s 1_{A_i}(u) h_1(u) d\beta_u \right) d\beta_s.$$

Le même raisonnement est valable pour $h(s, u)$ et

$$H_2(s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} 1_{A_i}(s) \int_0^s 1_{A_j}(u) h_2(u) d\beta_u.$$

Or si $A =]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] = A_1 \times A_2$

$$\begin{aligned} \Delta_A(M_1 \otimes M_2) &= \int_{a_1}^{b_1} h_1(u) d\beta_u \int_{a_2}^{b_2} h_2(u) d\beta_u \\ &= \int_0^1 1_{A_1}(s) h_1(s) \left(\int_0^s 1_{A_2}(u) h_2(u) d\beta_u \right) d\beta_s \\ &\quad + \int_0^1 1_{A_2}(s) h_2(s) \left(\int_0^s 1_{A_1}(u) h_1(u) d\beta_u \right) d\beta_s \\ &\quad + \int_0^1 1_{A_1}(s) 1_{A_2}(s) h_1(s) h_2(s) ds. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mu^{M_1 \otimes M_2}(h) = \sum_{ij} \alpha_{ij} \Delta_{A_i \times A_j}(M_1 \otimes M_2) = \sum_{ij} \alpha_{ij} \left\{ \int_{a_{i-1}}^{a_i} h_1(s) \left(\int_0^s 1_{A_j}(u) h_2(u) d\beta_u \right) d\beta_s \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} h_2(s) \left(\int_0^s 1_{A_i}(u) h_1(u) d\beta_u \right) d\beta_s + \int_0^1 1_{A_i}(s) 1_{A_j}(s) h_1(s) h_2(s) ds \\
& = \int_0^1 h_1(s) H_2(s) d\beta_s + \int_0^1 h_2(s) H_1(s) d\beta_s + \int_{[0,1]^2} h(u,s) (h_1 \otimes h_2)(u,s) v(du,ds).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et } \|\mu^{M_1 \otimes M_2}(h)\|_{L_2(P)} & \leq \left[\int_0^1 E((h_1(s) H_2(s))^2) ds \right]^{\frac{1}{2}} \\
& + \left[\int_0^1 E((h_2(s) H_1(s))^2) ds \right]^{\frac{1}{2}} + \|h(h_1 \otimes h_2)\|_{L_2(v \otimes P)}.
\end{aligned}$$

$$\text{or } E([h_i(s) H_j(s)]^2) \leq (E([h_i(s)]^4))^{\frac{1}{2}} E([H_j(s)]^4)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{mais } H_1(s) = \int_0^1 h(u,s) h_1(u) d\beta_u$$

$$\text{et } E((H_1(s))^4) \leq C \int_0^1 E([h(u,s) h_1(u)]^4) du$$

$$\text{d'où } \|\mu^{M_1 \otimes M_2}(h)\|_{L_2(P)} \leq C \{ \|h_2\|_{L_4(\lambda \otimes P)} \|h(h_1 \otimes 1)\|_{L_4(\lambda \otimes \lambda \otimes P)}$$

$$+ \|h_1\|_{L_4(\lambda \otimes P)} \|h(1 \otimes h_2)\|_{L_4(\lambda \otimes \lambda \otimes P)}$$

$$+ \|h(h_1 \otimes h_2)\|_{L_2(v \otimes P)}$$

Pour tout h , \mathcal{F}_Λ -mesurable on peut définir :

$$\begin{aligned}
\theta(h, h_1, h_2) & = \|h_2\|_{L_4(\lambda \otimes P)} \|h(h_1 \otimes 1)\|_{L_4(\lambda \otimes \lambda \otimes P)} \\
& + \|h_1\|_{L_4(\lambda \otimes P)} \|h(1 \otimes h_2)\|_{L_4(\lambda \otimes \lambda \otimes P)} + \|h(h_1 \otimes h_2)\|_{L_2(v \otimes P)}
\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{K}(h_1, h_2) = \{h : h \text{ } \mathcal{F}_\Lambda\text{-mesurable et } \theta(h, h_1, h_2) < +\infty\}$.

Alors les hypothèses du corollaire I.2.2 sont satisfaites d'où i) et ii).

3 - Corollaire

Soit h appartenant à $\mathcal{K}_b(\mathcal{P}_\Lambda)$ et tel que : pour s fixé les processus $(h(s, u))_{u \in]0,1]}$ et $(h(u, s))_{u \in]0,1]}$ sont \mathcal{P}_1 -mesurables. Alors il existe des processus $(H_i)_{i=1,2}$ appartenant à $L_4(T \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$ tels que :

$$\lambda \text{ p.p } H_2(s) = \int_0^s h(s, u) h_2(u) d\beta_u \quad H_1(s) = \int_0^s h(u, s) h_1(u) d\beta_u$$

$$\begin{aligned} \text{et } \mu^{M_1 \otimes M_2}(h) &= \int_0^1 h_1(s) H_2(s) d\beta_s + \int_0^1 h_2(s) H_1(s) d\beta_s \\ &+ \int_{[0,1]^2} h(u, s) (h_1 \otimes h_2)(u, s) v(du, ds). \end{aligned}$$

Démonstration

Si $h \in \mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$, h satisfait aux hypothèses du corollaire et :

$$\begin{aligned} \mu^{M_1 \otimes M_2}(h) &= \int_0^1 h_1(s) H_2(s) d\beta_s + \int_0^1 h_2(s) H_1(s) d\beta_s \\ &+ \int_{[0,1]^2} h(u, s) (h_1 \otimes h_2)(u, s) v(du, ds) \end{aligned}$$

$$\text{où } H_1(s) = \int_0^s h(u, s) h_1(u) d\beta_u \quad \text{et } H_2(s) = \int_0^s h(s, u) h_2(u) d\beta_u$$

Les processus $\left(\int_0^s h(u, s) h_1(u) d\beta_u \right)_{s \in [0,1]}$ et $\left(\int_0^s h(s, u) h_2(u) d\beta_u \right)_{s \in [0,1]}$

admettant une modification qui est \mathcal{P}_1 -mesurable, c'est celle que l'on utilise.

Soit h satisfaisant aux hypothèses du corollaire et soit $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite uniformément bornée de $\mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ qui converge simplement vers h :

Alors $(\mu^{M_1 \otimes M_2}(h_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L_2(P)$ vers $\mu^{M_1 \otimes M_2}(h)$.

Il est évident que :

$$\left(\int_{[0,1]^2} h_n(u, s) (h_1 \otimes h_2)(u, s) v(du, ds) \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}$$

$$\text{dans } L_2(P) \text{ vers } \int_{[0,1]^2} h(u, s) (h_1 \otimes h_2)(u, s) v(du, ds).$$

$$\text{Intéressons-nous à } \left(\int_0^1 h_1(s) \left(\int_0^s h_n(s, u) h_2(u) d\beta_u \right) d\beta_s \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\text{On pose } H_2^n(s) = \int_0^s h_n(s, u) h_2(u) d\beta_u.$$

On a : $(H_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'éléments de $L_4(T \times \Omega, \mathcal{F}_1, \lambda \otimes P)$

$$\text{et } \int_0^1 E[(H_2^n(s) - H_2^m(s))^4] ds \leq C \int_0^1 \int_0^1 E[(h_n(s, u) - h_m(s, u))^4 (h_2(u))^4] du ds.$$

$$\leq C \| (h_n - h_m)(h_2 \otimes 1) \|_{L_4(\lambda \otimes \lambda \otimes P)}^4.$$

Par conséquent la suite $(H_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L_4(T_1 \times \Omega, \mathcal{F}_1, \lambda \otimes P)$ soit H_2 la limite. D'autre part, pour chaque s :

$$\int_0^s h(s, u) h_2(u) d\beta_u$$

est bien définie et \mathcal{F}_s -mesurable, soit $H(s)$ ce processus, on a :

$$\begin{aligned} E[(H(s) - H_2^n(s))^2] &= E \left[\left(\int_0^s (h(s, u) - h_n(s, u)) h_2(u) d\beta_u \right)^2 \right] \\ &= \int_0^s E[(h(s, u) - h_n(s, u))^2 (h_2(u))^2] du. \end{aligned}$$

Par conséquent $(H_2^n(s))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $H(s)$ dans $L_2(P)$. Or il existe une sous suite $(H_2^{n(k)}(s))_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\lambda_{P,P} \lim_k E((H_2^{n(k)}(s) - H_2(s))^2) = 0.$$

Par conséquent pour presque tout s :

$$H_2(s) = H(s) = \int_0^s h(s, u) h_2(u) d\beta_u \quad (Pps)$$

Enfin

$$\begin{aligned} & [E((\int_0^1 h_1(s) H_2^n(s) d\beta_s - \int_0^1 h_1(s) H_2(s) d\beta_s)^2)]^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \|h_1\|_{L_4(\lambda \otimes P)} \|H_2^n - H_2\|_{L_4(\lambda \otimes P)} \end{aligned}$$

d'où le corollaire.

4 - Proposition

Soient h_1 et h_2 appartenant à $L_4(T_1 \times \Omega, \mathcal{F}_1, \lambda \otimes P)$.

Soit $\mathcal{K}(h_1, h_2) = \{g_1 \otimes g_2 : g_i \text{ est } \mathcal{F}_1 \text{ mesurable, } g_i h_i \in L_4(T_1 \times \Omega, \mathcal{F}_1, \lambda \otimes P)\}$.

Soit $\mathcal{K}^2(h_1, h_2) = \{gh : h \in \mathcal{K}_b^1(\mathcal{F}_\Lambda), g \in \mathcal{K}(h_1, h_2)\}$.

Soit $(M_i)_{i=1,2}$ les martingales telles que :

$$M_i(t) = \int_0^t h_i(s) d\beta_s.$$

Alors $\mu^{M_1 \otimes M_2}$ admet une extension sur $\mathcal{K}^2(h_1, h_2)$ notée également $\mu^{M_1 \otimes M_2}$, à valeurs dans $L_2(P)$ et telle que :

i) pour $gh \in \mathcal{K}^2(h_1, h_2)$:

$$\|\mu^{M_1 \otimes M_2}(gh)\|_{L_2(P)} \leq C \theta(h, g_1 h_1, g_2 h_2)$$

ii) Pour $g = g_1 \otimes g_2$ appartenant à $\mathcal{K}(h_1, h_2)$ l'application qui à $h \in \mathcal{K}_b^1(\mathcal{F}_\Lambda)$

associe $\mu^{M_1 \otimes M_2}(gh)$ définit une mesure stochastique sur $(T_2 \times \Omega, \mathcal{F}_\Lambda)$ à

valeurs dans $L_2(P)$ vérifiant :

$$\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2)h) = \mu^{N_1 \otimes N_2}(h)$$

où N_i est la martingale telle que :
$$N_i(t) = \int_0^t g_i(s) h_i(s) d\beta_s.$$

iii) Pour h appartenant à $\mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ l'application qui à $g_1 \otimes g_2$ associe

$\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) h)$ est additive au sens suivant :

* si $g_i = \sum_{k=1}^r g_{i,k}$ avec $g_{1,k} \otimes g_{2,k'} \in \mathcal{K}(h_1, h_2)$.

Alors :
$$\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) h) = \sum_{k,k'} \mu^{M_1 \otimes M_2}((g_{1,k} \otimes g_{2,k'}) h)$$

et possède la propriété de convergence dominée suivante :

* Pour toute suite $(g_1^n \otimes g_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{K}(h_1, h_2)$ telle que : pour chaque i la suite $(g_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers g_i en étant dominée par f_i et $f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{K}(h_1, h_2)$; la suite $(\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1^n \otimes g_2^n) h))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) h)$ dans $L_2(P)$.

Démonstration

Soient $(g_i)_{i=1,2}$ des éléments de $\mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_1)$ (alors $g_1 \otimes g_2$ appartient à $\mathcal{K}(h_1, h_2)$)
Soit h appartenant à $\mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$.

Il existe alors une partition $\{]a_{i-1}, a_i] \mid i=1 \dots n \}$ de $]0, 1]$ telle que :

$$g_k = \sum_{i=1}^n \gamma_i^k 1_{]a_{i-1}, a_i]} \quad k=1, 2$$

$$h = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} 1_{A_{ij}} \quad (A_{ij} =]a_{i-1}, a_i] \times]a_{j-1}, a_j]).$$

Le processus $(g_1 \otimes g_2) h$ s'écrit alors :

$$\sum_{ij} \gamma_i^1 \gamma_j^2 \alpha_{ij} 1_{A_{ij}}$$

On définit alors $\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) h)$ par :

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \gamma_i^1 \gamma_j^2 \alpha_{ij} \Delta_{A_{ij}} (M_1 \otimes M_2) &= \sum_{ij} \alpha_{ij} (\gamma_i^1 \int_{a_{i-1}}^{a_i} h_1(s) d\beta_s) (\gamma_j^2 \int_{a_{j-1}}^{a_j} h_2(s) d\beta_s) \\ &= \sum_{ij} \alpha_{ij} \left(\int_{a_{i-1}}^{a_i} g_1(s) h_1(s) d\beta_s \right) \left(\int_{a_{j-1}}^{a_j} g_2(s) h_2(s) d\beta_s \right) \end{aligned}$$

Les martingales N_1 et N_2 définies par :

$$N_i(t) = \int_0^t g_i(s) h_i(s) d\beta_s$$

satisfont aux hypothèses de la proposition II - 2 et on a :

$$\begin{aligned} \mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) h) &= \mu^{N_1 \otimes N_2}(h) \quad \text{par conséquent} \\ \|\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) h)\|_{L_2(P)} &= \|\mu^{M_1 \otimes M_2}(h)\|_{L_2(P)} \leq C\theta(h, h_1 g_1, h_2 g_2). \end{aligned}$$

Soit $g_1 \otimes g_2 \in \mathcal{K}(h_1, h_2)$ et soit, pour $h \in \mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$:

$$\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) h) = \mu^{N_1 \otimes N_2}(h).$$

Pour suite des hypothèses et de la proposition II- 2 on a également :

$$\|\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) h)\|_{L_2(P)} \leq C\theta(h, h_1 g_1, h_2 g_2).$$

et pour $h = \alpha 1_A \in \mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$

$$\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) h) = \mu^{N_1 \otimes N_2}(h) = \alpha \mu^{N_1 \otimes N_2}(1_{A \times \Omega}) = \alpha \mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) 1_{A \times \Omega})$$

Par conséquent l'application qui à $h \in \mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ associe $\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) h)$

définit une mesure stochastique sur $(]0,1] \times \Omega, \mathcal{P}_\Lambda)$. D'où i) et ii) :

Soit pour $i = 1, 2$ $g_i = \sum_{k=1}^r g_{i,k}$ avec $g_{1,k} \otimes g_{2,k'} \in \mathcal{K}(h_1, h_2)$

on a alors : $\forall (s, t) \in T_2$:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^s g_1(u) h_1(u) d\beta_u \right) \left(\int_0^t g_2(u) h_2(u) d\beta_u \right) \\ = \sum_{k,k'} \left(\int_0^s g_{1,k}(u) h_1(u) d\beta_u \right) \left(\int_0^t g_{2,k'}(u) h_2(u) d\beta_u \right) \end{aligned}$$

d'où la première assertion de iii).

Pour la seconde assertion de iii) il suffit de vérifier que pour $i = 1, 2$ et pour chaque

t de $]0, 1]$ la suite $(\int_0^t h_i(u) g_i^n(u) d\beta_u)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L_4(P)$ vers

$\int_0^t h_i(u) g_i(u) d\beta_u$. Ce qui résulte immédiatement des hypothèses.

5 - Corollaire.

Sous les hypothèses de la proposition II - 4 on a : $\forall h \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{F}_\Lambda)$:

$$\mu^{M_1 \otimes M_2}(h) = \mu^{\beta \otimes \beta}((h_1 \otimes h_2) h)$$

$$\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) h) = \mu^{\beta \otimes \beta}((h_1 g_1 \otimes h_2 g_2) h) = \mu^{\beta \otimes \beta}((g_1 \otimes g_2)(h_1 \otimes h_2) h).$$

6 - Proposition.

Soit h_1 et h_2 appartenant à $L_4(T_1 \times \Omega, \mathcal{F}_1, \lambda \otimes P)$.

Soit M et V les processus tels que :

$$M(t) = \int_0^t h_1(s) d\beta_s, \quad V(t) = \int_0^t h_2(s) ds.$$

Alors :

i) Le processus $M \otimes V$ définit une mesure stochastique sur $(T_2 \times \Omega, \mathcal{F}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

ii) Pour tout h appartenant à $\mathcal{H}_b(\mathcal{F}_\Lambda)$

$$\|\mu^{M \otimes V}(h)\|_{L_2(P)} \leq C\theta(h, h_1, h_2)$$

où C est une constante et θ la fonction introduite dans l'énoncé de la proposition II - 2.

iii) Pour tout h appartenant à $\mathcal{H}_b^1(\mathcal{F}_\Lambda)$ on a :

$$\mu^{M \otimes V}(h) = \int_0^1 h_1(s) \left(\int_0^s h(s, u) h_2(u) du \right) d\beta_s + \int_0^1 h_2(s) \left(\int_0^s h(u, s) h_1(u) d\beta_u \right) ds.$$

Démonstration.

Cette démonstration diffère peu de celle de la proposition II - 2. La différence provient de la représentation de $\Delta_A(M \otimes V)$.

Soit $A =]a_1, b_1] \times]a_2, b_2] = A_1 \times A_2$ alors

$$\Delta_A(M \otimes V) = \int_0^1 h_1(s) 1_{A_1}(s) \left(\int_0^s h_2(u) 1_{A_2}(u) du \right) d\beta_s \\ + \int_0^1 h_2(s) 1_{A_2}(s) \left(\int_0^s h_1(u) 1_{A_1}(u) d\beta_u \right) ds.$$

Soit h un élément de $\mathcal{H}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ tel que :

$$h = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} 1_{A_i \times A_j}.$$

On introduit le même processus H_1 qu'en II - 2 et le processus H_2 :

$$H_2(s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} 1_{A_i}(s) \int_0^s 1_{A_j}(u) h_2(u) du = \int_0^s h(s, u) h_2(u) du.$$

H_1 et H_2 appartiennent à $L_4(T \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$. Alors

$$\mu^{M \otimes V}(h) = \int_0^1 h_1(s) H_2(s) d\beta_s + \int_0^1 h_2(s) H_1(s) ds$$

$$\text{et } \|\mu^{M \otimes V}(h)\|_{L_2(P)} \leq C [\theta(h, h_1, h_2) - \|h(h_1 \otimes h_2)\|_{L_2(V \otimes P)}]$$

d'où la proposition.

7 - Remarques.

7.1 - En fait $M \otimes V$ définit une mesure stochastique sur une tribu prévisible plus grande que \mathcal{P}_Λ .

Soit pour $A =]a_1, b_1] \times]a_2, b_2]$ $\mathcal{G}_\Lambda^1(A) = \mathcal{F}_{a_1}$ et soit \mathcal{P}_Λ^1 la tribu prévisible engendrée par $\{A \times F, A \in \mathcal{A}_2, F \in \mathcal{G}_\Lambda^1(A)\}$.

Soit $h \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda^1)$. Alors, pour s fixé le processus $(h(u, s))_{u \in]0,1]}$ est \mathcal{P}_1 - mesurable et

$$H_1(s) = \int_0^s h(u, s) h_1(u) d\beta_u.$$

est bien défini

D'autre part le processus : $H_2(s) = \int_0^s h(s, u) h_2(u) du$ appartient à

$L_4(T \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$. On vérifie facilement que le résultat de la proposition II.6 reste valable si l'on remplace \mathcal{P}_Λ par \mathcal{P}_Λ^1 .

7.2 - On peut énoncer un corollaire analogue au corollaire II - 3.

8 - Proposition.

Soit h_1 et h_2 appartenant à $L_4([0,1] \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$. Soit $\mathcal{X}(h_1, h_2)$ et $\mathcal{X}^2(h_1, h_2)$ les espaces introduits en II - 4.

Soit M et V les processus tels que :

$$M(t) = \int_0^t h_1(s) d\beta_s, V(t) = \int_0^t h_2(s) ds.$$

Alors $\mu^{M \otimes V}$ admet une extension sur $\mathcal{X}^2(h_1, h_2)$ notée également $\mu^{M \otimes V}$, à valeurs dans $L_2(P)$ et telle que :

i) Pour $gh \in \mathcal{X}^2(h_1, h_2)$:

$$\|\mu^{M \otimes V}(gh)\|_{L_2(P)} \leq C \theta(h, g_1 h_1, g_2 h_2)$$

ii) Pour $g = g_1 \otimes g_2$ appartenant à $\mathcal{X}(h_1, h_2)$ l'application qui à $h \in \mathcal{X}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ associe $\mu^{M \otimes V}(gh)$ définit une mesure stochastique sur $(T_2 \times \Omega, \mathcal{P}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(P)$ vérifiant :

$$\mu^{M \otimes V}(gh) = \mu^{N \otimes W}(h)$$

où N et W sont les processus tels que :

$$N(t) = \int_0^t g_1(s) h_1(s) d\beta_s, W(t) = \int_0^t g_2(s) h_2(s) ds.$$

iii) Pour h appartenant à $\mathcal{X}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ l'application qui à $g = g_1 \otimes g_2$ associe $\mu^{M \otimes V}(gh)$ est additive au sens suivant :

$$* \text{ si } g_i = \sum_{k=1}^r g_{i,k} \text{ avec } g_{1,k} \otimes g_{2,k'} \in \mathcal{X}(h_1, h_2)$$

$$\text{alors } \mu^{M \otimes V}((g_1 \otimes g_2)h) = \sum_{k,k'} \mu^{M \otimes V}((g_{1,k} \otimes g_{2,k'})h)$$

et possède la propriété de convergence dominée suivante :

* Pour toute suite $(g_1^n \otimes g_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{X}(h_1, h_2)$ telle que : pour chaque i la suite $(g_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers g_i en étant dominée par f_i et $f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{X}(h_1, h_2)$, la suite $\mu^{M \otimes V}((g_1^n \otimes g_2^n)h)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers

$\mu^{M \otimes V}((g_1 \otimes g_2) h)$ dans $L_2(P)$.

Démonstration.

Il suffit d'utiliser les mêmes arguments que dans la démonstration de II - 4.

9 - Corollaire.

Sous les hypothèses de la proposition II - 6 et en notant λ le processus tel que $\lambda(t) = \lambda([0, t])$ on a :

$\forall h \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{F}_\Lambda)$:

$$\mu^{M \otimes V}(h) = \mu^{\beta \otimes \lambda}((h_1 \otimes h_2) h)$$

$$\mu^{M \otimes V}((g_1 \otimes g_2) h) = \mu^{\beta \otimes \lambda}((h_1 g_1 \otimes h_2 g_2) h) = \mu^{\beta \otimes \lambda}((g_1 \otimes g_2)(h_1 \otimes h_2) h).$$

10 - Remarque.

Soient M et V les processus introduits en II.6. Le processus $V \otimes M$ vérifie :

$$\forall A \in \mathcal{A}_2 : A = A_1 \times A_2 \quad \Delta_A(V \otimes M) = \Delta_{A_2 \times A_1}(M \otimes V).$$

Soit $h \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{F}_\Lambda)$ et soit h^* tel que : $h^*(u, s) = h(s, u)$.

Alors $h^* \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{F}_\Lambda)$ et : $\mu^{V \otimes M}(h) = \mu^{M \otimes V}(h^*)$.

Compte tenu du fait que $\theta(h, h_2, h_1) = \theta(h^*, h_1, h_2)$ $\mu^{V \otimes M}$ jouit des mêmes propriétés que $\mu^{M \otimes V}$ (pour la remarque 3-7-1 il faut considérer $\mathcal{G}_\Lambda^2(A) = \mathcal{F}_{a_2}$) et en particulier pour $h \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{F}_\Lambda)$

$$\mu^{V \otimes M}(h) = \int_0^1 h_1(s) \left(\int_0^s h(u, s) h_2(u) du \right) d\beta_s + \int_0^1 h_2(s) \left(\int_0^s h(s, u) h_1(u) d\beta_u \right) ds.$$

La proposition suivante est évidente.

11 - Proposition.

Soient h_1 et h_2 deux processus appartenant à $L_4([0,1] \times \Omega, \mathbb{B}(T) \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes P)$.

Soit $(V_i)_{i=1,2}$ les processus tels que :

$$V_i(t) = \int_0^t h_i(s) ds.$$

Alors

i) Le processus $V_1 \otimes V_2$ définit une mesure stochastique sur $(T_2 \times \Omega, \mathbb{B}(T_2) \otimes \mathcal{F})$ à valeurs dans $L_2(P)$.

ii) Pour tout $h \in \mathcal{H}_b(\mathcal{F}_\Lambda)$:

$$\|\mu^{V_1 \otimes V_2}(h)\|_{L_2(P)} \leq C\theta(h, h_1, h_2)$$

iii) Pour tout $h \in \mathcal{H}_b(\mathcal{F}_\Lambda)$

$$\mu^{V_1 \otimes V_2}(h) = \int_{[0,1]^2} h_1(u) h_2(s) h(u, s) du ds.$$

III - MESURES STOCHASTIQUES SUR $(T_2 \times \Omega, \mathcal{F}_\Lambda)$ ENGENDREES PAR $\beta \otimes \beta$.

1 - Mesures stochastiques engendrées par un processus X

La notion de mesures stochastiques engendrées par un processus $X = (X_t)_{t \in [0,1]^d}$ a été introduite en [1] et [2], pour établir sous certaines hypothèses une formule de Itô.

Plus précisément :

Soit $T = [0,1]^d$ muni de l'ordre partiel :

$$s = (s_i)_{i=1 \dots d} \leq t = (t_i)_{i=1 \dots d} \Leftrightarrow \forall i = 1 \dots d \quad s_i \leq t_i$$

on note $]s, t]$ le pavé : $\prod_{i=1}^d]s_i, t_i]$.

Soit \mathcal{F} une tribu prévisible sur $(T \times \Omega)$ et soit $X = (X_t)_{t \in [0,1]^d}$ un processus sur (Ω, \mathcal{F}) à valeurs réelles tel que :

i) Les trajectoires de X sont continues

ii) $\forall t, \forall b \in T : t < b$, la tribu engendrée par $\{(X_s)_{s \leq t}\}$ est une sous tribu de $\mathcal{F}(]t, b])$.

iii) $\exists m \in \mathbb{N}^* : \forall k = 1 \dots m$ le processus X^k définit une mesure stochastique, notée μ^k , sur $(T \times \Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans $L_p(P)$.

iv) $\forall k = 1 \dots m$ le processus $(\sup_{s \leq t} |X_s|^{k-m})_{t \in [0,1]^d}$ est μ^k -intégrable.

Un processus X de ce type est appelé $L_p(P)$ semi-martingale d'ordre m. Il existe alors des mesures stochastiques $(\mu^{(k)})_{k=1 \dots m}$ sur $(T \times \Omega, \mathcal{F})$, à valeurs dans $L_p(P)$ et telles que, $\forall h \in \mathcal{H}_b(\mathcal{F})$:

$$1-1 \quad \mu^{(k)}(h) = \sum_{r=1}^k (-1)^{k-r} C_k^r \mu^r(h X^{k-r})$$

$$1-2 \quad \mu^k(h) = \sum_{r=1}^k C_k^r \mu^{(r)}(h X^{k-r})$$

Les mesures stochastiques $(\mu^{(k)})_{k=1 \dots m}$ sont appelées mesures stochastiques engendrées par X ($\mu^{(1)} = \mu^1 = \mu^x$). Le processus $\beta \otimes \beta$ ne satisfait pas à la condition ii) quand $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\Lambda$ et ne satisfait pas à iii) quand $\mathcal{P} = \mathcal{P}_V$. Cependant les résultats établis en II vont permettre d'établir l'existence de mesures $(\mu^{(k)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que : $\mu^{(k)} = 0$ si $k \geq 5$ et vérifiant 1.1 et 1.2.

2 - Notations.

On note : \mathcal{E}_P l'espace vectoriel des fonctions φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui sont continues et dominées par un polynôme. On note $\mathcal{E}_{2,p}$ l'espace vectoriel des fonctions φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe C_2 et telles que : $\forall r \in \{0, 1, 2\} \varphi^{(r)} \in \mathcal{E}_P$.

Par conséquent, si $\varphi \in \mathcal{E}_{2,p}$, $\forall r \in \{0,1,2\}$ le processus $\varphi^{(r)}(\beta)$ appartient à $L_4(T_1, \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$. D'autre part si $(\varphi_i)_{i=1,2}$ et $(\psi_i)_{i=1,2}$ appartiennent à \mathcal{E}_P , le processus $\psi_1(\beta) \otimes \psi_2(\beta)$ appartient à $\mathcal{K}(\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta))$.

Pour Φ fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , on notera $\partial_{i,j} \Phi$ la dérivée partielle :

$$\frac{\partial^{i+j} \Phi}{\partial x^i \partial y^j} \text{ quand elle existe.}$$

3 - Propriété.

Soit $(X_k)_{k=1,2}$ des processus tels que :

$$\forall t \in [0,1] X_k(t) = \int_0^t \varphi_k(\beta_s) d\beta_s \text{ ou } \forall t \in [0,1] X_k(t) = \int_0^t \varphi_k(\beta_s) ds.$$

Le processus $X_1 \otimes X_2$ est de l'un des types considérés en II, pour $h \in \mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$

l'application de $\mathcal{E}_P \times \mathcal{E}_P$ dans $L_2(P)$ qui à (ψ_1, ψ_2) associe

$\mu^{X_1 \otimes X_2}((\psi_1(\beta) \otimes \psi_2(\beta)) h)$ est bilinéaire ; il existe alors une application linéaire

unique L de $\mathcal{E}_P \otimes \mathcal{E}_P$ (produit tensoriel algébrique) dans $L_2(P)$ telle que :

$$L(\psi_1 \otimes \psi_2) = \mu^{X_1 \otimes X_2}(\psi_1(\beta) \otimes \psi_2(\beta) h). \text{ Par conséquent } \forall \Psi = \sum_{k=1}^n (\psi_{1,k} \otimes \psi_{2,k})$$

on peut définir $\mu^{X_1 \otimes X_2}(\Psi(\beta, \beta) h)$ par : $\sum_{k=1}^n \mu^{X_1 \otimes X_2}((\psi_{1,k}(\beta) \otimes \psi_{2,k}(\beta)) h)$ et

l'application qui à $h \in \mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ associe $\mu^{X_1 \otimes X_2}(\Psi(\beta, \beta) h)$ définit une mesure stochastique sur $(T_2 \times \Omega, \mathcal{P}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(P)$.

4 - Proposition.

Soit $\Phi = \sum_{k=1}^n \varphi_{1,k} \otimes \varphi_{2,k}$ où $\varphi_{i,k} \in \mathcal{E}_{2,p}$.

Alors le processus $\Phi(\beta, \beta)$ définit une mesure stochastique μ sur $(T_2 \times \Omega, \mathcal{F}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(P)$ et telle que :

$\forall h \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{F}_\Lambda)$

$$\begin{aligned} \mu(h) = & \mu^{\beta \otimes \beta}(h \partial_{11} \Phi(\beta, \beta)) + \frac{1}{2} [\mu^{\beta \otimes \lambda}(h \partial_{12} \Phi(\beta, \beta)) + \mu^{\lambda \otimes \beta}(h \partial_{21} \Phi(\beta, \beta))] \\ & + \frac{1}{4} \mu^{\lambda \otimes \lambda}(h \partial_{22} \Phi(\beta, \beta)). \end{aligned}$$

Démonstration.

La formule de Itô donne, pour $i = 1, 2$ et $k = 1 \dots n$

$$\varphi_{i,k}(\beta_t) = \int_0^t \varphi'_{i,k}(\beta_s) d\beta_s + \frac{1}{2} \int_0^t \varphi''_{i,k}(\beta_s) ds$$

$$\text{soit } M_{i,k}(t) = \int_0^t \varphi'_{i,k}(\beta_s) d\beta_s, \quad V_{i,k}(t) = \int_0^t \varphi''_{i,k}(\beta_s) ds.$$

$$\text{Alors } \Phi(\beta, \beta) = \sum_{k=1}^n \varphi_{1,k}(\beta) \otimes \varphi_{2,k}(\beta)$$

$$= \sum_{k=1}^n [(M_{1,k} \otimes M_{2,k}) + \frac{1}{2} [(M_{1,k} \otimes V_{2,k}) + (V_{1,k} \otimes M_{2,k})] + \frac{1}{4} (V_{1,k} \otimes V_{2,k})]$$

les propositions II - 2, II- 6, II- 11 et la remarque II-10 impliquent que Φ définit une mesure stochastique μ sur $(T_2 \times \Omega, \mathcal{F}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(P)$.

Les corollaires II-5, II-9, la proposition II-11 et la remarque II-10 impliquent que $\forall h \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{F}_\Lambda)$

$$\begin{aligned} \mu(h) = & \sum_{k=1}^n \mu^{\beta \otimes \beta}(h(\varphi'_{1,k}(\beta) \otimes \varphi'_{2,k}(\beta))) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\mu^{\beta \otimes \lambda}(h(\varphi'_{1,k}(\beta) \otimes \varphi''_{2,k}(\beta))) + \mu^{\lambda \otimes \beta}(h(\varphi''_{1,k}(\beta) \otimes \varphi'_{2,k}(\beta)))] \\ & + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \mu^{\lambda \otimes \lambda}(h(\varphi''_{1,k}(\beta) \otimes \varphi''_{2,k}(\beta))). \end{aligned}$$

La propriété III - 3 implique l'expression annoncée pour $\mu(h)$.

5 - Théorème.

Soit $\Phi = \sum_{k=1}^n \varphi_{1,k} \otimes \varphi_{2,k}$ où $\varphi_{i,k} \in \mathcal{E}_{2,p}$.

Alors

5 - 1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ le processus $(\Phi(\beta, \beta))^n$ définit une mesure stochastique μ^n sur $(T_2 \times \Omega, \mathcal{P}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(P)$.

5 - 2. On peut définir des mesures stochastiques $(\mu^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ par la formule III - 1.1 et la formule III 1.2 reste valide.

5 - 3 On a $\mu^{(1)} = \mu^1, \mu^{(n)} = 0 \quad \forall n \geq 5$ et :

$\forall h \in \mathcal{X}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$

$$\begin{aligned} \mu^{(2)}(h) &= 2\mu^{\beta \otimes \beta}(h \partial_{1,0}\Phi(\beta, \beta) \partial_{0,1}\Phi(\beta, \beta)) + \mu^{\beta \otimes \lambda}(h [2\partial_{1,1}\Phi \partial_{0,1}\Phi + \partial_{1,0}\Phi \partial_{0,2}\Phi](\beta, \beta)) \\ &+ \mu^{\lambda \otimes \beta}(h [2\partial_{1,1}\Phi \partial_{1,0}\Phi + \partial_{0,1}\Phi \partial_{2,0}\Phi](\beta, \beta)) + \frac{1}{2}\mu^{\lambda \otimes \lambda}(h [2\partial_{0,1}\Phi \partial_{2,1}\Phi + 2\partial_{1,0}\Phi \partial_{1,2}\Phi \\ &+ 2(\partial_{1,1}\Phi)^2 + \partial_{2,0}\Phi \partial_{0,2}\Phi](\beta, \beta)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^{(3)}(h) &= 3\mu^{\beta \otimes \lambda}(h (\partial_{0,1}\Phi)^2 \partial_{1,0}\Phi)(\beta, \beta) + 3\mu^{\lambda \otimes \beta}(h (\partial_{1,0}\Phi)^2 \partial_{0,1}\Phi)(\beta, \beta) \\ &+ \frac{3}{2}\mu^{\lambda \otimes \lambda}(h [4\partial_{1,1}\Phi \partial_{0,1}\Phi \partial_{1,0}\Phi + (\partial_{0,1}\Phi)^2 \partial_{2,0}\Phi + (\partial_{1,0}\Phi)^2 \partial_{0,2}\Phi](\beta, \beta)) \\ \mu^{(4)}(h) &= 6\mu^{\lambda \otimes \lambda}(h [(\partial_{1,0}\Phi)^2 (\partial_{0,1}\Phi)^2](\beta, \beta)). \end{aligned}$$

En particulier si $\Phi(x, y) = xy, \Phi(\beta, \beta) = \beta \otimes \beta$

$$\begin{aligned} \text{et } \mu^{(2)}(h) &= 2\mu^{\beta \otimes \beta}(h(\beta \otimes \beta)) + 2\mu^{\beta \otimes \lambda}(h(\beta \otimes 1)) + 2\mu^{\lambda \otimes \beta}(h(1 \otimes \beta)) \\ &+ \mu^{\lambda \otimes \lambda}(h). \end{aligned}$$

$$\mu^{(3)}(h) = 3\mu^{\beta \otimes \lambda}(h(\beta^2 \otimes \beta)) + 3\mu^{\lambda \otimes \beta}(h(\beta \otimes \beta^2)) + 6\mu^{\lambda \otimes \lambda}(h(\beta \otimes \beta))$$

$$\mu^{(4)}(h) = 6\mu^{\lambda \otimes \lambda}(h(\beta^2 \otimes \beta^2)).$$

Démonstration.

Φ^n est du même type que Φ , 5 - 1 alors de la proposition III - 4. La propriété III - 3 et la définition de μ^n impliquent que :

$\forall p \in \mathbb{N}^* \mu^n(h \Phi^p)$ est bien défini, que l'application qui à $h \in \mathcal{X}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ associe $\mu^n(h \Phi^p)$ définit une mesure stochastique et que :

$$\mu^n(h \Phi^p(\beta, \beta)) = \mu^{\beta \otimes \beta}(h(\Phi^p \partial_{1,1}\Phi^n)(\beta, \beta)) + \frac{1}{2}\mu^{\beta \otimes \lambda}(h(\Phi^p \partial_{1,2}\Phi^n)(\beta, \beta))$$

$$+ \frac{1}{2} \mu^{\lambda \otimes \beta} (h (\Phi^p \partial_{2,1} \Phi^n) (\beta, \beta)) + \frac{1}{4} \mu^{\lambda \otimes \lambda} (h (\Phi^p \partial_{2,2} \Phi^n) (\beta, \beta)).$$

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on peut définir une mesure stochastique $\mu^{(k)}$ sur $(T_2 \times \Omega, \mathcal{P}_\Lambda)$ telle que :

$$\forall h \in \mathcal{X}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda) \quad \mu^{(k)}(h) = \sum_{n=1}^k (-1)^{k-n} C_k^n \mu^n (h \Phi^{k-n} (\beta, \beta)).$$

On vérifie facilement que la formule III - 1.2 reste valide.

Si $k=1$ on a évidemment $\mu^{(1)} = \mu^1$.

Pour $k \geq 2$

$$\begin{aligned} \mu^{(k)}(h) &= \mu^{\beta \otimes \beta} (h \sum_{n=1}^k (-1)^{k-n} C_k^n (\Phi^{k-n} \partial_{1,1} \Phi^n) (\beta, \beta)) \\ &+ \frac{1}{2} \mu^{\beta \otimes \lambda} (h \sum_{n=1}^k (-1)^{k-n} C_k^n (\Phi^{k-n} \partial_{1,2} \Phi^n) (\beta, \beta)) \\ &+ \frac{1}{2} \mu^{\lambda \otimes \beta} (h \sum_{n=1}^k (-1)^{k-n} C_k^n (\Phi^{k-n} \partial_{2,1} \Phi^n) (\beta, \beta)) \\ &+ \frac{1}{4} \mu^{\lambda \otimes \lambda} (h \sum_{n=1}^k (-1)^{k-n} C_k^n (\Phi^{k-n} \partial_{2,2} \Phi^n) (\beta, \beta)) \end{aligned}$$

d'où, après simplification 5.3.

6 - Remarque

Soit $(N_k)_{k=1,2}$, deux semi martingales telles que :

$$N_k(t) = \int_0^t h_k(s) d\beta_s + \int_0^t g_k(s) ds$$

où h_k et g_k appartiennent à $L_p(T_1 \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$, ($\forall p \geq 1$).

Alors $\forall \varphi \in \mathcal{E}_p$, $\varphi(N_k)$, $\varphi(N_k) h_k$, $\varphi(N_k) g_k$ appartiennent à $L_4(T_1 \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$.

Soit $\Phi = \sum_{k=1}^n \varphi_{1,k} \otimes \varphi_{2,k}$, $\varphi_{i,k} \in \mathcal{E}_{2,p}$.

En utilisant les mêmes arguments que dans la proposition 4 et le théorème 5, on vérifie facilement que le processus $\Phi(N_1, N_2)$ définit une mesure stochastique μ sur $(T_2 \times \Omega, \mathcal{P}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(P)$, que 5 - 2 reste valide, que $\mu^{(n)} = 0$ pour

$n \geq 5$ et que $\mu^{(n)}$ pour $n=1, 2, 3, 4$, s'exprime à l'aide des mesures $\mu^{\beta \otimes \beta}$, $\mu^{\beta \otimes \lambda}$, $\mu^{\lambda \otimes \beta}$, $\mu^{\lambda \otimes \lambda}$, ou des mesures $\mu^{N_1 \otimes N_2}$, $\mu^{N_1 \otimes \langle N_2 \rangle}$, $\mu^{\langle N_1 \rangle \otimes N_2}$

$\mu^{<N_1> \otimes <N_2>}$ ($<N_k>_t = \int_0^t h_k^2(s) ds$) et dans ce cas l'expression de $\mu^{(n)}$ est

du type des expressions écrites en 5 - 3 en remplaçant $\beta \otimes \beta$ par $N_1 \otimes N_2$, $\beta \otimes \lambda$ par $N_1 \otimes <N_2>$, $\lambda \otimes \beta$ par $<N_1> \otimes N_2$, $\lambda \otimes \lambda$ par $<N_1> \otimes <N_2>$, (β, β) par (N_1, N_2) .

IV INTEGRALE DE SKOROHOD

Les références sont [7], [8], [9], [12].

1 - Définitions et Notations.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}, (\beta_t)_{t \in [0,1]}, P)$ un mouvement Brownien standard à valeurs réelles.

1.1 - Intégrale stochastique multiple.

Si $m \in \mathbb{N}^*$ on sait définir l'intégrale stochastique multiple de $f_m \in L_2([0,1]^m, \lambda^{\otimes m})$, cette intégrale notée $I_m(f_m)$ appartient à $L_2(P)$ et est égale à $m! J_m(f_m)$ où $J_m(f_m)$ est l'intégrale stochastique itérée de f_m sur

$$C_m = \{t = (t_i)_{i=1 \dots m} : t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1\}.$$

Pour $m = 0$ I_0 est l'application identité de l'ensemble des fonctions constantes de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . On a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} I_m \text{ est linéaire} \\ E(I_m(f_m) I_n(g_n)) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ m! \langle f_m, g_m \rangle_{L_2(\lambda^{\otimes m})} \text{ si } m = n \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Si $X \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $X = \sum_m I_m(f_m)$ où $I_0(f_0) = f_0 = E(X)$ et on a :

$$\|X\|_{L_2(P)}^2 = (E(X))^2 + \sum_{m \geq 1} m! \|f_m\|_{L_2(\lambda^{\otimes m})}^2.$$

1.2 - Intégrale de Skorohod.

Soit $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ un processus appartenant à $L_2([0,1] \times \Omega, B([0,1]) \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes P)$. Alors il existe une famille de fonctions $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que :

i) $f_m \in L_2([0,1]^{m+1}, \lambda^{\otimes m+1})$

ii) $\forall t \in [0,1], f_m(t_1 \dots t_m, t)$ est une fonction symétrique en $(t_1 \dots t_m)$

$$\text{iii) } X_t = \sum_m I_m (f_m (\cdot, t)).$$

On note $\overset{o}{f}_m$ la symétrisée de f_m en tant que fonction de $m+1$ variables.

Si $(\sum_{m=0}^n (I_{m+1} (\overset{o}{f}_m)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L_2(P)$ on définit $\delta(X)$: intégrale de

Skorohod de X par :

$$\delta(X) = \sum_{m \geq 0} I_{m+1} (\overset{o}{f}_m).$$

δ est linéaire, le domaine de δ est l'ensemble des processus X tels que :

$$\sum_{m \geq 0} (m+1)! \| \overset{o}{f}_m \|_{L_2(\lambda^{\otimes m+1})}^2 < +\infty;$$

il contient en particulier l'ensemble des processus X tels que

$$\sum_{m \geq 0} (m+1)! \| f_m \|_{L_2(\lambda^{\otimes m+1})}^2 < +\infty$$

et l'espace $L_2(T_1 \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$, de plus dans ce cas :

$$\delta(X) = \int_0^1 X_s d\beta_s.$$

1.3 - Opérateur de dérivation.

On note $\mathcal{D}_{2,1}$ l'espace vectoriel des éléments X de $L_2(P)$ tels que :
 $X = \sum_{m \geq 0} I_m (f_m)$ et $\sum_{m \geq 0} (m+1)! \| f_m \|_{L_2(\lambda^{\otimes m})}^2 < +\infty.$

Pour $X \in \mathcal{D}_{2,1}$ soit :

$$D_t X = \sum_{m \geq 1} m I_{m-1} (f_m (\cdot, t))$$

on a :

$$E \left(\int_0^1 (D_t X)^2 dt \right) = \sum_{m \geq 1} m m! \| f_m \|_{L_2(\lambda^{\otimes m})}^2$$

D est un opérateur de dérivation.

1.4 - Fonctionnelles "smooth".

Soit $\mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des fonctions Φ de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{E}_{∞} et telles que la croissance de Φ et de ses dérivées partielles soit au plus

polynomiale. La $k^{\text{ième}}$ différentielle de Φ sera notée $D^k \Phi$. Une fonctionnelle smooth est une variable aléatoire de la forme :

$$\Phi(\beta_{t_1}, \dots, \beta_{t_n}) \text{ où } \Phi \in \mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^n).$$

La classe \mathcal{S} des fonctionnelles "smooth" est contenue dans $L_2(P)$ et dans $\mathcal{D}_{2,1}$ et on a

$$D_t(\Phi(\beta_{t_1}, \dots, \beta_{t_n})) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(\beta_{t_1}, \dots, \beta_{t_n}) 1_{[0, t_i]}(t).$$

Soit $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et Φ des éléments de $\mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^d)$ on dira que la suite $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers Φ dans $\mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^d)$ si $\forall k \in \mathbb{N}$ la suite $(D^k \Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $D^k \Phi$.

2 - Propriétés.

On note \mathcal{L}_2 l'ensemble des processus X appartenant à $L_2([0,1] \times \Omega, \mathcal{B}([0,1]) \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes P)$ tels que :

- $X_t \in \mathcal{D}_{2,1} \quad \lambda_{p,p}$
- il existe une version mesurable de $D_s X_t$ telle que

$$E \left(\int_{[0,1]^2} (D_s X_t)^2 ds dt \right) < +\infty$$

\mathcal{L}_2 est un sous espace vectoriel du domaine de δ qui s'identifie à :

$$\{X \in L_2([0,1] \times \Omega, \mathcal{B}([0,1]) \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes P) : X_t = \sum_m I_m(f_m(\cdot, t))\}$$

et on a la propriété :

$$\text{et } \left\{ \sum_{m \geq 0} (m+1)! \|f_m\|_{L_2(\lambda^{\otimes m+1})}^2 < +\infty \right\}$$

2.1 - si $X \in \mathcal{L}_2$ alors :

$$E((\delta(X))^2) = \int_0^1 E(X_t^2) dt + \int_{[0,1]^2} E(D_s X_t D_t X_s) ds dt.$$

Les propriétés suivantes seront utilisées par la suite

2.2 - Si X appartient au domaine de δ et Y appartient à $\mathcal{D}_{2,1}$ alors :

$$\delta(YX) = Y\delta(X) - \int_0^1 (D_t Y) X_t dt$$

en ce sens que YX appartiennent au domaine de δ si et seulement si le membre de droite de l'égalité appartient à $L_2(P)$.

2.3 - Si X appartient à \mathcal{L}_2 et f est $\mathbb{B}([0,1])$ -mesurable et bornée alors Xf appartient à \mathcal{L}_2 et $D_t[(Xf)(s)] = f(s)D_t X(s)$.

2.4 - Si X appartient à \mathcal{L}_2 , alors pour tout $p \geq 2$ il existe une constante C_p telle que :

$$\|\delta(X)\|_p \leq C_p \left\{ \left[\int_0^1 [E(X_t)]^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} + \left\| \left(\int_{[0,1]^2} (D_s X_t)^2 ds dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \right\}.$$

V UNE AUTRE REPRESENTATION DE PRODUITS DE MESURES STOCHASTIQUES.

Dans ce paragraphe, on donne une autre représentation de certaines mesures du type $M_1 \otimes M_2$, $M \otimes V$ et $V \otimes M$ (notations du paragraphe II) en utilisant l'intégrale de Skorohod, ce qui introduit une restriction de l'ensemble des processus intégrables considérés en II, mais permet de définir $\mu^\beta \otimes \beta$ ($h \Phi(\beta, \beta)$) pour $h \in \mathcal{K}_b^1(\mathcal{B})$, $\Phi \in \mathcal{E}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$.

1 - Lemme.

Si $h \in \mathcal{K}_b^1(\mathcal{B})$ et $\Phi \in \mathcal{E}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$.

Alors

1.1 - $\forall s \in [0,1]$ le processus $(h(u, s) \Phi(\beta_u, \beta_s) 1]0, s](u))_{u \in]0,1]}$ appartient à \mathcal{L}_2 .

1.2 - Le processus $(\delta(h(\cdot, s) \Phi(\beta_\cdot, \beta_s) 1]0, s](\cdot)))_{s \in]0,1]}$ admet une modification appartenant à $L_2(T_1 \times \Omega, \mathcal{F}_1, \lambda \otimes P)$.

Démonstration.

Soit $X(\cdot, s) = (h(u, s) \Phi(\beta_u, \beta_s) 1]0, s](u))_{u \in]0,1]}$ h étant déterministe et borné $X(u, s) \in \mathcal{D}_{2,1}$.

$D_v X(u, s) = h(u, s) 1]0, s](u) (\partial_{1,0} \Phi(\beta_u, \beta_s) 1]0, u](v) + \partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) 1]0, s](v))$
d'où 1.1.

Soit $h = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} 1_{A_i \times A_j}$ $A_i, A_j \in \mathcal{A}_1$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$.

δ étant linéaire on a :

$$\delta(X(\cdot, s)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} 1_{A_j}(s) \delta(\Phi(\beta_\cdot, \beta_s) 1_{A_i \cap]0, s]}(\cdot)).$$

Pour prouver 1.2 il suffit alors de prouver que : si $A \in \mathcal{A}_1$ le processus $(\delta(\Phi(\beta_\cdot, \beta_s) 1_{A \cap]0, s]}(\cdot)))_{s \in]0,1]}$ est adapté à $(\mathcal{F}_s)_{s \in [0,1]}$ et admet une modification continue.

L'adaptation est évidente. Pour montrer l'existence d'une modification continue on va prouver l'existence d'une constante K telle que :

$$E([\delta(\Phi(\beta_\cdot, \beta_t) 1_{A \cap]0, t]}(\cdot)) - \delta(\Phi(\beta_\cdot, \beta_s) 1_{A \cap]0, s]}(\cdot))]^4 \leq K(t-s)^2.$$

Le critère de Kolmogorov permet alors de conclure. Soit $s < t$
 $\delta(\Phi(\beta_\cdot, \beta_t) 1_{A \cap]0, t]}(\cdot)) - \delta(\Phi(\beta_\cdot, \beta_s) 1_{A \cap]0, s]}(\cdot))$
 $= \delta([\Phi(\beta_\cdot, \beta_t) - \Phi(\beta_\cdot, \beta_s)] 1_{A \cap]0, t]}(\cdot)) + \delta(\Phi(\beta_\cdot, \beta_s) 1_{A \cap]s, t]}(\cdot)).$

Les hypothèses faites sur Φ impliquent que :

$$E(\sup_{u, s} (\Phi(\beta_u, \beta_s))^{2p}) < +\infty \quad \forall p \geq 0$$

$$E(\sup_{u, v, s} |D_v \Phi(\beta_u, \beta_s)|^{2p}) < +\infty \quad \forall p \geq 0$$

La propriété IV - 2.4 donne pour $p = 4$

$$E((\delta(\Phi(\beta_\cdot, \beta_s) 1_{A \cap]s, t]}(\cdot))^4) \leq K_1 \left\{ \left(\int_0^1 [E(\Phi(\beta_u, \beta_s) 1_{A \cap]s, t]}(u))]^2 du \right)^2 \right.$$

$$\left. + E \left(\int_{[0,1]^2} (D_v \Phi(\beta_u, \beta_s))^2 1_{A \cap]s, t]}(u) dudt \right)^2 \right\} \leq K'_1 (t-s)^2.$$

Pour l'autre terme, on note que Φ appartenant à $\mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^2)$ il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et une constante C

$$|\Phi(x, y) - \Phi(x, y_0)| \leq C |y - y_0| (1 + x^{2q} + y^{2q} + y_0^{2q}).$$

Par conséquent

$$|\Phi(\beta_u, \beta_t) - \Phi(\beta_u, \beta_s)| \leq C |\beta_t - \beta_s| (1 + 3 \text{Sup}_v |\beta_v|^{2q})$$

$\partial_{0,1} \Phi$ appartiennent également à $\mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^2)$ d'où en appliquant la propriété IV - 2.4 avec $p = 4$.

$$\begin{aligned} & E [(\delta([\Phi(\beta_u, \beta_t) - \Phi(\beta_u, \beta_s)] 1_{A \cap]0, t]}(\cdot)))^4] \\ & \leq K_1 \left\{ \left(\int_0^1 (E([\Phi(\beta_u, \beta_t) - \Phi(\beta_u, \beta_s)] 1_{A \cap]0, t]}(u)))^2 du \right)^2 \right. \\ & + E \left[\int_{[0,1]^2} (D_v(\Phi(\beta_u, \beta_t) - \Phi(\beta_u, \beta_s)))^2 1_{A \cap]0, t]}(u) du dv \right]^2 \\ & \leq K'_1 \left\{ (E[(\beta_t - \beta_s)^2 (1 + \text{Sup}_v (\beta_v)^{4q})])^2 \right. \\ & + E \left(\int_{[0,1]^2} [\partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_t) 1_{[0, t]}(v) - \partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) 1_{[0, s]}(v)]^2 du dt \right)^2 \\ & \left. \leq K''_1 (t - s)^2. \right\} \end{aligned}$$

2 - Proposition.

Soit $\mathcal{X} = \{\Phi(\beta, \beta) = (\Phi(\beta_u, \beta_s))_{(u, s) \in T_2}, \Phi \in \mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^2)\}$

Soit $\mathcal{X}^2 = \{h \Phi(\beta, \beta) : h \in \mathcal{X}_b^1(\mathcal{B}), \Phi(\beta, \beta) \in \mathcal{X}\}$.

Alors $\mu^{\beta \otimes \beta}$ admet une extension sur \mathcal{X}^2 notée également $\mu^{\beta \otimes \beta}$, à valeurs dans $L_2(P)$ et telle que :

$$\begin{aligned} 2.1 - \text{ Pour } \Phi(\beta, \beta) &= \sum_{k=1}^n (\varphi_{1, k} \otimes \varphi_{2, k})(\beta, \beta), \varphi_{i, k} \in \mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}), h \in \mathcal{X}_b^1(\mathcal{B}) \\ \mu^{\beta \otimes \beta}(h \Phi(\beta, \beta)) &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 \varphi_{1, k}(\beta_s) \left(\int_0^s h(s, u) \varphi_{2, k}(\beta_u) d\beta_u \right) d\beta_s \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_0^1 \varphi_{2, k}(\beta_s) \left(\int_0^s h(u, s) \varphi_{1, k}(\beta_u) d\beta_u \right) d\beta_s \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_{[0,1]^2} \varphi_{1, k}(\beta_u) \varphi_{2, k}(\beta_s) h(u, s) v(du, ds). \end{aligned}$$

2.2 - Pour $h \Phi(\beta, \beta) \in \mathcal{K}^2$:

$$\begin{aligned} \text{i) } \mu^{\beta \otimes \beta}(h \Phi(\beta, \beta)) &= \int_0^1 \delta([\Phi(\beta, \beta_s) h(\cdot, s) + \Phi(\beta_s, \beta) h(s, \cdot)] 1_{]0, s]}(\cdot)) d\beta_s \\ &+ \int_0^1 \left(\int_0^s \partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) + \partial_{1,0} \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, u) du \right) d\beta_s \\ &+ \int_{[0,1]^2} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) v(du, ds) \end{aligned}$$

et

$$\text{ii) } \|\mu^{\beta \otimes \beta}(h \Phi(\beta, \beta))\|_{L_2(P)} \leq C \theta^*(\Phi, h)$$

où C est une constante et :

$$\begin{aligned} \theta^*(\Phi, h) &= \|h \Phi(\beta, \beta)\|_{L_2(\lambda \otimes \lambda \otimes P)} + \|h \Phi(\beta, \beta)\|_{L_2(v \otimes P)} \\ &+ \|h\|_{\mathbb{R}^2} \|D^1 \Phi(\beta, \beta)\|_{L_2(\lambda \otimes \lambda \otimes P)}. \end{aligned}$$

2.3 - Pour $\Phi(\beta, \beta) \in \mathcal{K}$ l'application qui à h appartenant à $\mathcal{K}_b^1(\mathfrak{B})$ associe $\mu^{\beta \otimes \beta}(h \Phi(\beta, \beta))$ définit une mesure stochastique sur $(T_2 \times \Omega, \mathfrak{B})$ à valeurs dans $L_2(P)$ (c'est-à-dire une mesure vectorielle sur $(T_2, \mathfrak{B}(T_2))$).

2.4 - Pour $h \in \mathcal{K}_b^1(B)$ l'application qui à $\Phi(\beta, \beta)$ associe $\mu^{\beta \otimes \beta}(h \Phi(\beta, \beta))$ est linéaire et vérifie la propriété suivante :

Pour toute suite $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge simplement vers Φ dans $\mathfrak{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^2)$, $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\|D^1 \Phi_n\|_{\mathbb{R}^2})_{n \in \mathbb{N}}$ étant dominées par un polynôme, la suite $(\mu^{\beta \otimes \beta}(h \Phi_n(\beta, \beta)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mu^{\beta \otimes \beta}(h \Phi(\beta, \beta))$ dans $L_2(P)$.

Démonstration.

2.3 et 2.4 résultent immédiatement de la linéarité de δ et de μ^{β} ainsi que de 2.2 - ii).

$$\text{Soit } \Phi(x, y) = \sum_{k=1}^n (\varphi_{1,k} \otimes \varphi_{2,k})(x, y), \varphi_{i,k} \in \mathfrak{E}_{\infty, p}(\mathbb{R})$$

$$\text{alors } \mu^{\beta \otimes \beta}(h \Phi(\beta, \beta)) = \sum_{k=1}^n \mu^{\beta \otimes \beta}(h(\varphi_{1k} \otimes \varphi_{2k})(\beta, \beta))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \left[\int_0^1 \varphi_{1,k}(\beta_s) \left(\int_0^s h(s,u) \varphi_{2,k}(\beta_u) d\beta_u \right) d\beta_s \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \varphi_{2,k}(\beta_s) \left(\int_0^s h(u,s) \varphi_{1,k}(\beta_u) d\beta_u \right) d\beta_s \right] \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \int_{[0,1]^2} h(u,s) \varphi_{1,k}(\beta_u) \varphi_{2,k}(\beta_s) v(du, ds)
\end{aligned}$$

d'après II . 2, II . 5 et III . 3.

Or le processus $(h(s, u) \varphi_{2,k}(\beta_u) 1]_{0,s}](u))_{u \in]0,1]}$ appartient à $L_4(]0, 1] \times \Omega, \mathcal{F}, \lambda \otimes P)$, par conséquent ce processus appartient au domaine de δ d'où :

$$\delta(h(s, \cdot) \varphi_{2,k}(\beta_\cdot) 1]_{0,s}](\cdot)) = \int_0^1 h(s, u) \varphi_{2,k}(\beta_u) 1]_{0,s}](u) d\beta_u$$

appartient à $L_4(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

$\varphi_{1,k}(\beta_s)$ appartient à $\mathcal{D}_{2,1}$ et $D_u \varphi_{1,k}(\beta_s) = \varphi'_{1,k}(\beta_s) 1]_{0,s}](u)$ or $\varphi_{1,k}(\beta_s)$ appartient à $L_4(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et

$$\int_0^1 E([D_u \varphi_{1,k}(\beta_s)] \varphi_{2,k}(\beta_u)]^2) du < +\infty.$$

La propriété IV . 2 . 2 implique alors que :

le processus $(h(s, u) \varphi_{1,k}(\beta_s) \varphi_{2,k}(\beta_u) 1]_{0,s}](u))_{u \in]0,1]}$ appartient au domaine de δ et :

$$\begin{aligned}
&\varphi_{1,k}(\beta_s) \int_0^1 h(s, u) \varphi_{2,k}(\beta_u) 1]_{0,s}](u) d\beta_u \\
&= \delta(h(s, \cdot) (\varphi_{1,k} \otimes \varphi_{2,k})(\beta_s, \beta) 1]_{0,s}](\cdot)) + \int_0^s (\varphi'_{1,k} \otimes \varphi_{2,k})(\beta_s, \beta_u) h(s, u) du
\end{aligned}$$

h et $\varphi_{1,k} \otimes \varphi_{2,k}$ satisfont aux hypothèses du lemme V . 1 par conséquent

$$\int_0^1 \delta (h (s, \cdot) (\varphi_{1, k} \otimes \varphi_{2, k}) (\beta_s, \beta_\cdot) 1_{]0, s]}(\cdot)) d\beta_s$$

est bien définie et appartient à $L_2(P)$.

Le processus $\left(\int_0^s (\varphi'_{1, k} \otimes \varphi_{2, k}) (\beta_s, \beta_u) h (s, u) du \right)_{s \in]0, 1]}$ appartient à

$L_2(T_1 \times \Omega, \mathcal{F}_1, \lambda \otimes P)$ par conséquent

$$\int_0^1 \left(\int_0^s (\varphi'_{1k} \otimes \varphi_{2k}) (\beta_s, \beta_u) h (s, u) du \right) d\beta_s$$

est bien définie et appartient à $L_2(P)$.

Le même raisonnement s'applique à :

$$\varphi_{2, k} (\beta_s) \int_0^1 h (s, u) \varphi_{1, k} (\beta_u) 1_{]0, s]}(u) d\beta_u$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu^{\beta \otimes \beta} (h \Phi (\beta, \beta)) &= \int_0^1 \delta ([\Phi (\beta, \beta_s) h (\cdot, s) + \Phi (\beta_s, \beta_\cdot) h (s, \cdot)] 1_{]0, s]}(\cdot)) d\beta_s \\ &+ \int_0^1 \left(\int_0^s (\partial_{0,1} \Phi (\beta_u, \beta_s) h (u, s) + \partial_{1,0} \Phi (\beta_s, \beta_u) h (u, s)) du \right) d\beta_s \\ &+ \int_{[0,1]^2} h (u, s) \Phi (\beta_u, \beta_s) v (du, ds) \end{aligned}$$

d'où 2.2 - i) dans ce cas.

Si $h \Phi (\beta, \beta) \in \mathcal{X}^2$ d'après le lemme V.1 le premier terme de 2.2 - i) a bien un sens. On vérifie facilement que le processus

$$\left(\int_0^s (\partial_{0,1} \Phi (\beta_u, \beta_s) h (u, s) + \partial_{0,1} \Phi (\beta_s, \beta_u) h (s, u)) du \right)_{s \in]0, 1]}$$

appartient à $L_2(T_1 \times \Omega, \mathcal{F}_1, \lambda \otimes P)$ par conséquent le deuxième terme est bien défini également. Le troisième ne pose pas de problème.

Pour 2.2 - ii) on a :

$$\begin{aligned}
E \left(\left[\int_0^1 \partial \left([\Phi(\beta_u, \beta_s) h(\cdot, s) + \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, \cdot)] 1_{]0,s]}(\cdot) \right) d\beta_s \right]^2 \right) \\
= \int_0^1 E \left(\left(\delta \left([\Phi(\beta_u, \beta_s) h(\cdot, s) + \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, \cdot)] 1_{]0,s]}(\cdot) \right) \right)^2 \right) ds.
\end{aligned}$$

Soit $X(\cdot, s) = [\Phi(\beta_u, \beta_s) h(\cdot, s) + \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, \cdot)] 1_{]0,s]}(\cdot)$.

La propriété IV - 2.1 et le lemme V - 1 impliquent que :

$$E \left(\left(\delta \left(X(\cdot, s) \right) \right)^2 \right) \leq \int_0^1 E \left(\left(X(u, s) \right)^2 \right) du + \int_{[0,1]^2} E \left(\left(D_v X(u, s) \right)^2 \right) du dv$$

or

$$\begin{aligned}
D_v X(u, s) &= (\partial_{1,0} \Phi(\beta_u, \beta_s) 1_{[0,u]}(v) + \partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) 1_{[0,s]}(v)) h(u, s) 1_{]0,s]}(u) \\
&+ (\partial_{1,0} \Phi(\beta_s, \beta_u) 1_{[0,s]}(v) + \partial_{0,1} \Phi(\beta_s, \beta_u) 1_{[0,u]}(v)) h(s, u) 1_{]0,s]}(u)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
E \left(\left(\int_0^1 \delta \left(X(\cdot, s) \right) d\beta_s \right)^2 \right) &\leq K \left\{ \int_{[0,1]^2} E \left(\left(\Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) \right)^2 \right) du ds \right. \\
&+ \left. \int_{[0,1]^2} E \left(\left([\partial_{1,0} \Phi(\beta_u, \beta_s)]^2 + [\partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s)]^2 \right) (h(u, s))^2 \right) du ds \right\}
\end{aligned}$$

on a également :

$$\begin{aligned}
E \left(\left(\int_0^1 \left(\int_0^s [\partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) + \partial_{1,0} \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, u)] du \right) d\beta_s \right)^2 \right) \\
= \int_0^1 E \left(\left(\int_0^s [\partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) + \partial_{1,0} \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, u)] du \right)^2 \right) ds \\
\leq K' \int_{[0,1]^2} E \left(\left([\partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s)]^2 + [\partial_{1,0} \Phi(\beta_u, \beta_s)]^2 \right) (h(u, s))^2 \right) du ds
\end{aligned}$$

d'où 2.2 - ii).

3 - Proposition.

$\mu^\beta \otimes \lambda$ admet une extension sur \mathcal{X}^2 notée également $\mu^\beta \otimes \lambda$, à valeurs dans $L_2(P)$ et telle que :

3 - 1 Pour $\Phi(\beta, \beta) = \sum_{k=1}^n (\varphi_{1,k} \otimes \varphi_{2,k})(\beta, \beta)$, $\varphi_{i,k} \in C_{\infty,p}(\mathbb{R})$ $h \in \mathcal{X}_b^1(\mathcal{B})$

$$\begin{aligned} \mu^{\beta \otimes \lambda}(h \Phi(\beta, \beta)) &= \sum_k \int_0^1 \varphi_{1,k}(\beta_s) \left(\int_0^s h(s, u) \varphi_{2,k}(\beta_u) du \right) d\beta_s \\ &+ \sum_k \int_0^1 \varphi_{2,k}(\beta_s) \left(\int_0^s h(u, s) \varphi_{1,k}(\beta_u) d\beta_u \right) ds. \end{aligned}$$

3 - 2 Pour $h \Phi(\beta, \beta) \in \mathcal{X}^2$:

$$\begin{aligned} \text{i) } \mu^{\beta \otimes \lambda}(h \Phi(\beta, \beta)) &= \int_0^1 \left(\int_0^s \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, u) du \right) d\beta_s \\ &+ \int_0^1 \delta(\Phi(\beta, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{]0, s]}(\cdot)) ds + \int_0^1 \left(\int_0^s \partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) du \right) ds \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \|\mu^{\beta \otimes \lambda}(h \Phi(\beta, \beta))\|_{L_2(P)} \leq C [\theta^*(\Phi, h) - \|h \Phi(\beta, \beta)\|_{L_2(v \otimes P)}]$$

3 - 3 $\mu^{\beta \otimes \lambda}$ jouit des propriétés 2.3 et 2.4.

Démonstration.

Les arguments utilisés sont les mêmes que pour la proposition V - 2.

3 - 3 résulte immédiatement de 3 - 2.

Si $\Phi \in \mathcal{X}$ et $h \in \mathcal{X}_b^1(\mathcal{B})$ le processus $\left(\int_0^s \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, u) du \right)_{s \in]0,1]}$ appartient à

$L_2(T_1 \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$, par conséquent $\int_0^1 \left(\int_0^s \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, u) du \right) d\beta_s$ est bien

$$\begin{aligned} & \text{définie et } E \left(\left(\int_0^1 \left(\int_0^s \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, u) du \right) d\beta_s \right)^2 \right) \\ &= \int_0^1 E \left(\left(\int_0^s \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, u) du \right)^2 \right) ds \leq \int_{[0,1]^2} E \left((\Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, u))^2 \right) du ds. \end{aligned}$$

De plus si $\Phi = \sum_{k=1}^n \varphi_{1,k} \otimes \varphi_{2,k}$

$$\int_0^1 \left(\int_0^s \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, u) du \right) d\beta_u = \sum_{k=1}^n \int_0^1 \varphi_{1,k}(\beta_s) \left(\int_0^s \varphi_{2,k}(\beta_u) h(s, u) du \right) d\beta_s.$$

Les mêmes arguments que dans la proposition précédentes permettent d'affirmer que :

$\forall h \Phi(\beta, \beta) \in \mathcal{K}^2$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \delta(\Phi(\beta_s, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{]u, s]}(\cdot)) ds \text{ est bien définie et :} \\ & E \left(\left[\int_0^1 \delta(\Phi(\beta_s, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{]0, s]}(\cdot)) ds \right]^2 \right) \leq \int_0^1 E \left([\delta(\Phi(\beta_s, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{]0, s]}(\cdot))]^2 \right) ds \\ & \leq K \theta^*(\Phi, h). \end{aligned}$$

De plus si $\Phi_k = \varphi_{1,k} \otimes \varphi_{2,k}$ $\varphi_{ik} \in \mathcal{C}_{\infty, p}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_{2,k}(\beta_s) \left(\int_0^s h(u, s) \varphi_{1,k}(\beta_u) d\beta_u \right) ds &= \int_0^1 \delta(\Phi_k(\beta_s, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{]0, s]}(\cdot)) ds \\ &+ \int_0^1 \left(\int_0^s \partial_{0,1} \Phi_k(\beta_u, \beta_s) h(u, s) du \right) ds. \end{aligned}$$

Enfin

$$E \left(\left[\int_0^1 \left(\int_0^s \partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) du \right) ds \right]^2 \right) \leq \int_{[0,1]^2} E \left((\partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s))^2 \right) du ds$$

d'où 3.1 et 3.2.

On a évidemment une proposition analogue pour $\mu^\lambda \otimes \beta$.

4 - Corollaire.

$\mu^\lambda \otimes \beta$ admet une extension sur \mathcal{X}^2 notée également $\mu^\lambda \otimes \beta$, à valeurs dans $L_2(P)$ et telle que :

4 - 1 Pour $\Phi(\beta, \beta) = \sum_{k=1}^n (\varphi_{1,k} \otimes \varphi_{2,k})(\beta, \beta)$ $\varphi_{i,k} \in \mathcal{E}_{\infty,p}(\mathbb{R})$, et $h \in \mathcal{X}_b^1(\mathcal{B})$

$$\begin{aligned} \mu^{\lambda \otimes \beta}(h\Phi(\beta, \beta)) &= \sum_k \int_0^1 \varphi_{1,k}(\beta_s) \left(\int_0^s \varphi_{2,k}(\beta_u) h(s, u) d\beta_u \right) ds \\ &+ \sum_k \int_0^1 \varphi_{2,k}(\beta_s) \left(\int_0^s \varphi_{1,k}(\beta_u) h(u, s) du \right) d\beta_s. \end{aligned}$$

4 - 2 Pour $h\Phi(\beta, \beta) \in \mathcal{X}^2$:

$$\begin{aligned} \text{i) } \mu^{\lambda \otimes \beta}(h\Phi(\beta, \beta)) &= \int_0^1 \left(\int_0^s \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) du \right) d\beta_s \\ &+ \int_0^1 \delta(\Phi(\beta_s, \beta_s) h(s, \cdot) 1_{]0, s]}(\cdot)) ds + \int_0^1 \int_0^s \partial_{1,0} \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, u) du ds. \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \|\mu^{\lambda \otimes \beta}(h\Phi(\beta, \beta))\|_{L_2(P)} \leq C \theta^*(\Phi, h)$$

4 - 3 $\mu^{\lambda \otimes \beta}$ jouit des propriétés 2.3 et 2.4.

Remarque.

On a prouvé que si $\Phi \in \mathcal{E}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$ alors les processus $(\mu^{\beta \otimes \beta}(1_{]0,a] \times]0,b]} \Phi(\beta, \beta))_{(a,b) \in T_2}$, $(\mu^{\beta \otimes \lambda}(1_{]0,a] \times]0,b]} \Phi(\beta, \cdot))_{(a,b) \in T_2}$ et $(\mu^{\lambda \otimes \beta}(1_{]0,a] \times]0,b]} \Phi(\cdot, \beta))_{(a,b) \in T_2}$ définissent une mesure vectorielle sur $(T_2, \mathcal{B}(T_2))$. Les propositions 5 et 7 suivantes montrent que l'on peut définir l'intégrale stochastique de certains processus par rapport à ces processus.

5 - Proposition.

Soient ψ et Φ appartenant à $\mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^2)$. Soit $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de partitions de $]0, 1[$ dont le pas tend vers zéro et telles que $\tau_n = \{A_i^n =]a_i^n, a_{i+1}^n], i = 0, \dots, i(n)\}$.

Soit $\psi^n(u, s) = \sum_i \sum_j \psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) 1_{A_i^n \times A_j^n}(u, s)$, soit $h = 1_A$, $A \in \mathcal{A}_2$; et soit $\mu(\psi^n h) = \sum_{i,j} \psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) \mu^{\beta \otimes \beta}(1_{A_i^n \times A_j^n} h \Phi(\beta, \beta))$.

Alors la suite $(\mu(\psi^n h))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L_2(P)$ vers $\mu^{\beta \otimes \beta}(\psi(\beta, \beta) \Phi(\beta, \beta) h)$.

6 - Remarques.

6 - 1 La proposition V - 5 prouve que l'intégrale stochastique $\mu^{\beta \otimes \beta}(h \Phi(\beta, \beta))$ est l'extension naturelle au sens de Itô de l'intégrale stochastique définie sur

$L_2(T_2 \times \Omega, \mathcal{F}_\Lambda, \lambda \otimes \lambda \otimes P)$.

6 - 2 La proposition V - 5 prouve également que cette intégrale stochastique possède la propriété d'itération.

Démonstration de la proposition.

On note que :

$$1_{A_i^n \times A_j^n}(u, s) 1_{]0, s]}(u) = \begin{cases} 1_{A_i^n \times A_j^n}(u, s) & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

et qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que : $|\psi^n(u, s)| \leq C(1 + \sup_v |\beta_v|^{2q})$.

On a :

$$\begin{aligned} \mu(\psi^n h) &= \sum_i \sum_j \psi(\beta_{\alpha_j^n}, \beta_{\alpha_i^n}) \left[\int_0^1 1_{A_j^n}(s) \delta(\Phi(\beta_s, \beta_s)) h(\cdot, s) 1_{A_i^n}(\cdot) 1_{]0, s]}(\cdot) d\beta_s \right. \\ &+ \int_0^1 1_{A_i^n}(s) \delta(\Phi(\beta_s, \beta_s)) h(s, \cdot) 1_{A_j^n}(\cdot) 1_{]0, s]}(\cdot) d\beta_s \\ &+ \left. \int_0^1 1_{A_j^n}(s) \left(\int_0^s \partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) 1_{A_i^n}(u) du \right) d\beta_s \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 1_{A_i^n}(s) \left(\int_0^s \partial_{1,0} \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, u) 1_{A_j^n}(u) du \right) d\beta_s] \\
& + \int_{[0,1]^2} h(u, s) \psi^n(u, s) \Phi(\beta_u, \beta_s) v(du, ds).
\end{aligned}$$

Le dernier terme ne pose pas de problème.

Pour les autres termes, en raison de la symétrie il suffit d'en examiner deux :

$$\begin{cases}
A_1^n = \sum_j \sum_{i \leq j} \psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) \int_0^1 1_{A_j^n}(s) \delta(\Phi(\beta_{\cdot}, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{A_i^n}(\cdot) 1_{]0, s]}(\cdot)) d\beta_s \\
A_2^n = \sum_j \sum_{i \leq j} \psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) \int_0^1 1_{A_j^n}(s) \left(\int_0^s \partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) 1_{A_i^n}(u) du \right) d\beta_s \\
= \int_0^1 \int_0^s (\psi^n(u, s) \partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) du) d\beta_s.
\end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned}
& E \left(\left(A_2^n - \int_0^1 \left(\int_0^s \psi(\beta_u, \beta_s) \partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) du \right) d\beta_s \right)^2 \right) \\
& = \int_0^1 E \left(\left[\int_0^s [\psi^n(u, s) - \psi(\beta_u, \beta_s)] \partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) du \right]^2 \right) ds \\
& \leq \int_{[0,1]^2} E \left([\psi^n(u, s) - \psi(\beta_u, \beta_s)]^2 (\partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s))^2 \right) du ds
\end{aligned}$$

par conséquent $(A_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L_2(P)$ vers

$$\int_0^1 \left(\int_0^s \psi(\beta_u, \beta_s) \partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) du \right) d\beta_s.$$

Pour A_1^n

$$A_1^n = \int_0^1 \sum_j \sum_{i \leq j} \psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) 1_{A_j^n}(s) \delta(\Phi(\beta_{\cdot}, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{A_i^n}(\cdot) 1_{]0, s]}(\cdot)) d\beta_s$$

or $\psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) \in \mathcal{D}_{2,1}$ et :

$$D_v \psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) = \partial_{1,0} \psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) 1_{[0, \alpha_i^n]}(v) + \partial_{0,1} \psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) 1_{[0, \alpha_j^n]}(v).$$

La propriété IV - 2 - 4 implique pour $p = 4$:

$$E((\delta(\Phi(\beta_{\cdot}, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{A_i^n}(\cdot) 1_{]0, s]}(\cdot)))^4) \leq C_4 \int_0^1 E((\Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) 1_{A_i^n}(u))^4) du$$

$$+ \int_0^1 E([\partial_{1,0} \Phi(\beta_u, \beta_s)]^4 + [\partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s)]^4) (h(u, s))^4 1_{A_i^n \cap]0, s]}(u) du.$$

De plus $\psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) \in L_4(P)$, $D_v \psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) \in L_4(\lambda \otimes P)$

et $\Phi(\beta_{\cdot}, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{A_i^n}(\cdot) \in L_4(\lambda \otimes P)$.

La propriété IV - 2 - 2 implique alors que :

$$\begin{aligned} & \psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) \delta(\Phi(\beta_{\cdot}, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{A_i^n}(\cdot) 1_{]0, s]}(\cdot)) \\ &= \delta(\psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) \Phi(\beta_{\cdot}, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{A_i^n}(\cdot) 1_{]0, s]}(\cdot)) \\ &+ \int_0^1 \partial_{0,1} \psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) 1_{[0, \alpha_j^n]}(v) 1_{A_i^n}(v) \Phi(\beta_v, \beta_s) h(v, s) 1_{]0, s]}(\cdot) dv \end{aligned}$$

$$\text{d'où } A_1^n = \int_0^1 \delta(\psi^n(\cdot, s) \Phi(\beta_{\cdot}, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{]0, s]}(\cdot)) d\beta_s$$

$$+ \int_0^1 \left(\int_0^s \sum_{i < j} \partial_{0,1} \psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) 1_{A_i^n}(v) 1_{A_j^n}(s) \Phi(\beta_v, \beta_s) h(v, s) dv \right) d\beta_s$$

on vérifie facilement que les processus intégrés sont bien \mathcal{P}_1 - mesurables.

Soit, $\Gamma^n(v, s) = \sum_{i \neq j} \partial_{0,1} \psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) 1_{A_i^n \times A_j^n}(v, s)$ la suite $(\Gamma^n(v, s))_{n \in \mathbb{N}}$ converge

vers $\partial_{0,1} \psi(\beta_v, \beta_s)$ sur l'ensemble : $\{(v, s, \omega) : v \neq s\}$ et il existe $C \in \mathbb{R}_+$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que :

$$|\Gamma^n(v, s)| \leq C(1 + \text{Sup}_v |\beta_v|^{2q}).$$

$$\text{Alors } A_1^n = \int_0^1 \delta(\psi^n(\cdot, s) \Phi(\beta_\cdot, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{]0, s]}(\cdot)) d\beta_s \\ + \int_0^1 \left(\int_0^s \Gamma^n(v, s) \Phi(\beta_v, \beta_s) h(v, s) dv \right) d\beta_s.$$

Les propriétés de Γ^n impliquent que la suite

$$\int_0^1 \left(\int_0^s \Gamma^n(v, s) \Phi(\beta_v, \beta_s) h(v, s) dv \right) d\beta_s \Big|_{n \in \mathbb{N}}$$

converge dans $L_2(P)$ vers $\int_0^1 \left(\int_0^s \partial_{0,1} \psi(\beta_v, \beta_s) \Phi(\beta_v, \beta_s) h(v, s) dv \right) d\beta_s.$

Pour l'autre terme $\psi^n(\cdot, s) \Phi(\beta_\cdot, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{]0, s]}(\cdot)$ appartient à \mathcal{L}_2 alors

(IV - 2 - 1)

$$E \left(\delta \left((\psi^n(\cdot, s) - \psi(\beta_\cdot, \beta_s)) \Phi(\beta_\cdot, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{]0, s]}(\cdot) \right) \right)^2 \\ \leq \int_0^1 E \left((\psi^n(u, s) - \psi(\beta_u, \beta_s))^2 (\Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s))^2 \right) du \\ + \int_{[0,1]^2} E \left[[D_v \left((\psi^n(u, s) - \psi(\beta_u, \beta_s)) \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) 1_{]0, s]}(u) \right)]^2 \right] du dv$$

et on a $D_v \left[(\psi^n(u, s) - \psi(\beta_u, \beta_s)) \Phi(\beta_u, \beta_s) \right]$

$$= \sum_{ij} 1_{A_i^n \times A_j^n}(u, s) \left[\partial_{1,0} \psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) 1_{[0, \alpha_i^n]}(v) + \partial_{0,1} \psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) 1_{[0, \alpha_j^n]} \right] \Phi(\beta_u, \beta_s) \\ - (\partial_{1,0} \psi(\beta_u, \beta_s) 1_{[0, u]}(v) + \partial_{0,1} \psi(\beta_u, \beta_s) 1_{[0, s]}(v)) \Phi(\beta_u, \beta_s)$$

$$+ (\psi^n(u, s) - \psi(\beta_u, \beta_s)) \left[\partial_{1,0} \Phi(\beta_u, \beta_s) 1_{[0, u]}(v) + \partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) 1_{[0, s]}(v) \right]$$

d'où on déduit que la suite :

$$\left(\int_0^1 \delta(\psi^n(\cdot, s) \Phi(\beta_\cdot, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{]0, s]}(\cdot)) d\beta_s \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge dans } L_2(P) \text{ vers} \\ \int_0^1 \delta(\psi(\cdot, s) \Phi(\beta_\cdot, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{]0, s]}(\cdot)) d\beta_s.$$

Par conséquent la suite $(\mu(\psi^n h))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L_2(P)$ vers :

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \delta(\psi(\beta_s, \beta_s) \Phi(\beta_s, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{]0, s]}(\cdot)) d\beta_s \\
& + \int_0^1 \delta(\psi(\beta_s, \beta_s) \Phi(\beta_s, \beta_s) h(s, \cdot) 1_{]0, s]}(\cdot)) d\beta_s, \\
& + \int_0^1 \left(\int_0^s (\partial_{0,1} \psi(\beta_u, \beta_s)) \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) du \right) d\beta_s \\
& + \int_0^1 \left(\int_0^s \psi(\beta_u, \beta_s) \partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) du \right) d\beta_s \\
& + \int_0^1 \left(\int_0^s (\partial_{1,0} \psi(\beta_s, \beta_u)) \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, u) du \right) d\beta_s \\
& + \int_0^1 \left(\int_0^s \psi(\beta_s, \beta_u) \partial_{1,0} \Phi(\beta_s, \beta_u) h(u, s) du \right) d\beta_s \\
& + \int_{[0,1]^2} \psi(\beta_u, \beta_s) \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) v(du, ds) = \mu^{\beta \otimes \beta}((\psi \Phi)(\beta, \beta) h).
\end{aligned}$$

7 - Proposition.

Sous les mêmes hypothèses que pour la proposition 5.

Soit $\mu(h \psi^n) = \sum_i \sum_j \psi(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n}) \mu^{\beta \otimes \lambda}(1_{A_i^n \times A_j^n} \Phi(\beta, \beta) h)$.

Alors la suite $(\mu(h \psi^n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L_2(P)$ vers $\mu^{\beta \otimes \lambda}(\psi(\beta, \beta) \Phi(\beta, \beta) h)$.

On a un résultat analogue pour $\mu^{\lambda \otimes \beta}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mu(h \psi^n) &= \sum_i \sum_{j \leq i} \psi(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n}) \int_0^1 1_{A_i^n}(s) \left(\int_0^s \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, u) 1_{A_j^n}(u) du \right) d\beta_s \\
&+ \sum_j \sum_{i \leq j} \psi(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n}) \int_0^1 1_{A_j^n}(s) \delta(\Phi(\beta_s, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{A_i^n}(\cdot) 1_{]0, s]}(\cdot)) ds
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^1 \int_0^s \psi^n(u, s) \partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) du ds.$$

Le premier terme s'écrit aussi :

$$\int_0^1 \left(\int_0^s \psi^n(s, u) \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, u) du \right) d\beta_s.$$

Le deuxième terme :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sum_j \sum_{i \leq j} \psi(\beta_{\alpha_i^n}, \beta_{\alpha_j^n}) 1_{A_j^n}(s) \delta(\Phi(\beta_{\cdot}, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{A_i^n}(\cdot) 1_{]0, s]}(\cdot)) ds \\ &= \int_0^1 \delta(\psi_n(\cdot, s) \Phi(\beta_{\cdot}, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{]0, s]}(\cdot)) ds \\ &+ \int_0^1 \left(\int_0^s \Gamma^n(u, s) \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) du \right) ds. \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes arguments que pour la démonstration de la proposition V - 5 on prouve que la suite $(\mu(\psi^n h))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L_2(P)$ vers :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\int_0^s \psi(\beta_s, \beta_u) \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, u) du \right) d\beta_s \\ &+ \int_0^1 \delta(\psi(\beta_{\cdot}, \beta_s) \Phi(\beta_{\cdot}, \beta_s) h(\cdot, s) 1_{]0, s]}(\cdot)) ds \\ &+ \int_0^1 \int_0^s (\partial_{0,1} \psi(\beta_u, \beta_s)) \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) du ds \\ &+ \int_0^1 \int_0^s \psi(\beta_u, \beta_s) \partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u, s) du ds = \mu^{\beta \otimes \lambda}((\psi \Phi)(\beta, \beta) h). \end{aligned}$$

VI - MESURES VECTORIELLES ENGENDREES PAR DES FONCTIONNELLES D'ORDRE 2 DU BROWNIEN

1 - Théorème.

Soit Φ appartenant à $\mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^2)$.

Alors le processus $\Phi(\beta, \beta) = (\Phi(\beta_u, \beta_s))_{(u, s) \in T_2}$ définit sur $\mathfrak{B}(T_2)$ une mesure vectorielle notée μ^Φ , à valeurs dans $L_2(P)$ telle que :

$$1 - 1 - \forall A \in \mathcal{A}_2 \quad \mu^\Phi(1_A) = \Delta_A(\Phi(\beta, \beta)).$$

$$1 - 2 - \forall h \in \mathcal{H}_b^1(B)$$

$$\mu^\Phi(h) = \mu^{\beta \otimes \beta}(h \partial_{1,1} \Phi(\beta, \beta))$$

$$+ \frac{1}{2} [\mu^{\beta \otimes \lambda}(h \partial_{1,2} \Phi(\beta, \beta)) + \mu^{\lambda \otimes \beta}(h \partial_{2,1} \Phi(\beta, \beta))] + \frac{1}{4} \mu^{\lambda \otimes \lambda}(h \partial_{2,2} \Phi(\beta, \beta)).$$

$$1 - 3 - \|\mu^\Phi(h)\|_{L_2(P)} \leq C \theta^{**}(\Phi, h) \quad \text{où } C \text{ est une constante et}$$

$$\theta^{**}(\Phi, h) = \|h\|_{D^2 \Phi(\beta, \beta)} \|_{L_2(\lambda \otimes \lambda \otimes P)} + \|h\|_{D^3 \Phi(\beta, \beta)} \|_{L_2(\lambda \otimes \lambda \otimes P)} \\ + \|h\|_{D^4 \Phi(\beta, \beta)} \|_{L_2(\lambda \otimes \lambda \otimes P)} + \|h \partial_{1,1} \Phi(\beta, \beta)\|_{L_2(v \otimes P)}.$$

Démonstration.

Soit $\Phi = \sum_{k=1}^n \varphi_{1k} \otimes \varphi_{2k}$, la proposition III - 4 implique que Φ définit une mesure vectorielle μ^Φ sur $(T_2, \mathfrak{B}(T_2))$ telle que $\mu^\Phi(1_A) = \Delta_A(\Phi(\beta, \beta))$ et que $\mu^\Phi(h)$ admet la représentation donnée en 1 - 2.

Si Φ appartient à $\mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^2)$, les dérivées partielles de tous ordres de Φ appartiennent également à $\mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^2)$, le membre de droite de 1 - 2 est donc bien défini d'après V - 2, V - 3 et V - 4 et sa norme dans $L_2(P)$ admet la majoration donnée en 1 - 3.

Pour prouver que $\mu^\Phi(1_A)$ donné par 1 - 2 est égal à $\Delta_A(\Phi(\beta, \beta))$, il suffit de remarquer que : $\forall \Phi \in \mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^2)$ il existe une suite $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{k(n)} \varphi_{1,k}^n \otimes \varphi_{2,k}^n, \quad \varphi_{i,k}^n \in \mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \text{ la suite } (\partial_{i,j} \Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge simplement vers $\partial_{i,j} \Phi$ en étant dominée par un polynôme.

La majoration 1 - 3 implique alors que la suite $(\mu^{\Phi_n}(h))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mu^\Phi(h)$ dans $L_2(P)$ mais $\mu^{\Phi_n}(1_A) = \Delta_A(\Phi_n(\beta, \beta))$, par conséquent $\mu^\Phi(1_A) = \Delta_A(\Phi(\beta, \beta))$.

2 - Corollaire.

Soit Φ appartenant à $\mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^2)$, alors : $\forall A \in \mathcal{A}_2$

$$\begin{aligned} \Delta_A \Phi(\beta, \beta) &= \int_0^1 \delta([1_A(\cdot, s) \partial_{1,1} \Phi(\beta, \beta_s) + 1_A(s, \cdot) \partial_{1,1} \Phi(\beta_s, \beta)] 1_{]0, s[}(\cdot)) d\beta_s \\ &+ \int_0^1 \left[\int_0^s \partial_{1,2} \Phi(\beta_u, \beta_s) 1_A(u, s) + \partial_{2,1} \Phi(\beta_s, \beta_u) 1_A(s, u) du \right] d\beta_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\int_0^s \partial_{1,2} \Phi(\beta_s, \beta_u) 1_A(s, u) + \partial_{2,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) 1_A(u, s) du \right] d\beta_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 \delta([1_A(\cdot, s) \partial_{1,2} \Phi(\beta, \beta_s) + 1_A(s, \cdot) \partial_{2,1} \Phi(\beta_s, \beta)] 1_{]0, s[}(\cdot)) ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^s [1_A(u, s) \partial_{1,3} \Phi(\beta_u, \beta_s) + 1_A(s, u) \partial_{3,1} \Phi(\beta_s, \beta_u)] du ds \\ &+ \frac{1}{4} \int_{[0,1]^2} 1_A(u, s) \partial_{2,2} \Phi(\beta_u, \beta_s) du ds + \int_{[0,1]^2} \partial_{1,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) 1_A(u, s) v(du, ds). \end{aligned}$$

3 - Théorème.

Soit Φ appartenant à $\mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^2)$, alors

2 - 1 - Φ engendre des mesures vectorielles $(\mu^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ telles que $\mu^{(1)} = \mu \Phi$, $\mu^{(k)} \equiv 0$ si $k \geq 5$, $\mu^{(2)}$, $\mu^{(3)}$ et $\mu^{(4)}$ sont données par les formules III - 5 - 3.

2 - 2 - Soit ψ appartenant à $\mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R})$ alors :

$$\forall h \in \mathcal{X}_b^1(\mathbb{B})$$

$$\begin{aligned} \mu^{\psi \circ \Phi}(h) &= \mu^{\Phi}(h \psi' \circ \Phi(\beta, \beta)) + \frac{1}{2} \mu^{(2)}(h \psi'' \circ \Phi(\beta, \beta)) \\ &+ \frac{1}{3!} \mu^{(3)}(h \psi''' \circ \Phi(\beta, \beta)) + \frac{1}{4!} \mu^{(4)}(h \psi^{iv} \circ \Phi(\beta, \beta)). \end{aligned}$$

Démonstration.

Si Φ appartient à $\mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^2)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ Φ^n appartient également à $\mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^2)$ et $\mu^{\Phi^n} \equiv \mu^n$ est donnée par VI - 1 - 2.

D'autre part V - 5 et V - 7 impliquent que $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^*$ $\mu^n(\Phi^m h)$ est bien défini et :

$$\begin{aligned} \mu^n (\Phi^m h) &= \mu^{\beta \otimes \beta} (h (\Phi^m \partial_{1,1} \Phi^n) (\beta, \beta)) + \frac{1}{2} \mu^{\beta \otimes \lambda} (h (\Phi^m \partial_{1,2} \Phi^n) (\beta, \beta)) \\ &+ \frac{1}{2} \mu^{\lambda \otimes \beta} (h (\Phi^m \partial_{2,1} \Phi^n) (\beta, \beta)) + \frac{1}{4} \mu^{\lambda \otimes \lambda} (h (\Phi^m \partial_{2,2} \Phi^n) (\beta, \beta)). \end{aligned}$$

Par conséquent on peut définir sur $(T_2, \mathfrak{B}(T_2))$ des mesures vectorielles $(\mu^{(k)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ par la formule III - 1 - 2 :

$$\begin{aligned} \mu^{(k)}(h) &= \sum_{r=1}^k (-1)^{k-r} C_k^r \mu^r (h \Phi^{k-r} (\beta, \beta)) \\ &= \sum_{r=1}^k (-1)^{k-r} C_k^r \mu^{\beta \otimes \beta} (h (\Phi^{k-r} \partial_{1,1} \Phi^r) (\beta, \beta)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k (-1)^{k-r} C_k^r \mu^{\beta \otimes \lambda} (h (\Phi^{k-r} \partial_{1,2} \Phi^r) (\beta, \beta)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k (-1)^{k-r} C_k^r \mu^{\lambda \otimes \beta} (h (\Phi^{k-r} \partial_{2,1} \Phi^r) (\beta, \beta)) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{r=1}^k (-1)^{k-r} C_k^r \mu^{\lambda \otimes \lambda} (h (\Phi^{k-r} \partial_{2,2} \Phi^r) (\beta, \beta)) \end{aligned}$$

d'où $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\mu^{(k)}$ est donnée par les formules III - 5 - 3.

Si ψ appartient à $\mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R})$, $\psi \circ \Phi$ appartient à $\mathcal{E}_{\infty, p}(\mathbb{R}^2)$, en utilisant V - 5 et V - 7 et VI - 1 on obtient 2 - 2.

4 - Corollaire.

Si Φ et ψ appartiennent à $\mathcal{E}_{4, p}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathcal{E}_{4, p}(\mathbb{R})$ respectivement, les résultats des théorèmes VI - 1 et VI - 3 et du corollaire VI - 2 restent valables en utilisant un argument classique d'extension et la majoration VI - 1 - 3 d'où le résultat annoncé dans l'introduction.

5 - Remarque

L'extension de ces résultats aux fonctionnelles aléatoires du type $\Phi(N_1, N_2)$ où $(N_k)_{k=1,2}$ sont des semi-martingales du type introduit en III - 6 nécessite l'introduction d'hypothèses supplémentaires, notamment du type $h_k(s)$ et $g_k(s)$ appartiennent) $\mathfrak{D}_{2,1}$.

BIBLIOGRAPHIE

- 1 ALLAIN M. F.- Formule de Itô pour des processus indexés
par une partie T de \mathbb{R}^d . Thèse d'état (1982)

- 2 " -Semi-martingales indexées par une partie
de \mathbb{R}^d et formule de Itô. Cas continu.
Z-W 65 , p 421 - 444 (1984)

- 3 " -Mesures stochastiques et décomposition
de Doob.
Séminaires de RENNES (1983)

- 4 ITO. K. -On a formula concerning stochastic
differentials
NAGOYA Math-Journal Vol 3 , p 55 - 65 (1961)

- 5 METIVIER M. et -Mesures stochastiques à valeurs dans les
PELLAUMAIL J. les espaces L_p . Z-W 40, p101 -114 (1979)

- 6 MEYER P.A. -Un cours sur les intégrales stochastiques
Séminaire de Probabilité X
L.N. n° 511 p 246 - 400 (1976)

- 7 " -Eléments de Probabilités Quantiques
Séminaire de Probabilités XX
L.N N° 1 204 p 186 - 312 (1986)

- 8 NEVEU J. -Processus aléatoires Gaussiens
Presses de l'Université de Montréal (1968)

- 9 NUALART D. -Non causal stochastic integrals and calculus
(preprint)
- 10 NUALART D.et
PARDOUX E. -Stochastic calculus with anticipating
integrands .
(Preprint)
- 11 SANZ -SOLE M. - r -variations fort two-parameter continuous
martingales and Itô's formula.
Preprint n°28 1985 Universitat de BARCELONA
- 12 SKOROHOD A.-V. - On a generalization of a stochastic integral.
Theory of Prob. and Appl. XX, p. 219 - 233 (1975)