PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

ZOUBIDA JADDA

Constructions de places réelles et géométrie semi-algébrique

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1987, fascicule 4 « Algèbre », , p. 1-63

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1987___4_A2_0>

SERIE : A
N° d'Ordre : 968
N° de Série : 164

THESE

Présentée

DEVANT L'UNIVERSITE DE RENNES I
U.E.R. de Mathématiques et Informatique

pour obtenir

Le Titre de Docteur en Troisième cycle

Spécialité : Mathématiques

par

Zoubida JADDA

CONSTRUCTIONS DE PLACES REELLES
et
GEOMETRIE SEMI-ALGEBRIQUE

Soutenue le 18 Décembre 1986 devant la Commission d'Examen

MM. J. HOUDEBINE	Président
Mme M.-F. COSTE-ROY	
MM. C. ANDRADAS	Examinateurs
M. COSTE	

Table des matières

Introduction

Les anneaux de valuations ont été beaucoup utilisés, au début comme outils pour la résolution des singularités et les correspondances birationnelles, entre autres par Zariski ([Z_1] et [Z_2]) et Maclane et Shilling ([M - Sh]).

Il était donc naturel de s'intéresser à des résultats concernant l'existence d'anneaux de valuations. Zariski l'a fait dans le cas classique ([Z-S]).

Ici, nous nous intéressons à l'existence d'anneaux de valuations réels (c.-à-d. dont le corps résiduel est réel).

Ces anneaux sont importants en géométrie algébrique réelle, dans la théorie du spectre réel et notamment la théorie de la dimension ou le faisceau des fonctions semi-algébriques.

Plusieurs auteurs ont travaillé ces dernières années sur le problème d'existence de tels anneaux dans un corps de fonctions d'une variété affine sur un corps réel clos.

Brumfiel et Efroymson ([Br_2]) ont montré le cas particulier de l'existence d'un diviseur premier (place réelle de rang 1), en utilisant la résolution des singularités de Hironaka. Ces mêmes techniques ont été utilisées par Bröcker et Schülting ([Br-Sc]).

Robson a redémontré ce résultat particulier en se basant sur la sélection des "ailes" de Nash et l'existence d'ordres totaux dans un corps de fonctions ([R_0]).

Le dernier (à ma connaissance) est C. Andradas ([An_3]) qui a obtenu le résultat le plus général jusqu'à présent en montrant l'existence d'une chaîne d'anneaux de valuations réels avec dimension, rang, rang rationnel et centre donnés, en utilisant des techniques algébriques et notamment le théorème de normalisation de E. Noether.

En ce qui nous concerne, nous voulons imposer à ces anneaux <u>d'être convexes pour le même ordre</u> : les techniques utilisées sont un mélange de géométrie et d'algèbre, et en particulier, nous allons utiliser le spectre réel (si souvent que pour certains cela pourrait paraître abusif !) comme outil pour passer de phénomènes topologiques à des phénomènes algébriques.

Le théorème à démontrer est le suivant :

Théorème (3.2.2) :

Soient V un ensemble algébrique affine irréductible sur un corps réel clos R, $A=R[V]$ son anneau de coordonnées et $K=R(V)$ son corps de fractions rationnelles de degré de transcendance n sur R. Soient une chaîne d'idéaux premiers de A , $P_{m-1}\subset\ldots\subset P_0$ avec P_i de dimension d_i ($d_0\leqslant d_1\leqslant\ldots\leqslant d_{m-1}$), pour laquelle il existe une chaine de cônes premiers $(\beta_i)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$ de A telle que $\mathrm{supp}(\beta_i)=P_i$ pour tout i , $0\leqslant i\leqslant m-1$. Soient $f_1,\ldots,f_t$ des élements de A tels que β_{m-1} contient $\Sigma K^2[f_1,\ldots,f_t]$ et soient des entiers

$s_0,\dots,s_{m-1}$,

$r_0,\dots r_{m-1}$ tels que

$0\leqslant s_0<\dots< s_{m-1}< n$

$0< r_{m-1}<\dots< r_0$, $s_i+r_i \leqslant n$, $r_i \geqslant m-i$, et $d_i\leqslant s_i$.

Alors il existe un ordre total γ sur K rendant $f_1,\dots,f_t$ positifs et une chaîne d'anneaux de valuations réels $(V_i)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$ γ-convexes <u>dans K</u> contenant R[V] tels que :

la dimension de V_i est s_i ,

le rang de V_i est $m-i$,

le rang rationnel de V_i est r_i

et V_i est centré en P_i dans A.

Nous commençons par démontrer le résultat suivant :

Théorème (3.2.1) :

Avec les mêmes hypotèses et notations que dans le théorème ci-dessus, il existe β ordre total dans K rendant $f_1,\dots,f_t$positifs et une chaîne d'anneaux de valuations réels $(V'_i)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$ β-convexes dans <u>$k(\beta)$</u> (la clôture réelle de K pour l'ordre β) contenant R[V] et tels que

la dimension de V'_i est s_i ,

le rang de V'_i est $m-i$,

le rang rationnel de V'_i est r_i et

V'_i est centré en P_i dans A.

La démonstration de ce théorème se fera en deux étapes : d'abord, dans le chapitre 2, nous le démontrons dans le cas particulier des anneaux de polynômes et des idéaux correspondants à des sous-variétés affines :

$$A = R[X_1,\dots,X_n] \quad ; \quad K = R(X_1,\dots,X_n)$$

$$P_i = (X_1,\dots,X_{n-d_i}) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1$$

$$f_j = X_j \qquad \text{pour} \quad j=1,\dots\dots,n\,.$$

Pour cela, nous utilisons des courbes Zariski-denses et des transformations quadratiques. Nous nous sommes inspirés des travaux de Zariski et C. Andradas. Les constructions que nous faisons sont particulièrement explicites parce qu'on travaille sur un espace affine.

Dans le chapitre 3, ce résultat particulier est généralisé au cas d'une variété algébrique affine irréductible.

La technique utilisée est la triangulation par un homéomorphisme semi-algébrique.

L'intérêt du caractère semi-algébrique de l'homomorphisme c'est que nous gardons un contrôle algébrique sur la situaiton, puisque les clôtures réelles qui nous intéressent sont conservées par homéomorphisme semi-algébrique (proposition 3.1.3).

Nous démontrons enfin, le théorème principal (3.2.2) à l'aide de la proposition (1.4.11) qui nous assure qu'il suffit de prendre l'intersection des anneaux construits dans le théorème (3.2.1) avec R(V).

Dans le chapitre 1, les trois premières sections sont consacrées à une description des outils algébriques nécessaires. Nous y donnons un résumé des résultats et des notations que nous utilisons dans les chapitres qui suivent .La plupart de ces résultats ont été pris dans le livre de J. Bochnak, M. Coste et M.-F. Roy ([B-C-R]) .Je m'excuse d' ailleurs auprès des auteurs du "piratage" que j'ai pu faire. Dans la section 4, nous démontrons, entre autres,des résultats qui permettent le passage de $k(\gamma)$ à $R(V)$ et dans la section 5, nous donnons quatre exemples (1.5.1;1.5.2;1.5.3;1.5.4) qui sont des échantillons de ce que nous produisons dans le chapitre 2.

Nous demandons à la lectrice (et au lecteur !) de bien vouloir nous excuser pour toute faute de français ou autre qui a survécu malgré notre vigilance.

Chapitre 1

Outils algébriques

1 - Spectre réel.

Dans toute cette section, A est un anneau commutatif et intègre.

Définitions 1.1.1 :

i) P est <u>un cône</u> de A si : $P \subset A$; $P+P \subset P$; $P.P \subset P$; $\forall a \in A$, $a^2 \in P$.

ii) P est <u>un cône propre</u> si P est un cône et $-1 \notin P$.

iii) P est <u>un cône premier</u> si P est un cône propre et $xy \in P \Rightarrow x \in P$ ou $-y \in P$.

Exemples et notations 1.1.2 :

i) L'ensemble des sommes de carrés d'éléments de A, noté ΣA^2 est le plus petit cône de A.

ii) Soient P un cône de A et a un élément de A, on note P[a] le cône $\{p+aq \mid p,q \in P\}$. Pour $(a_i)_{i \in I}$ une famille de A (non nécessairement finie), on notera $\Sigma A^2[a_i]$ le plus petit cône de A contenant les a_i, on l'appelle le cône engendré par les a_i.

Quelques résultats et notations 1.1.3 :

Soit α un cône premier de A.

i) On note $-\alpha$ l'ensemble : $\{x \in A \mid -x \in \alpha\}$.

On a $A = \alpha \cup -\alpha$, en effet :

$$a \in A \Rightarrow a^2 = a.a \in \alpha \Rightarrow a \in \alpha \text{ ou } -a \in \alpha$$
$$\Rightarrow a \in \alpha \text{ ou } a \in -\alpha . \quad \blacksquare$$

ii) On appelle support de α et on note $\mathrm{supp}(\alpha)$ l'ensemble $\alpha \cap -\alpha$. C'est un idéal premier ([B-C-R] prop. 4.3.2).

iii) Le corps de fractions de $A/\mathrm{supp}(\alpha)$ est noté $k(\mathrm{supp}\ \alpha)$.

Proposition 1.1.4 :

Les données suivantes sont équivalentes :

i) Un cône premier α de A.

ii) Un idéal premier P de A et un ordre $\leqslant$ sur le corps résiduel $k(P)$ $(=\mathrm{Fr}(A/P))$.

iii) Une classe d'équivalence de morphisme $\rho : A \to K$ où K est un corps réel clos, pour l'équivalence engendrée par

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & K \arrow[dl] \\ & K' & \end{tikzcd} .$$

Démonstration :

i) $\Rightarrow$ ii) On prend $P = \alpha \cap -\alpha$ et l'ordre $\leqslant_\alpha$ induit par α, défini de la façon suivante $\bar{a}/\bar{b} \geqslant_\alpha 0$ dans $k(\mathrm{supp}\ \alpha)$ si et seulement si $a.b \in \alpha$.

ii) $\Rightarrow$ iii) On prend pour K, la clôture réelle de $k(P)$ pour l'ordre $\leqslant$.

iii) $\Rightarrow$ i) On prend pour α, $\rho^{-1}(K^+)$ où K^+ est l'ensemble des éléments positifs de K. $\blacksquare$

Notations :

On note $k(\alpha)$ la clôture réelle du corps ordonné $(k(\mathrm{supp}(\alpha)),\leqslant_\alpha)$.

On a un morphisme π_α de A dans $k(\alpha)$ défini par :

$$A \to A/\mathrm{supp}(\alpha) \to k(\mathrm{supp}(\alpha)) \to k(\alpha).$$

Si $a \in A$, on notera $a(\alpha)$ l'image de a par ce morphisme.

Définition 1.1.5 :

Soient α cône premier d'un anneau A et P un idéal de A. L'idéal P est <u>α-convexe</u> si, pour tout x,y de A, si $x+y \in P$ avec $y \in \alpha$, alors $x \in P$ (autrement dit $0 \leqslant_\alpha x \leqslant_\alpha z$ et $z \in P \Rightarrow x \in P$).

Définition 1.1.6 :

On appelle <u>spectre réel</u> d'un anneau A, l'ensemble des cônes premiers de A, muni de la topologie qui est donnée par la base d'ouverts

$$\widetilde{U}(a_1,\dots,a_n) = \{ \alpha \text{ cône premier de } A \ / \ a_1(\alpha) > 0 ,\dots, a_n(\alpha) > 0 \}$$

où $(a_1,\dots,a_n)$ est une famille finie quelconque de A.

Cet espace topologique est noté $\mathrm{Spec}_r A$.

Remarque 1.1.7 :

D'après 1.1.4, un élément α de $\mathrm{Spec}_r R[X_1,\dots,X_n]$ est déterminé par un morphisme de $R[X_1,\dots,X_n]$ dans le corps réel clos $k(\alpha)$, donc par les image $X_1(\alpha),\dots,X_n(\alpha)$ des X_i dans $k(\alpha)$.

Définition 1.1.8 :

Soient α et β deux points du spectre réel de A. On dit que α est une <u>spécialisation</u> de β ou que β est une <u>générisation</u> de α si $\alpha \in \overline{\{\beta\}}$,ce qu'on note $\beta \to \alpha$.

Proposition 1.1.9 :

Soient α et β deux points du spectre réel de A. Il y a équivalence entre :

i) $\beta \to \alpha$

ii) $\beta \subset \alpha$

iii) $\forall a \in A \quad a(\beta) \geqslant 0 \Rightarrow a(\alpha) \geqslant 0$

iv) $\forall a \in A \quad a(\alpha) > 0 \Rightarrow a(\beta) > 0$.

Démonstration :

iii) $\Leftrightarrow$ iv)

$$(\forall\ a \in A,\ a(\beta) \geqslant 0 \Rightarrow a(\alpha) \geqslant 0) \Leftrightarrow (\forall\ a \in A,\ a(\alpha) < 0 \Rightarrow a(\beta) < 0\ )$$
$$\Leftrightarrow (\forall\ b \in A,\ b(\alpha) > 0 \Rightarrow b(\beta) > 0\ )$$

ii) $\Leftrightarrow$ iii)

$$\beta = \{a \in A \mid a(\beta) \geqslant 0\} \subset \{a \in A \mid a(\alpha) \geqslant 0\} = \alpha$$

i) $\Leftrightarrow$ iv)

$\beta \to \alpha \Leftrightarrow \alpha \in \overline{\{\beta\}} \Leftrightarrow$ tout ouvert qui contient α contient β

$\Leftrightarrow$ tout ouvert de base de la forme $\widetilde{U}_a = \{\gamma \in \mathrm{Spec}_r A \mid a(\gamma) > 0\}$

qui contient α contient β

$\Leftrightarrow a(\alpha) > 0 \Rightarrow a(\beta) > 0 \quad \forall a \in A$. ∎

Définition 1.1.10 :

On appelle <u>chaîne de spécialisations</u> de cônes premiers d'un anneau A, toute suite $(\alpha_n,\dots,\alpha_0)$ de cônes premiers de A telle que

$\alpha_{i+1} \to \alpha_i$ pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$

ce qu'on note $\alpha_n \to \alpha_{n-1} \to \dots \to \alpha_1 \to \alpha_0$. Dans le cas où $\alpha_{i+1} \neq \alpha_i$ pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, n est appelé la longueur de la chaîne.

Proposition 1.1.11 :

Soit α un point de $\mathrm{Spec}_r A$. Les spécialisations de α forment une chaîne totalement ordonnée : si $\alpha\to\beta$ et $\alpha\to\gamma$ alors $\beta\to\gamma$ ou $\gamma\to\beta$.

Démonstration : Voir [B-C-R] prop. 7.1.22. ∎

Exemple et notations 1.1.12 :

Rappelons que pour décrire les éléments du spectre réel d'un anneau A, on doit chercher les idéaux premiers de A et choisir un ordre sur les corps résiduels correspondants (proposition 1.1.4).

Dans $\mathrm{Spec}_r(\mathbb{R}[X,Y])$ soit :

* (0,0) le point de $\mathbb{R}^2$,noté **0** ,qui s'identifie au couple formé de l'idéal maximal (X,Y) et de l'ordre unique sur $\mathbb{R}$.

* $0_{X+(Y)}$ la demi-branche positive de l'axe des X en 0 s'identifiant au couple formé de l'idéal premier (Y) et de l'ordre de $\mathbb{R}(X)$ défini par le cône premier $\{P\in\mathbb{R}[X,Y] \;/\; \exists\varepsilon>0\ \forall x\in]0,\varepsilon[\ \ P(x,0) \geqslant 0\}$.

* O_{X+Y+} le micro-drapeau de $\mathbb{R}^2$ situé juste à droite de zéro et un peu au-dessus de l'axe des X, s'identifiant au couple formé de l'idéal premier (O) et de l'ordre total de $\mathbb{R}[X,Y]$ défini par le cône premier

$$\{P\in\mathbb{R}[X,Y] \;/\; \exists\varepsilon>0 \;\; \forall x\in]0,\varepsilon[\;,\;\; \exists\mu>0 \;\; \forall y\in]0,\mu[\quad P(x,y) \geqslant 0\}.$$

On a $O_{X+Y+} \rightarrow O_{X+(Y)} \rightarrow 0$ une chaîne de longueur 2 dans $\mathrm{Spec}_r(\mathbb{R}[X,Y])$.

On note $O_{X_n+\dots+X_1+}$ l'ordre sur $R\,[X_1,\dots,X_n]$ défini par:

X_n positif et infiniment petit par rapport aux réels positifs,

X_{n-1} positif et infiniment petit par rapport aux réels positifs et à X_n,

X_1 positif et infiniment petit par rapport aux réels positifs, à $X_n,\dots,X_2$.

Définitions 1.1.13 :

i) Soit A un anneau commutatif et unitaire. <u>La dimension réelle</u> de A est le sup des longueurs de chaînes de cônes premiers de A.

ii) Soit α un cône premier de A. <u>La dimension de α</u> notée $\dim \alpha$ est la dimension de Krull de $A/\mathrm{supp}(\alpha)$.

Définition 1.1.14 :

Soit $\alpha_n \rightarrow \alpha_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_0$ une chaîne de spécialisations de cônes premiers de A. On dit que c'est une chaîne de spécialisations non raffinable si pour tout i $0 \leqslant i \leqslant n-1$ et tout cône premier β de A, si $\alpha_{i+1} \rightarrow \beta \rightarrow \alpha_i$ alors $\beta = \alpha_{i+1}$ ou $\beta = \alpha_i$.

Remarque 1.1.15 :

On peut trouver une chaîne non raffinable $\alpha_2 \to \alpha_1$ telle que $\dim \alpha_2 > \dim \alpha_1 + 1$ (voir exemple 1.2.4).

Définition 1.1.16 :

Si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux et si $\beta \in \mathrm{Spec}_r B$, on pose $\mathrm{Spec}_r f(\beta) = f^{-1}(\beta)$ qui est un cône premier de A.

On a donc $\mathrm{Spec}_r f : \mathrm{Spec}_r B \to \mathrm{Spec}_r A$. C'est une fonction continue ([B-C-R] prop.7.1.7). On dit qu'un cône premier β de B <u>est au-dessus</u> d'un cône premier α de A si et seulement si, $\mathrm{Spec}_r f(\beta) = \alpha$.

Définition 1.1.17 :

i) <u>Un constructible</u> de $\mathrm{Spec}_r A$ est une partie de $\mathrm{Spec}_r A$ obtenue par combinaison booléenne (c.-à-d. par union finie, intersection finie et passage au complémentaire) d'ouverts de base $\widetilde{U}(a_1,\dots,a_n)$.

ii) <u>La topologie constructible</u> sur $\mathrm{Spec}_r A$ est la topologie dont les ensembles constructibles forment une base d'ouverts.

2 - Ensembles et fonctions semi-algébriques :

Définitions 1.2.1 : Soit R un corps réel clos.

i) On appelle condition de signe sur le polynôme P de $R[X_1,\dots,X_n]$ une des conditions $P(\underline{x}) > 0$; $P(\underline{x}) = 0$ ou $P(\underline{x}) < 0$ où $\underline{x} = (x_1,\dots,x_n)$.

ii) Un semi-algébrique de R^n est une partie de R^n donnée par une combinaison booléenne (obtenue par disjonction, conjonction et négation) de conditions de signe portant sur un nombre fini de polynômes. Un semi-algébrique peut toujours s'écrire comme réunion finie de semi-algébriques de la forme

$$\{ x \in R^n \mid P_1(\underline{x}) = \dots = P_l(\underline{x}) = 0 \text{ et } Q_1(\underline{x}) > 0 \text{ et} \dots Q_m(\underline{x}) > 0 \}.$$

iii) Soient S un semi-algébrique de R^n et T un semi-algébrique de R^m. Un morphisme $f : S \to T$ est semi-algébrique quand son graphe est semi-algébrique.

Pour plus de détails voir ([B-C-R] chap. 2) . ■

Proposition 1.2.2 :

Soient $V \subset R^n$ un ensemble algébrique et A son anneau des coordonnées. Soit S un sous-ensemble semi-algébrique de V

i) Il existe un unique constructible $\tilde{S}$ de $\mathrm{Spec}_r A$ tel que $\tilde{S} \cap V = S$.

ii) Si S est combinaison booléenne de $U(f_i) = \{x \in V \mid f_i(x) > 0\}$, $(f_i)_i \in A$ alors $\tilde{S}$ est la même combinaison booléenne $\widetilde{U(f_i)} = \{\alpha \in \mathrm{Spec}_r A \mid f_i(\alpha) > 0\}$.

Démonstration : ([B-C-R] prop. 7.2.2) . ■

Proposition 1.2.3 :

Soient S et T deux ensembles semi-algébriques et $f : S \to T$ une fonction semi-algébrique, alors, il existe une unique application $\tilde{f} : \tilde{S} \to \tilde{T}$ telle que $\tilde{f}^{-1}(\tilde{T'}) = \widetilde{f^{-1}(T')}$ pour tout sous-ensemble semi-algébrique T' de T. Si f est un homéomorphisme, alors $\tilde{f}$ l'est aussi.

Démonstration : ([B-C-R] prop. 7.2.8) . ∎

Exemple 1.2.4 :

On veut construire deux cônes premiers α et β de $\mathbb{R}[X,Y]$ tels que $\beta \to \alpha$ non raffinable avec $\dim \beta=2$ et $\dim \alpha=0$, donc $\dim \beta > \dim \alpha+1$ (cf. remarque 1.1.15).

Soit $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,t) \to (x,xt)$

La fonction π est semi-algébrique.

D'après 1.2.3, on a une application $\tilde{\pi} : \mathrm{Spec}_r\mathbb{R}[X,T] \to \mathrm{Spec}_r\mathbb{R}[X,Y]$.

C'est l'application qui à δ' de $\mathrm{Spec}_r\mathbb{R}[X,T]$ associe l'unique cône premier δ de $\mathrm{Spec}_r\mathbb{R}[X,Y]$ défini par : $X(\delta) = X(\delta')$ et $Y(\delta) = X(\delta')T(\delta')$.

Soient $\beta' = 0_{T+X+}$ et $\alpha' = 0_{T+(X)}$. On a $\mathrm{supp}\ \beta'=(0\ )$ et $\mathrm{supp}\ \alpha'=(X)$; d'autre part, $\beta' \to \alpha'$ est non raffinable car $\dim \beta'=2$ et $\dim \alpha'=1$.

Soient $\beta = \tilde{\pi}(\beta')$ et $\alpha = \tilde{\pi}(\alpha')$

on a $X(\beta) = X(\beta')$ et $Y(\beta)=X(\beta')T(\beta')$,

$X(\alpha) = X(\alpha')=0$ et $Y(\alpha) = X(\alpha')T(\alpha') = 0$.

Donc $\mathrm{supp}(\beta) =(0)$ et $\mathrm{supp}(\alpha)=(X,Y)$, c.à.d $\alpha=\mathbf{0}$. Par conséquent $\dim \beta=2$ et $\dim \alpha=0$. On a $\beta \to \alpha$ non raffinable : supposons qu'il existe un cône premier δ de $\mathbb{R}[X,Y]$ tel que $\beta \to \delta \to \alpha$ avec $\delta\neq\beta$ et $\delta\neq\alpha$, dans ce cas $\mathrm{supp}(\delta)\neq(X)$, en effet :

si $\mathrm{supp}\,\delta=(X)$ on aurait $\delta = O_{Y+(X)}$ ou $\delta = O_{Y-(X)}$

or $P(X,Y) = X-Y \in \beta$ mais $P(X,Y) \notin O_{Y+(X)}$ donc $\delta \neq O_{Y+(X)}$

et $Q(X,Y) = X+Y \in \beta$ mais $Q(X,Y) \notin O_{Y-(X)}$ donc $\delta \neq O_{Y-(X)}$.

L'application $\pi_{|X\neq 0}$ étant un homéomorphisme de $\{ (x,t)\in\mathbb{R}^2 \ / \ x\neq 0 \}$ sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x\neq 0\}$ alors, $\tilde{\pi}_{|\{\delta'\in\mathrm{Spec}_r\mathbb{R}[X,T] \ / \ X(\delta')\neq 0\}}$ est un homéomorphisme sur $\{\gamma\in\mathrm{Spec}_r\mathbb{R}[X,T] \ / \ X(\gamma)\neq 0\}$ (d'après prop. 1.2.3). Comme $\mathrm{supp}(\delta)\neq(X)$, $X(\delta)\neq 0$, il existe donc $\delta_1 \in \mathrm{Spec}_r\mathbb{R}[X,T]$ tel que $\tilde{\pi}^{-1}(\delta)=\delta_1$. On a : $\beta \to \delta \Rightarrow \tilde{\pi}^{-1}(\beta) = \beta' \to \tilde{\pi}^{-1}(\delta) = \delta_1$. Les spécialisations de β' forment un ensemble totalement ordonné (proposition 1.1.11), on a donc $\delta_1 \to \alpha'$ ou $\alpha' \to \delta_1$

$\delta_1 \to \alpha'$ n'est pas possible car $\beta' \to \alpha'$ non raffinable

et $\alpha' \to \delta_1$ n'est pas possible, sinon $\tilde{\pi}(\alpha') = \alpha \to \tilde{\pi}(\delta_1) = \delta$ et comme on a $\delta \to \alpha$, on aurait $\alpha = \delta$, ce qui donne la contradiction.

Donc $\beta \to \alpha$ est une chaîne non raffinable avec $\dim\beta=2$ et $\dim\alpha=0$. ∎

Proposition et définition 1.2.5 :

Soient R un corps réel clos et $S\subset R^n$ un ensemble semi-algébrique donné par une combinaison booléenne $B(X)$ de conditions de signes sur des polynômes de $R[X_1,\dots,X_n]$. Le sous-ensemble $\{x\in K^n \mid B(X)\}$ de K^n (où K est une extension réelle close de R) noté S_K est semi-algébrique. On appelle S_K l'extension de S à K.

Démonstration : ([B-C-R] prop. 5.1.1) . ∎

Proposition 1.2.6 :

Soient $f : S \to R$ une fonction semi-algébrique et $\alpha \in \widetilde{S}$: on note $f(\alpha)$ l'élément $f_{k(\alpha)}(X_1(\alpha),\ldots,X_n(\alpha))$ où $f_{k(\alpha)} : S_{k(\alpha)} \to k(\alpha)$ est l'extension de f à $k(\alpha)$. Soit $\mathcal{S}^0(S)$ l'anneau des fonctions semi-algébriques et continues sur S, l'application $ev_\alpha : \mathcal{S}^0(S) \to k(\alpha)$ qui, à f de $\mathcal{S}^0(S)$ associe $f(\alpha)$ est un homomorphisme d'anneaux.

De plus, si $U(f) = \{x \in S \mid f(x) > 0\}$ alors $\widetilde{U(f)} = \{\alpha \in \widetilde{S} \mid f(\alpha) > 0\}$.

Démonstration : ([B-C-R] prop. 7.3.1) . ∎

3 - Places

Définitions 1.3.1 :

Soit K un corps commutatif.

i) Un anneau de valuation de K est un sous-anneau B de K tel que $\forall x \in K-\{0\}$, $x \in B$ ou $x^{-1} \in B$.

ii) Si k est un corps, on étend l'addition et la multiplication de k à $k \cup \{\infty\}$ par $x+\infty$ si $x \in k$, $x.\infty = \infty$ si $x \in k^*$.

Une place de K est une application $\lambda : K \to k\cup\{\infty\}$ telle que :

$$\lambda(x+y) = \lambda(x) + \lambda(y)$$

$$\lambda(x.y) = \lambda(x) . \lambda(y)$$

$$\lambda(1) = 1 .$$

iii) Une valuation de K est une application v de K^* dans un groupe Γ commutatif, totalement ordonné, noté additivement telle que :
$v(x.y) = v(x)+v(y)$; $v(x+y) \geqslant \inf(v(x),v(y))$ si $x+y \neq 0$.
Le groupe Γ est appelé le groupe de valuation de v.

Résultats et notations 1.3.2 :

i) Un anneau de valuation B d'un corps K est un anneau local.
On note m_B son idéal maximal ; $U_B = B \backslash m_B$ le groupe multiplicatif de ses éléments inversibles et $k_B = B/m_B$ son corps résiduel.
Soit l'application $\lambda_B : K \to k_B \cup \{\infty\}$ définie par

$$\lambda_B(x) = \overline{x} \text{ (projection canonique dans } k_B) \text{ si } x \in B$$
$$\text{et} \quad \lambda_B(x) = \infty \text{ sinon}$$

L'application λ_B est une place de K. On l'appelle, la place associée à l'anneau de valuation B.
Soit l'application canonique $v_B : K^* \to \Gamma_B = K^*/U_B$ où Γ_B est ordonné par $v_B(x) \leqslant v_B(y) \Leftrightarrow yx^{-1} \in B$. L'application v_B est une valuation de K, appelée la valuation associée à l'anneau de valuation B.

ii) Si $\lambda : K \to k \cup \{\infty\}$ est une place de K, $B = \{x \in K \mid \lambda(x) \neq \infty\}$ est un anneau de valuation de K appelé : l'anneau de valuation de la place λ.

iii) Si $v : K^* \to \Gamma$ est une valuation de K, $B = \{x \in K \mid x=0 \text{ ou } v(x) \geqslant 0\}$ est un anneau de valuation de K, appelé anneau de valuation de la valuation v.

Remarque 1.3.3 :

Les données d'un anneau de valuation, d'une place ou d'une valuation d'un même corps K sont donc équivalentes.

Définition 1.3.4 :

Soient $\lambda : K \rightarrow k\cup\{\infty\}$ une place du corps K , A un anneau commutatif intégre et f un morphisme de A dans K. La place λ est dite finie sur A si $A\subset f^{-1}(\lambda^{-1}(k))$. Si λ est finie sur A, on appelle centre de λ dans A, l'idéal premier $f^{-1}(\lambda^{-1}(0))$ de A .

Définition 1.3.5 :

i) Dimension d'une place.

Si λ est une place de K qui est une extension d'un corps k, avec $\lambda(x) = x$ pour tout élément x de k, la dimension de λ par rapport à k est le degré de transcendance du corps résiduel de son anneau de valuation sur k.

ii) Rang d'une place.

a) Soit λ une place de K associée à la valuation v de groupe de valuation Γ. Un sous-ensemble Γ' de Γ est un sous-groupe isolé de Γ si Γ' est un sous-groupe propre de Γ et vérifie la propriété suivante :
$a\in\Gamma'$ alors pour tout élément b de Γ tel que $-a \leq b \leq a$, $b\in\Gamma'$.

b) Le rang de λ est l'ordre de l'ensemble totalement ordonné (par inclusion) de tous les sous-groupes isolés de Γ.

iii) Rang rationnel d'une place :

a) Soient λ une place de K et Γ le groupe de valuation associé à λ. Des éléments $(\mu_1,\ldots,\mu_m)$ de Γ sont rationnellement dépendants si :

$\exists\, n_1,\dots,n_m \in \mathbb{Z}$ non tous nuls tels que $n_1\mu_1+\dots+n_m\mu_m = 0$. Dans le cas contraire les μ_i, sont rationnellement indépendants.

b) <u>Le rang rationnel d'une place</u> est le nombre maximum d'éléments de Γ qui sont rationnellement indépendants.

Notation :

Soit V un anneau de valuation,la dimension de V est notée dim.V , le rang est noté rg.V et le rang rationnel est noté rg.rat.V

Proposition 1.3.6 :

Soit λ une place de K. Si le rang rationnel de λ est fini, alors il est supérieur ou égal au rang de λ.

Démonstration :

Soit $\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_{h-1} \subset \Gamma_h = \Gamma$ où $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{h-1}$ sont des sous-groupes isolés de Γ. Pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant h$, on fixe un élément α_i de Γ_i tel que $\alpha_i \notin \Gamma_{i-1}$ alors $(\alpha_1,\dots,\alpha_h)$ sont rationnellement indépendants, en effet : supposons qu'il existe $m_1,\dots,m_h$ des entiers non tous nuls tels que

$$m_1\alpha_1 + \dots + m_h\alpha_n = 0 .$$

Soit g le dernier indice i tel que m_i non nul. On a $g \leqslant h$

$$m_1\alpha_1 + \dots + m_g\alpha_g = 0 \Rightarrow m_g\alpha_g = -(m_1\alpha_1 + \dots + m_{g-1}\alpha_{g-1}) \in \Gamma_{g-1},$$

m_g étant non nul, $\alpha_g \in \Gamma_{g-1}$, ce qui donne la contradiction . ∎

Proposition 1.3.7 :

Si λ est une place composée ,alors son rang (resp. son rang rationnel) est la somme des rangs (resp. des rangs rationnels) de ses composées .

Démonstration : voir [Z-S] , chap.6, théorème 17. ∎

Proposition 1.3.8 :

Toute valuation dont le groupe de valuation est archimédien est de rang1.

Démonstration :

Soit Γ le groupe de valuation et soit Γ_1 un sous-groupe isolé de Γ, supposons qu'il existe un élément x de Γ_1 non nul (on suppose $x > 0$).

Soit $y \in \Gamma$, Γ étant archimédien, il existe un entier n tel que $nx > y$, $nx \in \Gamma_1$ et Γ_1 étant isolé, $y \in \Gamma_1$ donc $\Gamma_1 = \Gamma$. Le seul sous-groupe isolé est donc $\{0\}$ et par conséquent le rang de la valuation est 1. ∎

4 - Places réelles et cônes premiers.

Définition 1.4.1 :

Un anneau de valuations B d'un corps K est dit <u>réel</u> si son corps résiduel k_B est réel. Une place (respectivement une valuation) de K est dite réelle si son anneau de valuation est réel.

Définition 1.4.2 :

Soit β le cône positif d'un ordre sur un corps K. On note $\leqslant_\beta$ cet ordre. L'ordre $\leqslant_\beta$ est dit compatible avec une place de K (respectivement une valuation de K) si l'anneau de valuation B de cette place (resp. cette valuation) est β-convexe, c.-à-d. $0 \leqslant_\beta x \leqslant_\beta z$ et $z \in B \Rightarrow x \in B$.

Proposition 1.4.3 :

Soient $(K, \leqslant_\beta)$ un corps ordonné et B un anneau de valuation β-convexe de K, alors B est réel et k_B est ordonné par :

$$\bar{x} > 0 \iff x > 0, \text{ où } \bar{x} \text{ est la classe de } x \text{ modulo } m_B .$$

Démonstration : ([B-C-R] prop. 10.1.6) . ∎

Définition 1.4.4 :

Soit V un anneau de valuation réel d'un corps K réel et λ_V la place associée. L<u>a place signée</u> $\bar{\lambda}_V$ associée à V est une application de K dans $k \cup \{+\infty, -\infty\}$ définie par :

$\bar{\lambda}_V(x) = \lambda_V(x)$ si $\lambda_V(x) \neq \infty$ et

$\bar{\lambda}_V(x) = \varepsilon\infty$ si $\lambda_V(x) = \infty$ avec $\varepsilon = +1$ si $x > 0$

$\varepsilon = -1$ si $x < 0$.

Théorème 1.4.5 :

Soient V un anneau de valuation réel du corps K et β le cône positif d'un ordre $\leqslant_\beta$ sur le corps résiduel k_V. Il y a bijection entre l'ensemble des ordres $\leqslant_\delta$ sur K, compatibles avec la place λ_V et qui induisent l'ordre $\leqslant_\beta$ sur k_V, et l'ensemble des homomorphismes de groupes du groupe de valuation Γ_V dans $\mathbb{Z}/2$.

Démonstration : (voir [B-C-R] chap. 10) . ■

Définition et proposition 1.4.6 :

Soient K un corps commutatif et A un sous-anneau de K. Soit β le cône positif d'un ordre $\leqslant_\beta$ sur K. L'enveloppe β-convexe de A est

$$B = \{x \in K \mid \exists a \in A,\ -a \leqslant_\beta x \leqslant_\beta a\}.$$

L'anneau B est un anneau de valuation de K et c'est le plus petit anneau de valuation β-convexe de K contenant A.

Démonstration : Il est clair que B est un sous-anneau de K.

Soit $x \in K^*$, $-1 \leqslant_\beta x \leqslant_\beta 1$ ou $-1 \leqslant_\beta x^{-1} \leqslant_\beta 1$.

Comme $1 \in A$, on a $x \in B$ ou $x^{-1} \in B$.

Soit B' un anneau de valuation β-convexe de K contenant A.

Soit $x \in B$, il existe a dans A tel que $-a \leqslant_\beta x \leqslant_\beta a$. Puisque a appartient à A, donc à B' et que B' est β-convexe, on a $x \in B'$ et donc $B \subset B'$. ■

Notation 1.4.7 :

Soit A un anneau commutatif et intégre .
Si α est une spécialisation de β dans $\mathrm{Spec}_r A$, on note $V_{\beta\to\alpha}$ l'enveloppe β-convexe de $A_{\mathrm{supp}(\alpha)}$ dans $k(\beta)$.

Proposition 1.4.8 :

Soit V un anneau de valuation réel d'un corps réel clos K. Le spectre réel de V possède un point générique δ et un point spécial μ, c'est-à-dire : pour tout α dans $\mathrm{Spec}_r V$: $\delta \to \alpha \to \mu$. Le cône premier δ est la restriction à V de l'ordre $\leqslant_K$ du corps K et $\mu = \delta \cup m_V$.

Démonstration : Voir [A-R] . ■

Définition 1.4.9 :

On dit qu'un anneau de valuation domine un cône premier α si son point spécial est au-dessus de α.

Proposition 1.4.10 :

Soient A un anneau intègre, K son corps de fractions, β le cône positif d'un ordre $\leqslant_\beta$ sur K et β' le cône premier de A, $\beta \cap A$. Si α cône premier de A est une spécialisation de β', alors le centre dans A de la place associée à l'anneau de valuation $V_{\beta' \to \alpha}$ est supp(α) et l'ordre $\leqslant_{\beta''}$ sur le corps résiduel, induit par $\leqslant_{\beta}$, étend l'ordre $\leqslant_{\alpha}$ sur k(supp α).

Démonstration : ([B-C-R] prop. 10.2.3). ∎

Proposition 1.4.11 :

Soient V une variété algébrique affine irréductible et R(V) son corps de fonctions, γ un ordre total sur R(V) et k(γ) la clôture réelle de R(V) pour cet ordre. Si V' est un anneau de valuation γ-convexe dans k(γ) alors l'anneau de valuation ($V' \cap R(V)$) de R(V) a même dimension ,rang et rang rationnel que V'.

Démonstration : On pose $V_1 = V' \cap R(V)$

a) $\dim.V_1 = \dim.V' \cap R(V)$, pour cela on va montrer que le corps résiduel $k_{V'}$ de V' est une extension algébrique du corps résiduel k_{V_1}.

$k_{V'} = V'/m_{V'}$ et $k_{V_1} = V_1/m_{V_1}$ où $m_{V'}$ et m_{V_1} sont les idéaux maximaux de V' et V_1 respectivement.

Soit $y \in k_{V'}$, on cherche un polynôme Q non nul, à coefficients dans k_{V_1} tel que Q(y) = 0. Soit $x \in V'$, de classe y modulo $m_{V'}$. L'élément x appartient à k(γ) donc x est algébrique sur R(V) car k(γ) est une clôture réelle de R(V). Il existe donc un polynôme $P = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$ à coefficients (a_i) dans R(V) tel que P(x) = 0.

Soit h le plus petit des indices tel que a_h ait la plus petite valuation parmi les a_i non nuls, $0 \leqslant i \leqslant n$.

$h \neq n$ car sinon $v(a_n) < v(a_i) \quad \forall\ i=0,\ldots n-1$

$$\Rightarrow v(a_n) < v(a_i x^{n-i}) = v(a_i)+(n-i)v(x) \quad \forall\ i \quad \text{car } v(x) \geqslant 0,$$

or $v(a_n) \geqslant \inf_{i<n} (v(a_i x^{n-i}))$ car $a_n = -(a_1 x + \ldots a_0 x^n)$ d'où la contradiction.

Donc $h < n$

$P/a_h = a_0/a_h X^n + a_1/a_h X^{n-1} + \ldots + X^{n-h} + a_{h+1}/a_h X^{n-h-1} + \ldots + a_n/a_h$

$v(a_i/a_h) = v(a_i)-v(a_h) \geqslant 0$ donc $a_i/a_h \in V_1$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$.

Soit $Q = \overline{P/a_h} = \overline{a_0/a_h} X^n + \ldots + X^{n-h} + \overline{a_{h+1}/a_h} X^{n-h-1} + \ldots + \overline{a_n/a_h}$.

L e polynôme Q est un polynôme à coefficients dans k_{V_1}, de degré > 0 car $n-h > 0$ et $Q(y) = Q(\overline{x}) = \overline{P(x)} = 0$.

L'extension $k_{V'}$ est une extension algébrique de k_{V_1} et par conséquent dim. V_1 = dim. V'.

b) rg.V_1 = rg.V' et rg.rat V_1 = rg.rat. V' .

Soient G' le groupe de valuation de V' et G_1 le groupe de valuation de V_1.

On va montrer que $G_1 \subset G' \subset G_1 \otimes \mathbb{Q}$.

Soit $v(x) \in G'$,avec $x \in k(\gamma)^*$. Comme $k(\gamma)$ est algébrique sur R(V), il existe un polynôme non nul P à coefficients dans R(V), $P = a_0 X^n + \ldots + a_n$ tel que $a_0 x^n + \ldots + a_n = 0$, il existe donc i et j ($i \neq j$) tel que

$v(a_i x^{n-i}) = v(a_j x^{n-j})$, donc $v(x) = v(a_i)-v(a_j)/i-j \in G_1 \otimes \mathbb{Q}$

donc $G' \subset G_1 \otimes \mathbb{Q}$. Il est clair que $G_1 \subset G'$, donc $G_1 \subset G' \subset G_1 \otimes \mathbb{Q}$.

Les groupes G_1 et $G_1 \otimes \mathbb{Q}$ ont le même nombre d'éléments rationnellement indépendants et même nombre de sous-groupes isolés, il en est donc de même pour G' et par conséquent, $rg.V_1 = rg\ V'$ et $rg.rat.V_1 = rg.rat.V'$. ∎

Corolaire 1.4.12 :

Avec les mêmes hypothèses que dans la proposition ci-dessus, soit V_1 un anneau de valuation γ-convexe dans $R(V)$, alors l'enveloppe γ-convexe de V_1 dans $k(\gamma)$, a même dimension, rang et rang rationnel que V_1.

Démonstration :

Soit V'_1 l'enveloppe γ-convexe de V_1 dans $k(\gamma)$.

Alors $V'_1 \cap R(V) = V_1$, en effet soit $x \in V'_1 \cap R(V)$, il existe $a \in V_1$ tel que $-a \leq_\gamma x \leq_\gamma a$, l'anneau V_1 étant γ-convexe et x dans $R(V)$, $x \in V_1$ donc $V'_1 \cap R(V) \subset V_1$ et il est clair que $V_1 \subset V'_1 \cap R(V)$.

D'après la proposition 1.4.11, $\dim V'_1 = \dim(V'_1 \cap R(V))$

$rg.V'_1 = rg(V'_1 \cap R(V))$ et $rg.rat.V'_1 = rg.rat.(V'_1 \cap R(V))$, par conséquent,

$\dim V_1 = \dim V'_1$, $rg.V_1 = rg.V'_1$ et $rg.rat.V_1 = rg.rat.V'_1$. ∎

5 - Exemples de places réelles et d'ordres associés :

Exemple 1.5.1 :

Soit v la valuation de $\mathbb{R}(X,Y)$ qui à $f(X,Y)$ associe l'ordre de la série de Laurent en t, $f(t,e^t-1)$.

L'anneau de valuation V associé à v est

$$V = \{ f(X,Y) \in \mathbb{R}(X,Y) \mid v(f(X,Y)) \geqslant 0 \} .$$

Le groupe de valuation est $\mathbb{Z}$ et le corps résiduel est $\mathbb{R}$. Donc la place λ associée à V est de dimension zéro , de rang 1 et de rang rationnel 1. Le centre de λ dans $\mathbb{R}[X,Y]$ est (X,Y) car,

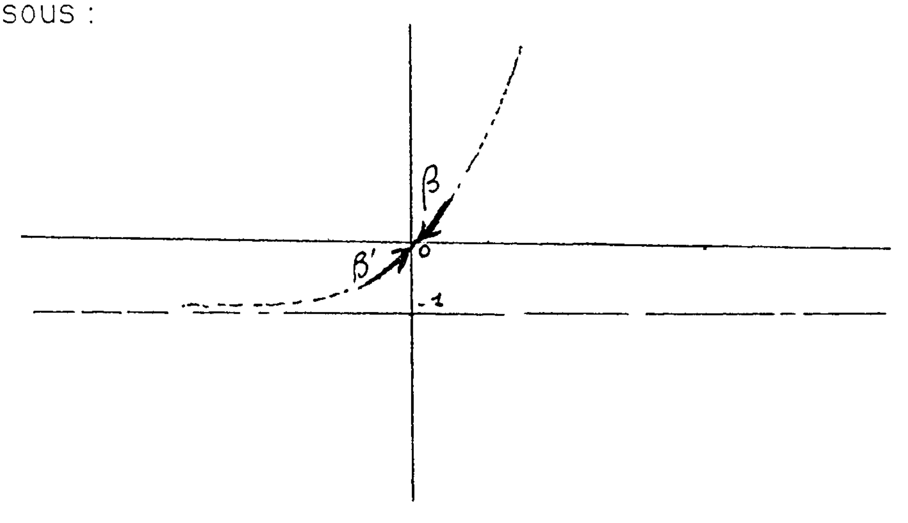
$$v(P(X,Y)) > 0 \iff P(0,0) = 0 \iff P \in (X,Y) .$$

Le groupe de valuation étant $\mathbb{Z}$, il y a deux ordres compatibles avec λ et qui induisent l'ordre unique sur $\mathbb{R}$ (d'après le théorème 1.4.5). Soient β et β' leurs cônes positifs :

$$\beta = \{ f \in \mathbb{R}[X,Y] \mid \exists \varepsilon>0 \ \ \forall t \in]0,\varepsilon[\ \ f(t,e^t-1) \geqslant 0 \}$$

$$\beta' = \{ f \in \mathbb{R}[X,Y] \mid \exists \varepsilon>0 \ \ \forall t \in]-\varepsilon,0[\ \ f(t,e^t-1) \geqslant 0 \}$$

Les cônes premiers β et β' peuvent être interprétés comme des demi-branches du graphe de la fonction $t \to e^t-1$, et on peut les dessiner comme ci-dessous :



Exemple 1.5.2 :

Soit r un nombre irrationnel. 1 et r sont donc rationnellement indépendants. Soit Γ le sous-groupe de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}+r\mathbb{Z}$ ordonné par l'ordre induit par $\mathbb{R}$. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(X,Y) &\to \mathbb{R}((t^{\Gamma})) \\ X &\to t \\ Y &\to t^{r} \end{aligned}$$

où $\mathbb{R}((t^{\Gamma}))$ est le corps de séries formelles à coefficients dans $\mathbb{R}$ et à exposants dans Γ.

On définit la valuation v de la façon suivante :

si $f(X,Y) \in \mathbb{R}(X,Y)$ et $f(t,t^r) = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2} + \ldots$ (avec $c_1 \neq 0$ $r_1 < r_2 < \ldots, \forall i\ r_i \in \Gamma$)

alors $v(f(X,Y)) = r_1$.

Cette valuation a pour groupe de valuation Γ, elle est donc de rang rationnel 2. Son corps résiduel est $\mathbb{R}$, elle est donc de dimension zéro.

Enfin son rang est 1(d'après prop.1.3.8) car, Γ étant un sous-groupe de $\mathbb{R}$, il est archimédien.

Le centre dans $\mathbb{R}[X,Y]$ de la place associée λ est l'idéal (X,Y). D'après le théorème 1.4.5, le nombre d'ordres qui sont compatibles avec la place λ et qui induisent l'ordre unique sur $\mathbb{R}$, est le même que celui des homomorphismes de groupes de $\mathbb{Z}+r\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/2$. Il y en a donc 4.

Soient β_1, β_2, β_3 et β_4 leurs cônes positifs

$$\beta_1 = \{ f \in \mathbb{R}[X,Y] \mid \exists \varepsilon>0\ \ \forall t \in]0,\varepsilon[\ \ f(t,t^r) \geq 0 \}$$

$$\beta_2 = \{ f \in \mathbb{R}[X,Y] \mid \exists \varepsilon>0\ \ \forall t \in]0,\varepsilon[\ \ f(t,-t^r) \geq 0$$

$$\beta_3 = \{ f \in \mathbb{R}[X,Y] \mid \exists \varepsilon>0\ \ \forall t \in]0,\varepsilon[\ \ f(-t,t^r) \geq 0 \}$$

$\beta_4 = \{ f \in \mathbb{R}[X,Y] \mid \exists \varepsilon>0 \ \forall t\in]0,\varepsilon[\ f(-t,-t^r) \geq 0 \}$.

Les cônes β_1, β_2, β_3 et β_4 peuvent être interprétés comme des demi-branches en 0 des courbes suivantes respectivement :

$$y=x^r, \quad y=-(x^r), \quad y=(-x)^r \text{ et } y=-(-x)^r .$$

Exemple 1.5.3 :

Soit la place $\lambda : \mathbb{R}(X,Y) \to \mathbb{R}(X)\cup\{\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$.

L'anneau de valuation V associé à λ est

V=$\{f(X,Y)\in\mathbb{R}(X,Y) \mid f(X,Y)$ est d'ordre positif en tant que série de Laurent en y et en annulant Y, $f(X,0)$ est d'ordre positif $\}$

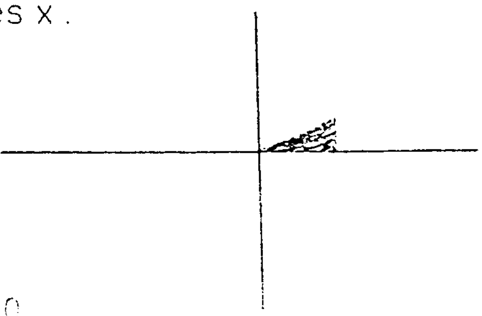
La place λ est la composée de deux places $\lambda_1 : \mathbb{R}(X,Y) \to \mathbb{R}(X)\cup\{\infty\}$ et $\lambda_2 : \mathbb{R}(X) \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ qui sont chacune de rang 1et de rang rationnel 1 donc λ est de rang 2 et de rang rationnel 2 (d'après prop.1.3.7). Son corps résiduel est $\mathbb{R}$,sa dimension est donc zéro .Son centre dans $\mathbb{R}[X,Y]$ est l'idéal (X,Y) .

Son groupe de valuation est $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ordonné lexicographiquement.

D'après 1.4.5, il y a 4 ordres qui sont compatibles avec λ. Ce sont O_{Y+X+}, O_{Y-X+}, O_{Y+X-} et O_{Y-X-} définis par les cônes premiers β_1 ; β_2 ; β_3 et β_4 respectivement tels que :

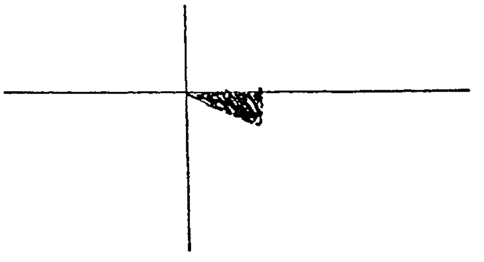
$\beta_1 = \{ f \in \mathbb{R}[X,Y] \mid \exists \varepsilon>0 \ \forall x\in]0,\varepsilon[\ \exists \mu>0 \ \forall y\in]0,\mu[\ f(x,y) \geq 0 \}$

qu'on peut représenter par le micro-drapeau situé à droite de zéro et juste au-dessus de l'axe des x .



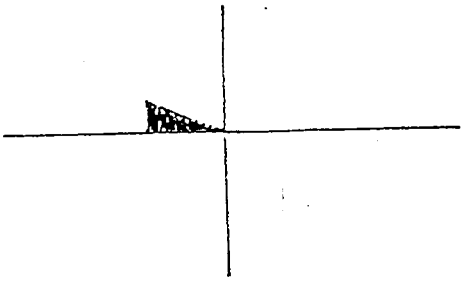
$$\beta_2 = \{ f \in \mathbb{R}[X,Y] \mid \exists\varepsilon>0 \ \ \forall x\in]0,\varepsilon[\ \ \exists\mu>0 \ \ \forall y\in]-\mu,0[\ \ f(x,y) \geqslant 0 \}$$

qu'on peut représenter par le micro-drapeau situé à droite de zéro et juste au-dessous de l'axe des x .



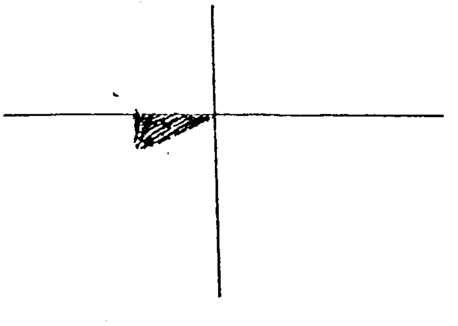
$$\beta_3 = \{ f \in \mathbb{R}[X,Y] \mid \exists\varepsilon>0 \ \ \forall x\in]-\varepsilon,0[\ \ \exists\mu>0 \ \ \forall y\in]0,\mu[\ \ f(x,y) \geqslant 0 \}$$

qu'on peut représenter par le micro-drapeau situé à gauche de zéro et juste au-dessus de l'axe des x .



$$\beta_4 = \{ f \in \mathbb{R}[X,Y] \mid \exists\varepsilon>0 \ \ \forall x\in]-\varepsilon,0[\ \ \exists\mu>0 \ \ \forall y\in]-\mu,0[\ \ f(x,y) \geqslant 0 \}$$

qu'on peut représenter par le micro-drapeau situé à gauche de zéro et juste au-dessous de l'axe des x .



Exemple 1.5.4 :

Soit la place $\lambda : \mathbb{R}(X,Y) \simeq \mathbb{R}(X,T) \to \mathbb{R}(T) \cup \{\infty\}$ où $T=Y/X$

L'anneau de valuation associé est :

$V=\{f(X,Y)$ / $g(X,T)=f(X,Y)$ est d'ordre positif en tant que série de laurent en X et en annullant X ,$g(0,T)$ est d'ordre positif }.

Le groupe de valuation est $\mathbb{Z}$,donc le rang est 1 et le rang rationnel est 1. Le corps résiduel est $\mathbb{R}(T)$,donc la dimension est 1. L'anneau V est un diviseur premier.

Le centre de λ dans $\mathbb{R}[X,Y]$ est (X,Y) car si $X=0$ alors $Y=T.X=0$. Le groupe de valuation est $\mathbb{Z}$,donc à chaque fois qu'on choisit un ordre sur $\mathbb{R}(T)$,il y'a deux ordres qui l'étendent à $\mathbb{R}(X,Y)$ et qui sont compatibles avec la place λ . Pour ordonner $\mathbb{R}(T)$,on peut mettre T à $+\infty$, à $-\infty$, à gauche ou à droite d'un réel a. Supposons que $T = a_+$(juste à droite du réel a),les cônes positifs des deux ordres compatibles avec λ sont :

$\beta_1 = \{ f(X,Y)\in\mathbb{R}[X,Y] \ / \ \exists\varepsilon >0 \ \forall t \in]a ,a+\varepsilon[\ \exists\mu >0 \ \forall x \in]0 ,\mu[\ \ f(x,tx) \geq 0 \}$.

$\beta_2 = \{ f(X,Y)\in\mathbb{R}[X,Y] \ / \ \exists\varepsilon >0 \ \forall t \in]a ,a+\varepsilon[\ \exists\mu >0 \ \forall x \in]-\mu ,0[\ \ f(x,tx) \geq 0 \}$.

Chapitre 2

Construction de places réelles dans le cas affine

Dans ce chapitre, on va montrer le théorème 3.2.1 dans le cas particulier où

$$A = R[X_1,\dots,X_n]$$

$$K = R(X_1,\dots,X_n)$$

$$\mathcal{P}_i = (X_1,\dots,X_{n-d_i}) \qquad 1 \leqslant i \leqslant m-1$$

$$f_j = X_j \qquad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

On va le faire d'abord pour le cas $m=1$, ce qui sera l'objet du premier paragraphe, dans le deuxième paragraphe on traitera le cas $m \neq 1$.

Tout au long du chapitre, R désigne un corps réel clos, S^0 l'ouvert élémentaire $\{(x_1,\dots,x_n) \in R^n /\ 0 < x_i < 1 \text{ et } \Sigma x_i < 1\}$ et $\mathbf{0}$ le cône premier associé à l'idéal $(X_1,\dots,X_n)$ et à l'unique ordre sur R.

Remarque 2.0.1 :

Soit β un cône premier de A, si $\beta \to \mathbf{0}$ alors $\beta \in \widetilde{S}^0$ si et seulement si $X_1(\beta) > 0,\dots, X_n(\beta) > 0$.

1. Le cas m=1.

On va donc montrer le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 :

Etant donnés trois entiers d_0, s_0 et r_0 tels que $s_0 \geqslant 0$; $r_0 > 0$:

$$s_0 + r_0 \leqslant n \quad \text{et} \quad d_0 \leqslant s_0 ,$$

il existe un ordre total β sur $R(X_1,\ldots,X_n)$ tel que $\beta \in \widetilde{S}^0$ et un anneau de valuation réel V'_0 β-convexe dans $k(\beta)$, contenant A, centré en $P_0=(X_1,\ldots,X_{n-d_0})$ et tel que :

dim. $V_0 = s_0$, rg. $V_0 = 1$ et rg. rat. $V_0 = r_0$.

La démonstration de ce théorème se fera en 3 étapes par l'intermédiaire de cônes premiers

1ère étape : $d_0 = s_0 = 0$ (proposition 2.1.2)

2ème étape : $d_0 = s_0 \neq 0$ (proposition 2.1.3)

3ème étape : $d_0 \neq s_0$ (proposition 2.1.4)

Proposition 2.1.2 :

Soit r un entier, $1 \leqslant r \leqslant n$. Il existe β ordre total dans $R(X_1,\ldots,X_n)$ tel que $\beta \rightarrow 0$ et $\beta \in \widetilde{S}^0$ et il existe V' anneau de valuation β-convexe dans $k(\beta)$, contenant A, au-dessus de 0 dans $\mathrm{Spec}_r\, R[X_1,\ldots,X_n]$, de dimension zéro sur R, de rang 1, de rang rationnel r et de corps résiduel R.

Démonstration :

On généralise la construction de l'exemple 1.5.2.

Soient $(1,\alpha_1,\dots,\alpha_{r-1})$ r éléments de $\mathbb{R}$ rationnellement indépendants et $G = \mathbb{Z} + \alpha_1\mathbb{Z} +\dots+ \alpha_{r-1}\mathbb{Z}$ le sous-groupe de $\mathbb{R}$ ordonné par l'ordre induit par $\mathbb{R}$.

On note $R[[t^G]]$ l'anneau des séries y de la forme :

$y = c_1t^{r_1} + c_2t^{r_2}+\dots$ ($r_1 < r_2 < \dots$ des éléments de G et $c_i \in R$, $\forall i$).

Soit $\leqslant_{\beta'}$ l'ordre sur $R((t^G))$ défini par :

si $z=c_1t^{r_1} +c_2t^{r_2} +\dots$ (avec $c_1 \neq 0$ et $r_1<r_2\dots$), alors $z \geqslant_{\beta'} 0 \Leftrightarrow c_1 \geqslant 0$.

D'après Maclane et Schilling ([M-Sh]), on peut trouver (n-r) séries $y_{r+1},\dots,y_n$ dans $R[[t^G]]$ telles que $(t,t^{\alpha_1},\dots,t^{\alpha_{r-1}},y_{r+1},\dots,y_n)$ soient algébriquement indépendants sur R. On choisit $y_{r+1},\dots,y_n$ d'ordre strictement positif.

On définit une application f de $R[X_1,\dots,X_n]$ dans $R[[t^G]]$ telle que :

$f(X_1) = t$

$f(X_2) = t^{\alpha_1}$

$f(X_r) = t^{\alpha_{r-1}}$

$f(X_{r+1}) = y_{r+1}$

$f(X_n)=y_n$.

Soit v la valuation de $R((t^G))$ définie de la façon suivante :

si $z= c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2} + \ldots$ (avec $c_1 \neq 0$ et $r_1 < r_2 < \ldots$), alors $v(z) = r_1$.

Cette valuation a pour groupe de valuation G. L'application f étant injective car $(t, t^{\alpha_1}, \ldots, t^{\alpha_{r-1}}, y_{r+1}, \ldots, y_n)$ sont algébriquement indépendants sur R, on peut la prolonger en $\bar{f}$ de $R(X_1, \ldots, X_n)$ dans $R((t^G))$. L'application $\bar{f}ov$ est une valuation de $R(X_1, \ldots\ldots, X_n)$ de groupe de valuation G. On note V l'anneau de valuation associé .Le rang rationnel de V est r et son rang est 1 car G est un groupe archimédien (d'après prop.1.3.8) .

La dimension de V est zéro car le corps résiduel est R . Il est clair que V contient A.

On définit l'ordre $\leq_\beta$ sur $R(X_1, \ldots, X_n)$ par :

si $P(X_1, \ldots X_n) \in R(X_1, \ldots, X_n)$: $P(X_1, \ldots X_n) \geq_\beta 0 \Leftrightarrow P(t, t^{\alpha_1}, \ldots, t^{\alpha_{r-1}}, y_{r+1}, \ldots y_n) \geq_{\beta'} 0$.

On a $\operatorname{supp}(\beta) = \{ P \in R[X_1, \ldots, X_n] \ / \ P(t, t^{\alpha_1}, \ldots, t^{\alpha_{r-1}}, y_{r+1}, \ldots y_n) = 0 \} = (0)$ car $(t, t^{\alpha_1}, \ldots, t^{\alpha_{r-1}}, y_{r+1}, \ldots y_n)$ sont algébriquement indépendants. On a $X_i(\beta) > 0$ pour tout i, $0 \leq i \leq n$ et $\beta \to 0$, donc $\beta \in S^0$(d'après la remarque 2.0.1).

L'anneau de valuation V est β-convexe . Soit V' son enveloppe β-convexe dans $k(\beta)$. L'anneau V' a même dimension ,rang et rang rationnel que V, (d'après corol.1.4.12) et il est au-dessus de 0 dans $\operatorname{Spec}_r A$. ∎

Proposition 2.1.3 : Soit $A = R[X_1,\dots,X_n]$.

Soient deux entiers s_0 et r_0 tels que : $s_0 \geq 0$; $r_0 \geq 1$ et $s_0 + r_0 \leq n$. Soit α_0 cône premier de dimension s_0 et de $\mathrm{supp}(\alpha_0) = (X_1,\dots,X_{n-s_0}) = P'_0$ avec

$$\alpha_0 \to 0 \text{ et } X_{n-s_0+1}(\alpha_0) > 0,\dots,X_n(\alpha_0) > 0,$$

(par exemple $\alpha = (P'_0, 0_{X_{n-s_0+1}+\dots+X_n+})$).

Il existe β ordre total sur $R(X_1,\dots,X_n)$ tel que $\beta \to \alpha_0$ et $\beta \in \widetilde{S}^0$ et il existe V' un anneau de valuation réel β-convexe dans $k(\beta)$, contenant A, au-dessus de α_0 dans $\mathrm{Spec}_r A$, de dimension s_0, de rang 1, de rang rationnel r_0, et de corps résiduel $k(\alpha_0)$.

Démonstration :

On applique la proposition 2.1.2 à $k(\alpha_0)$ la clôture réelle de $R(X_{n-s_0+1},\dots X_n)$ pour l'ordre α_0.

On pose $A' = k(\alpha_0)[X_1,\dots,X_{n-s_0}]$

et $\varphi : A = R[X_1,\dots,X_n] \to k(\alpha_0)[X_1,\dots,X_{n-s_0}] = A'$ l'application définie par :

$$\varphi(X_1) = X_1$$

$$\varphi(X_{n-s_0}) = X_{n-s_0}$$

$$\varphi(X_{n-s_0+1}) = X_{n-s_0+1}(\alpha_0)$$

$$\varphi(X_n) = X_n(\alpha_0)$$

Soit α'_0 le cône premier de A' qui s'identifie au point 0 de $k(\alpha_0)^{n-s_0}$.

On a $\mathrm{Spec}_r\varphi(\alpha'_0) = \alpha_0$ et α'_0 est donc au-dessus de α_0.

D'après 2.1.2, il existe β' ordre total sur $k(\alpha_0)(X_1,\dots, X_{n-s_0})$ tel que $\beta' \to \alpha'_0$, $X_1(\beta') > 0,\dots,X_{n-s_0}(\beta') > 0$ et V' anneau de valuation réel β'-convexe dans $k(\beta')$ contenant $k(\alpha_0)[X_1,\dots,X_{n-s_0}]$, au-dessus de α'_0 dans $\mathrm{Spec}_r A'$, de rang 1, de dimension zéro par rapport à $k(\alpha_0)$, de rang rationnel r_0 et de corps résiduel $k(\alpha_0)$. Soit β la restriction de β' à A, β est un ordre et $k(\beta) \simeq k(\beta')$ car $k(\alpha_0)$ est, en tant que clôture réelle, une extension algébrique de $R(X_{n-s_0+1},\dots\dots,X_n)$, $\beta \to \alpha$ et $\beta \in \widetilde{S^0}$ car $X_i(\beta) > 0$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

On considère V' comme un anneau de valuation β-convexe de $k(\beta)$.

$$\begin{aligned}\dim V'_{|R} &= \dim V'_{|k(\alpha_0)} + \text{degré de transcendance de } k(\alpha_0)_{|R}\\ &= 0 + s_0\\ &= s_0 .\end{aligned}$$

L'anneau V' étant au-dessus de α'_0 dans $\mathrm{Spec}_r A'$, et comme α'_0 est au-dessus de α_0 dans $\mathrm{Spec}_r A$, V' est donc au-dessus de α_0 dans $\mathrm{Spec}_r A$. Il contient A et est de dimension s_0 sur R, de rang 1, de rang rationnel r_0 et de corps résiduel $k(\alpha_0)$. ∎

Proposition 2.1.4 : $A = R[X_1,\dots,X_n]$.

Soient d_0, s_0, r_0 trois entiers tels que

$$0 \leqslant d_0 \leqslant s_0 \leqslant r_0, \quad s_0 + r_0 \leqslant n \quad \text{et} \quad r_0 \geqslant 1.$$

Soit α_0 cône premier de A tel que $\mathrm{supp}(\alpha_0) = (X_1,\dots, X_{n-d_0}) = \mathcal{P}_0$, $\alpha_0 \to 0$ et $X_{n-d_0+1}(\alpha_0) > 0,\dots,X_n(\alpha_0) > 0$ (par exemple $\alpha_0 = (\mathcal{P}_0, 0_{X_{n-d_0+1}+\dots+X_n})$). Il existe β ordre total sur $R(X_1,\dots,X_n)$ tel que

$\beta \to \alpha_0$ dans $\mathrm{Spec}_r A$ et $\beta \in \widetilde{S^0}$ et il existe V' anneau de valuation réel β-convexe dans $k(\beta)$, contenant A, au-dessus de α_0 dans $\mathrm{Spec}_r A$, de dimension s_0, de rang 1 et de rang rationnel r_0.

Démonstration :

On va se ramener au cas de la proposition 2.1.3 (où $d_0 = s_0$) par une transformation quadratique de telle façon qu'au-dessus de α_0 on ait un cône premier α'_0 de dimension s_0 (ce qui généralise l'exemple 1.2.4).

Soit $f : R[X_1,\dots,X_n] \to R[T_1,\dots,T_n]$ définie par :

$$f(X_1) = T_1$$

$$f(X_{n-s_0}) = T_{n-s_0}$$
$$f(X_{n-s_0+1}) = T_1 T_{n-s_0+1}$$

$$f(X_{n-d_0}) = T_1 T_{n-d_0}$$
$$f(X_{n-d_0+1}) = T_{n-d_0+1}$$

$$f(X_n) = T_n .$$

On a $\mathrm{Spec}_r f : \mathrm{Spec}_r R[T_1,\dots,T_n] \to \mathrm{Spec}_r R[X_1,\dots,X_n]$.

Soit l'application $\rho : R[T_1,\dots,T_n] \to k(\alpha_0)[T_{n-s_0+1},\dots,T_{n-d_0}]$ définie par:

$\rho(T_i) = X_i(\alpha_0)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-s_0$

$\rho(T_i) = T_i$ pour $n-s_0+1 \leqslant i \leqslant n-d_0$

$\rho(T_i) = X_i(\alpha_0)$ pour $n-d_0+1 \leqslant i \leqslant n$

Soit α''_0 le cône premier de $k(\alpha_0)[T_{n-s_0+1},\dots,T_{n-d_0}]$, $O_{T_{n-s_0+1}+\dots+T_{n-d_0}+}$.

On a $\mathrm{Spec}_r\rho(\alpha''_0) = \alpha'_0$, $\mathrm{supp}(\alpha'_0) = (T_1,\dots,T_{n-s_0})$,

$T_{n-s_0+1}(\alpha'_0) > 0,\dots,T_n(\alpha'_0) > 0$ et $\mathrm{Spec}_r f(\alpha'_0) = \alpha_0$.

On applique la proposition 2.1.3 à $R[T_1,\dots,T_n]$ et α'_0. Il existe donc β' ordre total dans $R(T_1,\dots,T_n)$ tel que $\beta' \to \alpha'_0$ dans $\mathrm{Spec}_r R[T_1,\dots,T_n]$ et $T_i(\beta') > 0$ pour tout i et il existe V' anneau de valuation réel β'-convexe dans $k(\beta')$, contenant $R[T_1,\dots,T_n]$, de dimension s_0 par rapport à R, de rang 1, de rang rationnel r_0 et au-dessus de α'_0 dans $\mathrm{Spec}_r R[T_1,\dots,T_n]$.

Soit $\beta = \mathrm{Spec}_r f(\beta')$. On a $k\beta) \simeq k(\beta')$ car $R(T_1,\dots,T_n) \simeq R(X_1,\dots,X_n)$, $\beta \to \alpha_0$ car $\alpha_0 = \mathrm{Spec}_r f(\alpha'_0)$ et $\beta \in \widetilde{S^0}$ car $X_i(\beta) > 0$ puisque $X_i(\beta) = T_i(\beta')$ pour i dans $\{1,\dots,n-s_0\} \cup \{n-d_0+1,\dots,n\}$ et $X_i(\beta) = T_1(\beta')\, T_i(\beta')$ pour i dans $\{n-s_0+1,\dots,n-d_0\}$.

L'anneau V' peut donc être considéré comme un anneau de valuation réel β-convexe de $k(\beta)$. Il est au-dessus de $\mathrm{Spec}_r f(\alpha'_0) = \alpha_0$ dans $\mathrm{Spec}_r A$, de dimension s_0, de rang 1 et de rang rationnel r_0. ∎

Démonstration du théorème 2.1.1 :

Pour l'idéal premier $P_0 = (X_1,\dots,X_{n-d_0})$ de $R[X_1,\dots,X_n]$, il existe un cône premier α_0 tel que $\mathrm{supp}(\alpha_0) = P_0$, par exemple $\alpha = (P_0, 0_{X_{n-d_0+1}+\dots+X_n+})$

On applique la proposition 2.1.4 à α_0 et c'est fini. ∎

2. Le cas où $m \neq 1$.

Nous montrons maintenant le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 :

Etant donnés la chaîne d'idéaux premiers de $A = R[X_1,\dots,X_n]$,

$P_{m-1} \subset \dots \subset P_1 \subset P_0$, $P_i = (X_1,\dots,X_{n-d_i})$ et des entiers $(s_i)_{0 \leqslant i \leqslant m-1}$ et $(r_i)_{0 \leqslant i \leqslant m-1}$ tels que :

$$0 \leqslant s_0 < \dots < s_{m-1} \leqslant n$$

$$0 < r_{m-1} < \dots < r_0$$

$$s_i + r_i \leqslant n, \qquad r_i \geqslant m-i \qquad \text{et } d_i \leqslant s_i .$$

Alors, il existe un ordre total β sur $R(X_1,\dots,X_n)$ tel que $\beta \in \widetilde{S^0}$ et une chaîne d'anneaux de valuations $(V'_i)_{0 \leqslant i \leqslant m-1}$ de $k(\beta)$, $V'_{m-1} \supset \dots \supset V'_0 \supset A$ tels que : pour tout i ; $0 \leqslant i \leqslant m-1$, l'anneau de valuation V'_i est réel et β-convexe dans $k(\beta)$ de dimension s_i, de rang $m-i$,de rang rationnel r_i et centré en P_i dans A .

La démonstration de ce théorème se fera en 2 étapes par l'intermédiaire de cônes premiers :

Première étape : pour tout i, $0 \leq i \leq m-1$ $s_i = d_i$ (proposition 2.2.2)

Deuxième étape : pour tout i, $0 \leq i \leq m-1$ $s_i \geq d_i$ (proposition 2.2.4)

Dans cette deuxième étape on se ramène à la première étape par une transformation quadratique.

Première étape

Proposition 2.2.2 :

Soit α_0 cône premier de $A = R[X_1,\dots,X_n]$ tel que $\mathrm{supp}(\alpha_0) = P_0 = (X_1,\dots,X_{n-s_0})$, $\alpha_0 \to 0$ dans $\mathrm{Spec}_r A$ et $X_{n-s_0+1}(\alpha_0) > 0,\dots,X_n(\alpha_0) > 0$,

alors il existe une chaîne de cônes premiers de A, $\alpha_{m-1} \to \dots \to \alpha_1 \to \alpha_0$ telle que $\mathrm{supp}(\alpha_i) = P_i = (X_1,\dots,X_{n-s_i})$,

il existe β ordre total dans $R(X_1,\dots,X_n)$ avec $\beta \to \alpha_{m-1}$ et $\beta \in \widetilde{S^0}$

et il existe une chaîne d'anneaux de valuation $(V'_i)_{0 \leq i \leq m-1}$, $V'_m \supset \dots \supset V'_0 \supset A$ telle que pour tout i, $0 \leq i \leq m-1$,

V'_i est β-convexe dans $k(\beta)$, de dimension s_i, de rang $m-i$, de rang rationnel r_i, au-dessus de α_i dans $\mathrm{Spec}_r A$ et de corps résiduel $k(\alpha_i)$.

Démonstration :

Par récurrence sur m :

Pour m=1 : c'est la proposition 2.1.3.

Soit α_0 cône premier de A tel que supp $\alpha_0 = P_0$. On applique le cas m=1 à $A' = R[X_{n-s_1+1},...X_n]$ et $P_0' = (X_{n-s_1+1},...X_{n-s_0})$.

Soit α'_0 cône premier de $R[X_{n-s_1+1},...X_n]$ défini par supp $\alpha'_0 = P'_0$ et $X_{n-s_0+1}(\alpha'_0) = X_{n-s_0+1}(\alpha_0),...,X_n(\alpha'_0) = X_n(\alpha_0)$.

Il existe donc α'_1 ordre total sur $R(X_{n-s_1+1},...X_n)$ tels que $\alpha'_1 \to \alpha'_0$ et $X_{n-s_1+1}(\alpha'_1) > 0...$, $X_n(\alpha'_1) > 0$ et il existe V_0 anneau de valuation réel α'_1-convexe de $k(\alpha'_1)$ tel que $k_{V_0} = k(\alpha'_0)$, dim $V_0 = s_0$, rg.$V_0 = 1$, rg.rat.$V_0 = r_0 - r_1$ et V_0 au-dessus de α'_0 dans $R[X_{n-s_1+1},...X_n]$.

On applique l'hypothèse de récurrence à $P''_{m-1} \subset ... \subset P''_1$ $P''_i = (X_1,...,X_{n-s_i})$ dans $A'' = k(\alpha'_1)[X_1,...,X_{n-s_1}]$ et $\alpha''_1 = 0$ dans $\mathrm{Spec}_r k(\alpha'_1)[X_1,.....X_{n-s_1}]$. Il existe donc $\alpha''_{m-1} \to ... \to \alpha''_1 = 0$ chaîne de cônes premiers dans $\mathrm{Spec}_r\, k(\alpha'_1)[X_1,...,X_{n-s_1}]$ tel que supp $\alpha''_i = P''_i$, β' ordre total sur $k(\alpha'_1)(X_1,...,X_{n-s_1})$ tel que $X_1(\beta') > 0,..., X_{n-s_1}(\beta') > 0$ et $V'_{m-1} \supset ... \supset V'_1$ anneaux de valuations β'-convexes dans $k(\beta')$ contenant $k(\alpha'_1)[X_1,..., X_{n-s_1}]$ tels que pour $1 \leqslant i \leqslant m-1$, $k_{V'_i} = k(\alpha'_i)$, $\dim_{|k(\alpha'_1)} V'_i = s_i - s_1$, rg.$V'_i = m-i$, rg. rat.$V'_i = r_i$ et V'_i au-dessus de α''_i dans $k(\alpha'_1)[X_1,...,X_{n-s_1}]$.

Soient λ_1 la place signée associée à V'_1 et λ_0 la place signée associée à V_0

$$\lambda : k(\beta') \xrightarrow{\lambda_1} k(\alpha'_1) \cup \pm\infty \xrightarrow{\lambda_0} k(\alpha'_0) \cup \pm\infty .$$

On pose $V'_0 = \{x \in k(\beta') \,/\, \lambda(x) \neq \pm\infty\}$ l'anneau de valuation associé à λ. Il est clair que V'_0 est contenu dans V_1. L'anneau V'_0 est un anneau de valuation β'- convexe dans $k(\beta')$, en effet

soit $y \leq_{\beta'} x$, $x \in V_0$ alors $\lambda_1(y) \leq \lambda_1(x)$ et donc $(\lambda_0 o \lambda_1)(y) \leq (\lambda_0 o \lambda_1)(x)$, comme $\lambda(x) \neq \pm\infty$ on a $\lambda(y) \neq \pm\infty$ donc $y \in V'_0$.

$\dim_{\mathbb{R}} V'_0 = \dim_{\mathbb{R}} V_0 = s_0$

$rg.\, V'_0 = rg.\, V'_1 + rg.\, V_0 = (m-1)+1 = m$

et $rg.rat.V'_0 = rg.rat.V'_1 + rg.\, rat.V_0 = r_1 + (r_0 - r_1) = r_0$ (d'après prop.1.3.7).

On a V'_0 au-dessus de α_0 dans $Spec_r A$.

Soit β la restriction de β' à $R(X_1,\ldots,X_n)$ on a $X_i(\beta) > 0$ et $k(\beta) \simeq k(\beta')$.

On considère les $(V'_i)_{0 \leq i \leq m-1}$ comme des anneaux de valuations de $k(\beta)$ et on prend, $\alpha_i = Spec_r\, f(\alpha'_i)$ où $f : R[X_1,\ldots,X_n] \to k(\alpha'_1)[X_1,\ldots,X_{n-s_1}]$, $supp\, \alpha_i = (X_1,\ldots,X_{n-d_i})$. Les anneaux V'_i étant au-dessus de α''_i dans

$$Spec_r\, k(\alpha'_1)[X_1,\ldots,X_{n-s_1}]$$

et α''_i au-dessus de α_i dans $Spec_r A$, alors V'_i est au-dessus de α_i dans $Spec_r A$. ∎

Deuxième étape

Dans cette deuxième étape, nous nous ramenons à la première étape par une transformation quadratique de $R[X_1,\dots,X_n]$ dans $R[T_1,\dots,T_n]$ (généralisation de la proposition 2.1.4 au cas $m \neq 1$). Dans le lemme 2.2.3, nous construisons une chaîne d'idéaux premiers $(Q_i)_{0 \leq i \leq m-1}$ de $R[T_1,\dots,T_n]$ avec Q_i de dimension s_i, au-dessus de P_i.

Lemme 2.2.3 :

Etant donnés une chaîne d'idéaux premiers de $R[X_1,\dots,X_n]$ $P_{m-1} \subset \dots \subset P_0$, $P_i = (X_1,\dots,X_{n-d_i})$ de dimension d_i et des entiers $(s_i)_{0 \leq i \leq m-1}$ tels que $0 \leq s_0 < \dots < s_{m-1} \leq n$ et $d_i \leq s_i$, il existe une transformation quadratique f de $R[X_1,\dots,X_n]$ dans $R[T_1,\dots,T_n]$ et une chaîne d'idéaux premiers $(Q_i)_{0 \leq i \leq m-1}$ de $R[T_1,\dots,T_n]$, Q_i de dimension s_i, $Q_i = (T_1, T_2,\dots,T_{n-s_i})$ avec Q_i au-dessus de P_i, pour tout i, $0 \leq i \leq m-1$.

Démonstration :

Soit f la transformation quadratique de $R[X_1,\dots,X_n]$ dans $R[T_1,\dots,T_n]$ définie par :

$$f(X_j) = T_j$$

pour $j \in \{1\} \cup \{ s_{m-1} - d_{m-1} + 2, \dots, n - d_{m-1}\} \cup \{ n - d_i + 1 \text{ avec } i = 0,\dots,m-1\}$

$\cup \{n - d_0 + 2, \dots, n\}$

$f(X_j) = T_1 T_j$

pour $j \in \{ 2,\dots, s_{m-1} - d_{m-1} + 1 \}$ $\quad$ (si $s_{m-1} > d_{m-1}$)

$f(X_j) = T_{n-d_i+1} \cdot T_j$

pour $j \in \{ n-d_i+2,\dots,n-d_{i-1} \}$ $\quad$ (si $d_i > d_{i-1}+1$)

Soient $Q_{m-1} = (T_1 , T_{s_{m-1}-d_{m-1}+2} ,\dots, T_{n-d_{m-1}})$.

Il y a $n-s_{m-1}$ équations, donc $\dim Q_{m-1} = s_{m-1}$.

Si $d_{m-2} \neq d_{m-1}$ on prend

$Q_{m-2} = (Q_{m-1}, T_{n-d_{m-1}+1} , T_{k_j})$ où $j = 1,\dots,s_{m-1}-s_{m-2}-1$ et les k_j sont $s_{m-1}-s_{m-2}-1$ nombres distincts dans

$\{ 2,\dots, s_{m-1}-s_{m-2}+1\} \cup \{ n-d_{m-1}+2,\dots,n-d_{m-2} \}$

En plus des $n-s_{m-1}$ équations de Q_{m-1}, il y a $s_{m-1}-s_{m-2}$ équations donc $\dim Q_{m-2} = s_{m-2}$.

Si $d_{m-2} = d_{m-1}$ on prend

$Q_{m-2} = (Q_{m-1} , T_{k_j})$ où $j = 1,\dots, s_{m-1}-s_{m-2}$ et les k_j sont $s_{m-1}-s_{m-2}$ nombres distincts dans $\{ 2,\dots, s_{m-1-d_{m-1}}+1 \}$.

On peut prendre $s_{m-1}-s_{m-2}$ équations entre T_2 et $T_{s_{m-1}-d_{m-1}+1}$ car

$$(s_{m-1}-d_{m-1})-(s_{m-1}-s_{m-2}) = s_{m-2}-d_{m-1} = s_{m-2}-d_{m-2} \geq 0 .$$

Pour i quelconque, supposons Q_{i+1} donné.

si $d_i \neq d_{i+1}$ on prend

$Q_i = (Q_{i+1}, T_{n-d_{i+1}+1}, T_{k_j})$ où $j = 1,\dots,s_{i+1}-s_i-1$ et les k_j sont $s_{i+1}-s_i-1$ nombres distincts (et différents des numéros des équations prises pour Q_i) dans $\{2,\dots, s_{m-1}-d_{m-1}+1\} \cup\dots\cup \{n-d_{i+1}+2,\dots, n-d_i\}$.

Si $d_i = d_{i+1}$ on prend

$Q_i = (Q_{i+1}, T_{k_j})$ où $j = 1,\dots,s_{i+1}-s_i$ et les k_j sont $s_{i+1}-s_i$ nombres distincts (et différents des numéros des équations prises pour Q_i) dans

$$\{2,\dots, s_{m-1}-d_{m-1}+1\} \cup\dots\cup \{n-d_{i+2}+2,\dots, n-d_{i+1}\}.$$

On vérifie facilement que pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, Q_i est au-dessus de P_i et on a $Q_{m-1} \subset Q_{m-2} \subset \dots \subset Q_0$. Il suffit de renuméroter les variables T_i pour avoir le lemme. ∎

Exemple :

Pour $n=7$, $m=3$, $d_0=2$, $d_1=2$, $d_2=4$, $s_0=2$, $s_1=3$, $s_2=5$

la transformation quadratique f de $R[X_1,\dots,X_7]$ dans $R[T_1,\dots,T_7]$ est définie par :

$$f(X_1) = T_1$$
$$f(X_2) = T_1T_2$$
$$f(X_3) = T_3$$
$$f(X_4) = T_4$$
$$f(X_5) = T_4T_5$$
$$f(X_6) = T_6$$
$$f(X_7) = T_7$$

$Q_2 = (T_1, T_3)$, $Q_1 = (T_1, T_3, T_4, T_2)$, $Q_0 = (T_1, T_3, T_4, T_2, T_5)$

Proposition 2.2.4 :

Soit α_0 cône premier de $A = R[X_1,\dots,X_n]$ tel que $\mathrm{supp}(\alpha_0) = P_0 = (X_1,\dots,X_{n-d_0})$, $\alpha_0 \to 0$ dans $\mathrm{Spec}_r A$, $X_{n-d_0+1}(\alpha_0)>0,\dots,X_n(\alpha_0)>0$, alors il existe une chaîne de cônes premiers de A, $\alpha_{m-1} \to \dots \to \alpha_1 \to \alpha_0$ telle que $\mathrm{supp}(\alpha_i) = P_i = (X_1,\dots,X_{n-d_i})$, il existe β ordre total dans $R(X_1,\dots,X_n)$ avec $\beta \to \alpha_{m-1}$ et $\beta \in \widetilde{S^0}$ et une chaîne d'anneaux de valuation $(V'_i)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$, $V'_m \supset\dots\supset V'_0 \supset A$ telle que pour tout i, $0\leqslant i \leqslant m-1$, V'_i est β-convexe dans $k(\beta)$, de dimension s_i, de rang $m-i$, de rang rationnel r_i, au-dessus de α_i dans $\mathrm{Spec}_r A$.

Démonstration :

Soit f la transformation construite dans le lemme 2.2.3 et $A' = R[T_1,\dots,T_n]$

On applique la proposition 2.2.2 à la chaîne d'idéaux premiers $Q_{m-1} \subset \dots \subset Q_0$ de A' et $\alpha'_0 \in \mathrm{Spec}_r A'$, au-dessus de α_0 tel que $\mathrm{supp}(\alpha'_0) = Q_0$ et $T_{n-s_0+1}(\alpha'_0) > 0,\dots, T_n(\alpha'_0) > 0$. Alors il existe, $\alpha'_{m-1} \to\dots\to \alpha'_0$ chaîne de cônes premiers dans $\mathrm{Spec}_r A'$ telle que $\mathrm{supp}(\alpha'_i) = Q_i$, et il existe β' ordre total sur $R(T_1,\dots,T_n)$ avec $\beta' \to \alpha'_{m-1}$ et $T_j(\beta') >0$ pour tout j et une chaîne d'anneaux de valuations $(V'_i)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$ β'-convexes dans $K(\beta')$ telle que V'_i au-dessus de α'_i dans $\mathrm{Spec}_r A'$, $\dim. V'_i = s_i$, $\mathrm{rg}.V'_i = m-i$ et $\mathrm{rg.\,rat}.V'_i = r_i$.

Soit $\mathrm{spec}_r f : \mathrm{Spec}_r A' \to \mathrm{Spec}_r A$. On pose $\beta = \mathrm{spec}_r\, f(\beta')$ et

$\alpha_i = \mathrm{spec}_r\, f(\alpha'_i)$, on a $X_j(\beta) > 0$ pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant n$ et

$\beta \to \alpha_{m-1} \to \dots \to \alpha_0$.

Comme $R(X_1,\dots,X_n) \simeq R(T_1,\dots,T_n)$ on a $k(\beta) \simeq k(\beta')$. On considère les anneaux $(V'_i)_{0 \leqslant i \leqslant m-1}$ comme des anneaux de valuations de $k(\beta)$.

L'anneau V'_i est au-dessus de α_i dans $\mathrm{Spec}_r A$ car V'_i au-dessus de α'_i dans $\mathrm{Spec}_r A'$, $\dim V'_i = s_i$, $\mathrm{rg}.V'_i = m-i$, et $\mathrm{rg.\,rat}.V'_i = r_i$. ∎

Démonstration du théorème 2.2.1 :

Pour l'idéal premier $P_0 = (X_1,\dots,X_{n-d_0})$ de $R[X_1,\dots,X_n]$, il existe un cône premier α_0 tel que $\mathrm{supp}\,(\alpha_0) = P_0$ par exemple

$\alpha = (P_0, 0_{X_{n-d_0+1}+\dots+X_n+})$ On applique la proposition 2.2.4 à α_0 et c'est fini. ∎

Chapitre 3

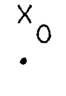
Constructions de places réelles dans le cas général

1. Triangulation des ensembles semi-algébriques :

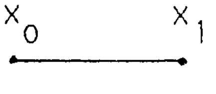
Rappels 3.1.1 : R est un corps réel clos.

i) Si $x_0, x_1, \dots, x_p$ sont p+1 points linéairement indépendants dans R^n (c.-à-d. le sous-espace affine qu'ils engendrent est de dimension p), le p-simplexe $[x_0, \dots, x_p]$ est l'ensemble des points $Z = (Z^1, \dots, Z^n)$ de R^n tels que $Z^i = \sum_{0 \leqslant j \leqslant p} \lambda_j x_j^{\,i}$ où $x_j = (x_j^{\,1}, \dots, x_j^{\,n})$, $\lambda_j \in R$, $\lambda_j \geqslant 0$ et $\sum_{0 \leqslant j \leqslant p} \lambda_j = 1$. Les $(\lambda_j)_{0 \leqslant j \leqslant p}$ sont appelés les coordonnées barycentriques de Z et $x_0, \dots, x_p$ sont les sommets du simplexe $[x_0, \dots, x_p]$.

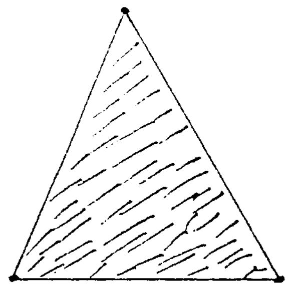
Exemples de simplexes :



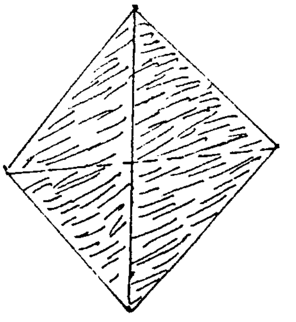
0-simplexe(point)



1-simplexe(segment)



2-simplexe(triangle)

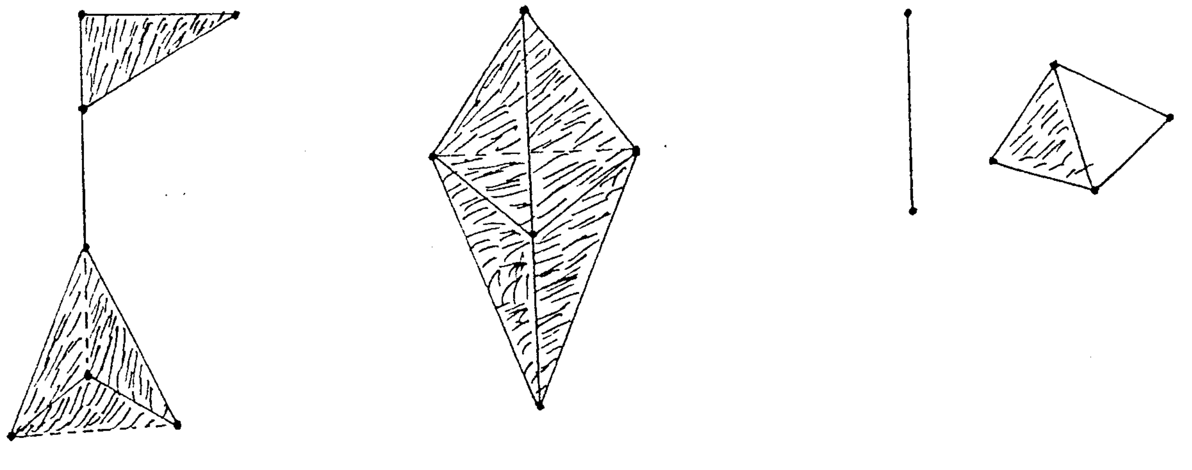


3-simplexe(tétraèdre)

ii) Une l-face du simplexe $[x_0,\ldots,x_p]$ est un l-simplexe $[x_{j_0},\ldots,x_{j_l}]$ avec $[x_{j_0},\ldots,x_{j_l}] \subset [x_0,\ldots,x_p]$. Si S est un simplexe, on notera S^0 la partie de S formée des points dont aucune des coordonnées barycentriques n'est nulle.

iii) Un complexe simplicial K de R^n est une union finie de simplexes $(S_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ tels que : l'intersection de deux de ces simplexes est soit vide, soit une face de chaucun des deux

Exemples :



Théorème 3.1.2 :

Tout ensemble semi-algébrique fermé, borné S de R^p est semi-algébriquement triangulable : il existe un complexe simplicial fini K de R^p, $K = \cup_{1\leq i\leq p} \sigma_i$ et un homéomorphisme semi-algébrique Ψ de K dans S.

Si de plus, $(S_j)_{j=1,\dots,q}$ est une famille finie de sous-ensembles semi-algébriques de S, on peut trouver une triangulation semi-algébrique Φ de $K = \cup_{1\leq i\leq p} \sigma_i$ dans S, telle que : pour chaque j, $1\leq j\leq q$ $\Phi^{-1}(S_j)$ soit réunion de certains σ_i^0. C'est ce qu'on appelle une triangulation simultanée de S et des S_j.

Démonstration : [B-C-R] chap. 9. ∎

Proposition 3.1.3 :

Soient V un ensemble algébrique irréductible de R^m et U un ouvert semi-algébrique de V. Si ρ est un homéomorphisme semi-algébrique de U dans U' contenu dans R^n et γ ordre total sur R(V) tel que $\gamma \in \widetilde{U}$ alors $k(\gamma)$ est isomorphe à $k(\widetilde{\rho}(\gamma))$ $(\widetilde{\rho} : \widetilde{U} \to \widetilde{U'})$.

Démonstration :

Soit $\mathcal{S}^0(U)$ l'anneau des fonctions semi-algébriques continues sur U. La fibre $\widetilde{\mathcal{S}^0}_{\widetilde{U},\gamma} = \lim_{\gamma\in\widetilde{U}} \mathcal{S}^0(U)$ est un anneau local de corps résiduel $k(\gamma)$ et son idéal maximal m est l'ensemble $\{g \mid g(\gamma)=0\}$ ([B-C-R] proposition 7.3.4). Or γ est un ordre total, donc $m = (0)$ et par conséquent $\widetilde{\mathcal{S}^0}_{\widetilde{U},\gamma} = k(\gamma)$. L'application f étant un homéomorphisme semi-algébrique,

$\mathfrak{Z}^0(U) \simeq \mathfrak{Z}^0(\rho(U))$ et donc $\widehat{\mathfrak{Z}^0}_{\widetilde{U},\gamma} \simeq \widehat{\mathfrak{Z}^0}_{\widetilde{\rho(U)},\widetilde{\rho}(\gamma)}$ et comme $\widehat{\mathfrak{Z}^0}_{\widetilde{U},\gamma} \simeq k(\gamma)$ et $\widehat{\mathfrak{Z}^0}_{\widetilde{\rho(U)},\widetilde{\rho}(\gamma)} \simeq k(\widetilde{\rho}(\gamma))$ alors $k(\gamma) \simeq k(\widetilde{\rho}(\gamma))$.

2 - Démonstration du théorème principal.

Théorème 3.2.1 :

Soit V une variété algébrique affine et irréductible sur un corps R réel clos.

Soient $A = R[V]$ son anneau des coordonnées, $K = R(V)$ son corps de fonctions et n le degré de transcendance de K sur R (= dim A).
Soit une chaîne d'idéaux premiers de A, $P_{m-1} \subset \ldots \subset P_1 \subset P_0$, P_i de dimension d_i pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, pour laquelle il existe une chaine de cônes premiers $(\beta_i)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$ de A avec $\mathrm{supp}(\beta_i) = P_i$.

Soient des éléments $f_1, \ldots, f_t$ de A et des entiers $(s_0, \ldots, s_{m-1})$, $(r_0, \ldots, r_{m-1})$ tels que, pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant m-1$

$$\beta_{m-1} \text{ contient } \Sigma K^2[f_1 \ldots f_t] \cap A$$

$$0 \leqslant s_0 < \ldots < s_{m-1} \leqslant n$$

$$0 < r_{m-1} < \ldots < r_0$$

$$s_i + r_i \leqslant n \ ; \ r_i \geqslant m-i \quad \text{et} \quad d_i \leqslant s_i .$$

Alors, il existe un ordre total γ sur $R(V)$ rendant $f_1,\ldots,f_t$ positifs et une chaîne d'anneaux de valuations $(V'_i)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$ réels γ-convexes dans $k(\gamma)$ contenant A tels que

$\dim V'_i = s_i$

$\text{rg. } V'_i = m-i$

$\text{rg. rat.} V'_i = r_i$

et V'_i centré en P_i dans A.

Démonstration :

Soit $U = \{x \in V \mid f_1(x) > 0,\ldots f_t(x) > 0\}$

Reg V l'ensemble des points non singuliers de V est un ouvert de Zariski de V, de dimension n ([B-C-R] prop.3.3.11). Soit $Z(P_i)$ l'ensemble des zéros de P_i dans V. On pose Cent U = $\overline{U \cap \text{Reg } V}$ l'ensemble des points centraux de U et S'_i l'ensemble des points centraux de $Z(P_i)$.

Soit $E = \text{Cent } U \cap (\cap S'_i)$. On a $\widetilde{E} = \widetilde{\text{Cent } U} \cap (\widetilde{\bigcap_{i=0}^{m-1} S'_i})$

Le cône premier $\beta_0 \in \widetilde{E}$ car $\Sigma K^2[f_1,\ldots,f_t] \subset \beta_0$ donc $\beta_0 \in \widetilde{\text{cent}(U)}$ et $\beta_0 \in \cap \widetilde{S'_i}$ car $\beta_i \to \beta_0$ et $\beta_i \in \widetilde{S'_i}$, donc $\widetilde{E} \neq \emptyset$ et par conséquent $E \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in E$, et B l'intersection d'une boule fermée de centre x_0 avec V.

D'après le théorème 3.1.2, il existe ρ homéomorphisme semi-algébrique et M complexe simplicial de R^p tel que :

$$\rho : M \to B$$

On peut choisir ρ de telle façon que $\rho^{-1}(x_0) = 0$,

$\rho^{-1}(B)$ contienne le semi-algébrique fermé de dimension n dans R^n (R^n identifié à $R^n \times \{0\}$)

$$S = \{ (x_1,...,x_n) / 0 \leq x_i \leq 1 \text{ et } \Sigma x_i \leq 1 \}$$

$\rho^{-1}(S'_i \cap B)$ contienne un simplexe de la forme

$$S_i = \{(x_1,...x_n) \mid x_1 = x_2 =...= x_{n-d_i} = 0 \quad 0 < x_j < 1 \text{ et } \Sigma x_{j'} < 1\}$$

pour tout i, $0 \leq i \leq m-1$ et $\rho^{-1}(\text{CentU} \cap B)$ contienne le simplexe ouvert élémentaire

$$S^0 = \{(x_1,...x_n) \mid 0 < x_i < 1 \text{ et } \Sigma x_{j'} < 1\} .$$

Soit α_0 cône premier de $R[X_1,...,X_n]$ tel que supp $\alpha_0 = (X_1,...X_{n-d_0})$ et $\alpha_0 \in \widetilde{S}_0$. D'après la proposition 2.2.4, il existe une chaîne de cônes premiers de $R[X_1,.......,X_n]$ et un ordre total β de $R(X_1,...,X_n)$ tels que : $\beta \in \widetilde{S^0}$, $\beta \to \alpha_{m-1} \to ... \to \alpha_1 \to \alpha_0$ et supp $\alpha_i = (X_1,...X_{n-d_i})$, et il existe $(V'_i)_{0 \leq i \leq m-1}$ chaîne d'anneaux de valuations β-convexes dans $k(\beta)$ contenant $R[X_1,...,X_n]$ de dimension s_i, de rang $m-i$, de rang rationnel r_i et V'_i au-dessus de α_i dans $\text{Spec}_r\, R[X_1,...,X_n]$ pour tout i, $0 \leq i \leq m-1$.

D'après la proposition 3.2.1 $k(\beta) \simeq k(\widetilde{\rho}(\beta))$. On peut donc considérer les anneaux $(V'_i)_{0 \leq i \leq m-1}$ comme des anneaux de valuation de $k(\widetilde{\rho}(\beta))$. Pour tout i, $0 \leq i \leq m-1$, V'_i étant β-convexe et ρ homéomorphisme on a V'_i $\widetilde{\rho}(\beta)$-convexe. V'_i est de rang $m-i$, de dimension s_i et de rang rationnel r_i.

On pose $\gamma = \widetilde{\rho}(\beta)$.

Reste à montrer que V'_i est au-dessus de P_i dans A. On va d'abord montrer que P_i est égal au $\mathrm{supp}(\tilde{\rho}(\alpha_i))$, puis que l'image du point spécial de V'_i dans $\mathrm{Spec}_r A$ est $\tilde{\rho}(\alpha_i)$ et comme V'_i est au-dessus de l'image de son point spécial dans $\mathrm{Spec}_r A$, ce sera fini.

On a $P_i = \mathrm{supp}\,\tilde{\rho}(\alpha_i)$. En effet comme $\mathrm{supp}\,\alpha_i = (X_1,\dots,X_{n-d_i})$, $\alpha_i \in \widehat{\rho^{-1}(S'_i \cap B)}$, or $\widehat{\rho^{-1}(S'_i \cap B)} = \tilde{\rho}^{-1}(\widehat{S'_i \cap B})$ (d'après proposition 7.2.8 [B-C-R]), donc $\tilde{\rho}(\alpha_i) \in \widehat{Z(\rho_i)}$. Par conséquent : $P_i \subset \mathrm{supp}\,\tilde{\rho}(\alpha_i)$, et comme $\dim \tilde{\rho}(\alpha_i) = d_i$ et $\dim P_i = d_i$ on a $P_i = \mathrm{supp}\,\tilde{\rho}(\alpha_i)$.

Soit $\mathcal{S}^0(S)$ l'anneau des fonctions semi-algébriques continues sur S.

On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & V'_i \arrow[r, "j"] & k(y) \\
R[X_1,\dots,X_n] \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"] & \mathcal{S}^0(S) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Les applications i et j sont les injections canoniques et si $h \in \mathcal{S}^0(S)$, $g(h)$ est le germe en y de h.

Toute fonction semi-algébrique continue sur S étant bornée par un polynôme de $R[X_1,\dots,X_n]$, on peut définir une fonction f' de telle façon que le diagramme suivant soit commutatif :

(*)

$$\begin{tikzcd}
& V'_i \arrow[r, "j"] & k(\gamma) \\
R[X_1,\dots,X_n] \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"] & \mathfrak{S}^0(S) \arrow[u, "f'"] \arrow[ur, "g"] &
\end{tikzcd}$$

Il y'a bijection entre $\mathfrak{S}^0(S)$ et $\mathfrak{S}^0(\rho(S))$; en effet soit

$$\begin{aligned} \Psi_1 : \mathfrak{S}^0(S) &\to \mathfrak{S}^0(\rho(S)) \\ h &\to h\circ\rho^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 : \mathfrak{S}^0(\rho(S)) &\to \mathfrak{S}^0(S) \\ h &\to h\circ\rho \end{aligned}$$

Ψ_1 et Ψ_2 sont réciproques l'une de l'autre.

En complétant le diagramme (*) ,on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& V'_i \arrow[r, "j"] & k(\gamma) \\
R[X_1,\dots,X_n] \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i"] & \mathfrak{S}^0(S') \arrow[u, "f'"] \arrow[ur, "g"] & \\
R[V] \arrow[r, "i'"] & \mathfrak{S}^0(\rho(S)) \arrow[u, "\Psi_2"', "\wr"] &
\end{tikzcd}$$

L'espace $\mathrm{Spec}_r\, \mathcal{S}^0(S)$ est homéomorphe à $\widetilde{S}$ car S est un fermé

(d'après [Ca-C] , prop.6). De même $\mathrm{Spec}_r\, \mathcal{S}^0(\rho(S))$ est homéomorphe à $\widetilde{\rho(S)}$.

Soient $\rho_1 : \mathrm{Spec}_r\, \mathcal{S}^0(S) \to \widetilde{S}$ et $\rho_2 : \mathrm{Spec}_r\, \mathcal{S}^0(\rho(S)) \to \widetilde{\rho(S)}$

On a les trois diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}_r\, \mathcal{S}^0(S) \arrow[rr, "\mathrm{Spec}\ i"] \arrow[dr, "\rho_1\ \wr"'] & & \mathrm{Spec}_r R\,[X_1,\dots,X_n] \\
& \widetilde{S} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}_r\, \mathcal{S}^0(\rho(S)) \arrow[rr, "\mathrm{Spec}\ i'"] \arrow[dr, "\rho_2\ \wr"'] & & \mathrm{Spec}_r A \\
& \widetilde{\rho(S)} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}_r\, \mathcal{S}^0(S) \arrow[r, "\mathrm{Spec}\ \Psi_2"] \arrow[d, "\rho_1\ \wr"'] & \mathrm{Spec}_r\, \mathcal{S}^0(\rho(S)) \arrow[d, "\wr\ \rho_2"] \\
\widetilde{S} \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & \widetilde{\rho(S)}
\end{tikzcd}$$

D'après ces trois diagrammes :

$\mathrm{Spec}_r i = \rho_1$, $\mathrm{Spec}_r i' = \rho_2$ et $\rho_2 o \mathrm{Spec}_r \Psi_2 = \tilde{\rho} o \rho_1$

donc $\mathrm{Spec}_r \Psi_2 = \mathrm{Spec}_r i'^{-} o \tilde{\rho} o \mathrm{Spec}_r i$ (**)

Soit δ_i le point spécial de V'_i. L'anneau V'_i étant au dessus de α_i dans $R[X_1,\dots X_n]$, on a $\mathrm{Spec}_r f(\delta_i) = \alpha_i = \mathrm{Spec}_r(i) o \mathrm{Spec}_r(f'_i)(\delta_i)$ (***)

$\mathrm{Spec}_r i' o \mathrm{Spec}_r \Psi_2 o \mathrm{Spec}_r f'(\delta_i) = \tilde{\rho} o \mathrm{Spec}_r i o \mathrm{Spec}_r f'(\delta_i)$ (d'après (**))

$= \tilde{\rho}(\alpha_i)$ (d'après (***))

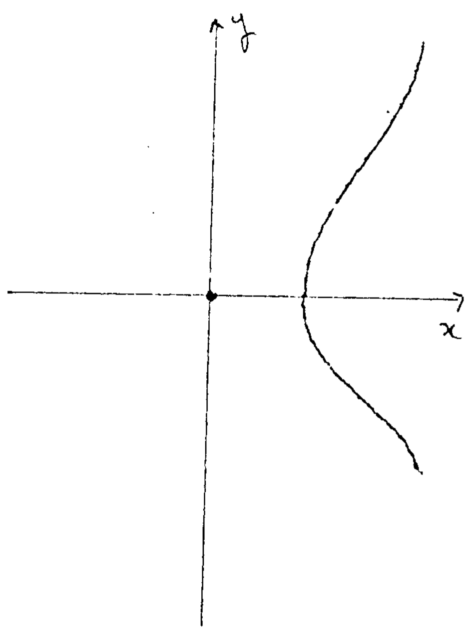
donc l'image du point spécial δ_i de V'_i est au dessus de $\tilde{\rho}(\alpha_i)$. ■

Remarque :

Les hypothèses d'existence de la chaîne de cônes premiers (β_i) telle que $\mathrm{supp}(\beta_i) = P_i$ et $\Sigma K^2[f_1,\dots,f_t] \subset \beta_i$ sont nécessaires pour obtenir les conclusions du théorème comme le prouvent les exemples suivants.

Exemple 1 :

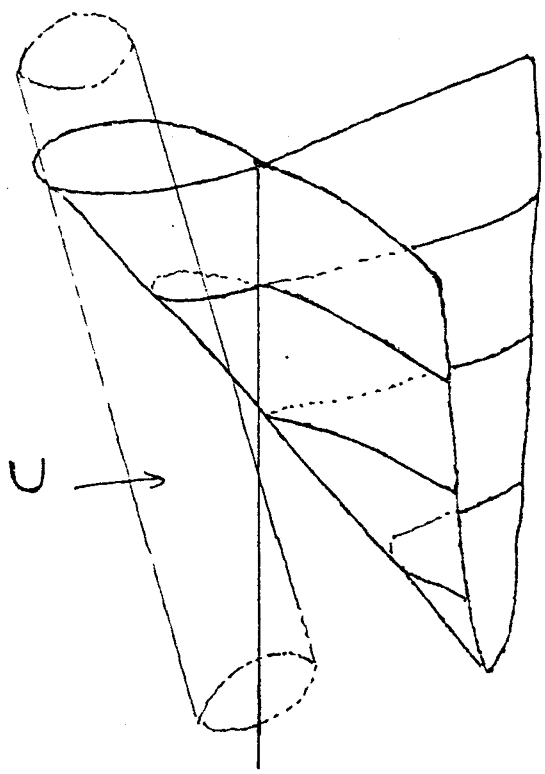
Soit la cubique d'équation $x^2+y^2-x^3=0$



Si on prend $P_0 = (X,Y)$ et $P_1 = (0)$, il n'existe pas de cônes premiers α_1 et α_0 tels que $\alpha_1 \to \alpha_0$, $\mathrm{supp}(\alpha_1) = P_1$ et $\mathrm{supp}(\alpha_0) = P_0$ (c-à-d $\alpha_0 = 0$) car le point isolé (0,0) n'a pas de générisation, or une conséquence du théorème 3.2.1 est l'existence d'une telle chaîne de spécialisations.

Exemple 2 :

Soit le parapluie d'équation $x^3+zx^2-y^2 = 0$ dont le "manche" est l'axe des z.



Soient $P_0 = (X,Y)$ l'idéal du" manche" et $P_1 = (x^3+zx^2-y^2)$.

On prend $f = 1-(4x+2z+8/5)^2-y^2+(2x+z+4/5)^2$ telle que

$U = \{ (x,y\ z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(x,y,z) > 0 \}$ est l'intérieur du cylindre d'axe la droite d'équation $x = -z/2 - 2$ et $y = 0$ et de rayon 1

L'ouvert U rencontre une partie du "manche" et une partie de la "toile". Les idéaux P_0 et P_1 sont donc $\Sigma K^2[f] \cap A$-convexes. D'autre part il existe β_0 et β_1 deux cônes premiers en dehors de $\widetilde{U}$ tels que $\beta_1 \to \beta_0$, $\mathrm{supp}(\beta_1) = P_1$ et $\mathrm{supp}(\beta_0) = P_0$, par contre il n'existe pas de cônes premiers γ_0 et γ_1 contenant $\Sigma K^2[f] \cap A$ et tels que $\gamma_1 \to \gamma_0$, $\mathrm{supp}(\gamma_0) = P_0$ et $\mathrm{supp}(\gamma_1) = P_1$ ce qui contredit la conclusion du théorème 3.2.1.

Remarquons qu'on ne peut pas trianguler comme dans la preuve du théorème 3.2.1.

On va maintenant démontrer le théorème principal.

Théorème 3.2.2 :

Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème3.2.2, il existe un ordre total γ sur R(V) et une chaîne d'anneaux de valuations $(V_i)_{0 \leqslant i \leqslant m-1}$ réels γ-convexes dans R(V) telle que : dim $V_i = s_i$; rang de $V_i = m-i$; rang rationnel de $V_i = r_i$ et V_i centré en P_i dans A.

Démonstration :

Soient γ l'ordre total sur R(V) et $(V'_i)_{0 \leqslant i \leqslant m-1}$ la chaîne d'anneaux de valautions γ-convexes construites dans le théorème 3.2.2. On pose $V_i = V'_i \cap R(V)$. L'anneau V_i a même dimension, rang et rang rationnel que V'_i (d'après prop.1.4.11). ∎

Bibliographie

[A-R] M.E ALONSO et M.-F. ROY, Real strict localizations, Math. Z (1986) (à paraître).

[An_1] C. ANDRADAS, Thèse "valoraciones reales en cuerpos reales de funciones", Universidad Complutense de Madrid (1982).

[An_2] C. ANDRADAS, Real places in functions fields, Comm. algebra 1315, 1151-1169 (1985).

[An_3] C. ANDRADAS, Specialization chains of real valuation rings, Preprint Madrid (1985).

[B-C-R] J. BOCHNAK, M. COSTE et M.-F. ROY, Géométrie Algébrique Réelle, Springer Verlag (1986) (à paraître).

[Be] E. BECKER, Valuations and real places in the theory of formally real fields, Lecture notes in Math. 959, Springer Verlag, 1-40.

[Br_1] G.W. BRUMFIEL, Partially ordered rings and semi-algebraic geometry, Lecture notes ser. 37 London-Math. Soc. (1979).

[Br_2] G.W. BRUMFIEL, Real valuations and ideals, Lecture notes in math. 959, Springer Verlag 54-97.

[Bro-Sc] L. BROCKER et H.W. SCHULTING, valuations of function fields form the geometrical point of View, Preprint (1984).

[C-R] M. COSTE et M.-F. ROY, La topologie du spectre réel, Contemp. Math. 8, A.M.S., 27-59 (1982).

[Ca-C] M. CARRAL et M. COSTE, Normal spectral spaces and their dimensions, Journal of pure and Applied Alg. 30, 227-235, (1983).

[K-P] F.V. KUHLMANN et A. PRESTEL, On places of algebraic function fields, Universität Konstanz (1984).

[M-Sh] S. MACLANE et O. SCHILLING, zero dimensional branch of rank one on algebraic varieties, Ann. of Math. 40, 507-520, (1939).

[Ro] R. ROBSON, Nash wings and real prime divisors, Math. Ann. 273, 177-190 (1986).

[Z_1] O. ZARISKI, The resolution of the singularities of an algebraic surface, Ann. of Math. 40, 639-689 (1939).

[Z_2] O. ZARISKI, Fondations of a general theory of birational correspondance. Trans. Amer. Math. Soc. 53, 490-542 (1943).

[Z-S] O. ZARISKI et P. SAMUEL, Commutative algebra, Vol. II Van Nostrand (1960).